LES ALGORITHMES ARITHMETIQUES

L'élève sera capable de manipuler des algorithmes permettant de résoudre des traitements de calcul :

A. Le calcul du PGCD
B. Le calcul du PPCM
C. Les nombres premiers
D. Les nombres parfaits, nombres amis
E. La décomposition en facteurs premiers
F. Le factoriel d'un entier

Mise en situation :

Situation 1 :

Un fleuriste a 72 fleurs rouges et 24 fleurs jaunes. Il veut former des bouquets contenant tous le même de nombre de fleurs rouges et le même nombre de fleurs jaunes
Aider ce fleuriste à former le maximum de bouquets possible.

Situation 2 :

Transformer une fraction sous sa forme irréductible $\frac{8}{12} =$ $\frac{68}{112} = \frac{17}{28}$

Situation 3 :

Med et Ali sont deux frères. Med visite sa maman tous les 6 jours alors que Ali tous les 8 jours.
Si Med et Ali sont allés visiter ensemble sa maman aujourd'hui, dans combien de jours vont-ils de nouveau visiter sa maman le même jour ?

A. CALCUL DU PGCD :

a) *Définition :*

Le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers est le plus grand entier permettant de diviser ces deux entiers.

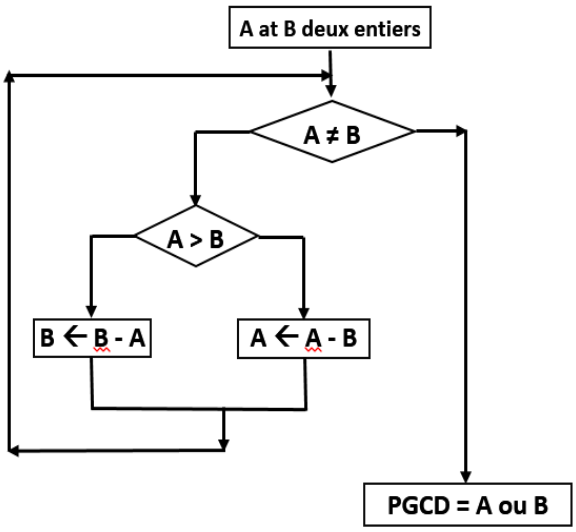
b) Méthodes de calcul de PGCD :

- **Méthode de différence**

Principe :

si a=b alors PGCD(a,b) = a (ou b)
Sinon PGCD(a,b) = PGCD(a-b,b) si a > b
Sinon PGCD(a,b) = PGCD(a,b-a)

Exemple :



Essayons cette méthode sur l'exemple suivant :

a = 22 et b = 6

PGCD (22, 6)	= PGCD (22-6, 6) = PGCD (16, 6)	Car 22 > 6
	= PGCD (16-6, 6) = PGCD (10, 6)	Car 16 > 6
	= PGCD (10-6, 6) = PGCD (4, 6)	Car 10 > 6
	= PGCD (4, 6-4) = PGCD (4, 2)	Car 4 < 6

= PGCD (4-2, 2) = PGCD (2, 2)   Car 4 > 2

= 2   Car 2 = 2

- **Algorithme d'EUCLIDE**

Rappeler la division euclidienne :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

a est appelé le diviseur

b est appelé le diviseur

q est appelé le quotient

r est appelé le reste

On a également $a = b \times q + r$

Q ← A Div B
R← A Mod B

Théorème Soit deux entiers a et b, pour connaître le pgcd(a, b), on effectue les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 & \\ b &= r_0q_1 + r_1 & \text{division de } b \text{ par } r_0 \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2 & \text{division de } r_0 \text{ par } r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 & \text{division de } r_1 \text{ par } r_2 \\ \ldots & \quad \ldots & \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul correspond au pgcd(a, b)

Exemples :

- **Déterminons le pgcd(945,882)**

On effectue les divisions suivantes :

a = b * q + r

945 = 882 × 1 + 63

882 = 63 × 14 + 0

Donc pgcd(945, 882) = 63

- **Déterminons le pgcd(935, 561)**

On effectue les divisions suivantes :

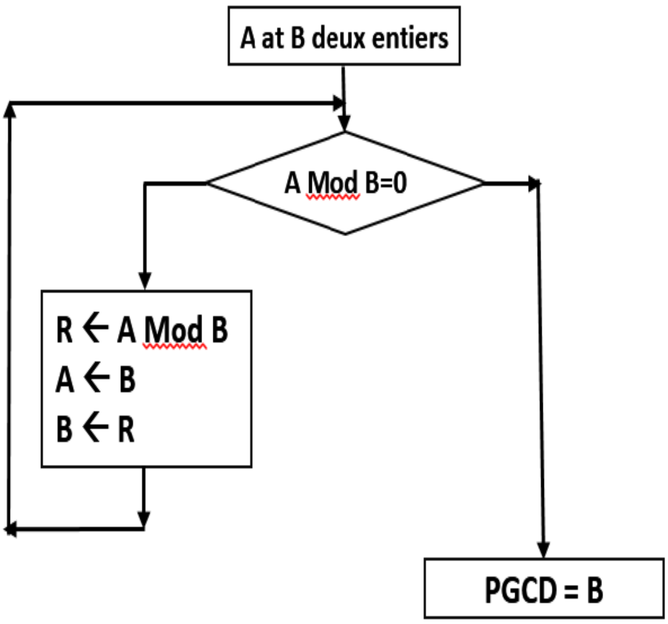
a = b * q + r

935 = 561 × 1 + 374

561 = 374 × 1 + 187

374 = 187 × 2 + 0

Donc pgcd(935, 561) = 187



Activité 1 : Déduire les deux algorithmes des fonctions de calcul de PGCD

Algorithme de la fonction PGCD-DIFF

Fonction PGCD_DIFF (A, B : Entier) **: Entier**

Début

    Tantque (A <> B) **Faire**

        Si (A > B) **Alors**

            A ← A – B

        Sinon

            B ← B – A

        FinSi

    Fin Tantque

    PGCD1 ← A

Fin

Algorithme de la fonction PGCD-EUCLIDE

Fonction **PGCD_EUCLIDE (A,B : entier) : entier**

Début

    Tantque (A Mod B <> 0) **Faire**

        r ← A Mod B

        A ← B

        B ← r

    Fin Tantque

    PGCD2 ← B

Fin

Activité 2 : ***Ecrire un programme qui permet de saisir deux entiers A et B strictement positifs, puis calculer et afficher leur PGCD.***

c) Algorithmes du problème :

Algorithme du programme principal :

0) **Début** Calcul_PGCD
1) **Saisie** (A, B)
2) P ← PGCD(A, B)
3) **Ecrire** ("PGCD (", A, ", ", B, ") = ", **P**)
4) **Fin** Calcul_PGCD

B. CALCUL DU PPCM :

a) Définition :

Le PPCM (**P**lus **P**etit **C**ommun **M**ultiple) de deux entiers est le plus petit entier multiple à la fois de ces deux entiers

Activité : *Ecrire un programme qui permet de saisir deux entiers A et B strictement positifs, puis calculer et afficher leur PPCM.*

b) Méthode 1

Pour **A = 64** et **B = 3**, on procède comme suit pour calculer le PPCM :
Pour calculer le PPCM des deux entiers m et n, nous allons appliquer l'algorithme formel suivant :

1. **Etape 1 :** Déterminer Max(m,n) et Min(A, B)
2. **Etape 2 :** Chercher les multiples successifs de Max
3. **Etape 3 :** Répéter l'étape 2 jusqu'à avoir le 1er multiple de Max qui est aussi un multiple de Min

- Il s'agit donc d'un traitement répétitif à condition d'arrêt, la boucle à utiliser est Tant que … Faire
- Dans cette boucle, nous devons prévoir la recherche d'un multiple du plus grand de m et de n.

Exemple de Tournage à la main :

A=64 et B=3 ⇒ Max =   et Min =

Multiple_Max									
Multiple_Max Mod Min =0									

c) *Algorithme de la fonction PPCM :*

Fonction PPCM (A, B: Entier) **: Entier**

Début

  Si (A > B) **Alors**

    Max ← A

    Min ← B

  Sinon

    Max ← B

    Min ← A

  Finsi

  Multiple_Max ← Max

  Tantque (Multiple_Max **MOD** Min ≠ 0) **Faire**

    Multiple_Max ← Multiple_Max + Max

  Fin Tantque

  PPCM ← Max

Fin

d) *Méthode 2 : À l'aide du PGCD*

Dans le cas où aucun des deux entiers A et B n'est nul, le plus petit commun multiple peut être calculé en utilisant le plus grand commun diviseur (ou PGCD) de A et B :

$$\boldsymbol{PPCM(A,B)} = \frac{\boldsymbol{A * B}}{\boldsymbol{PGCD(A,B)}}$$

Remarque : il y a une autre méthode pour le PPCM, par addition. Voilà l'algorithme :

```
Fonction PPCM(A,B: Entier):Entier
Début
  a1 ← A
  b1 ← B
  Tantque (a1<>b1) Faire
    Si (a1<b1) Alors
      a1 ← a1+A
    Sinon
      b1:=b1+B;
    FinSi
  Retourner a1
Fin
```

C. LES NOMBRES PREMIERS :

a) *Définition :*

Un nombre est dit premier s'il ne se divise que par 1 eu lui-même, exemple 7.

__Activité__ : Ecrire un programme qui permet de saisir un entier A strictement positif, puis vérifier s'il est premier ou non et afficher le résultat.

b) Exemple

Vérifier 17 :

Vérifier 15 :

c) Algorithme de la fonction Premier :

Fontction Premier (A : Entier) **: Booléen**

Début

i ← 2

Verif ← Vrai

Tant que (i <= A div 2) et (verif = Vrai) **Faire**

Si (A **Mod** i = 0) **Alors**

Verif ← Faux

Sinon

i ← i + 1

Finsi

Fin Tantque

Retourner Verif

Fin

D. LE CALCUL DU FACTORIEL :

a) Définition :

La factorielle d'un entier **n** donné est le produit de tous les entiers de l'intervalle [1,n]. Le factoriel de **n** est noté **n!** .

n ! = n x (n-1) x (n-2) x … x 3 x 2 x1

b) Exemple

Le factoriel de 7 est égal à 7 ! = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040 :

c) Exercice :

……………………………………………………………………