

Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

b) On note P le plan (OBC) .

En remarquant que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4 \overrightarrow{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O .

c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0.$$

Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

3) a) Calculer la distance OA .

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C) .

4) On considère le point $H(1,-1,0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H .

Exercice 2 (4,5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4\sqrt{5}i = 0$.

a) Calculer $(\sqrt{5} + 2i)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.

c) En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \text{ et } b = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5} + 2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à (C).

b) Construire alors le point Q.

3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère OAQB est un losange.

d) Construire alors les points A et B.

Exercice 3 (7points)

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -(x - 1)^2 e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de (C).

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

par $g(x) = e^x$.

- E et F sont les points de (Γ) d'abscisses respectives (-1) et $\ln 10 - 3$.

- G est le point de coordonnées $(0, 1 - 6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10 g(-3) = g(\ln 10 - 3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\frac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe (C) au point B .

b) Tracer la courbe (C) dans l'annexe (On placera les tangentes à (C) en A , en J et en B).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 3$.

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer S .

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,3]$ est égale à $1 - 6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S .

Exercice 4 (3,5points)

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer $p(U)$

b) En utilisant les évènements U et D , traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer $p(D)$.

b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n \geq 2$).

On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

a) Exprimer p_n en fonction de n .

b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve : Mathématiques

Section : Sciences expérimentales

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

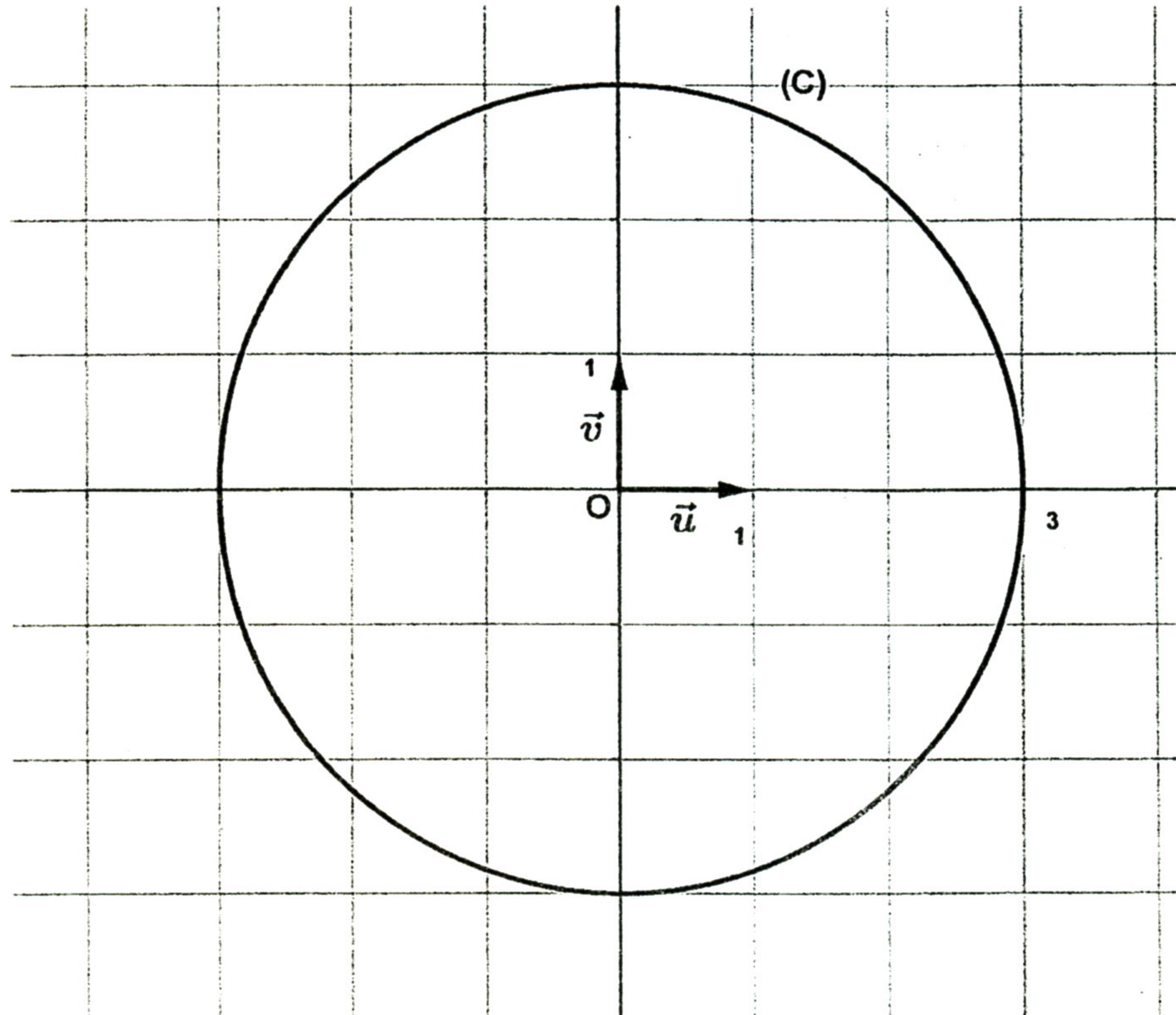


Figure 2

