L.S.H.B.Dahmani **Devoir de synthèse n°2** 4tec$_{1+2}$

M^r : W-Adel le 16-03-2024

M^r :H-Mourad

Exercice n°1 :(5*points*)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

A(1,0,-1) ; B(1,3,5) ; C(-7,2,2) et H(-1,4,3) .

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est :$x-2y-2z+15=0$.

c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC).

2) On considère l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que: $x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$

a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R .

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AH]$.

c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC).

3) Soit $J(0,0,1)$.

a) Vérifier que J appartient à S .

b) Calculer la distance du point I à la droite (AJ).

c) En déduire que la droite (AJ) est tangente à S .

d) Donner une représentation paramétrique de la droite (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC).

Exercice n°2 :($\mathbf{5.5}$*points* $\mathbf{= 0.75+0.75+0.25+0.5+0.75+0.25+0.5+0.5+0.5+0.75}$)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=e^{-x+1}-e^{x-3}$ .on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans la **figure1** de l'annexe on a tracé la courbe (C')de la fonction f' , dérivé de f , qui admet une seule tangente horizontale celle au point de coordonnées $(2,-2e^{-1})$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ .Interpréter les résultats .

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ .Interpréter les résultats .

2) a) Déterminer $f'(x)$ *pour* $x\in$ IR .

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Calculer $f(2)$ et déduire le signe de f sur IR.

3) a) Montrer que pour tout $x \in$ IR , on a $f''(x) = f(x)$.

b) Déduire que le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

c) Montrer que la tangente T à la courbe (C) au point I a pour équation cartésienne :

$y = -2e^{-1}x + 4e^{-1}$ et vérifier que le point de coordonnée $(3, -2e^{-1})$ est un point de T .

4) a) Montrer que la courbe (C) est au dessus de la courbe (C') .

b) Tracer la droite T et la courbe (C) .

Exercice n°3 :($5.5 \boldsymbol{points} = \mathbf{0.5 \times 11}$)

I- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)lnx$.

1) **a**. Montrer que $g'(x) = 2\frac{x-1}{x} + lnx$

b. En déduire que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$ et

si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$

2) **a.** Etudier les variations de g .

b.En déduire que pour tout réel x strictement positif , on a $g(x) \geq 1$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + xlnx - (lnx)^2$.

1) **a**. Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudier les variations de .

b. En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera .

2) **a**. Ecrire une équation cartésienne de la tangente(T) à la coube (Cf) au point d'abscisse 1 .

b.Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - 1 - lnx$.

En déduire le signe de h(x) .

c. Montrer que : $f(x) - x = (lnx - 1)h(x)$ et en déduire la position relative de la courbe (Cf) par rapport à la tangente (T) .

d. Tracer dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **(figure2 de l'annexe)** la courbe (Cf) et celle de (Cf^{-1}).

Exercice n°4 :$(4points = 0.25 + 0.75 + 0.5 + 0.5 + +0.5 + 0.5 + 0.75 + 0.25)$

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher .

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires .
- L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires .

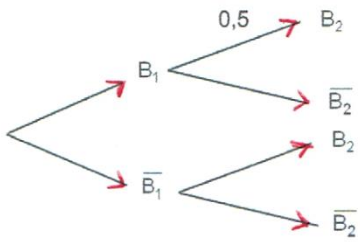
Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et la mettre dans U_2 , puis tirer au hasard une boule de U_2 et la mettre dans U_1 .

Soient les événements :

B_1 : « la boule tirée de U_1 est blanche » et B_2 : « la boule tirée de U_2 est blanche ».

1) a) Vérifier que $(B_2/B_1) = 0.5$.

b) Recopier et compléter l'arbre pondérée ci-dessous associé à cette épreuve .



c) Montrer que $P(B_2) = 0.4$

d) Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche , quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 est blanche ?

2) Soit l'événement E: « la boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est noire » . Vérifier que $P(E) = 0.3$

3) Calculer la probabilité de l'évènement F: « A la fin de l'épreuve la répartition des boules dans les deux urnes reste inchangée »

4) On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre des boules noires restant dans l'urne U_2 à la fin de l'épreuve .

a) Déterminer la loi de probabilité de .

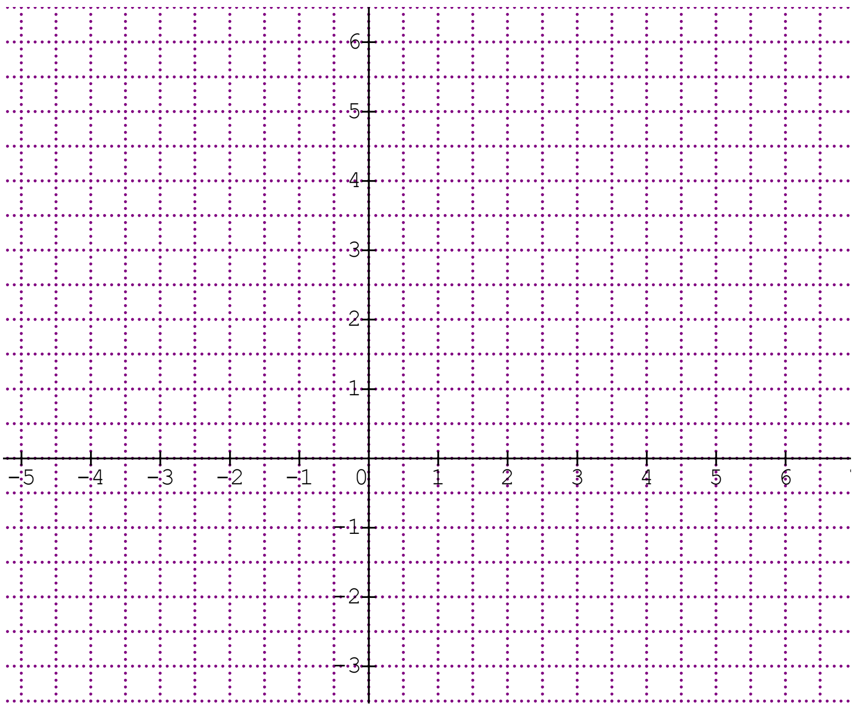
b) Calculer l'espérance mathématique de .

Bon travail

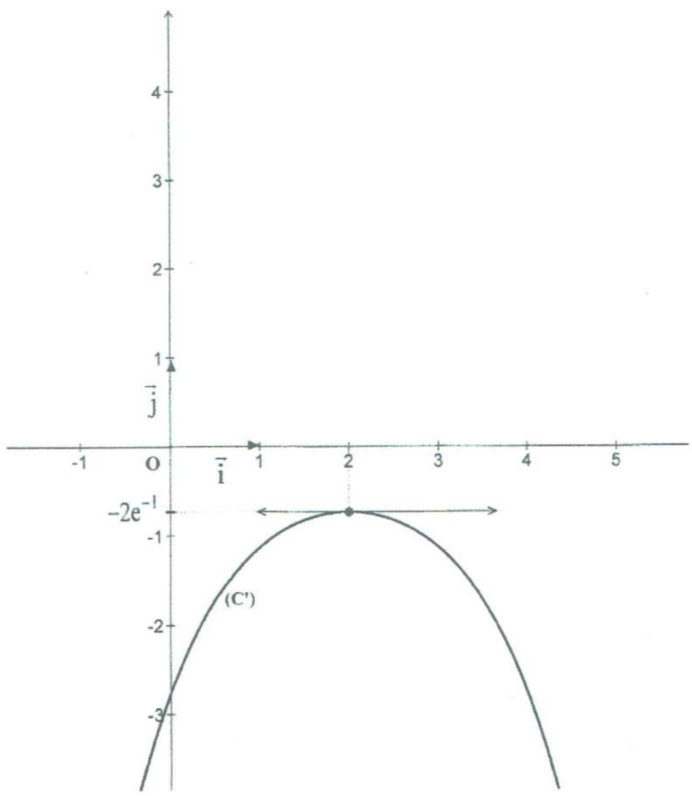
Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : **Prénom :** **n° :** **Classe :**

<u>Exercice n°3 : figure2</u>



<u>Exercice n°2 : figure1</u>



CDS$_2$

Exercice 1 : 5 points

$A(1,0,-1)$; $B(1,3,5)$; $C(-7,2,2)$, $H(-1,4,3)$

1) a) $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-6\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix}$ 0,75

1) b) $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$: vecteur normal à (HBC) donc

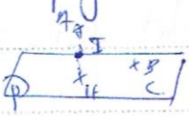
$(HBC) : 5x-10y-10z+d=0$

Comme $B\in(HBC)$ ⟹ $5-30-50+d=0 \Leftrightarrow d=75$

$(HBC) : 5x-10y-10z+75=0$ ⟹

$\boxed{(HBC) : x-2y-2z+15=0}$ 0,5

1) c) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$ colinéaires et comme $H\in P$ donc H projeté orth de A sur (HBC) 0,5



2) $S : x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$

a) $x^2+(y-2)^2-4+(z-1)^2-1+1=0$

$\Leftrightarrow S : x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2^2$ 0,5

$\boxed{S(I,R) \text{ avec } I(0,2,1) \text{ et } R=2}$

2) b) le milieu de $[AH]$ a pour coordonnées

$\left(\frac{1+-1}{2} ; \frac{4+0}{2} ; \frac{-1+3}{2}\right) = (0,2,1) = I$ 0,25

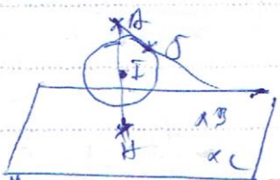
2) c) $d(I,(HBC)) = \frac{|0-4-2+15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3$

donc $\boxed{S\cap(HBC)=\emptyset}$ 0,25

3) soit $J(0,0,1)$

a) $0+0+1+0-2+1=0$ donc $\boxed{J\in S}$ 0,25

3) b)



$d(I,(AJ)) = \frac{\|\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{AJ}\|}{\|\overrightarrow{AJ}\|} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$ 0,5

3) c) Comme $d(I,(AJ)) = 2 =$ Rayon sphère.

donc $\boxed{(AJ) \text{ tg à } (S)}$ 0,5

3) d) $(AJ) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = -1+2t \end{cases}$ $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ 0,5

si $M(x,y,z)\in(AJ)\cap(HBC)$ alors

$1-t+2\times0-2(-1+2t)+15=0$

$1-t+2-4t+15=0$

$-5t+18=0 \Leftrightarrow t=18/5$

d'où $\boxed{M\left(\frac{-13}{5} ; 0 ; \frac{31}{5}\right)}$ 0,5

Exercice n° 2 : 5,5 points

$f(x) = e^{-x+1} - e^{x-3}$

1)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+1} - e^{x-3} = -\infty$; $e^{-x+1} \to 0$, $e^{x-3} \to +\infty$ — 0,75

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{e^{-x+1} - e^{x-3}}{x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{e^{-x+1}}{x} - \frac{e^{x-3}}{x} = -\infty$; $\frac{e^{-x+1}}{x} \to 0$, $\frac{e^{x-3}}{x} \to +\infty$

$\boxed{\to \text{Bp. } (Oy)}$

b) $\lim\limits_{-\infty} e^{-x+1} - e^{x-3} = +\infty$; $e^{-x+1} \to +\infty$, $e^{x-3} \to 0$ — 0,75

$\lim\limits_{-\infty} \frac{e^{-x+1} - e^{x-3}}{x} = \lim\limits_{-\infty} \frac{e^{-x+1}}{x} - \frac{e^{x-3}}{x} = -\infty$; $\frac{e^{-x+1}}{x} \to -\infty$, $\frac{e^{x-3}}{x} \to 0$

$\boxed{\text{Bp. de direction } (Oy)}$

2)a) $f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3}$ — 0,25

2)b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
f	$+\infty$		0		$-\infty$

0,5

2)c) $f(2) = e^{-1} - e^{-1} = 0$ — 0,25

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

0,5

3)a) $f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3}$

$f''(x) = e^{-x+1} - e^{x-3} = f(x)$ — 0,25

3)b) $f''(x) = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

0,5

f'' s'annule en 2 en changeant de signe donc $I(2,0)$ est un point d'inflexion de C_f.

3)c) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$= -2e^{-1}(x-2) + 0$

$\boxed{T : y = -2e^{-1}x + 4e^{-1}}$ — 0,25

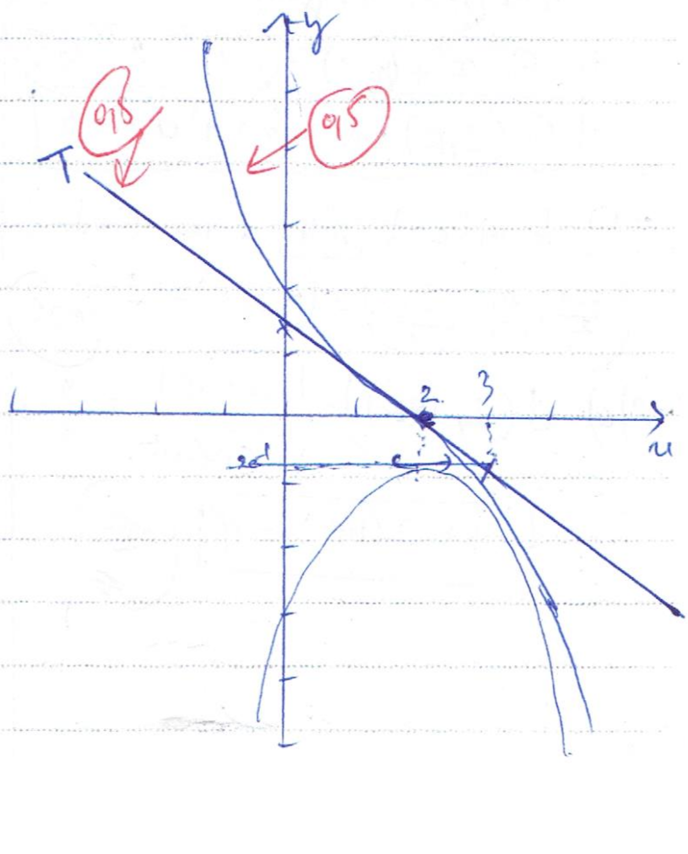
• $(3, -2e^{-1}) \in T$? — 0,25

$-2e^{-1} \times 3 + 4e^{-1} = -2e^{-1}$ donc $\boxed{(3, -2e^{-1}) \in T}$

4)a) $f(x) - f'(x) = e^{-x+1} - e^{x-3} - (-e^{-x+1} - e^{x-3})$

$= 2e^{-x+1} > 0$

donc C_f / $C_{f'}$ — 0,25



Exercice n°3 : 5,5 points

I $g(x) = x + (x-2)\ln x \; ; \; x \in]0, +\infty[$

1)a) g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1 + \ln x + \dfrac{x-2}{x}$

$g'(x) = \dfrac{x + x - 2}{x} + \ln x = \boxed{2\dfrac{x-1}{x} + \ln x}$ 0,5

1)b) si $x > 1$ $x - 1 > 0$ et $\ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$

si $0 < x < 1$: $x - 1 < 0$ et $\ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$ 0,5

2)a)

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	1	↗	

0,25

$\lim\limits_{0^+} x + x\ln x - 2\ln x = +\infty \; ; \; g(1) = 1$

2)b) d'après T.V $\forall x \in]0, +\infty[\; ; \; g(x) \geq 1$ 0,25

II $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$; f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

1)a) et $f'(x) = \ln x + 1 - \dfrac{2\ln x}{x}$

$= \dfrac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$ 0,5

$= \dfrac{x + (x-2)\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

d'où T.V de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0,25

1)b) f continue, strict ↗ sur $]0, +\infty[\to f$ bijective de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ 0,25

2)a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= \dfrac{g(1)}{1}(x-1) + f(1)$

$= x - 1 + 1 = x.$

$\boxed{T : y = x}$ 0,5

2)b) $h(x) = x - 1 - \ln x \; ; \; h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}.$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	↘	0	↗	

0,5

h admet un minimum absolu en 1 qui vaut 0 donc $\forall x \in]0, +\infty[$; $h(x) \geq 0$ 0,25

2)c) $f(x) - x = 1 + x\ln x - \ln^2 x - x$

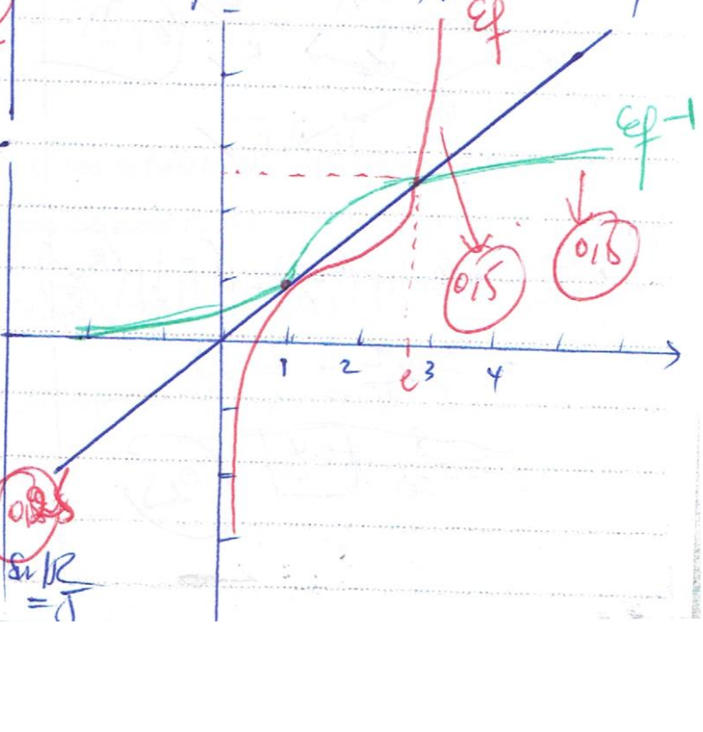
$= (\ln x - 1)\underbrace{(x - 1 - \ln x)}_{\geq 0}$ 0,25

si $x > e$, $f(x) > x$; $\mathscr{C}_f / T$

si $0 < x < e$ $f(x) < x$ $T / \mathscr{C}_f$. 0,5

si $x = 1$. $f(x) = x$: $A(1, 1)$ point commun à $\mathscr{C}_f$ et T

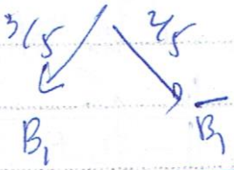
si $x = e$. $f(x) = x$; $B(e, e)$ point commun à $\mathscr{C}_f$ et T



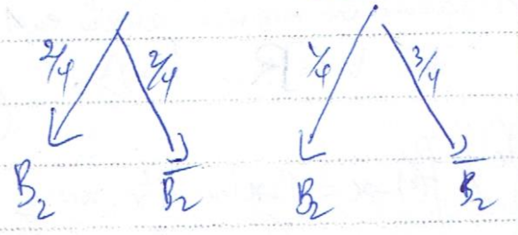
Exercice n°4: 4 points

$U_1 : \begin{cases} 3B \\ 2N \end{cases}$; $U_2 : \begin{cases} 1B \\ 2N. \end{cases}$

arbre de choix: $U_1 : 3B$ et $2N$



$U_2 = 2B, 2N$ $\quad$ $U_2 = 1B, 3N$:

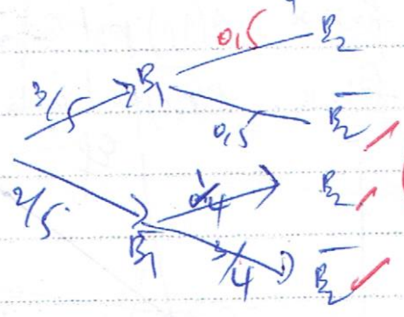


1)a) d'après L'arbre $p\left(B_2/B_1\right) = \frac{2}{4} = 0{,}5$ $\quad$ 0,25

2ème Méthode:

$$p\left(B_2/B_1\right) = \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

1)b)



0,75

1)c) $p(B_2) = p(B_1).p\left(B_2/B_1\right) + p(\overline{B_1}).p\left(B_2/\overline{B_1}\right)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{8}{20} = \boxed{0{,}4}$$

0,5

1)d) $p\left(B_1/B_2\right) = \dfrac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \dfrac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}}{\frac{8}{20}} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$ $\quad$ 0,5

2) $p(B_1 \cap \overline{B_2}) = \cancel{P(1)}\ p(B_1).p\left(\overline{B_2}/B_1\right)$ $\quad$ 0,5

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = \boxed{0{,}3}$$

3) $p(F) = p(B_1 \cap B_2) + p(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

0,5

4) $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$

$p(X=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

$p(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$ $\quad$ 0,75

$p(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

0,25

$$E(X) = \frac{6}{20} + \frac{24}{20} + \frac{6}{20} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = \boxed{1{,}8}$$