الجمهورية التونسية وزارة التربية **** **امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام** **دورة 2018**	الاختبار : **الرياضيات**	
	الحصّة : **ساعتان**	ضارب الاختبار: **2**

التمرين الأوّل (3 نقاط)

يلي كلّ سؤال ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة.

أكتب على ورقة تحريرك رقم السؤال والإجابة الصحيحة الموافقة له.

1) ليكن (O, I, J) معينا في المستوي والنقاط $A(1, -1)$ و $B(3, 2)$ و $C(1, 1)$.

إذا كان ABCD متوازي أضلاع، فإنّ إحداثيات النقطة D هي :

أ) $(-2, -1)$ ب) $(-1, -2)$ ج) $(-2, -3)$

2) يمثّل الجدول التّالي التّكرارات التّراكميّة الصّاعدة لسلسلة إحصائيّة.

القيمة	-2	-1	0	1	2
التّكرار التّراكمي الصّاعد	5	9	13	18	20

التّكرار الموافق للقيمة صفر هو:

أ) 13 ب) 0 ج) 4

3) العدد $27^{2018} - 2 \times 27^{2017}$ يقبل القسمة على :

أ) 6 ب) 12 ج) 15

التمرين الثاني (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيّين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$.

1) أ) قارن العددين a^2 و b^2.

ب) بيّن أنّ $(a - b)$ عدد موجب.

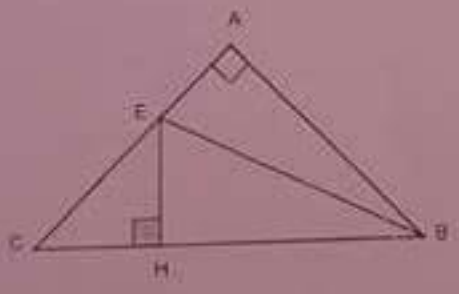
2) أحسب $a^2 b^2$ ثمّ استنتج أنّ $ab = 7$.

3) أحسب $(a - b)^2$ ثمّ استنتج أنّ $a - b = 2\sqrt{2}$.

(وحدة قيس الطول الصنتمتر)

في الرّسم المقابل لدينا :

- ABC مثلّث متقايس الضّلعين وقائم في A، حيث $AB = a$
- E النقطة من $[AC]$ حيث $AE = b$
- H المسقط العمودي للنقطة E على (BC).



4) أ) بيّن أنّ المثلّث HEC متقايس الضّلعين.

ب) بيّن أنّ $EH = 2$.

5) لتكن S مساحة المثلّث BEC.

أ) بيّن أنّ $S = a\sqrt{2}$.

ب) بيّن أيضا أنّ $S = 2 + 3\sqrt{2}$، ثمّ استنتج أنّ $a = 3 + \sqrt{2}$.

التمرين الثالث (4 نقاط) **(وحدة قيس الطول الصنتمتر)**

ABC مثلّث متقايس الضّلعين وقمّته الرئيسيّة A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.

لتكن النّقطة D مناظرة النّقطة C بالنسبة إلى A ، و H المسقط العمودي للنّقطة A على المستقيم (BC).

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النّقطة G.

1) أ) بيّن أنّ المثلّث BCD قائم في B.

ب) بيّن أنّ G مركز ثقل المثلّث BCD.

في الأسئلة الموالية، نفترض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

2) أ) بيّن أن $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$.

ب) بيّن أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$.

3) أ) بيّن أن $x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36$.

ب) إستنتج أن $x^2 + 6x - 27 = (x - 3)(x + 9)$.

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$، ثم إستنتج البعد BG.

التمرين الرابع (5 نقاط) **(وحدة قيس الطول الصنتمتر)**

A و B نقطتان من المستوي، حيث $AB = 6$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$. لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي قطرها $[AB]$ و C نقطة من $\mathscr{C}$ ، حيث $AC = 5$.

1) أحسب BC.

2) المماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بيّن أن $CD = \frac{11}{5}$.

ب) أحسب BD.

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في نقطة E. لتكن $\mathscr{C}'$ الدائرة التي قطرها $[DE]$ و مركزها O. المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع $\mathscr{C}'$ في نقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بيّن أن الرباعي BDFE مستطيل.

ب) الدائرتان $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B.

أثبت أن النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K.

أ) بيّن أن K منتصف $[AF]$.

ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بيّن أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

التمرين الخامس (4 نقاط) **(وحدة قيس الطول الصنتمتر)**

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB = 6$ و $AE = 4$ و $AD = 3$.

1) أ) بيّن أن ADG مثلث قائم في D.

ب) أحسب DG و AG.

2) لتكن M النقطة من $[AE]$ حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

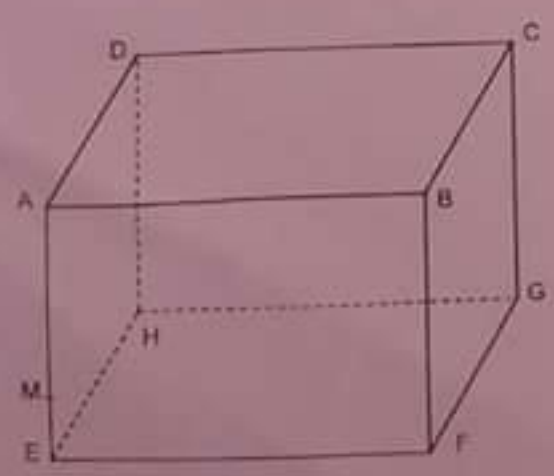
أ) بيّن أن Δ محتو في المستوي (AEF).

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N.

بيّن أن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$.

ج) أحسب MN ثم DN.

3) أحسب حجم الهرم NMAD.



مقترح إصلاح إمتحان شهادة ختم التعليم الأساسي

دورة 2018 التاسعة أساسي

الأستاذ: عبد العزيز بن مرزوق

التمرين الأول:

1/ب	2/ج	3 ج

ب2: التعليل: ليكون ABD متوازي الأضلاع فإن قطراه [AC] و [BD] لهما نفس المنتصف أي:

$\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}$ و $\frac{1+1}{2}=\frac{3+x_D}{2}$ أي $2=x_D+3$

$\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}$ و $\frac{-1+1}{2}=\frac{2+y_D}{2}$ يعني: $0=2+y_D$

وبالتالي: $x_D=2-3=-1$ و $y_D=0-2=-2$ فإن $D(-1,-2)$

ج2):

القيمة	-2	-1	0	1	2
التكرار	5	4	4	5	2
التكرار التراكمي	5	9	13	18	20

التكرار الموافق للقيمة صفر هو: 4

ج3): لدينا: $27^{2018}-2\times27^{2017}=27^{2017}\times27-2\times27^{2017}$

$=27^{2017}\times[27-2]$

$=27^{2017}\times25$

27^{2017} قابل للقسمة على 3

25 قابل للقسمة على 5

وهما أوليان فيما بينهما إذن فهو قابل للقسمة على جداءهما 15.

الاستاذ: عبد العزيز بنامرزوق

التمرين الثاني:

1) أ/ لدينا: $a^2 - b^2 = 11+6\sqrt{2} - 11+6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} > 0$ يعني $a^2 > b^2$

ب/ لدينا: $a^2 > b^2$ و a, b موجبان $\Big\}$ إذن $a > b$ يعني $a-b > 0$ (موجب)

2) أحسب: $a^2 b^2 = (11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2}) = 11^2 - (6\sqrt{2})^2$

$= 121 - 72 = 49$

يعني $(ab)^2 = 49$ وبالتالي: $ab = \sqrt{49} = 7$

3) لنا: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 11+6\sqrt{2} + 11-6\sqrt{2} - 2\times 7$

$= 22 - 14 = 8$

إذن: $(a-b)^2 = 8$ يعني $a-b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

و $(a-b)$ موجب

4) أ/ ABC مثلث قائم ومتقايس الضلعين في A

يعني: $\hat{A} = 90°$ و $\hat{B} = \hat{C} = 45°$

* في المثلث CEH:

$\hat{E} = 90° - \hat{C} = 90° - 45° = 45° = \hat{C}$

وبالتالي ECH مثلث متقايس الضلعين قمته الرئيسية H.

ب/ في المثلث ECH القائم في H، حسب نظرية بيتاغور لدينا:

$CE^2 = EH^2 + CH^2 = 2\,EH^2$ يعني: $EH^2 = \frac{CE^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2}$

وحيث $(a-b)^2 = 8$

فإن: $EH^2 = \frac{8}{2} = 4$ ومنه $EH = \sqrt{4} = 2$

5) أ/ في المثلث ABC القائم والمتقايس الضلعين في A، حسب نظرية بيتاغور لدينا:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2\,AC^2 = 2a^2$ إذن: $BC = a\sqrt{2}$ (موجب)

* لتكن S: مساحة المثلث BEC:

$S = \frac{EH \times BC}{2} = \frac{2 \times a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

ب/ لتكن: S_1: مساحة المثلث AEB:

$S_2 = \frac{AE \times AB}{2} = \frac{b \times a}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{7}{2}$

S_2: مساحة المثلث ABC:

$S_2 = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{a \times a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{11+6\sqrt{2}}{2}$

$S = S_2 - S_1 = \frac{11+6\sqrt{2}-7}{2} = \frac{4+6\sqrt{2}}{2} = 2+3\sqrt{2}$: إذن

* $a\sqrt{2} = 2+3\sqrt{2}$ يعني $a = \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+3\sqrt{2})}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$a = \frac{2\sqrt{2}+6}{2} = \sqrt{2}+3$ أو

$\boxed{a = 3+\sqrt{2}}$: إذن

التمرين الثالث :

1) أ/ في المثلث BCD لدينا : A منتصف [CD] حيث : AB=AC=AD
وبالتالي فهو قائم في B وتره الضلع [CD] .

ب/ لدينا : ABC مثلث متقايس الضلعين و[AH] الارتفاع الصادر من A إذن فهو يمثل أيضا المتوسط العمودي لـ [BC] يعني H منتصف [BC] .

* في المثلث BCD لدينا :
[BA] المتوسط الصادر من B و [DH] المتوسط الصادر من D و G نقطة تقاطعهما إذن فهي تمثل مركز ثقل المثلث BDC .

2) أ/ AB= x+3 حيث x موجب . إذن : AC = x+3
وبالتالي : CD = 2AC = 2(x+3)

* في المثلث BCD القائم في B وحسب نظرية بيتاغور لدينا :

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = (2(x+3))^2 - 2^2 = 4(x+3)^2 - 4$$
$$= 4(x^2+6x+9) - 4 = 4(x^2+6x+9-1) = 4(x^2+6x+8)$$

ب/ $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $BD^2 = 140$ يعني : $4(x^2+6x+8) = 140$

أ/ $x^2+6x+8 = \frac{140}{4} = 35$ يعني : $x^2+6x+8-35=0$

وبالتالي : $x^2+6x-27=0$

3) أ/ لدينا :
$$(x+3)^2 - 36 = x^2+6x+9-36 = x^2+6x-27$$

ب/ لدينا :
$$x^2+6x-27 = (x+3)^2 - 36 = (x+3-6)(x+3+6)$$
$$= (x-3)(x+9)$$

ج) $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2+6x-27=0$ يعني : $(x-3)(x+9)=0$
يعني $x=3$ أو $x=-9$ و (x موجب)

إذن : $x=3$

* لدينا : $AB = x+3$ إذن : $AB = 3+3 = 6$

و $x=3$ و G مركز ثقل المثلث BCD إذن :

$$BG = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 6 = 4\ cm .$$

التمرين الرابع:

1) الدائرة (ع) محيطة بالمثلث ABC و [AB] قطرا لها وهو أحد أضلاع المثلث وبالتالي فهو قائم الزاوية في C، حسب نظرية بيتاغور لدينا:

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$ ، ومنه: $BC = \sqrt{11}$

2) أ/ في المثلث ABD القائم في B حيث [BC] الارتفاع المواقق للوتر [AD]

لدينا: $BC^2 = CD \times AC$ يعني: $CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}$

ب/ بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث ACD القائم في C لدينا:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 11 + \left(\frac{11}{5}\right)^2 = 11 + \frac{121}{25} = \frac{275+121}{25} = \frac{396}{25}$

وبالتالي: $BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{\sqrt{36}\times\sqrt{11}}{5} = \frac{6\sqrt{11}}{5}$

3) أ/ في الرباعي BDFE لدينا:

* $\hat{B} = 90°$ (ABD قائم في B و $E \in (AB)$ إذن $(BD) \perp (BE)$)

* $\hat{D} = 90°$ $(DF) \parallel (BE)$ و $(BE) \perp (DB)$ إذن: $(DF) \perp (DB)$

* $\hat{F} = 90°$ (ع محيطة بالمثلث DEF و [DE] قطرا لها إذن فهو قائم في F)

وبالتالي الرباعي BDFE له 3 زوايا قائمة إذن فهو مستطيل.

ب/ * لدينا: B، F، H نقاط من الدائرة (ع) التي قطرها [BF] إذن المثلث BHF قائم في H يعني $(BH) \perp (FH)$ (1)

* B و A، H نقاط من الدائرة ع التي قطرها [AB] إذن، BHA قائم الزاوية في H يعني: $(HB) \perp (AH)$ (2)

حسب (1) و (2) فإن $(AH) \parallel (FH)$ و H نقطة مشتركة إذن: A، H، F على استقامة واحدة.

4) أ/ لدينا في المثلث ABF: * [AO] هو المتوسط الصادر من A (O مركز المستطيل)

* [FI] هو المتوسط الصادر من F (I منتصف [AB])

وهي نقطة تقاطعهما إذن فهي تمثل مركز ثقل المثلث ABF.

المستقيم (BK) هو حامل للمتوسط الصادر من B المواقق للضلع [AF] وبالتالي يقطعه في المنتصف K إذن K هي منتصف [AF].

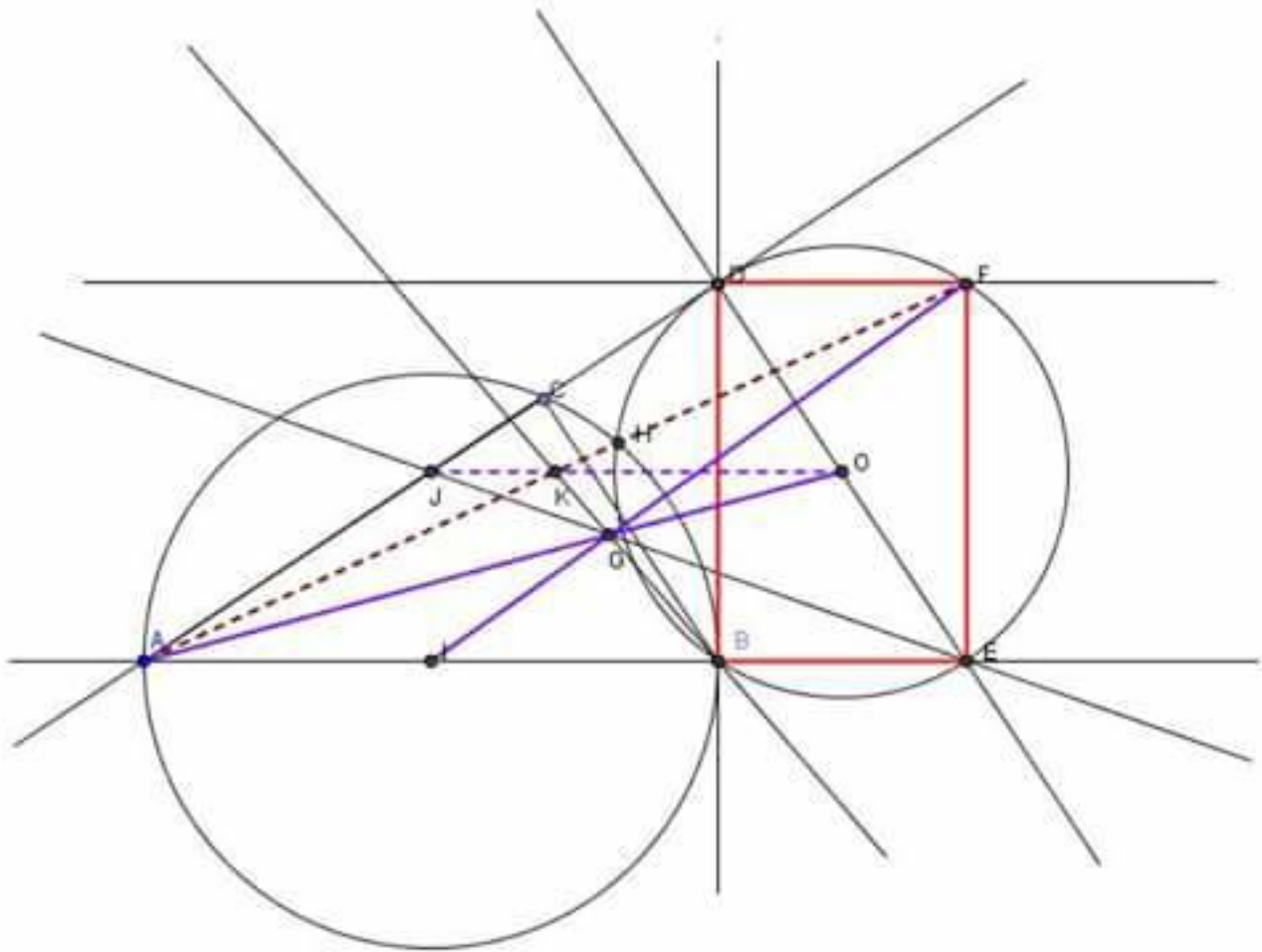
4) ب/ بما أن G هي مركز ثقل المثلث ABF و $G \in [AO]$ فهي تحقق
$AG = \frac{2}{3} AO$ وبالتالي في المثلث AED لدينا: G نقطة من المتوسط
[AO] الموافق للضلع [ED] حيث $AG = \frac{2}{3} AO$ وبالتالي G هي مركز ثقل
المثلث AGD.

4) ج/ * بما أن G مركز ثقل المثلث AED فإن (EG) هو المستقيم
الحامل للمتوسط الموافق للضلع [AD] وبالتالي J هي منتصف [AD]

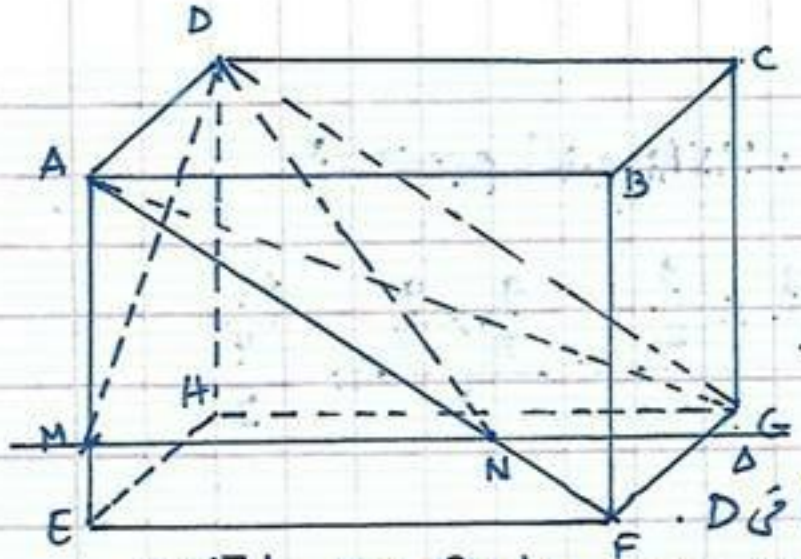
* في المثلث ADF لدينا: J منتصف [AD]
و K منتصف [AF] فإن: (JK) // (DF)

* في المثلث AED لدينا: O منتصف [ED]
و O منتصف [AD] فإن: (OJ) // (AE)

وحيث (DF) // (AE) فإن: (JK) // (OJ) ولهما نقطة مشتركة
فإن J و K و O على استقامة واحدة.


D
F
C
H
J
K
O
G
A
I
B
E

التمرين الخاص:



1) أ/ لدينا: $(DC) \perp (AD)$ في D
و $(DH) \perp (AD)$ في D
و (DC) ، (DH) يتقاطعان في D
و محتويان في المستوي (HDC)
إذن (AD) عمودي على (HDC) في D.
* $(DG) \subset (DCH)$ و مارين D إذن: $(DG) \perp (AD)$ في D وبالتالي
فإن المثلث ADG قائم الزاوية في D.

ب- * تطبيق نظرية بيتاغور في المثلث DHC لدينا:

$$DG^2 = DC^2 + DH^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$
$$DG = \sqrt{52} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

* [DG] موتر متوازي المستطيلات:

$$DG = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{61}$$

2) أ/ لدينا: $\Delta \perp (ADE)$ في M ، $(EF) \perp (ADE)$ في E
إذن: $\Delta // (EF)$ وبالتالي هما من نفس المستوى (EMF)
و حيث (AE) محتوى المستوى (AEF) فإن: $M \in (AE)$ ، (MEF) و (AEF)
متطابقان، و منه فإن Δ محتواة في المستوى (AEF)

ب/ في المثلث AEF: $M \in [AE]$ و $N \in [AF]$ و $(MN) // (EF)$ وحسب
نظرية طالس لدينا:

$$\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{MN}{EF}$$

يعني: $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$ وبالتالي $MN = \frac{AM \times EF}{AE} = \frac{3 \times 6}{4}$

$$MN = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

كذلك: $AN = \frac{AF \times AM}{AE} = \frac{2\sqrt{13} \times 3}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

* في المثلث ADN القائم الزاوية في A لدينا:

$$DN^2 = AD^2 + AN^2 = 3^2 + \frac{9 \times 13}{4} = 9 + \frac{117}{4} = \frac{36 + 117}{4} = \frac{153}{4}$$

ومنه فإن: $DN = \sqrt{153}$

$$DN = \frac{\sqrt{9^2} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

3) حجم الهرم MNAD : $\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$

$$V = \frac{\frac{AD \times AM}{2} \times MN}{3} = \frac{\frac{3 \times 3}{2} \times \frac{9}{2}}{3} = \frac{\frac{9}{2} \times \frac{9}{2}}{3} = \frac{\frac{81}{4}}{3}$$

$$V = \frac{81:3}{12:3} = \frac{27}{4} \ cm^3$$