

Exercice 1

Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 - \cos 2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.

1.(a) Montrer que la fonction f est 2π -périodique.

(b) Montrer que la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

(c) En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{2x - \pi}$.

3. Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos x}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Justifier la continuité de la fonction g en 0.

(b) Étudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos 4x + 2 \sin 2x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

1.(a) Démontrer que f est périodique de période π .

(b) Montrer que la droite d'équation : $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

(c) En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

2.(a) Vérifier que : $f'(x) = 4 \cos 2x (2 \sin 2x - 1)$.

(b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I .

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ relativement à l'intervalle $I = [-\pi, \pi]$.

Exercice 4

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x - \sin^2 x$.

(a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi]$.

(b) Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)}{\cos^2 x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) Montrer que g est continue en $\frac{\pi}{2}$.

(b) Étudier la dérivabilité de g en $\frac{\pi}{2}$.

(c) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.(a) Montrer que pour tout réel x on a : $\sin x + \sin 2x = \sin x(1 + 2\cos x)$.

(b) En déduire le domaine de définition de f .

2.(a) Montrer que pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$ on a : $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

(b) Montrer que f est continue à droite en 0.

(c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3. Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $[0, \pi]$.

4. Étudier les variations de f .