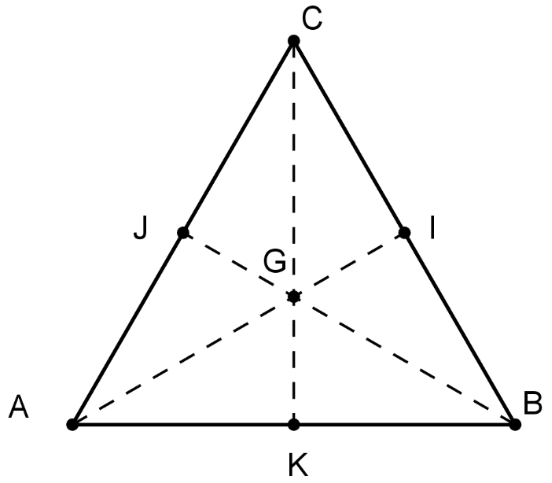
Exercice 1 (4 points)



Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a, $a > 0$.

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement r_1 tel que $r_1(I) = A$ et $r_1(B) = J$.

b) Montrer que r_1 est une rotation de centre K et donner une mesure de son angle.

2) Soit r_2 la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(C)$ et $r_2(J)$.

b) En déduire l'image de la droite (AC) par r_2.

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. On pose $f = r_1 \circ h$.

a) Déterminer l'image du triangle ABC par h.

b) Montrer que $f(A) = A$

c) Montrer que f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et préciser son centre.

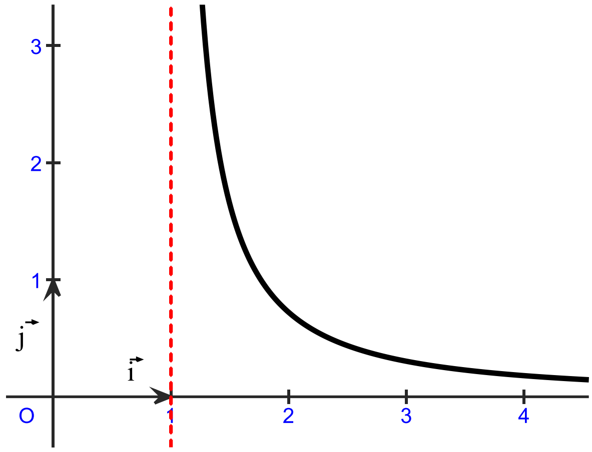
d) Donner la forme réduite de f.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f^1 = f \\ f^{n+1} = f \circ f^n \end{cases}$

a) Caractériser f^3.

b) Montrer que f^{2019} est une homothétie de rapport négatif.

Exercice 2 **(4 points)**



Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

On donne ci-dessus sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) En utilisant le graphique, dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 2$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leq\dfrac{1}{n\ln n}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 2$, $\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$

3) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $U_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire le sens de variation de (U_n).

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$.

En déduire que $U_n\geq -\ln(\ln 2)$.

c) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ et vérifier que

$-\ln(\ln 2)\leq\ell\leq\dfrac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)$.

Exercice 3 **(4 points)**

A) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 67x-133y=1$.

1) Vérifier que $(2,1)$ est une solution de (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

B) Soit p un nombre premier tel que $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

1) Soit $x\in\mathbb{Z}$.

a) Vérifier que $p=2(2k-1)+5$

b) Montrer que si $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ alors $x^{p-5}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$

2) Soit x un entier relatif vérifiant $x^{p-5}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$

a) Montrer que $x\wedge p=1$.

b) Montrer que $x^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$

c) Vérifier que $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

d) En déduire que $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{62}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 67)$

Exercice 4 (8 points)

A) 1) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[$, $\int_0^x \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = x-\ln(x+1)$

2) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}+1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F et G sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in[0,+\infty[$, $\int_0^x \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}+1}\,\mathrm{d}t$

c) Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{1}{2(x+1)}\le\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\le\frac{1}{2}$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

B) Soit f la fonction définie suir $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 (On pourra utiliser le résultat de A) 2) b))

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$, $\forall x\in]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

3) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.

C) Soit g la fonction définie suir $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$

1) a) Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[$, $0<f'(x)\le\frac{1}{2}$

b) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,1[$

c) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$.

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n>0$.

b) Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

c) Montrer par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\alpha|$.

d) Déterminer alors la limite de (U_n).