

Lycée Pilote Sakiet Ezzit Sfax 2	Devoir de synthèse N°2 en mathématiques	Prof. : Hassène Bouzid Hichem Zaghdane
Classes : 4 ^{ème} Maths 1 - 2	Date : 14 Mars 2023	Durée : 4 heures

Exercice 1 : 4 points

Le plan est orienté dans le sens direct .

Soit OAB un triangle tels que $OA = 2 OB$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) , E le symétrique de H par rapport à la droite (OA) et F le symétrique de H par rapport à la droite (OB) .

- 1) Déterminer $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}(F)$ puis déduire que O est le milieu du segment [EF] .
- 2) Soit S la similitude directe qui envoie O sur A et B sur O .
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de S .
 - b) Montrer que H est le centre de S .
- 3) On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tels que $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
 - a) Donner la forme complexe de S .
 - b) Déterminer l'affixe de chacun des points H , E et F .
 - c) Montrer que $S(F) = E$ et déduire que $EF = EA$.
- 4) Soit σ la similitude indirecte qui envoie H sur F et E sur H .
 - a) Déterminer le rapport de σ .
 - b) Soit I le centre de σ .
Montrer que $\overline{IE} = 4\overline{IF}$ puis construire I et préciser l'axe Δ de σ .
- 5) On pose $\varphi = \sigma \circ S$.
 - a) Déterminer $\varphi(H)$ et $\varphi(F)$.
 - b) Caractériser φ .

Exercice 2 : 4 points

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 5 de 3^n .
- 2) On pose $\lambda = 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024}$.
 - a) Déterminer le reste modulo 5 de λ .
 - b) Dédurre le chiffre des unités de λ^2 .
- 3) Soit $x \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer les restes modulo 5 possibles de x^2 .
 - b) Dédurre que l'équation (E) : $x^2 + 1 = 3^{4n+1}$, d'inconnue x , n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.
- 4) On suppose, dans cette question, que $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\alpha_n = 4n - 2$.

Déterminer toutes les valeurs de n tels que
$$\begin{cases} n \equiv 2025 \pmod{4} \\ \alpha_n - 3^n \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Exercice 3 : 6 points

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Justifier que f est continue sur $[1, +\infty[$.
 - b) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ puis interpréter ce résultat graphiquement.
 - c) Etudier les variations de f .
 - d) Déterminer la nature de la branche infinie de (C) puis tracer (C) .
- 2) a) Justifier que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On notera g la fonction réciproque de f .
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
- 3) Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.
 - a) Montrer que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
On notera h la fonction réciproque de φ .
 - b) i) Exprimer $h(x)$ pour tout $x \in J$.
ii) Montrer que h est dérivable sur J puis exprimer $h'(x)$ pour tout $x \in J$.

- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$.

a) Montrer que $S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$.

b) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4 : 6 points

I) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Justifier que f est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

2) Dans l'annexe, on a tracé la tangente (T) à (C_f) au point I d'abscisse $\frac{1}{3}$.

Tracer (C_f) dans l'annexe.

II) Dans cette partie, on se propose de calculer l'aire A , en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

1) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que $\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$ pour tout $x > 0$ à l'aide d'une intégration par parties.

3) a) Exprimer $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} dt$ en fonction de x pour tout $x > 0$.

b) Dédire que $A = \frac{1}{e}$.

III) 1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$ admet une unique solution $\alpha_n > 0$.

b) Montrer que la suite (α_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ est croissante.

2) a) Vérifier que $-\frac{1}{\alpha_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.

c) Dédire que pour tout $x \geq 0$, $-\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$.

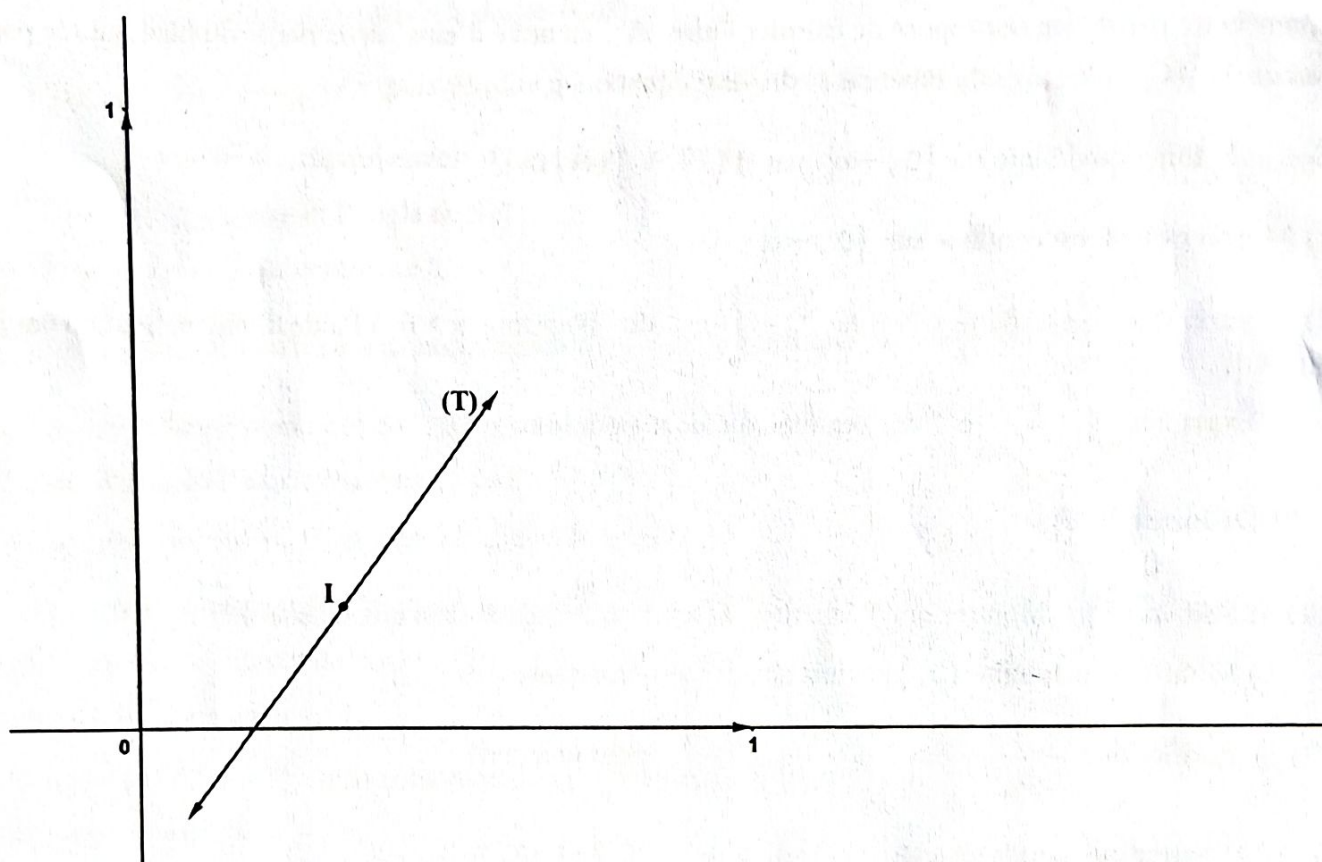
3) Montrer que $\alpha_4 \geq 1$ sachant que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$ puis déduire que $\alpha_n \geq 1$ pour tout $n \geq 4$.

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $\alpha_n \geq \sqrt{\frac{n}{6}}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Lycée Pilote Sakiet Ezzit Sfax 2	Devoir de synthèse N°2 en mathématiques	Prof. : Hassène Bouzid Hichem Zaghdane
Classes : 4 ^{ème} Maths 1 - 2	Date : 14 Mars 2023	Durée : 4 heures

Annexe – Exercice 4



1) f est définie sur $[a, +\infty[$ par (1)

$$\begin{cases} f(x) = (1 + \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$
 et $\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{x} \in]-\infty, 0[$
 et $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc
 continue sur $] -\infty, 0[$

donc $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est continue sur $] -\infty, 0[$

$x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est rationnelle continue sur
 son domaine de définition $\mathbb{R}^*$ donc
 continue sur $]0, +\infty[$

donc $x \mapsto (1 + \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}$ est continue sur
 $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions
 continues sur $]0, +\infty[$

donc f est continue sur $]0, +\infty[$

• continuité de f à l'origine

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} - (-\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{et or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

donc f est continue à l'origine

• or f est continue sur $]0, +\infty[$ et f
 est continue à l'origine

d'où f est continue sur $[0, +\infty[$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

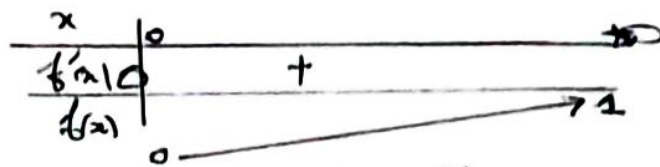
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -((- \frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}) + (-\frac{1}{x})^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= 0 \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{x})^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

donc f est dérivable à l'origine et $f'(0) = 0$

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} (1 + \frac{1}{x}) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)^2 = 1$$

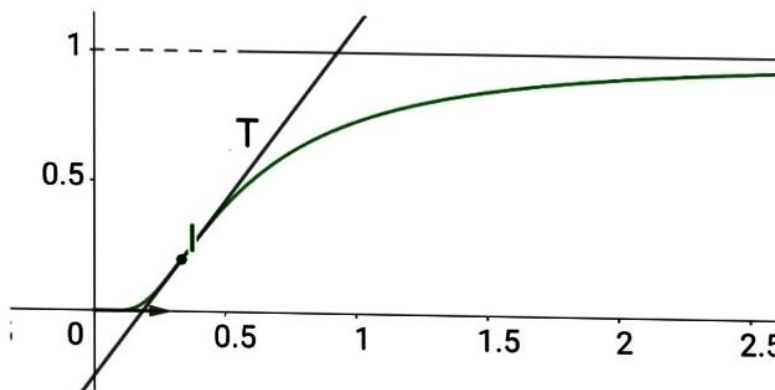
$$\left(\text{or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 \end{cases} \right)$$

$$\text{d) } \forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, or

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^3 - 3x^2 e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(1 - 3x) e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \end{aligned}$$

le signe de $f''(x)$ est celui de $1 - 3x$
 f'' s'annule en $\frac{1}{3}$ et change de signe
 de ce qui donne un point d'inflexion
 $I(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}) = 4e^{-3})$



II] $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$; $x \in [0, +\infty[$ (2)

1) f continue sur $[0, +\infty[$ donc $\mathcal{B}$ admet des primitives sur $[0, +\infty[$
 Soit G une primitive de f sur $[0, +\infty[$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad F(x) = \int_x^1 f(t) dt \\ = [G(t)]_x^1 \\ = G(1) - G(x)$$

G primitive de f sur $[0, +\infty[$ donc

G continue sur $[0, +\infty[$ (car G est dérivable sur $[0, +\infty[$ puisque G primitive de f sur $\mathbb{R}_+$)
 donc F continue sur $[0, +\infty[$

2) pour $x > 0$; intégrons par parties
 l'intégral $\int_x^1 e^{-t} dt$

on pose $\begin{cases} u(t) = e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} u'(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$

$\forall x > 0$ on a :

$$\int_x^1 e^{-t} dt = [t e^{-t}]_x^1 - \int_x^1 t (-e^{-t}) dt \\ = e^{-1} - x e^{-x} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-t} dt$$

3) a) d'après la question précédente on a

$$\int_x^1 e^{-t} dt = e^{-1} - x e^{-x} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \int_x^1 e^{-t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-t} dt = e^{-1} - x e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_x^1 \left(e^{-t} + \frac{1}{t} e^{-t} \right) dt = e^{-1} - x e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt = e^{-1} - x e^{-x}$$

b) $A = \int_0^1 |f(t)| dt$ (en unité d'aire)

$$= \int_0^1 f(t) dt \quad (\text{car } f \text{ est positive})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1} - x e^{-x}$$

$$= \frac{1}{e} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-x} = 0 \right)$$

III] f continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{donc } f(\mathbb{R}_+) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [0, 1[$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* ; -\frac{1}{m} < 0 \Rightarrow 0 < e^{-\frac{1}{m}} < 1 \quad (\text{car } e = 1)$$

$$\text{donc } \forall m \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\frac{1}{m}} \in f(\mathbb{R}_+)$$

donc l'équation $f(x) = e^{-\frac{1}{m}}$ admet

une seule solution α_m .

$$f(\alpha_m) = e^{-\frac{1}{m}} > f(0) = 0 \text{ et } f \text{ strictement croissante} \Rightarrow \alpha_m > 0$$

b) $\begin{cases} f(\alpha_{m+1}) = e^{-\frac{1}{m+1}} \\ \text{et } f(\alpha_m) = e^{-\frac{1}{m}} \end{cases} \quad (1)$

$$\text{on a } \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{m+1} > -\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\frac{1}{m+1}} > e^{-\frac{1}{m}}} \quad (2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car la fonction} \\ \text{exponentielle} \\ \text{est strictement} \\ \text{croissante} \end{array} \right)$$

1) et (2) $\Rightarrow f(\alpha_{m+1}) > f(\alpha_m)$

$$\Rightarrow \alpha_{m+1} > \alpha_m \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\Rightarrow \alpha_{m+1} - \alpha_m > 0$$

$\Rightarrow$ la suite (α_m) est croissante

2) a) $\alpha_m > 0$ et $f(\alpha_m) = e^{-\frac{1}{m}}$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha_m} \right) e^{-\frac{1}{\alpha_m}} = e^{-\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \ln \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_m} \right) e^{-\frac{1}{\alpha_m}} \right] = \ln e^{-\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha_m} \right) + \ln e^{-\frac{1}{\alpha_m}} = -\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\alpha_m} + \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha_m} \right) = -\frac{1}{m}}$$

b) $\forall t > 0$

$$\bullet (1-t) - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2-1}{1+t} = -\frac{t^2}{1+t} \leq 0 \Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t} \quad (1)$$

$$\bullet (1-t+t^2) - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2+t^2+t^3-1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1-t+t^2 \geq \frac{1}{1+t}} \quad (2)$$

1) et (2) $\Rightarrow \forall t > 0 ; 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

$$c) \forall t > 0; 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \quad (3)$$

Car les fonctions sont continues sur $[0, x]$; $x > 0$

$$\text{donc } \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt$$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x \leq \left[\ln(1+t) \right]_0^x \leq \left[t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$d) \forall x > 0, -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

pour $x = \frac{1}{\alpha_m}$ la double inégalité reste vraie

$$\text{maître } -\frac{1}{2\alpha_m^2} \leq -\frac{1}{\alpha_m} + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_m}\right) \leq -\frac{1}{2\alpha_m^2} + \frac{1}{3\alpha_m^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\alpha_m^2} \leq -\frac{1}{\alpha_m} \leq -\frac{1}{2\alpha_m^2} + \frac{1}{3\alpha_m^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\alpha_m^2} \leq \frac{1}{\alpha_m} \leq \frac{1}{2\alpha_m^2} + \frac{1}{3\alpha_m^3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{3\alpha_m} \leq \frac{2\alpha_m^2}{m} \leq 1 \quad (\text{multiplication par } 2\alpha_m^2 > 0)$$

$$3) \alpha_4 \text{ solution de l'équation } f(x) = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\alpha_4) = e^{-\frac{1}{4}} \\ f(1) = 2e^{-1} \quad (1) \end{cases}$$

$$e^{\frac{3}{4}} > 2 \Rightarrow e^{-1} \cdot e^{\frac{3}{4}} > 2e^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{-1+\frac{3}{4}} > 2e^{-1}$$

$$\Rightarrow \left\{ e^{-\frac{1}{4}} > 2e^{-1} \right\} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow f(\alpha_4) > f(1)$$

$$\Rightarrow \alpha_4 > 1 \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante})$$

• (α_m) orne suite croissante strictement

$$\text{donc } \forall m > 4 \text{ on a } \alpha_m > \alpha_4$$

$$\text{or } \alpha_4 > 1$$

$$\text{donc } \forall m > 4 \text{ on a } \alpha_m > 1$$

$$4) a) \text{ d'après II) } 2) \text{ d) on a } \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{2\alpha_m^2}{m} > 1 - \frac{2}{3\alpha_m}$$

$$\Rightarrow \left| \alpha_m^2 > m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha_m} \right) \right| \quad (1)$$

$$\text{or } \forall m > 4 \text{ on a } \alpha_m > 1 \Rightarrow 3\alpha_m > 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\alpha_m} < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3\alpha_m} > -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha_m} > \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \left| m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha_m} \right) > \frac{m}{6} \right| \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall m > 4; \alpha_m^2 > \frac{m}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha_m > \sqrt{\frac{m}{6}}$$

$$\text{on a } \alpha_m > \sqrt{\frac{m}{6}} \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{6}} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = +\infty$$

$$b) \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a :}$$

$$1 - \frac{2}{3\alpha_m} \leq \frac{2\alpha_m^2}{m} \leq 1 \quad (\text{d'après 2) a) 1)}$$

$$\text{on sait que } \forall m > 4, \alpha_m > 1$$

$$\text{donc } \forall m > 4$$

$$0 \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_m} \leq \frac{2\alpha_m^2}{m} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{3\alpha_m}} \leq \alpha_m \sqrt{\frac{2}{m}} \leq 1$$

$$\text{comme } \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{2}{3\alpha_m}} = 1 \quad (\text{car } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = +\infty) \\ \text{et } \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \sqrt{\frac{2}{m}} = 1$$

Ex 3

(4)

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ pour } x \in [1, +\infty[$$

1) a) la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est polynôme continue et positive sur $[1, +\infty[$

donc $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$

donc $x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$ est continue

et strictement positive sur $[1, +\infty[$

donc $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est continue

sur $[1, +\infty[$ donc f est continue

sur $[1, +\infty[$

conclusion : f est continue sur $[1, +\infty[$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1} \times \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1} \times \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1} \right]^{+1} \times \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x-1}\right)^{+\infty}$$

$= +\infty$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1} = 1 \right)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x-1} = +\infty$$

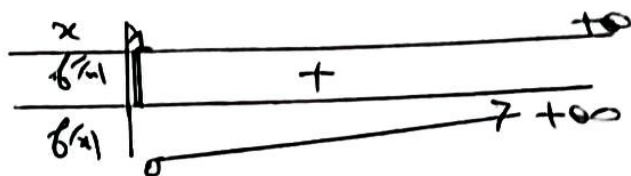
$$\text{ma } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} \quad (\text{car } f(1) = 0)$$

$= +\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 1
Graphique (c) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point de coordonnées $(1, f(1) = 0)$

c) f est dérivable sur $]1, +\infty[$ d'où $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = +\infty)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x}$$

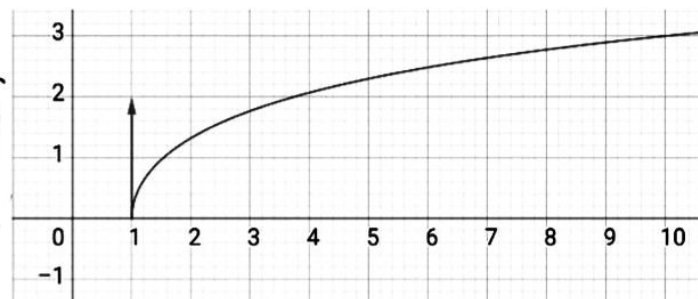
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{+0} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})$$

$= 0$ donc (c) admet une BI passant l'origine de direction $(0, 1)$ ou $y = +\infty$



2) f est continue strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) =]0, +\infty[$

$$b) y(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \xrightarrow{f} &]0, +\infty[\\ y & \mapsto & x \\ g = f^{-1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 1} = e^x - y \Leftrightarrow y^2 - 1 = (e^x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = e^{2x} - 2ye^x + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(3) Let \$f\$ be defined on \$[0, +\infty[\subset \mathbb{R}\$ by

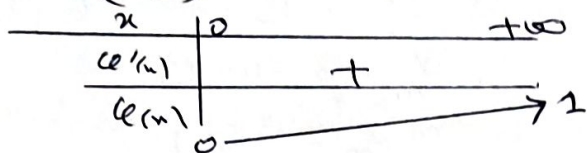
$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Let \$f\$ be derivable on \$[0, +\infty[\subset \mathbb{R}\$ and \$\forall x \ge 0\$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x} - e^{2x} + 1 + 1 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

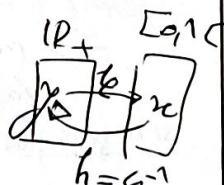
$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1 \end{aligned}$$

Let \$f\$ be strictly increasing on \$\mathbb{R}_+\$ and let \$f\$ be a bijection from \$\mathbb{R}_+\$ to \$\mathbb{R}_+\$
 $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0, 1[$

b) i) $\begin{cases} h(x) = y \\ x \in [0, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} + 1} - \frac{2}{e^{2y} + 1} = x \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^{2y} + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{e^{2y} + 1} = 1 - x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{2}{1-x} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in [0, 1[$$

ii) \$x \mapsto \frac{1+x}{1-x}\$ is strictly increasing on \$\mathbb{R}_+\$ and is a bijection from \$\mathbb{R}_+\$ to \$\mathbb{R}_+\$
 on \$[0, 1[\subset \mathbb{R}\$ and \$\forall x \in [0, 1[\subset \mathbb{R}\$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1-x}{1-x} + \frac{1+x}{1-x}}{\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

(5)

4) a) \$m \in \mathbb{N}^*\$, \$x \in [0, 1[\subset \mathbb{R}\$

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$
 For \$k \in \mathbb{N}^*\$, \$\int_0^x t^{2k-2} dt = \left[\frac{1}{2k-1} t^{2k-1} \right]_0^x = \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\$

hence \$S_m = \sum_{k=1}^m \left(\int_0^x t^{2k-2} dt \right) \quad \forall x \in [0, 1[\subset \mathbb{R}\$

$$= \int_0^x \left(\sum_{k=1}^m t^{2k-2} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^m (t^2)^{k-1} \right) dt$$
 since \$\sum_{k=1}^m (t^2)^{k-1} = \frac{1 - (t^2)^m}{1 - t^2}\$

$$= \int_0^x 1 \cdot \frac{1 - (t^2)^m}{1 - t^2} dt$$

$$= \int_0^x \frac{1 - t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$= \int_0^x h'(t) dt - \int_0^x \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$= [h(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$= h(x) - \int_0^x \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

b) \$S_m(1/3) = h(1/3) - \int_0^{1/3} \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt\$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1) 3^{2k-1}} = h(1/3) - \int_0^{1/3} \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^{1/3} \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$\text{impose } v_m = \int_0^{1/3} \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} \ln 2 - v_m \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

\$\forall t \in [0, 1/3]\$: \$0 \le (t^2)^2 \le 1/9\$

$$\Rightarrow -\frac{1}{9} \leq -t^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{8}{9} \leq 1 - t^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1 - t^2} \leq \frac{9}{8} \Rightarrow 0 \leq \frac{t^{2m}}{1 - t^2} \leq \frac{9}{8} t^{2m}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{1/3} \frac{t^{2m}}{1 - t^2} dt \leq \frac{9}{8} \int_0^{1/3} t^{2m} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq v_m \leq \frac{9}{8} \left[\frac{1}{2m+1} t^{2m+1} \right]_0^{1/3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq v_m \leq \frac{9}{8(2m+1)} \left(\frac{1}{3} \right)^{2m+1}$$

hence \$\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = 0\$

then \$\lim_{m \rightarrow +\infty} U_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln 2 - v_m \right) = \frac{1}{2} \ln 2\$

Ex 2

1)

(6)

$$3^0 \equiv 1 [5]; 3^1 \equiv 3 [5], 3^2 \equiv 4 [5], 3^3 \equiv 2 [5] \\ \text{et } 3^4 \equiv 1 [5]$$

Soit $m \in \mathbb{N}$

- si $m \equiv 0 [4] \Rightarrow 3^m \equiv 1 [5]$
- si $m \equiv 1 [4] \Rightarrow 3^m \equiv 3 [5]$
- si $m \equiv 2 [4] \Rightarrow 3^m \equiv 4 [5]$
- si $m \equiv 3 [4] \Rightarrow 3^m \equiv 2 [5]$

$$b) 2022 \equiv 2 [4] \Rightarrow 3^{2022} \equiv 4 [5]$$

$$2023 \equiv 3 [4] \Rightarrow 3^{2023} \equiv 2 [5]$$

$$2024 \equiv 0 [4] \Rightarrow 3^{2024} \equiv 1 [5]$$

$$\Rightarrow 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024} \equiv 7 [5]$$

$$\Rightarrow d \equiv 2 [5] \Rightarrow \text{reste modulo 5 est } 2$$

$$b) m \text{ a } 3 \equiv 1 [2] \Rightarrow \begin{cases} 3^{2022} \equiv 1 [2] \\ 3^{2023} \equiv 1 [2] \\ \text{et } 3^{2024} \equiv 1 [2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024} \equiv 3 [2]$$

$$\Rightarrow n \equiv 1 [2]$$

$$\text{on a } \begin{cases} d \equiv 2 [5] \\ \text{et } d \equiv 1 [2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \equiv 2+5 [5] \\ \text{et } d \equiv 1+6 [2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d-7 \equiv 0 [5] \\ \text{et } d-7 \equiv 0 [2] \\ \text{et } 2 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow d-7 \equiv 0 [10]$$

$$\Rightarrow d \equiv 7 [10]$$

$$\Rightarrow d^2 \equiv 49 [10]$$

$$\Rightarrow d^2 \equiv 9 [10]$$

$\Rightarrow$ le chiffre des unités de d^2 est 9

3) a)

Reste modulo 5 de x	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de x^2	0	1	4	4	1

$$b) n \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3^{4mn}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3^{4mn} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 \equiv 3^{4mn} - 1 [5] \quad (1)$$

$$\text{d'op' 2) } 3^{4mn} \equiv 3 [5]$$

$$\Rightarrow 3^{4mn} - 1 \equiv 2 [5] \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow x^2 \equiv 2 [5]$$

Ceci est impossible car d'après le tableau de longues de x^2 modulo 5, les restes modulo 5 de x^2 sont 0, 1 ou 4

donc l'équation (E) n'admet pas de solution

$$(4) \begin{cases} m \equiv 2025 [4] \\ d_m - 3^m \equiv 4 [5] \end{cases}$$

$$\bullet m \equiv 2025 [4] \Leftrightarrow m \equiv 1 [4] \quad (1)$$

$$\bullet \text{ si } m \equiv 1 [4] \text{ d'après l'équation 1) } 3^m \equiv 3 [5]$$

$$\text{pour } m \equiv 1 [4]; d_m - 3^m \equiv 4 [5] \text{ devient:}$$

$$d_m - 3 \equiv 4 [5]$$

$$\Rightarrow d_m \equiv 7 [5]$$

$$\Rightarrow d_m \equiv 2 [5] \quad (2)$$

$$\begin{cases} m \equiv 2025 [4] & (1) \text{ et } (2) \\ d_m - 3^m \equiv 4 [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 1 [4] \\ d_m \equiv 2 [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 1 [4] \\ 4m - 2 \equiv 2 [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 1 [4] \\ 4m - 4 \equiv 0 [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 1 [4] \\ 4(m-1) \equiv 0 [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \equiv 0 [4] \\ \text{et } m-1 \equiv 0 [5] \end{cases}$$

$$\text{Remarque: } \begin{cases} a \cdot b \equiv 0 [m] \\ \text{et } a \wedge m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b \equiv 0 [m]$$

$$\Rightarrow m-1 \equiv 0 [4 \times 5]$$

$$\Rightarrow m \equiv 1 [20] \Rightarrow m = 1 + 20k, k \in \mathbb{N}$$

on a également, si $m = 1 + 20k, k \in \mathbb{N}$

$$\text{soit } \begin{cases} m-1 = 20k \equiv 0 [4] \\ \text{et } m-1 = 20k \equiv 0 [5] \end{cases}$$

$$\text{donc } n \text{ solution du système } \begin{cases} m \equiv 2025 [4] \\ d_m - 3^m \equiv 4 [5] \end{cases}$$

$$\text{Si } m = 1 + 20k, k \in \mathbb{N}$$

- $(OA) \perp (OB)$ sunt perpendiculare

$$\zeta_{(OA)} \circ \zeta_{(OB)}(F) = E \Leftrightarrow \zeta_A(F) = E$$

2) 95 la probabilidad de muerte que sufre
o en A el B por θ

$$\begin{cases} S(0) = A \\ S(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{d'angle } \odot \text{ eq } \vartheta = (\vec{0}_B, \vec{AO}) (2\pi)$$

Donc S de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \underline{S(H) \in S(OH) \cap S(Ag)} \quad (1)$$

Soit une courbure donnée d'angle $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S \subset (OH)^+$ nr de Lati pappard'uloin

$\bar{a}(\text{OH})$ percent per $S(\text{O}) = A$

$$\Rightarrow |S \langle OH \rangle = (AB)| \quad (2)$$

- S d'angle $\frac{\pi}{2} \Rightarrow S \angle (AP) > \text{or } 60$

Ces perpendiculaires $\varepsilon(AB)$ passent

pas $(p) = 0 \Rightarrow \sqrt{S \langle AB \rangle = (OH) / 3}$

$$(1), (2) \Rightarrow S(H) \in (AB) \cap (OH) \Rightarrow S(H) = H$$

Soit une prunelle droite de rapport $b=2 \neq 1$
et tq $S(H) = H$ donc H est le centre de S

Autrement-

on pose H_2 le centre de S ; s d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$s(0) = A \Rightarrow (\vec{H}_n, \vec{H}_n A) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow H_n \in \mathcal{G}_{[OA]}$$

$$\bullet S(B) = 0 \Rightarrow (\vec{H}_n^B, \vec{H}_n^O) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow H_1 \in \mathcal{C}(O, P_1)$$

don $H_1 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}$

$$\Rightarrow H_n \in \{0, H\} \quad (1)$$

2. $g(0) = A \neq 0 \Rightarrow H_1 \neq 0(\mathbb{R})$

$$(1) \text{ d } (2) \Rightarrow H_n = H$$

Conclusion: 5 of center H

3) la forme complexe de s est

$$z' = az + b \quad \text{avec } a = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{rapport de longueur} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow z' = 2iz + b$$

$$S(u) = A \Rightarrow z_A = 2i z_0 + b$$

$$\Rightarrow z = 2 \cdot x_0 + b \Rightarrow b = 2$$

donc la forme complexe de f est $z' = 2iz + 2$

b) S-danke H dann $z_H = \frac{b}{1-a}$

$$\Rightarrow z_H = \frac{2}{1-2i} \Rightarrow z_H = \frac{2(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_H = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$E = \sum_{i=1}^n (H_i)^2 \Rightarrow \bar{E} = \overline{\sum H_i^2} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$F = \oint_C (\mathbf{E}) = \oint_F = -\oint_E = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

c) $z'_F = 2iz_F + 2 \Rightarrow z'_F = 2i \times (-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i) + 2$

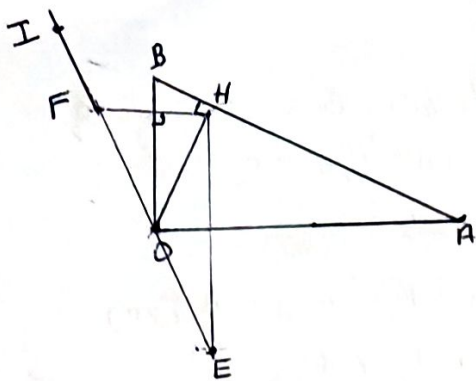
$$\Rightarrow z'_F = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i = z_F \Rightarrow S(F) = \mathbb{E}$$

$$\begin{cases} S(0) = A \\ S(F) = E \\ S \text{ surjectif } 2 \end{cases} \Rightarrow EA = 2 \circ F \Rightarrow EA = EF \quad (\text{car } 0 = E * F)$$

(4) 6 symbols in direct to } $\begin{cases} 6(H) = F \\ 6(E) = H \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{6de wapppt } \frac{FH}{EH} \Rightarrow \text{6de wapppt } \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{or } S(F) = E \\ S \text{ document 14} \\ \text{de wapppt 2} \\ \Rightarrow HE = 2 HF \\ \Rightarrow \frac{FH}{HE} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

(8)



$$b) \begin{cases} \sigma(E) = H \\ \sigma(H) = F \end{cases} \Rightarrow \sigma \circ \sigma(E) = F \quad (1)$$

or σ similitude indirecte de rapport $k = \frac{1}{2} \neq 1$

$$\Rightarrow \sigma \circ \sigma = h_{(I, (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4})} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow h_{(I, \frac{1}{4})}(E) = F$$

$$\Rightarrow \vec{IF} = \frac{1}{4} \vec{IE}$$

$$\Rightarrow \vec{IE} = 4 \vec{IF}$$

Construction de I

$$\vec{IE} = 4 \vec{IF} \Leftrightarrow \vec{IE} - 4 \vec{IF} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow I$ barycentre des points pondérés $(E, 1)$ et $(F, -4)$

$$\text{donc } \vec{EI} = \frac{4}{3} \vec{EF}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} \vec{EF}$$

Rappel

$$\alpha + \beta \neq 0, G \text{ barycentre des p.p. } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta)$$

$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \text{ et } \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}$$

$\sigma(H) = F \Rightarrow \sigma$ d'axe Δ la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\vec{IH}, \vec{IF})$

$$(5) \quad \sigma = \sigma \circ \sigma$$

$$\sigma(H) = \sigma \circ \sigma(H) = \sigma(F) = F$$

$$\sigma(F) = \sigma \circ \sigma(F) = \sigma(E) = H$$

b)

σ est une similitude directe de rapport 2
or σ est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sigma = \sigma \circ \sigma$ est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow \sigma$ est un anti-déploiement

$\Rightarrow \sigma$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante

$$\text{Soit } J = F * H$$

$$\text{on a } \sigma(J) = \sigma(F) * \sigma(H)$$

$$\Rightarrow \sigma(J) = H * F$$

$$\Rightarrow \sigma(J) = J$$

σ est un anti-déploiement qui

fixe J

$\Rightarrow \sigma$ est une symétrie orthogonale

$\sigma(H) = F \Rightarrow \sigma$ est une symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [HF]

$$\Rightarrow \sigma = \sigma \quad (03)$$

