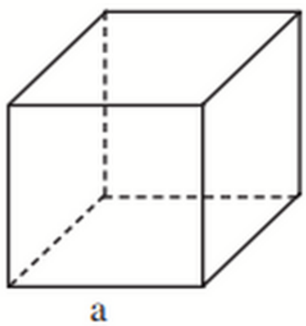
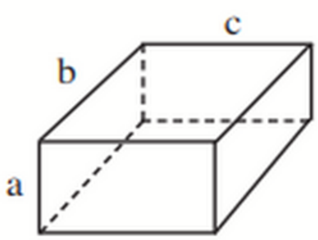
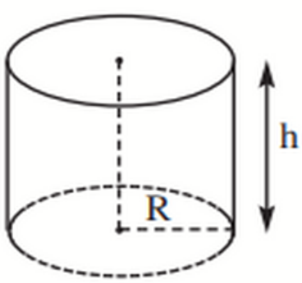
Section plane d'un solide

1 Solides usuels

1.1 Cube-Parallèle épipède-Cylindre :

Activité : Compléter le tableau ci-dessous

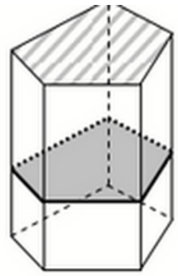
Solide	Nombre de faces	Nombre de sommets	Volume	Aire
Cube. 				
Parallélépipède droit. 				
Cylindre. 				

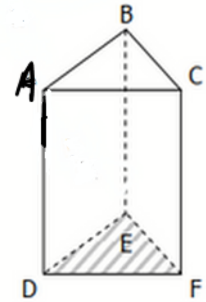
Exercice 1

Lorsqu'on multiplie par 4 l'arête d'un cube, son volume augmente de $6540,849$ cm^3. Calculer le volume initial du cube.

1.2 Prisme droit :

Définition
Un prisme droit est un solide dont les faces latérales sont des rectangles et les bases sont des polygones superposables.





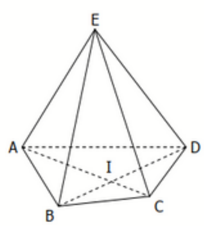
Volume d'un prisme droit :
Le volume V d'un prisme droit est $V = Bh$, où B désigne l'aire de sa base et h sa hauteur.

Exercice 2

Le solide $ABCDEF$ ci-dessous est un prisme droit des bases les triangles rectangles ABC et EFD. Calculer son volume sachant que $a = 3,2$ cm, $b = 1,8\ cm$ et $h = 4\ cm$.

1.3 Pyramide :

Le volume V d'une pyramide est $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire de sa base et h est sa hauteur.

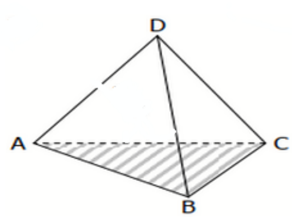


Exercice 3

Calculer le volume de la pyramide $ABCDE$ de sommet E et de base le carré $ABCD$ tel que $AB = 8.5cm$ et $h = 12.3cm$.

1.4 Tétraèdre :

Définition un tétraèdre est un solide dont toutes ses faces sont des triangles.



Retenons Le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante à cette base.

Exercice 4

Quelle est l'aire de la base d'un tétraèdre de volume égal à 24cm^3 et de hauteur égale à $5,5$cm ?

1.5 Sphère :

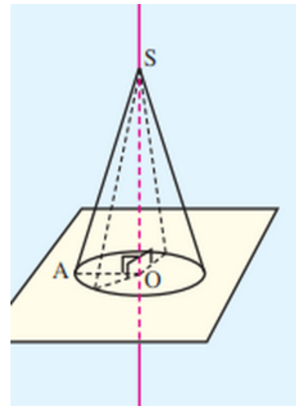
Définition Soit O un point de l'espace et R un réel strictement positif.
La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tel que $OM = R$.
Une sphère de rayon R a une aire égale à $4\pi R^2$.
Définition Soit O un point de l'espace et R un réel strictement positif.

La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tel que $OM \leq R$.
Une boule de rayon R est de volume égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 5

Une sphère a un diamètre de 30cm. Déterminer son aire et son volume.

1.6 Cône de révolution :



Définition En faisant tourner un triangle SAO rectangle en O autour de la droite (SO), on obtient un cône de révolution.
On dit que $[SA]$ est une génératrice du cône et $[OS]$ est la hauteur du cône.

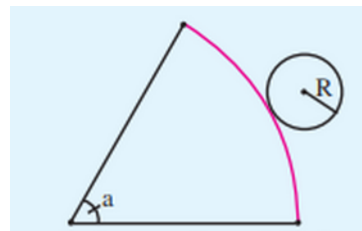
propriétés

- Le volume V d'un cône de révolution est $V = \frac{1}{3}Bh$,

où B est l'aire de sa base et h sa hauteur.

- Dans le développement d'un cône de révolution, le périmètre de la base du cône est égal à la longueur de l'arc de rayon une génératrice du cône.

La mesure de l'angle a en degré est $a = \dfrac{360 \times R}{l}$



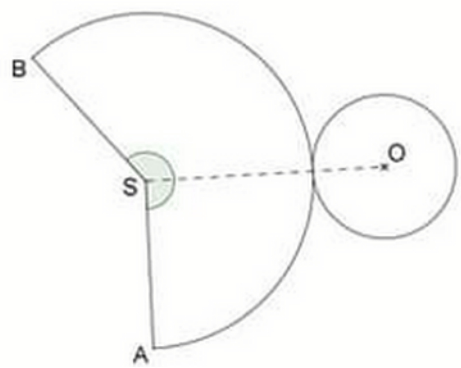
l = longueur d'une génératrice

Exercice 6

Un cornet de glace est formé par un cone de révolution de hauteur 10 cm et d'une demi boule de même rayon que la base du cône qui est 3 cm.
Sachant que le cône est rempli de glace, Déterminer la quantité de glace nécéssaire pour confectionner un cornet.

Exercice 7

On a représenté le patron d'un cône de révolution.
Les génératrices mesurent 5 cm.
Le disque de base de centre O, a pour rayon $R = 3$ cm.



1. Quelle est la hauteur du cône ?
   Déterminer sa mesure.
2. Calculer le volume de ce cône.
3. Calculer la valeur exacte du périmètre du grand disque de centre S ayant une génératrice pour rayon.
4. Calculer la valeur exacte du périmètre du disque de base.
5. Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc $\left[\widehat{AB}\right]$.
6. On admet qu'il y a une proportionnalité entre la longueur de l'arc $\left[\widehat{AB}\right]$ et la mesure de l'angle $\widehat{ASB}$. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ASB}$ en utilisant le tableau ci-dessous :

	Longueur	Mesure de l'angle
Grand cercle		360°
Arc de cercle		$\widehat{ASB}$

7. En utilisant la valeur obtenue pour l'angle $\widehat{ASB}$; Calculer l'aire latérale de ce cône en utilisant le tableau ci-contre.

	aire	Mesure de l'angle
Grand cercle		$360°$
Portion de cercle		$\widehat{ASB}$

2 Section d'un solide

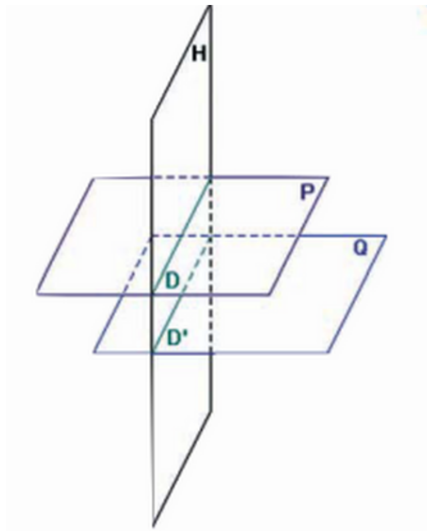
2.1 Intersection d'un plan par deux plans parallèles :

Activité :

Dans la figure ci-contre, les plans P et Q sont parallèles,
les plans H et P se coupent suivant la droite D et les plans H et Q se coupent suivant la droite D'.

Justifier chacun des énoncés suivants

- Les plans H et Q sont sécants.
- Les droites D et D' sont parallèles.
- La droite D est parallèle au plan Q.
- La droite D' est parallèle au plan P.

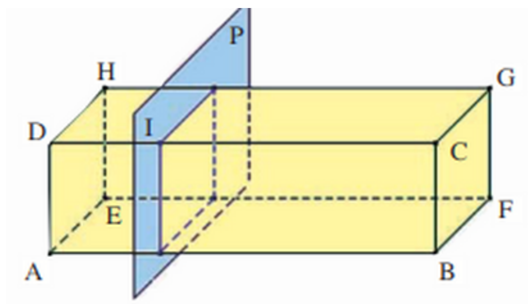


2.2 Section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face :

Activité : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Par un point I de l'arête $[DC]$ on mène le plan P parallèle à la face (ADE).

1- a) Colorer la section du parallélépipède par le plan P.

b) Quelle est la nature de la section obtenue ? Justifier.



Retenons : La section d'un parallélépipède droit par un plan parallèle à une face est un rectangle isométrique à cette face.

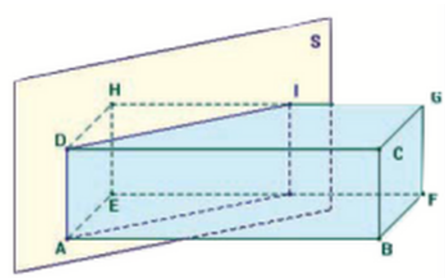
2.3 Section d'un parallélépipède rectangle par un plan contenant une arête :

Activité :

Un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est coupée suivant le plan (DIA).

1- Dessiner la section de $ABCDEFGH$ par le plan (DIA).
Quelle est la nature de la section obtenue ?
Justifier.

2- Dessiner chacun des solides obtenus et calculer leurs volumes sachant que
$AB = 1\text{m}$, $AD = 50\text{cm}$, $BF = 45\text{cm}$ et $GI = 25\text{cm}$.

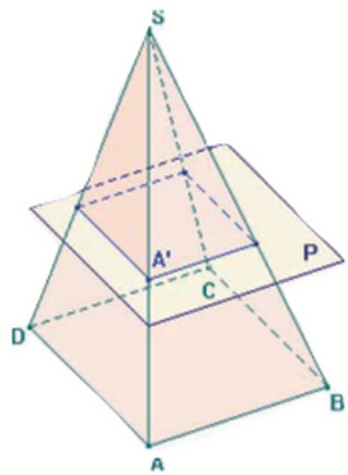


Retenons : La section d'un parallélépipède droit par un plan contenant une arête est un rectangle.

2.4 Section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base :

Activité :

$SABCD$ est une pyramide de hauteur 38cm et dont la base est un carré de côté 25cm.
Observer la section ci-contre où la pyramide $SABCD$ est coupée par un plan parallèlement à sa base à une distance égale à 8cm de S.



1- Expliquer pourquoi le plan P coupe $[SB]$ en un point B'.

2- Donner la valeur du rapport $\dfrac{SA'}{SA}$.

3- Quelle est la nature de la section obtenue ? Justifier.

4- Quelle est la proportion de l'aire de la section obtenue par rapport à celle de la base $ABCD$?

5- Reproduire les deux solides obtenus. Calculer leurs volumes respectifs.

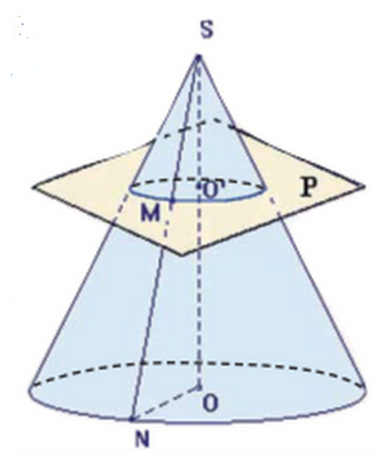
Retenons :

La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que cette base.

2.5 Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base :

Activité :

Un cône de révolution de sommet S et de hauteur h a pour base un cercle (C) de centre O et de rayon R.
On sectionne ce cône par un plan P parallèlement à sa base à une distance d de S.



1- Justifier que la droite (SO) est perpendiculaire au plan P en un point O'.
Soit M un point de la section obtenue.
La droite (MS) coupe le cercle (C) en un point N.
On considère alors le triangle SNO comme l'indique la figure ci-contre.

2- Justifier que les droites $(O'M)$ et (ON) sont parallèles.

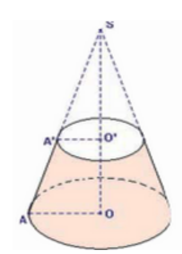
3- Exprimer $O'M$ en fonction de R, d et h.

4- En déduire la nature de la section du cône par le plan P.

Exercice 8

Un abat-jour recouvert de tissu a la forme d'un cône de révolution tronqué comme l'indique la figure ci-contre. On donne $O'A' = 15\text{cm}$; $OA = 20\text{cm}$ et $AA' = 25\text{cm}$.

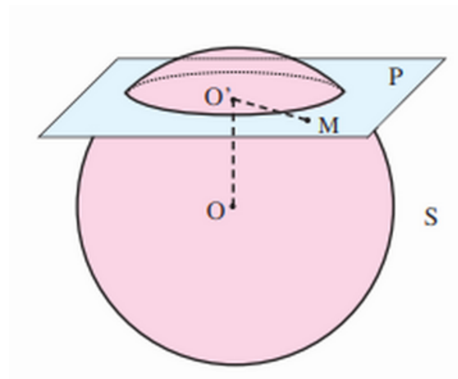
1. Calculer SA.
2. Calculer l'aire du tissu nécessaire à la confection de cet abat-jour.



2.6 Section d'une sphère par un plan

Activité :

Une sphère S de centre O et de rayon R est sectionnée par un plan P à une distance d de O.
On désigne par (C) la section obtenue et par O' le point du plan P tel que la droite (OO') est perpendiculaire au plan P.
Soit M un point de (C).



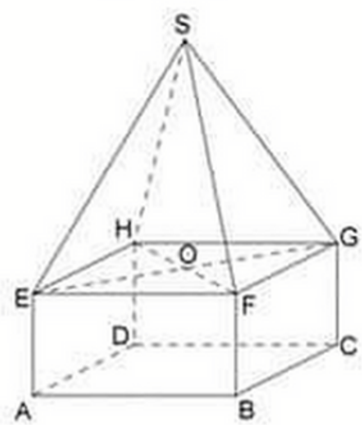
1- Quelle est la nature du triangle $OO'M$? Justifier.
2- Exprimer $O'M$ en fonction de R et d.
3- En déduire la nature de la section obtenue.
4- Application :
Une sphère de rayon 25cm est sectionnée par un plan P. La section obtenue est un cercle de centre O' et de rayon r.
Calculer r sachant que $OO' = 20$cm.

Retenons : La section d'une sphère par un plan est un cercle.
Si le plan passe par le centre de la sphère, le cercle obtenu est appelé grand cercle de la sphère.

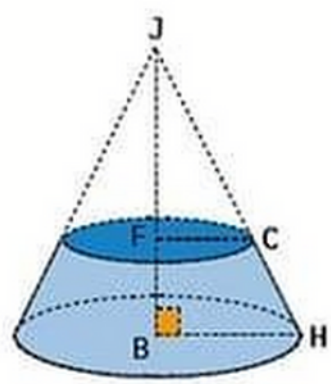
<u>Exercice</u> L'objectif de cet exercice est de déterminer le plus grand des deux volumes proposés.

1) ABCDEFGH est un pavé droit à base carrée ABCD.
On donne : AB = 5 cm et AE = 2 cm.
Ce pavé est surmonté d'une pyramide SEFGH.
L'arête latérale mesure 6 cm.

a) Calculer le volume du pavé droit ABCDEFGH.
b) Calculer la longueur FH puis calculer la hauteur $[SO]$ de la pyramide.
c) Calculer le volume de cette pyramide.
d) Calculer le volume total du solide ABCDEFGHS.



2) Un tronc de cône est déterminé par un cône (C) duquel on retire un autre cône (C').
Le tronc de cône représenté ci-contre est défini par un cône (C_1) de sommet J et de base le disque de rayon $[BH]$ et par un cône (C_2) de sommet J et de base le disque de rayon $[FC]$.
On donne : BJ = 18 cm, FJ = 14,4 cm, BH = 12,5 cm.
Les droites (FC) et (BH) sont parallèles.



a) En utilisant le théorème de Thalès avec soin, calculer la longueur FC.
b) Calculer les volumes de deux cônes, puis le volume du tronc de cône.