

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

### Exercice 1

Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^2 \quad z_2 = (1-i)^2 \quad z_3 = (1+i)^3 \quad z_4 = 2(1+i) - 3i(2-2i)$$

$$z_5 = (1-i)(2+3i) \quad z_6 = (2-i)(4+2i) \quad z_7 = (1-3i) + 2i(1-4i)$$

### Exercice 2

1) Soient les nombres complexes :  $z_1 = 1-2i$  et  $z_2 = -3+i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$iz_1 - 2z_2 ; (z_1)^2 ; z_1 \times z_2 \text{ et } \frac{z_1}{z_2}$$

2) Soit  $z = 2 + iy$  où  $y$  est un réel.

a) Déterminer  $y$  pour que  $z^2$  soit imaginaire pur.

b) Déterminer  $y$  pour que  $(1+i)z$  soit un réel.

### Exercice 3

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{8-i}{1-2i} ; \frac{10}{3-i} \text{ et } \left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$$

2) Marquer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $2+3i$ ,  $3+i$  et  $-1-i$

3) a) Montrer que  $ABC$  est un triangle rectangle en  $B$ .

b) Trouver l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un rectangle.

4) a) On pose  $I = A * C$ , trouver l'affixe du point  $I$ .

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \in P / |\bar{z} - 2 + 3i| = |z + 1 + i|\} \quad \text{et} \quad F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$$

### Exercice 4

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Si  $z = 2 - 2i(1+3i)$  alors :

$$a) \operatorname{Re}(z) = 2 \qquad b) \bar{z} = 2 + 2i(1+3i) \qquad c) \operatorname{Im}(z) = -2$$

2) Si  $z$  est un nombre complexe dont un argument est  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ ; alors un

argument de  $-2iz$  est :

$$a) -\pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \qquad b) 0 + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \qquad c) -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

3) Si  $z = (\sqrt{3} - i) - 2i$  alors  $|z|$  est égale à:

- a) 0      b)  $2\sqrt{3}$       c)  $2 - 2\sqrt{3}$

### Exercice 5

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique

$$z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \theta \in ]0, \pi[$$

$$z_2 = -1 + \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \theta \in ]0, \pi[$$

$$z_3 = \sin \theta + i \cos \theta + \text{ avec } \theta \in I\mathbb{R}$$

$$z_4 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta \text{ avec } \theta \in ]-\pi, 0[$$

### Exercice 6

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de :  $1+i$  ;  $1-i$  et  $1+i\sqrt{3}$ .

2) On pose  $Z = \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}$

a) Déterminer l'écriture trigonométrique de  $Z$ .

b) Déterminer l'écriture algébrique de  $Z$ .

3) En déduire  $\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4) Résoudre dans  $[0, 2\pi]$  l'équation  $(\sqrt{3}+1)\sin x - (\sqrt{3}-1)\cos x = \sqrt{2}$ .

### Exercice 7

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Soit  $z$  un nombre complexe, le conjugué de  $1+iz$  est :

a)  $-1-i\bar{z}$

b)  $1-i\bar{z}$

c)  $1-iz$

2) La forme algébrique de  $(1+i)^2(2-3i)$  est :

a)  $6-4i$

b)  $6+4i$

c)  $6-4i$

3) La forme algébrique de  $\frac{8+i}{1+2i}$  est :

a)  $-2+3i$

b)  $2+3i$

c)  $2-3i$

### Exercice 8

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$z^2 - 4z + 20 = 0$$

$$4z^2 + 4z + 10 = 0$$

### Exercice 9

1) Soit  $(z) = z^2 - (1+i)z - (2+i)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

a) Vérifier que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  ;  $P(z) = (z+1)(z-2-i)$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  ;  $P(z) = 0$ .

2) Soient les points  $z_A = 2 + i$ ;  $z_B = -1$  et  $z_C = 3 - 2i$ .

a) Placer les points  $A$ ,  $B$ , et  $C$ .

b) Déterminer l'affixe du point  $J$  milieu du segment  $[BC]$ .

3) a) Calculer les distances  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ .

b) Déduire la nature du triangle  $ABC$ .

4) a) Déterminer l'affixe du point  $D$  symétrique du point  $A$  par rapport à  $J$ .

b) Quelle est la nature du quadrilatère  $ACDB$ ? Justifier.

### Exercice 10

Soient les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $a = -\sqrt{3} - i$  et  $b = 1 - i\sqrt{3}$ .

1) a) Ecrire sous forme trigonométrique  $a$  et  $b$ .

b) Représenter les points  $A$  et  $B$ .

2) On pose  $z = a + b$  et on désigne par  $M$  le point d'affixe  $z$ .

a) Montrer que  $OAMB$  est un carré

b) Donner la forme trigonométrique de  $z$

c) En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 11

Dans la figure ci-contre on a construit un cercle  $C_1$  de centre  $O$  et de rayon 6 et un cercle  $C_2$  de centre  $O$

de rayon 3, le point  $A \in C_1$  et le point  $B \in C_2$ .

1) Soient  $z_A$  et  $z_B$  les affixes respectives des point  $A$  et  $B$ .

a) Donner le module et un argument de  $z_A$  et  $z_B$ .

b) En déduire que  $z_A = 3\sqrt{2}(1 + i)$

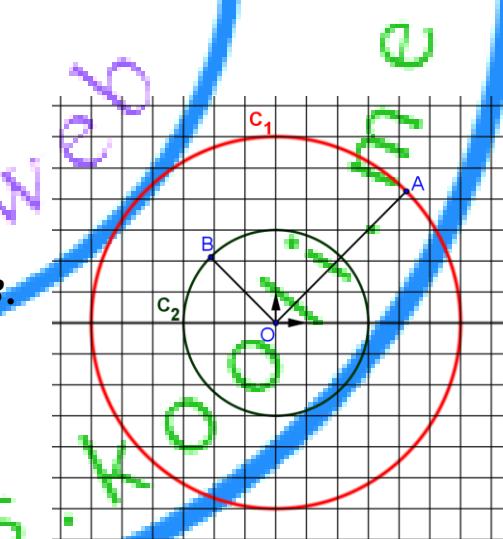
et que  $z_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$

2) a) Placer le point  $C$  d'affixe  $z_C = 3i\sqrt{2}$

b) Montrer que  $\frac{z_C - z_B}{z_A}$  est un réel.

c) Calculer  $\frac{z_B}{z_A}$

3) En déduire que le quadrilatère  $OACB$  est un trapèze rectangle.



### Exercice 12

On donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + 4i, z_B = 2 + 2i \text{ et } z_C = -i$$

- 1) a) Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle et rectangle.
- b) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un carré.
- 2) Soit le point  $E$  d'affixe  $z_E = 1 + i\sqrt{3}$ .

- a) Donner le module et un argument des complexes  $z_B$  et  $z_E$ .
- b) Déduire le module et un argument de  $z_B z_E$ .
- c) Ecrire sous forme algébrique le complexe :  $z_B z_E$ .
- d) En déduire  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$

- 3) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|z + i| = |z|$ .

### Exercice 13

Soient les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $z_A = 2 - 2i$  et  $z_B = 2 + 2i$

- 1) Placer  $A$  et  $B$ .
- 2) Quelle est la nature du triangle  $OAB$ .
- 3) Soit le point  $C$  d'affixe  $z_C = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(2 - 2i)$ .
  - a) Ecrire  $z_C$  sous forme algébrique.
  - b) Ecrire  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $2 - 2i$  sous forme trigonométrique.
- 4) a) Ecrire  $z_C$  sous forme trigonométrique.
  - b) En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$
- 5) a) Comparer  $OA$  et  $OC$  et donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$ .
  - b) En déduire la nature du triangle  $OAC$ .
- 6) On pose  $z = x + iy$  déterminer (de deux manières) et construire l'ensemble  $\Delta$  des points  $M(z)$  tel que :  $|-i\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 + 2i|$
- 7) On pose  $z = 2 + 2i \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Quelle est l'ensemble des points  $M$  lorsque  $\theta$  décrit  $[0, \pi]$ .

### Exercice 14

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $I$  d'affixes respectives :

$$z_A = -2i ; z_B = 1 + i ; z_C = 4 + 2i \text{ et } z_I = 2.$$

- 1) a) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
- b) Montrer que  $I$  est le milieu de  $[AC]$ .
- 2) On désigne par  $D$  le symétrique du point  $B$  par rapport au point  $I$ .
- a) Déterminer l'affixe  $z_D$  du point  $D$ .
- b) Montrer que  $ABCD$  est un losange.
- c)  $ABCD$  est-il un carré ?
- 3) Déterminer les ensembles suivants :
- $$E = \left\{ M(z) \in P / \left| \frac{z-1-i}{z+2i} \right| = 1 \right\}$$
- $$F = \left\{ M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$
- 4) Déterminer et construire l'ensemble :  $G = \left\{ M(z) \in P / \arg \left( \frac{2z+4i}{z-2} \right) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$
- Exercice 15**
- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z - 1)^2 + 3 = 0$
- 2) On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -2$ ,  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_C = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_D = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- a) Ecrire  $z_B$ ,  $z_C$  et  $z_D$  sous forme trigonométrique
- b) Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$
- c) Vérifier que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont sur un même cercle que l'on précisera
- 3) a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants  $z_B^2$  et  $z_D \cdot z_B^2$
- b) Donner le module et un argument de  $z_D \cdot z_B^2$
- c) En déduire alors les valeurs exactes de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$
- 4) Soit  $E$  le point d'affixe  $(-i)$ , à tout point  $M$  d'affixe  $z$  distinct de  $B$  on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z+2}{iz+\sqrt{3}-i}$
- a) Déterminer et construire l'ensemble  $F$  des points  $M$  tel que  $|z'| = 1$
- b) Montrer que  $(z' + i)(z - z_B) = \sqrt{3} - 3i$
- c) Déterminer alors l'ensemble  $G$  des points  $M'(z')$  lorsque  $M$  décrit le cercle de centre  $B$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .