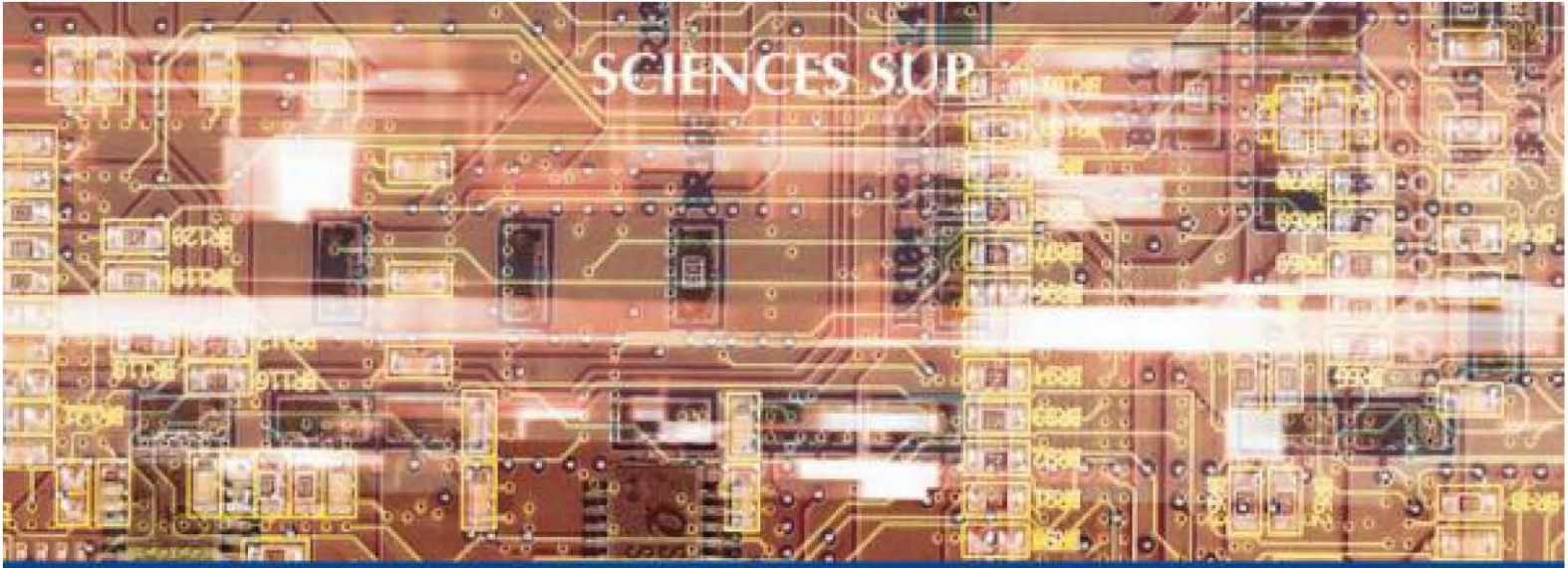


Cours et exercices corrigés

Licence 3 • Écoles d'ingénieurs

PRINCIPES DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Daniel Dixneuf
Fabien Bellouvet

DUNOD

Consultez nos catalogues sur le Web



www.dunod.com

Illustration de couverture : *Digitalvision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.



Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2007
ISBN 978-2-10-050178-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Copyright © 2007 Dunod.

Table des matières

Introduction V

PARTIE 1 :
COMPOSANTS ÉLECTRIQUES 1

1 Notion d'électromagnétisme 3
1.1 Organisation de la matière 4
1.2 Sources électromagnétiques 6
1.3 Éléments mathématiques 10
1.4 Grandeurs physiques électriques 14
1.5 Grandeurs physiques magnétiques 25
Pour en savoir plus… 28
Cahier d'évaluation 32

2 Composants électriques élémentaires 35
2.1 Résistance 36
2.2 Sources électriques 39
2.3 Condensateur 46
2.4 Inductance 51
Pour en savoir plus… 54
Cahier d'évaluation 58

3 Dipôles et quadripôles 61
3.1 Dipôles 62
3.2 Associations de dipôles 67
3.3 Quadripôles 74
3.4 Association de quadripôles 80
Pour en savoir plus… 82
Cahier d'évaluation 85

4 Modélisation de composants électriques 89
4.1 Notion de modèle électrique 90
4.2 Modélisation linéaire statique 94
4.3 Modélisation linéaire dynamique 106
Pour en savoir plus… 109
Cahier d'évaluation 113

PARTIE 2 : ÉTUDE
DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES 117

5 Caractérisation et mise en équation 119
5.1 Introduction à l'étude des circuits électriques 120
5.2 Théorie des graphes appliquée aux circuits 126
5.3 Équations différentielles associées aux circuits 141
5.4 Études différenciées des circuits électriques 145
Pour en savoir plus… 151
Cahier d'évaluation 154

6 Étude en régime permanent continu 157
6.1 Conditions d'étude en régime permanent continu 158
6.2 Transformation des circuits en RPCC 162
6.3 Mise en équation et résolution 167
6.4 Règles et théorème usuels 170
6.5 Réduction des circuits électriques 175
6.6 Puissance en RPCC 182
Pour en savoir plus… 186
Cahier d'évaluation 192

7 Étude en régime permanent alternatif sinusoïdal à fréquence fixe (RPCA) 195
7.1 Conditions d'étude en régime permanent sinusoïdal 196
7.2 Modélisation des circuits sous forme complexe 199
7.3 Modélisation opérationnelle 207

Copyright © 2007 Dunod.

7.4 Calcul de la puissance en RPCA 219
Pour en savoir plus… 225
Cahier d'évaluation 228

8 Superposition des régimes permanents 231
8.1 Conditions d'étude 232
8.2 Modélisation par la série de Fourier 233
8.3 Modélisation opérationnelle 239
8.4 Puissance continue et puissance harmonique 244
Cahier d'évaluation 246

9 Régime permanent à fréquence variable 251
9.1 Modélisation des circuits à fréquence variable 252
9.2 Dipôles passifs à fréquence variable 253
9.3 Étude des quadripôles à fréquence variable 260
9.4 Représentations fréquentielles 269
9.5 Modélisation opérationnelle 280
Pour en savoir plus… 287
Cahier d'évaluation 290

10 Étude en régime transitoire (RT) 295
10.1 Conditions d'étude des circuits en régime transitoire 296
10.2 Systèmes différentiels du 1er et du 2e ordre 300
10.3 Systèmes différentiels du *n*-ième ordre 312
10.4 Système d'état 318
10.5 Modélisation opérationnelle 321
Pour en savoir plus… 326
Cahier d'évaluation 328

PARTIE 3 : APPLICATIONS 331

11 Modélisation des réseaux alternatifs 333
11.1 Réseaux électriques alternatifs 334
11.2 Modélisation du réseau alternatif triphasé 337
11.3 Réseau alternatif monophasé 348
Pour en savoir plus… 355

12 Modélisation du transformateur électrique 357
12.1 Principes et constitution du transformateur électrique 358
12.2 Modèle du transformateur en basse fréquence 364
12.3 Modèle du transformateur en haute fréquence 372
Pour en savoir plus… ??
Cahier d'évaluation ??

13 Composants semi-conducteurs 381
13.1 Diode de redressement 382
13.2 Diode Zener 385
13.3 Transistor bipolaire 388
13.4 MOSFET 396
Pour en savoir plus… 378

14 Amplificateur opérationnel 405
14.1 Modélisation de l'amplificateur opérationnel 406
14.2 Fonctionnement en réaction 411
14.3 Fonctionnement dynamique linéaire 415
14.4 Fonctionnement dynamique non linéaire 419
Pour en savoir plus… 424

Solution 429

Index 469

Copyright © 2007 Dunod.

Introduction

Il est aujourd'hui difficile de définir précisément l'origine du premier circuit électrique. Néanmoins, les premières véritables études des phénomènes électriques datent du XVIIIe siècle. Des manipulations divertissantes de l'Abbé Nollet destinées aux courtisans de Louis XV (1746), jusqu'aux expériences désormais célèbres de Benjamin Franklin (1752), ainsi que les manifestations de la « fée électricité » ne manquaient alors pas d'éveiller les esprits curieux.

Très rapidement, l'exploitation des propriétés de l'électricité ont conduit à développer et moderniser nombre d'applications au service de la communauté humaine. Ainsi, en 1838, le premier télégraphe électrique entre Londres et Birmingham remplace le télégraphe visuel des frères Chappe. Ensuite, au fil du temps, la complexité des circuits n'a eu de cesse de croître. Déjà en 1881, une centrale électrique pouvant alimenter 1 200 ampoules à incandescence éclaire Manhattan en remplacement des becs de gaz. Aujourd'hui, les limites des circuits électriques atteignent des extrêmes : l'infiniment grand avec la production et le transport de l'électricité, tissant une toile électrique à l'échelle de la planète, et l'infiniment petit à travers la fabrication des circuits intégrés, associant plusieurs millions de composants dans moins d'un centimètre carré.

Un circuit électrique possède une réalité matérielle. L'étude de son comportement passe par une représentation de celui-ci. Sa représentation graphique, le *schéma électrique* développé, substitue aux composants du circuit un ensemble d'éléments à plusieurs bornes, de comportement prédéfini : les *dipôles* et les *quadripôles*.

Cependant, l'opération qui consiste à dresser le schéma électrique d'un circuit, implique inévitablement la formulation d'hypothèses sur le comportement, *a priori*, de chaque composant. En ce sens, dipôles et quadripôles constituent une modélisation du fonctionnement des composants, en explicitant les lois physiques qui les gouvernent.

Cette modélisation conduit à la définition d'une ou plusieurs relations caractéristiques liant l'évolution du courant traversant l'élément et la tension entre ses bornes.

En général, cette ou ces relations s'expriment mathématiquement sous la forme d'équations différentielles. De plus, les composants d'un circuit présentant, par nature, un fonctionnement non linéaire, il convient de leur associer un modèle linéaire équivalent. Le schéma électrique, combinant des dipôles et quadripôles linéaires et répondant à des lois d'association, est alors représenté mathématiquement par un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

L'étude du fonctionnement d'un circuit électrique consiste à déterminer, par différentes méthodes de calcul, l'évolution des tensions et courants dans ses composants. Pour ceci, il est nécessaire de fixer le cadre de l'étude, de modéliser le circuit par son schéma électrique, de dresser le système d'équations différentielles linéaires, puis enfin de le résoudre.

Copyright © 2007 Dunod.

La complexité du modèle équivalent associé au circuit est conditionnée par le nombre et la nature des élements présents dans le schéma électrique, ainsi que de leur agencement. Pour un même circuit électrique, on imagine qu'un modèle équivalent trop simple ne restitue pas le comportement réel du circuit, et qu'un modèle trop élaboré devient vite très complexe à étudier.

Pour surmonter les difficultés inhérentes à l'étude d'un schéma électrique, il convient d'abord de simplifier le schéma pour l'ajuster à la précision des résultats souhaités, puis d'utiliser une méthode adaptée pour la résolution des équations.

Dans cet ouvrage, après avoir rappelé les principes physiques fondamentaux des phénomènes électriques, les auteurs s'attachent à établir progressivement des méthodes pour l'étude des circuits, que le lecteur s'appropriera aisément au travers des nombreux exercices.

L'importance d'une modélisation du circuit adaptée au contexte d'étude, constitue la trame de l'ouvrage. Un même circuit donne en effet lieu à des schémas électriques différents selon le contexte de son étude. Le domaine de validité des lois ou des méthodes, présentées dans l'ouvrage, est toujours bien précisé : toute modélisation sous-tend une simplification de la réalité, qui possède toujours des limites qu'il convient d'avoir présentes à l'esprit.

L'ouvrage ne constitue en aucun cas un recueil de lois et de théorèmes. En effet, le choix des éléments présentés, des explications et des méthodes, est le fruit de l'expérience pédagogique des auteurs auprès des publics variés de la formation initiale et de la formation continue de l'enseignement supérieur. Toutefois, cet ouvrage, plus que tout autre, propose des apports justifiés issus d'autres domaines de l'enseignement technique, comme l'électrotechnique, l'électronique et l'automatique. Le lecteur doit garder en mémoire qu'une connaissance approfondie des méthodes d'études des circuits est nécessaire pour aborder l'étude de toute discipline relevant du génie électrique.

Le livre, scindé en trois parties, comporte quatorze chapitres. Chacun d'entre eux se termine par un « Pour En Savoir Plus » apportant des informations complémentaires ou des rappels, ainsi que par un « Cahier d'Évaluation » regroupant de nombreux exercices d'applications, tous corrigés en fin d'ouvrage.

La première partie de l'ouvrage, résolument physique, est consacrée à la caractérisation et la représentation des composants électriques conduisant à l'établissement d'un modèle du circuit. La seconde partie, plus technique, se fixe pour objectif de présenter des méthodes mathématiques adaptées pour la détermination des grandeurs électriques dans les circuits. Au terme de ces deux parties, le lecteur possède les clés pour mener à bien l'étude du fonctionnement d'un circuit électrique dans son contexte. La troisième partie est de nature applicative. Les méthodes et principes précédemment exposés y trouvent un vaste champ d'application dans l'étude complète de systèmes électriques.

Cet ouvrage est destiné à accompagner le lecteur dans une démarche d'apprentissage (ou de complément d'apprentissage) sans connaissances préalables spécifiques à l'électricité. Toutefois, pour en suivre convenablement le déroulement, le lecteur est supposé connaître les bases de l'arithmétique complexe et du calcul intégro-différentiel. De plus, une formation en électromagnétisme est vivement conseillée pour aborder sereinement la lecture des deux premiers chapitres.

Les auteurs, de formations complémentaires (un professeur de Physique Appliquée et un professeur de Génie Électrique), se sont réparti la rédaction de l'ouvrage pour mettre à

Copyright © 2007 Dunod.

profit leurs propres expériences pédagogiques et industrielles. Monsieur F. Bellouvet a rédigé la première partie, plus proche du domaine des sciences physiques, tandis que la deuxième partie, propre au domaine du génie électrique, a été traitée par Monsieur D. Dixneuf. La troisième partie constitue une mutualisation des compétences de chacun.

Remerciements :

Nous tenons à adresser toute notre gratitude à Monsieur D. Decobecq, éditeur chez DUNOD, pour avoir cru en ce projet. Sans sa confiance, cet ouvrage n'aurait peut-être pas vu le jour.

Un grand merci à Danielle Barthares et Sophie Beauvallet qui ont su habilement corriger les multiples versions des textes. Nous leur sommes aussi redevables des conseils, du soutien qu'elles nous ont apportés tout au long de ce travail, et de leur infinie patience.

L'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes doit également être associée à ces remerciements pour la mise à disposition de moyens matériels pour la réalisation de cet ouvrage.

Enfin, que les futurs lecteurs trouvent, par avance, l'expression de notre gratitude pour toutes leurs remarques et suggestions à venir.

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

Composants électriques

PARTIE 1

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 1

Notion d'électromagnétisme

Objectifs

- Présenter les sources des phénomènes électromagnétiques.
- Définir la notion de champ électromagnétique.
- Présenter les opérateurs mathématiques caractérisant l'influence d'un champ électromagnétique.
- Présenter les lois physiques liant les grandeurs électromagnétiques aux sources de celles-ci.
- Définir les grandeurs physiques scalaires nécessaires à l'analyse d'un circuit électrique.

Vocabulaire

Charge électrique
Courant électrique
Champ électromagnétique
Tension électrique
Intensité électrique
Puissance électrique

Ce chapitre propose de présenter et définir les grandeurs électromagnétiques caractérisant le fonctionnement de composants électriques. Celles-ci reposant en grande partie sur le formalisme physique de champ, il sera proposé un rapide rappel sur ce type de notion. Les opérateurs mathématiques associés seront également présentés. Après avoir caractérisé les sources des effets électriques, les processus électromagnétiques engendrés seront détaillés pour conduire aux trois grandeurs électriques fondamentales : la tension, l'intensité et la puissance électriques. Une présentation des effets magnétiques résultant de la circulation de courants électriques viendra compléter cette présentation.

Copyright © 2007 Dunod.

1.1 ORGANISATION DE LA MATIÈRE

1.1.1 Structure de la matière

Toute matière (vivante ou inerte) est composée de molécules dont l'agencement en conditionne la nature et les propriétés (composés organiques, minéraux, métaux...).

Les molécules sont elles-mêmes constituées de particules élémentaires, de nature différente ou non, appelées atomes (du grec $\alpha\tau o\mu o\varsigma$: que l'on ne peut diviser).

Cette appellation sembla être justifiée jusqu'au jour où l'on mit en évidence que chaque atome pouvait être assimilé à un noyau autour duquel orbitait un cortège d'électrons, à la manière de planètes autour d'un soleil.

C'est la vision de la structure de la matière que bon nombre d'entre nous possède. Celle-ci suffit pour se représenter une grande partie des phénomènes électriques. Mais pourtant, depuis les années 1970, il a été mis en évidence expérimentalement que le noyau était formé de nucléons (protons, neutrons) eux-mêmes constitués de trois quarks.

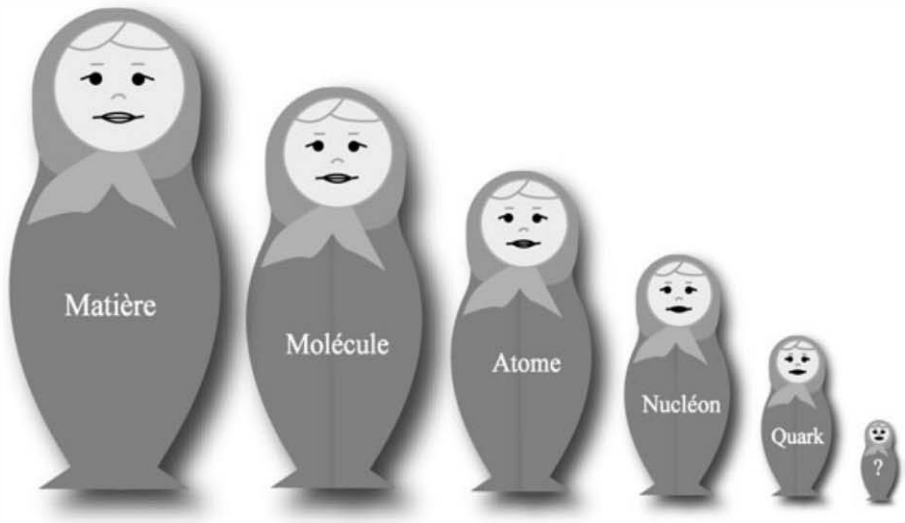


Figure 1.1

Ainsi la structure de la matière peut-elle être assimilée à un ensemble de poupées russes (figure 1.1). L'avènement d'accélérateur de particules de plus en plus puissant permettra peut-être un jour d'ouvrir une nouvelle poupée...

1.1.2 Interactions fondamentales

La matière qui nous entoure est structurée et animée par différentes forces qui résultent, sur un plan macroscopique, d'interactions entre les particules décrites précédemment.

Toutes ces interactions se réduisent, d'après notre niveau actuel de connaissances, à quatre interactions dites fondamentales que nous avons classées par ordre d'intensité décroissante.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Interaction nucléaire forte***

L'interaction nucléaire forte assure la cohésion des nucléons à l'intérieur du noyau des atomes. Elle engendre des effets d'attraction entre les quarks constituant les nucléons. Cette force de très courte portée ne se manifeste que sur des distances de l'ordre de 10^{-13} cm.

➤ ***Interaction électromagnétique***

L'interaction électromagnétique se manifeste sur tout corps matériel ou particule chargé électriquement. Celle-ci assure la cohésion des atomes et, par voie de conséquence, celle des molécules. C'est donc cette interaction qui régit l'univers à notre échelle. Elle engendre des effets attractifs ou répulsifs qui se compensent en très grande partie, à une échelle macroscopique. De très longue portée, elle possède une intensité environ cent fois plus faible que l'interaction nucléaire forte.

➤ ***Interaction nucléaire faible***

L'interaction nucléaire faible conditionne le comportement de particules très instables et de durée de vie très courte (antiparticules, mésons, leptons, neutrinos...).

Celle-ci se manifeste par un effet d'attraction entre toute particule sur des distances n'excédant pas 10^{-16} cm. Son intensité est dix millions de fois plus faible que l'interaction nucléaire forte.

➤ ***Interaction gravitationnelle***

L'interaction gravitationnelle agit de façon universelle sur toute particule possédant une masse. Son intensité est la plus faible parmi celles des quatre interactions (10^{36} fois plus faible que l'interaction nucléaire forte). Néanmoins, de très longue portée, son effet d'attraction est cumulatif et elle gouverne donc l'univers à grande échelle.

➤ ***Vers une théorie unifiée***

L'un des enjeux de la physique moderne consiste à édifier une théorie unifiée présentant l'ensemble des quatre interactions fondamentales comme quatre facettes d'une force unique gouvernant l'univers (figure 1.2).

Copyright © 2007 Dunod.

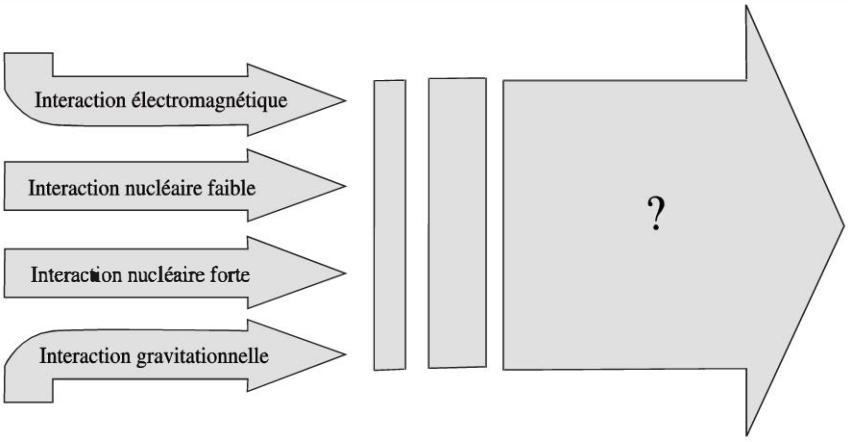


Figure 1.2

Cette quête a déjà connu un succès notable à la fin du XIXe siècle, quand James Clerk Maxwell a élaboré la théorie de l'électromagnétisme unifiant interaction électrique et interaction magnétique.

Après l'avènement d'une théorie électrofaible proposant une unification des interactions nucléaire faible et électromagnétique (Glashow, 1961), la « théorie des supercordes » semble ouvrir une nouvelle voie, mais la route est encore longue...

1.2 SOURCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Tous les effets électromagnétiques responsables du comportement électrique d'un composant trouvent leur origine dans la présence et le mouvement de **charges électriques**.

1.2.1 Charges électriques

➤ ***Définition***

La notion de charge électrique désigne, tout comme la masse, une caractéristique physique fondamentale de certaines particules. Il est difficile de déterminer l'origine de celle-ci ; on ne peut la mettre en évidence que par ses effets. Il en existe deux types : des **charges positives** et **négatives**. L'unité de charge électrique est le coulomb (C).

➤ ***Propriétés***

• Quantification

Toutes les expérimentations menées dans le cadre de la physique classique ont conduit à démontrer que la charge électrique Q portée par un corps était un multiple entier de celle portée par un électron.

On a donc tout naturellement attribué le nom de charge électrique élémentaire (notée q) à celle-ci. Sa valeur est de $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. De plus, il fut convenu d'attribuer arbitrairement un signe négatif à la charge portée par l'électron.

> ***Remarque*** **:** On assimile fréquemment la particule porteuse de la charge élémentaire à cette dernière. Ainsi, il est d'usage de considérer l'électron comme la charge élémentaire.

Les constituants des atomes sont chargés de la manière suivante :

– l'électron possède une **charge négative élémentaire** : $-q$;

– le proton possède une **charge positive élémentaire** : q ;

– le neutron ne possède aucune charge électrique.

Un atome comporte *a priori* autant d'électrons que de protons. Néanmoins, celui-ci peut, par différents procédés d'ionisation, perdre ou gagner des électrons.

Les atomes obtenus sont appelés ions : un ion présentant un excès d'électrons est un anion, alors que l'on qualifie de cation un ion ayant un déficit d'électrons.

Copyright © 2007 Dunod.

• Extensivité

La charge totale Q d'un système électrique correspond à la somme algébrique des charges élémentaires positives (N_+) et négatives (N_-) présentes dans la structure :

$$Q = qN_+ + (-q)N_- = (N_+ - N_-)q$$

En désignant par $N = N_+ - N_-$ le nombre d'électrons en déficit par rapport aux protons, la charge électrique s'exprime sous la forme : $Q = Nq$.

Une structure présentant un excès d'électrons ($N < 0$) est chargée négativement, alors qu'un déficit de ceux-ci ($N > 0$) lui confère une charge positive. Ainsi, la charge électrique totale Q d'une structure composée de plusieurs éléments est égale à la somme algébrique des charges portées par chacun des éléments qui la composent.

• Conservation

La charge totale d'une structure isolée (c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec son environnement) est constante. L'implication directe de cette propriété est que toute disparition d'une charge Q_1 à l'intérieur d'une surface fermée (surface délimitant un volume) ne peut trouver son origine que dans deux phénomènes :

– un départ de la charge Q_1 si elle est portée par des charges mobiles libres de se déplacer (figure 1-3a) ;

– une neutralisation de la charge Q_1 par l'arrivée d'une charge identique, mais opposée Q_2 (figure 1.3b).

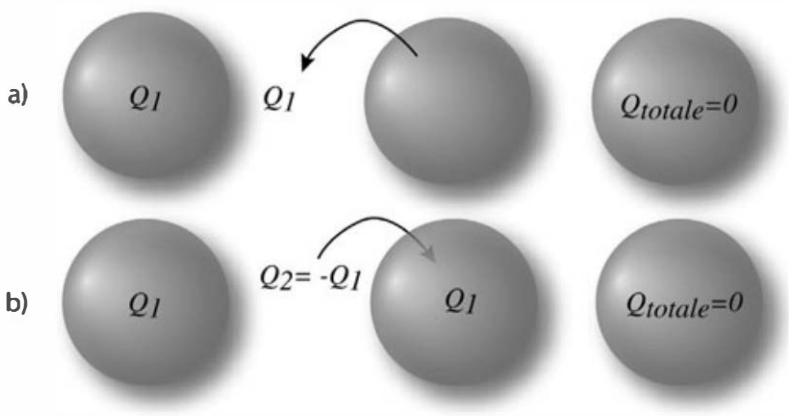


Figure 1.3

➤ ***Densité de charge électrique***

Un composant électrique placé dans un circuit peut être amené à accumuler des particules chargées dans sa structure, lors d'une séquence de fonctionnement. La charge est souvent répartie dans la structure de façon non uniforme, à l'échelle du composant.

Pour caractériser la répartition de la charge, on choisit de se placer à une échelle de l'ordre du micromètre. À cette échelle, on peut considérer que la charge est répartie de façon uniforme et continue, sans risquer de faire apparaître les discontinuités que l'on rencontrerait à l'échelle atomique (figure 1.4).

Copyright © 2007 Dunod.

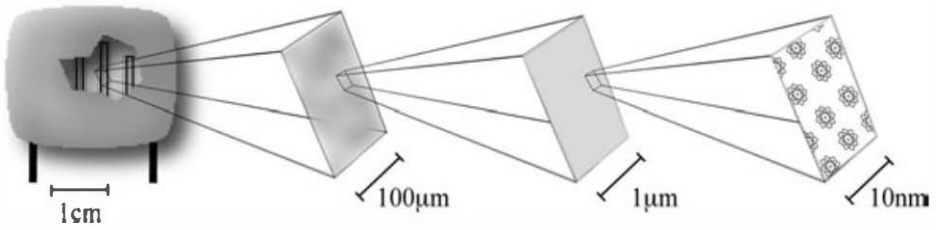


Figure 1.4

Les zones chargées peuvent ainsi être fractionnées en éléments de volume de faible dimension, dans lesquels on peut considérer que la charge est distribuée uniformément. On peut ainsi définir en tout point M une densité volumique $\rho(M)$ de charge exprimée en C/m^3 :

$$\rho(M) = n(M)q$$

où $n(M)$ désigne la densité d'électrons en déficit par unité de volume.

> ***Remarque*** : Dans certains cas de figure, l'organisation de la charge s'effectue sur une épaisseur très faible à la surface du composant. Pour traduire cette répartition, on envisage alors la définition en tout point M d'une densité surfacique de charge.

1.2.2 Courant électrique

➤ ***Définition***

On utilise le terme de **courant électrique** pour désigner un mouvement d'ensemble de porteurs de charge électrique (figure 1.5a). On note $\vec{v}$ la vitesse de ceux-ci.

Ce type de processus ne doit pas être confondu avec le mouvement désordonné des particules libres à l'intérieur de la structure résultant de l'agitation thermique (figure 1.5b). Dans ce dernier cas, la vitesse moyenne des porteurs de charges est nulle.

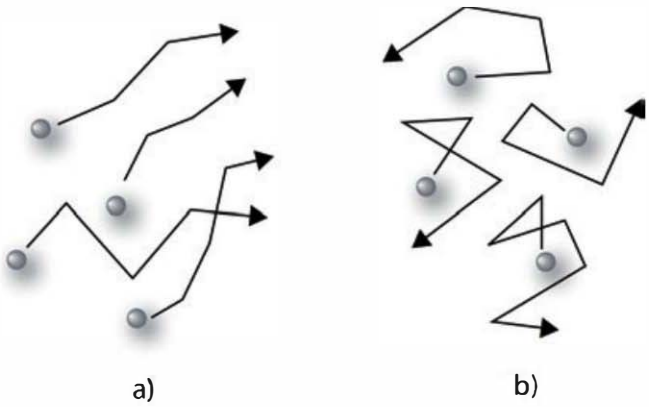


Figure 1.5

Dans un milieu qualifié de conducteur, la vitesse $\vec{v}$ correspond à la vitesse moyenne des porteurs. En effet, chacun d'entre eux subit des accélérations et décélérations brutales résultant de chocs avec le réseau cristallin du milieu.

Un courant électrique peut indépendamment trouver son origine dans un déplacement collectif d'électrons libres (dans un métal) ou d'ions (solution électrolytique, plasma).

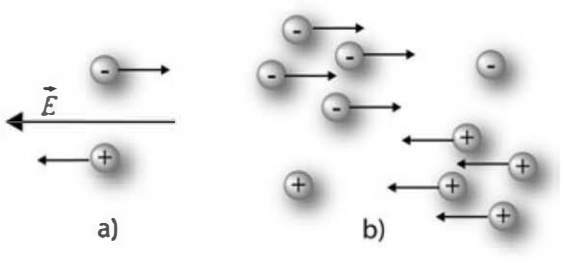


Figure 1.6

Copyright © 2007 Dunod.

Les courants électriques qui prennent naissance à l'intérieur des composants électriques ont différentes origines. Comme nous le verrons, certains résultent d'un mouvement collectif de porteurs sous l'effet d'une force électrique, et sont donc qualifiés de courant de conduction (figure 1.6a).

D'autres trouvent leur origine dans un déplacement des porteurs des régions où ils sont en forte concentration, vers celles où leur concentration est moindre (figure 1.6b).

Ce dernier processus, récurrent dans différents domaines de la physique, est qualifié de diffusion, il engendre donc un courant dit de diffusion. Ce courant se manifeste généralement de manière transitoire, la concentration cherchant à s'uniformiser sur l'ensemble de la structure.

➤ *Densité de courant*

On quantifie l'existence d'un courant électrique en différents points M par un vecteur appelé **densité de courant** $\vec{k}(M)$:

$$\vec{k}(M) = \rho_m(M)\,\vec{v}$$

où $\rho_m(M)$ représente la densité volumique de charges mobiles au point M et $\vec{v}$ correspond à la vitesse moyenne de déplacement local de ces charges.

On peut exprimer $\rho_m(M)$ sous la forme :

$$\rho_m(M) = n_m(M)\,q$$

où $n_m(M)$ désigne la densité de porteurs de charges mobiles par unité de volume.

> ***Remarque*** : La définition même de $\vec{k}$ implique que le courant électrique associé à un mouvement d'électrons libres ($\rho_m < 0$) soit orienté dans le sens opposé à celui de leur mouvement.

➤ *Milieux conducteurs, semi-conducteurs et isolants*

Parmi tous les matériaux utilisés en électricité, on distingue trois types de milieux. Ceux-ci se différencient par leur faculté à permettre la circulation d'un courant électrique dans leur structure.

• Milieux conducteurs

Il existe dans ce type de milieu des particules chargées ayant la possibilité de se déplacer d'un point à l'autre de la structure. Tous les métaux constituent la grande majorité des milieux conducteurs. La densité en électrons libres des métaux est de l'ordre de $n_m = 10^{29}$ éléments par m^3.

Il existe d'autres milieux conducteurs non solides. Dans les solutions électrolytiques, les charges mobiles sont portées par des ions, les plasmas correspondant à des milieux gazeux ionisés.

• Milieux isolants

La structure interne des milieux isolants ne leur permet pas d'être le siège de courant électrique. En effet, toute ionisation locale d'atomes contribue à l'apparition d'une charge électrique, qui n'aura pas la possibilité de se déplacer sur des distances macroscopiques, d'un point à l'autre du milieu.

Copyright © 2007 Dunod.

En ce sens, il n'existe pas, dans ce type de structure, de porteurs de charge électrique libre. Néanmoins, des processus d'ionisation, résultant pour la plupart de l'agitation thermique présente au sein du réseau cristallin, contribuent à libérer quelques charges électriques : $n_m = 10^7$ éléments par m^3 à 300 K.

• Milieux semi-conducteurs

Les matériaux semi-conducteurs correspondent aux éléments des 3e, 4e et 5e colonnes de la classification périodique des éléments simples. Il s'agit de milieux structurellement isolants, dont la conductivité augmente sensiblement avec la température. Leur densité en charges mobiles, de l'ordre de $n_m = 10^{16}$ éléments par m^3 à 300 K, les apparente à des milieux conducteurs aux températures usuelles de fonctionnement d'un composant électrique.

La traduction du processus de création de charges mobiles dans les milieux conducteurs passe par une représentation quantique de la répartition énergétique des charges. En effet, il existe dans ce type de milieux deux sortes de charges mobiles : les électrons libres (chargés négativement) et les trous (chargés positivement). Le processus de libération d'un électron ou d'un trou ne se manifeste que si le milieu reçoit un apport d'énergie suffisant. Ce seuil énergétique, propre à chaque semi-conducteur, dépend du type et de la quantité d'impuretés présentes.

La libération d'un porteur de charge mobile s'accompagne de l'apparition d'un ion fixe de charge opposée dans le réseau cristallin :

– la libération d'un électron laisse derrière lui un cation chargé positivement (figure 1.7a) ;

– la libération d'un trou laisse derrière lui un anion chargé négativement (figure 1.7b).

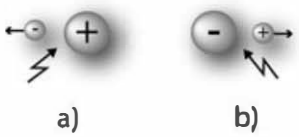


Figure 1.7

1.3 ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES

1.3.1 Notion de champ

➤ ***Définition***

Les quatre forces que constituent les interactions fondamentales qui gouvernent l'organisation de notre univers mettent en relation des corps par l'intermédiaire d'une **action à distance**. Longtemps, les physiciens ont évoqué la question du processus par lequel procède cette action à distance.

Ils ont naturellement postulé l'existence d'une hypothétique particule qui assurerait, pour chaque type d'interaction, le transfert de l'énergie nécessaire à ces effets, d'une charge à l'autre (figure 1.8a).

Une explication en ce sens est proposée par la mécanique quantique depuis le début du xxe siècle. Mais celle-ci est peu adaptée pour les problèmes usuels d'électricité et dépasse le cadre de cet ouvrage.

Une autre manière de se représenter le processus de cause à effet mis en jeu, consiste à supposer que la présence d'un corps modifie l'espace autour de lui, indépendamment des

Copyright © 2007 Dunod.

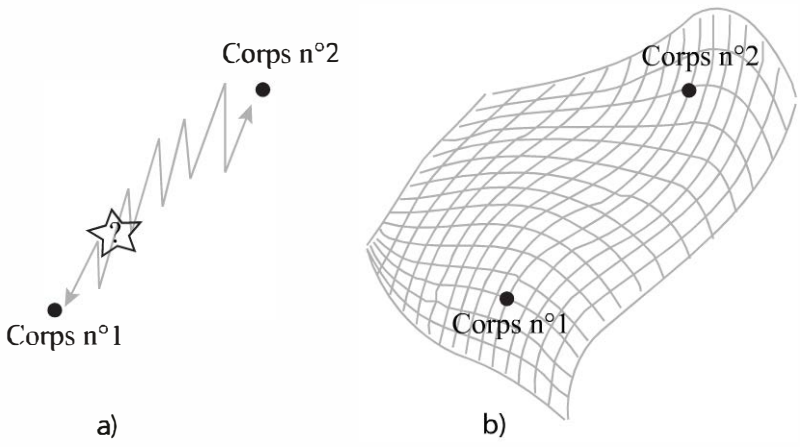


Figure 1.8

autres corps qui s'y trouvent. On peut se figurer le problème en imaginant que chaque corps « déforme » l'espace autour de lui (figure 1.8b). Cette « déformation » ne doit bien sûr pas être prise au sens géométrique du terme, mais doit plutôt être envisagée comme une modification des propriétés physiques de l'espace.

La détermination d'une grandeur susceptible de quantifier cette modification constitue tout l'enjeu de la définition du **champ**. Ce dernier doit traduire, en plus de l'intensité de la modification, également le sens et la direction de cette « déformation » (certaines interactions conduisant à des effets antagonistes selon les corps en présence). Dès lors, on comprend que le champ est nécessairement défini par une grandeur vectorielle.

➤ ***Représentation***

La nature immatérielle du champ pousse ses utilisateurs à dresser des représentations graphiques ou **cartes de champ** (figure 1.9a).

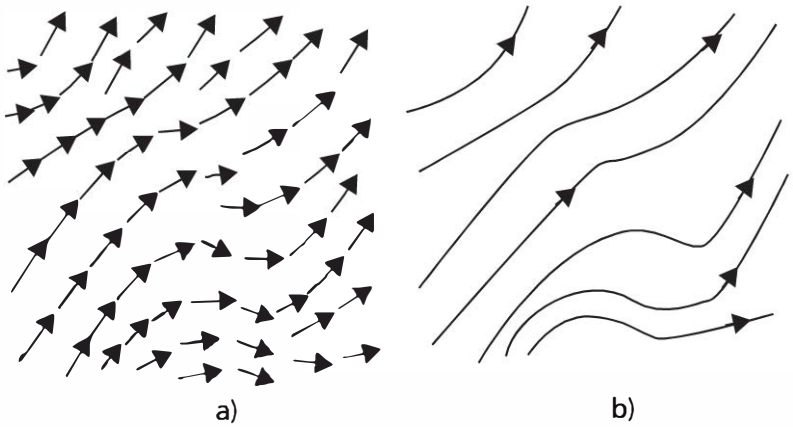


Figure 1.9

Il est ainsi plus facile de déterminer rapidement les éléments caractéristiques du champ créé par un ensemble d'éléments.

Ce type de carte (figure 1.9a) est obtenu en représentant, en différents points de l'espace, le champ par une flèche ayant :

Copyright © 2007 Dunod.

– la même direction et le même sens que le champ ;

– une longueur proportionnelle à l'intensité du champ.

Une telle carte est appelée **diagramme fléché** du champ. En représentant le champ en des points de l'espace de plus en plus proches, on voit se dessiner des courbes continues appelées **lignes de champ** (figure 1.9b).

> ***Remarque*** : La répartition du champ étant par nature tridimensionnelle, la géométrie du diagramme fléché et des lignes de champ l'est également.

1.3.2 Flux d'un champ

➤ ***Définition***

Considérons une région de l'espace où règne un champ $\vec{X}(M)$ en tout point M.

Imaginons une surface fictive S (figure 1.10). L'orientation de cette surface consiste à identifier deux points A et B situés de part et d'autre de celle-ci, et à définir une normale $\vec{n}_{AB}$ en tout point M de S.

Cette normale est caractérisée par :

– une direction perpendiculaire à S ;

– un sens de A vers B ;

– une norme unitaire.

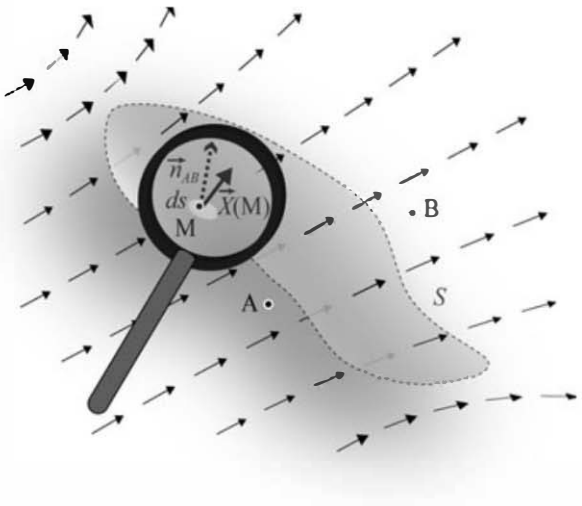


Figure 1.10

On peut définir autour du point M un élément différentiel de surface ds possédant des dimensions très petites au regard de la surface totale.

Après avoir évalué le produit scalaire $\vec{X}(M) \cdot \vec{n}_{AB}\, ds$ en tout point M de la surface, on définit une grandeur algébrique Φ_{AB} appelée **flux du champ** $\vec{X}$ à travers la surface S :

$$\Phi_{AB} = \iint_S \vec{X}(M) \cdot \vec{n}_{AB}\, ds$$

Le flux d'un champ à travers une surface peut être vu comme une mesure de « la quantité » de champ qui la traverse.

➤ ***Signe***

La définition scalaire du flux impose que celui-ci soit une grandeur signée.

Ce signe arbitraire résulte d'un choix relatif à la direction de la normale. En tout point M de S, selon le sens de $\vec{X}(M)$ par rapport à la normale ($\theta < \pi/2$ ou $\theta > \pi/2$), le produit scalaire $\vec{X}(M) \cdot \vec{n}$ peut être positif (figure 1.11a) ou négatif (figure 1.11b).

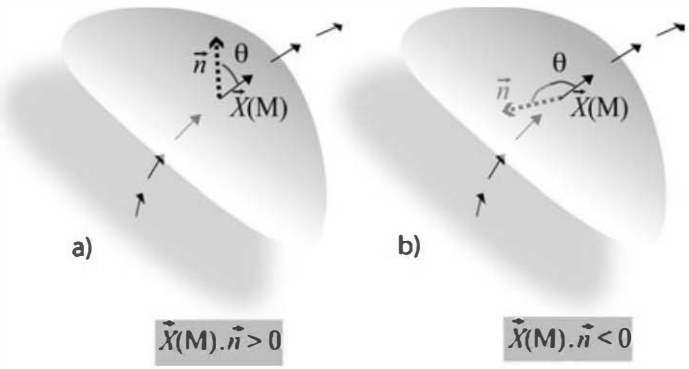


Figure 1.11

Copyright © 2007 Dunod.

La sommation intégrale de ces produits scalaires conduit nécessairement à l'obtention d'une grandeur signée. Une inversion du sens de la normale sur la surface conduit à l'obtention d'un flux opposé :

$$\Phi_{BA} = \iint_S \vec{X}(M) \cdot \vec{n}_{BA}\, ds = \iint_S \vec{X}(M) \cdot (-\vec{n}_{AB})\, ds$$
$$= -\iint_S \vec{X}(M) \cdot (\vec{n}_{AB})\, ds = -\Phi_{AB}$$

Remarque : De même, à sens de normale choisi, une variation de la direction du champ au cours du temps, peut engendrer un changement de signe sur le flux.

Dans le cas où le flux est évalué à travers une surface fermée, la normale est, par convention, dirigée de l'intérieur vers l'extérieur, conférant ainsi un signe positif à un flux sortant.

1.3.3 Circulation d'un champ

➤ ***Définition***

Considérons une région de l'espace où règne un champ $\vec{X}(M)$ en tout point M.

Imaginons un contour fictif L s'étendant entre deux points A et B. On peut définir en tout point M du contour un élément différentiel de longueur $\overrightarrow{dl}_{AB}$ possédant les caractéristiques suivantes :

– direction : tangente au contour ;

– sens : orienté du point A vers le point B ;

– longueur : très petite par rapport à la longueur totale L.

Après avoir évalué le produit scalaire $\vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB}$ en tout point M du contour, on définit une grandeur algébrique γ_{AB} appelée **circulation du champ** $\vec{X}$ le long du contour L (figure 1.12). Son expression est la suivante :

$$\gamma_{AB} = \int_{L_{AB}} \vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB}$$

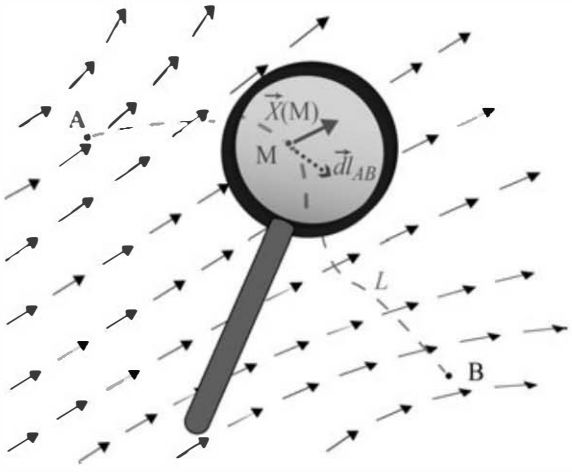


Figure 1.12

➤ ***Signe***

Il est important de bien comprendre que, de par sa définition scalaire, la circulation est une grandeur algébrique. Son signe résulte du sens de circulation choisi pour se déplacer d'un point à l'autre.

Le produit scalaire $\vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dl}$ peut être positif (figure 1.13a) ou négatif (figure 1.13b) en chaque point M selon le sens du champ, par rapport au sens choisi pour $\overrightarrow{dl}$ ($\theta < \pi/2$ ou $\theta > \pi/2$).

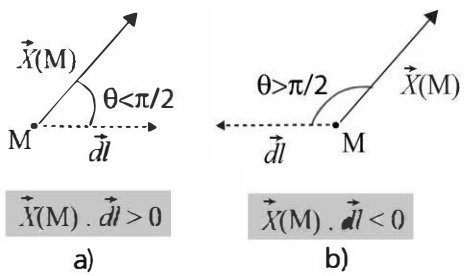


Figure 1.13

Copyright © 2007 Dunod.

La sommation intégrale de ces produits scalaires aboutit nécessairement à l'obtention d'une grandeur signée. Un choix du sens de parcours opposé conduit à l'obtention d'une circulation opposée, en effet :

$$\gamma_{BA} = \int_L \vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{BA} = \int_L \vec{X}(M) \cdot (-\overrightarrow{dl}_{AB})$$
$$= -\int_L \vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = -\gamma_{AB}$$

Remarque : De même, à sens de circulation choisi, une variation de la direction du champ au cours du temps peut engendrer un changement de signe de la circulation.

Dans le cas où la circulation est évaluée le long d'un contour se rebouclant sur lui-même (contour fermé), le sens de circulation est, par convention, lié au sens de la normale de la surface portée par le contour. Cette relation peut être formulée à travers la règle du « tire-bouchon » (figure 1.14).

« Un tire-bouchon planté dans la surface supportée par le contour et tournant dans le sens de circulation progresse dans le sens de la normale à cette surface. »

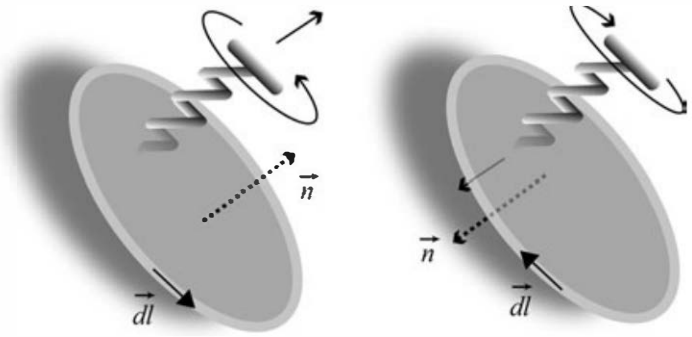


Figure 1.14

Les opérateurs « circulation » et « flux » permettent de caractériser la répartition spatiale d'un champ.

1.4 GRANDEURS PHYSIQUES ÉLECTRIQUES

1.4.1 Force électrique

Sous l'action d'autres charges électriques, une charge électrique q subit à distance des effets d'attraction ou de répulsion. Pour traduire ces effets dynamiques, on introduit une interaction $\vec{F}_e$ couramment appelée **force électrique**.

Cette force possède comme support la direction des charges en influence, et décroît avec le carré de la distance les séparant.

Les charges électriques positives et négatives ont naturellement tendance à interagir entre elles, en cherchant à s'attirer pour se recombiner. Les phénomènes électrodynamiques qui régissent le fonctionnement d'un circuit électrique résultent de l'action de cette force électrique. Selon l'origine de celle-ci, cette force peut engendrer deux types d'effets sur les charges électriques :

– la force électrique peut encourager la recombinaison des charges électriques opposées ;

– la force électrique peut chercher, au contraire, à dissocier les charges de signes opposés.

Copyright © 2007 Dunod.

1.4.2 Champ électrique

➤ ***Définition***

La technique adoptée pour décrire au mieux les effets et l'origine de la force électrique, consiste à formuler le problème en termes de champ.

Ainsi, la force électrique $\vec{F}_e$ exercée par un ensemble de charges sur une charge électrique q, placée en un point M de l'espace, résulte de la présence d'un champ électrique $\vec{E}(M)$ en ce point.

Ce champ, indépendant de q, ne dépend que de la position de l'ensemble des charges à l'origine de celui-ci, par rapport à M. La relation entre $\vec{F}_e$ et $\vec{E}(M)$ est établie comme suit :

$$\vec{F}_e = q\,\vec{E}(M)$$

L'unité de champ électrique est le volt par mètre (V/m).

Sous l'action de la force électrique, les charges positives se mettront en mouvement dans le sens du champ électrique, à la différence des charges négatives qui prendront une direction opposée.

➤ ***Origine***

La présence d'une distribution de charges électriques localisées dans une région de l'espace est à l'origine d'un champ électrique noté $\vec{E}(M)$.

La charge électrique conditionne le flux du champ électrique. On peut donc exprimer la relation entre le champ électrique et la charge sous la forme suivante :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}(M)\cdot\vec{n}\,ds = \frac{Q}{\varepsilon}$$

où Q désigne la charge présente à l'intérieur de la surface fermée quelconque S_G (figure 1.15).

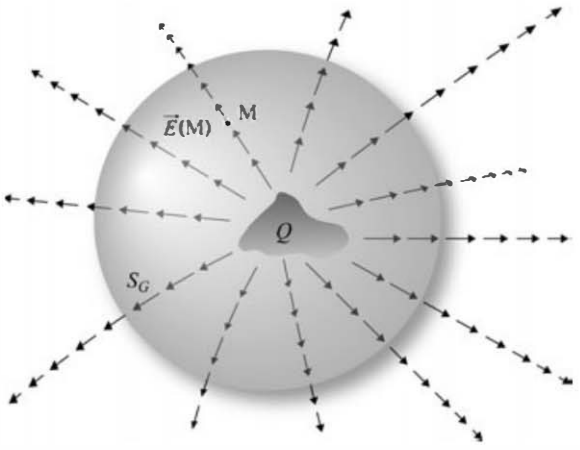


Figure 1.15

Cette relation est couramment appelée **théorème de Gauss**.

La constante ε est appelée permittivité. Elle traduit l'aptitude du milieu où se manifeste le champ à réagir électriquement à la présence de charges. Dans le vide, celle-ci a pour valeur $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}C^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$.

Le processus purement électrique que nous venons de décrire, qui traduit des effets d'attraction ou de répulsion entre charges, ne peut rendre compte de la présence de courant électrique permanent dans un circuit. En effet, sous l'action du champ électrique, les charges se déplacent de manière transitoire entre états d'équilibre. En ce sens, ce champ est généralement qualifié de champ électrostatique. Il est alors nécessaire de faire intervenir, comme nous le verrons par la suite, un champ d'origine non électrique, qualifié de champ électromoteur.

Copyright © 2007 Dunod.

Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)



Cet illustre scientifique est surtout connu pour ses travaux en mathématiques allant de la géométrie à l'algèbre en passant par les probabilités. Mais il serait dommage d'oublier ses contributions aux sciences physiques, notamment en ce qui concerne le géomagnétisme terrestre. Il est, de plus, à l'origine de deux des quatre grands principes de l'électromagnétisme. Son nom fut attribué à l'unité de mesure des champs magnétiques dans l'ancien système d'unités CGS.

1.4.3 Tension électrique

➤ ***Définition***

La présence d'un champ électrique dans une région de l'espace entraîne une modification de l'état électrique en tout point M. Cette modification peut être quantifiée par une grandeur scalaire appelée **potentiel électrique**, notée $v(M)$.

Ainsi, entre deux points quelconques A et B, il existe une différence de potentiel $v(A) - v(B)$, définie de la manière suivante :

$$v(A) - v(B) = \int_{L_{AB}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB}$$

En d'autres termes, la différence de potentiel entre deux points correspond à la circulation du champ électrique entre ces deux points. En électricité, on utilise plus volontiers le terme de **tension électrique** notée u_{AB} pour désigner la différence de potentiel :

$$u_{AB} = v(A) - v(B)$$

Remarque : On démontre que la tension entre A et B ne dépend que de la position de ces deux points dans l'espace et en aucune manière du chemin suivi pour exprimer la circulation.

Une bonne image de la tension électrique consiste à se représenter celle-ci comme une « différence d'altitude » électrique entre deux points.

La tension constitue la première grandeur électrique permettant d'appréhender le comportement électrique d'un circuit. Le potentiel électrique, donc la tension électrique, s'exprime en volt (V).

Remarque : Une tension est une grandeur relative : elle exprime une différence de potentiel entre deux points, indépendamment du potentiel absolu de chacun d'entre eux. Aussi, dans l'étude d'un problème d'électricité, les potentiels sont exprimés par rapport à un point de référence appelé « masse » de potentiel de 0 V, affecté de façon arbitraire.

Quelques ordres de grandeur permettent de mesurer l'étendue de la gamme des tensions électriques :

– la tension entre les électrodes d'une bougie d'allumage de moteur thermique est classiquement de l'ordre de la dizaine de kilovolts ;

– la tension générée par l'ensemble des organes électriques (électrode) d'un poisson-chat est de 350 V ;

Copyright © 2007 Dunod.

– la tension aux bornes d'une cellule nickel-cadmium utilisée dans la fabrication d'accumulateur est de 1,2 V ;
– la tension (potentiel de repos) entre les deux faces de la membrane d'une cellule nerveuse est de 70 mV.

➤ *Représentation*

Comme vu précédemment, la tension résultant de l'expression d'une circulation entre deux points est une grandeur algébrique.

Bien qu'étant de nature scalaire, il est néanmoins d'usage de flécher la tension électrique entre deux points. Par cette représentation graphique, on exprime le sens arbitraire utilisé pour orienter l'élément différentiel $\overrightarrow{dl}$ de la circulation. L'orientation de la tension est opposée au sens de $\overrightarrow{dl}$ (figure 1.16).

Ainsi, on identifiera la tension par son fléchage, comme étant la différence entre le potentiel régnant à sa pointe, diminué de celui existant à la queue.

Lors du fonctionnement d'un composant électrique, le champ électrique qui règne dans sa structure peut être amené à changer de sens. La tension électrique, une fois orientée, pourra donc être sujette à des changements de signe.

Alessandro VOLTA (1745-1827)



Cet italien est l'une des figures de proue des premiers travaux d'ingénierie électrique. Son nom restera à jamais attaché à la mise au point de la première pile électrique en 1800. Avec la découverte de Volta, l'électricité, jusque-là statique, devient dynamique.

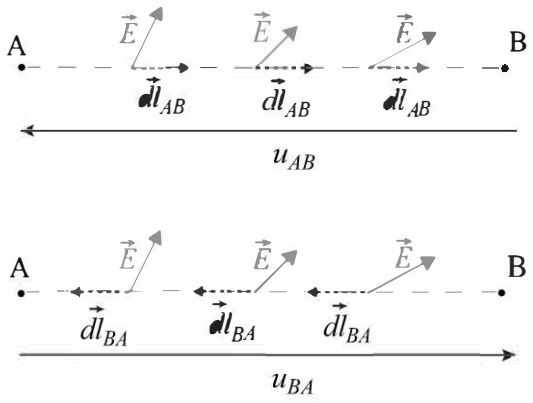


Figure 1.16

On retiendra que le fléchage de la tension revêt un caractère arbitraire. Il ne donne en aucune manière d'indication sur le signe de la tension.

➤ *Propriété*

Une tension est une circulation et possède, à ce titre, les propriétés inhérentes aux opérateurs d'intégration.

Il est donc possible de fractionner en plusieurs segments le trajet entre deux points et d'évaluer, indépendamment, la tension aux bornes de chacun d'entre eux (figure 1.17).

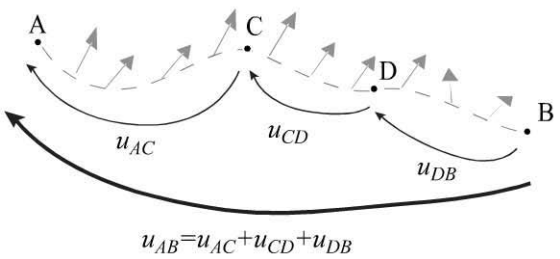


Figure 1.17

La propriété de linéarité de l'opérateur intégral impose alors :

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl} = \underbrace{\int_A^C \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl}}_{u_{AC}} + \underbrace{\int_C^D \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl}}_{u_{CD}} + \underbrace{\int_D^B \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl}}_{u_{DB}}$$
$$= u_{AC} + u_{CD} + u_{DB}$$

Copyright © 2007 Dunod.

On peut décomposer toute tension électrique entre deux points en s'appuyant sur des points intermédiaires.

André-Marie AMPÈRE (1775-1836)



Ce physicien est à juste titre considéré comme le père de l'électrodynamique. Il édifia une théorie établissant la source des actions magnétiques. Pour expliquer le comportement magnétique des aimants, il suppose l'existence de « courants circulaires » dans la matière. Cette interprétation, rejetée à l'époque, s'imposera soixante ans plus tard avec la découverte de l'électron. C'est à lui que l'on doit les termes de « courant » (on parlait alors de « conflit ») et de « tension ».

1.4.4 Intensité électrique

➤ *Définition*

Considérons un milieu conducteur, parcouru par un courant électrique caractérisé, en tout point M, par une densité de courant $\vec{k}(M)$. Pour quantifier l'écoulement du courant dans la masse du conducteur, on introduit l'intensité électrique i, définie de la manière suivante :

$$i = \iint_S \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds$$

L'intensité électrique d'un courant à travers une surface correspond donc au flux du courant électrique à travers celle-ci. En ce sens, elle peut être assimilée à un « débit de charges ».

L'intensité électrique s'exprime en ampère (A) et constitue la deuxième grandeur électrique permettant d'appréhender le comportement électrique d'un circuit.

Pour mieux mesurer l'étendue de la gamme des intensités électriques, donnons quelques ordres de grandeur :

– le courant dans la décharge d'un éclair d'orage est de 30 kA ;

– le courant circulant dans une ampoule à incandescence est de 500 mA ;

– le courant mesuré par un microscope à effet tunnel est de 10 nA.

> ***Remarque*** : Par abus de langage, il est très fréquent d'assimiler l'intensité électrique au courant électrique. Le flux est alors implicitement évalué sur toute la section traversée par le courant.

➤ *Représentation*

La nature scalaire de l'intensité électrique (flux) en fait une grandeur algébrique. Son signe résulte du choix effectué pour orienter la normale.

Bien que quantifiant une information relative à un mouvement de charge électrique, l'intensité électrique n'est pas une grandeur vectorielle.

Néanmoins, il est d'usage de la flécher sur les schémas électriques. Cette représentation graphique indique le sens arbitraire choisi pour orienter la normale.

En effet, considérons deux points A et B, situés de part et d'autre d'une surface S. Exprimons l'intensité du courant circulant entre les deux points à travers S.

Copyright © 2007 Dunod.

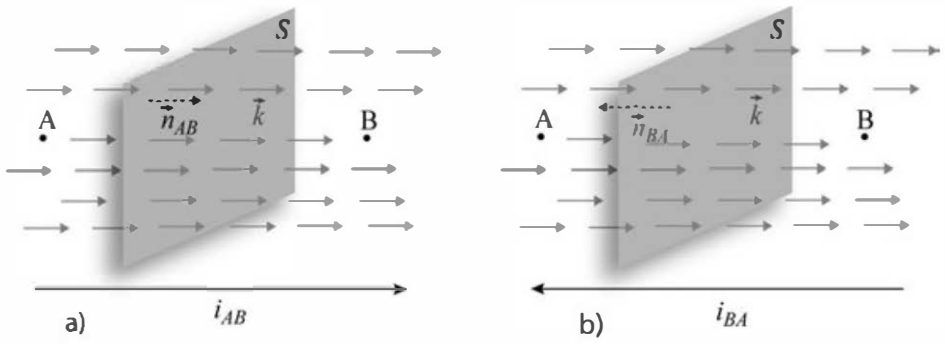


Figure 1.18

Pour ce faire, on peut choisir d'orienter la normale de A vers B (figure 1.18a) l'intensité correspondante (notée i_{AB}) sera fléchée de A vers B. Un choix opposé est traduit par un fléchage opposé (figure 1.18b).

Pour éviter d'obtenir des intensités négatives, il convient de flécher la normale (donc le courant) dans le sens de circulation du courant (sens de $\vec{k}$). Néanmoins, lors du fonctionnement d'un composant en régime variable, les charges pouvant être amenées à changer de sens de déplacement au cours du temps, l'intensité, une fois orientée, pourra donc être sujette à des changements de signes.

> On retiendra dès lors que, tout comme la tension, le fléchage de l'intensité du courant revêt un caractère totalement arbitraire. Celui-ci ne donne aucune information sur le sens effectif du courant.

➤ *Propriétés*

La formulation intégrale de l'intensité du courant électrique (flux) lui confère les mêmes propriétés de linéarité que la tension.

Il est donc possible de fractionner la surface S en plusieurs surfaces S_1, S_2 et S_3 (figure 1.19).

L'intensité i à travers S est :

$$i = \iint_S \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds$$
$$= \underbrace{\iint_{S_1} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_2} + \underbrace{\iint_{S_3} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_3}$$

Ainsi : $i = i_1 + i_2 + i_3$ où : i_1, i_2 et i_3 désignent respectivement les intensités du courant à travers les surfaces S_1, S_2 et S_3.

> L'intensité d'un courant à travers une surface est la somme algébrique des intensités évaluées à travers chaque élément de surface la constituant.

Copyright © 2007 Dunod.

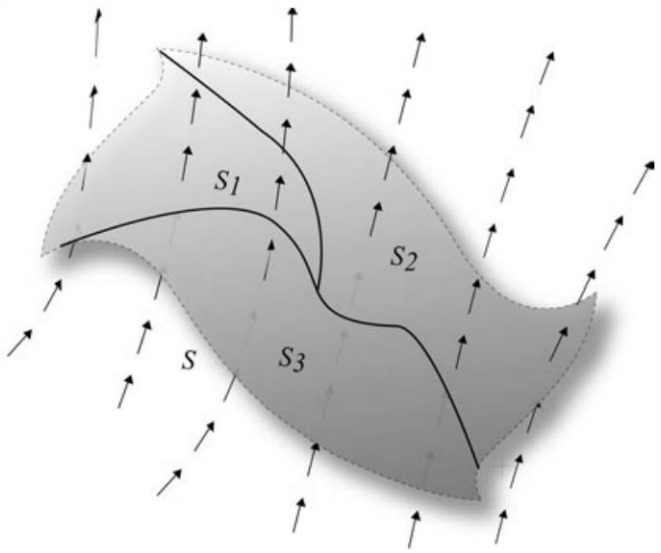


Figure 1.19

Cette propriété peut s'exprimer d'une autre manière dans le cas d'une surface fermée.

En effet, évaluons l'intensité du courant à travers une sphère (figure 1.20). Un hémisphère sera exposé à un courant entrant dans la surface (S_1) et l'autre à un courant sortant (S_2).

L'intensité à travers la sphère peut être fractionnée en une composante entrante ($i_{entrante}$) et une composante sortante ($i_{sortante}$).

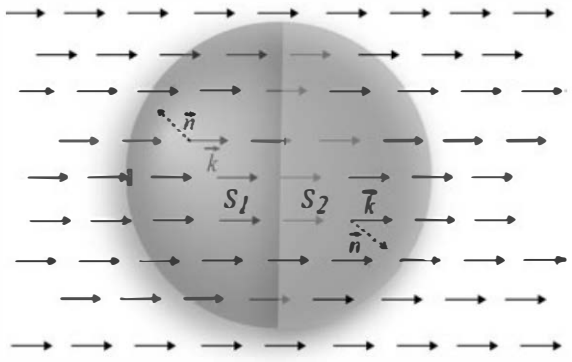


Figure 1.20

$$i = \iint_{sphère} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_{entrante}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_{sortante}}$$

Avec une normale arbitrairement orientée de l'intérieur vers l'extérieur, on obtient une intensité négative pour le courant entrant ($i_{entrante} < 0$) et positive pour le courant sortant ($i_{sortante} > 0$).

L'intensité du courant s'écoulant à travers une surface fermée peut être dissociée en une composante entrante et une composante sortante.

➤ *Équation de conservation de la charge*

Considérons une distribution de charge incluse dans une surface fermée S et englobant une charge totale Q à un instant t (figure 1.21). Si pendant un laps de temps dt, une portion élémentaire de charge dq de Q traverse S, ce mouvement de charge donne naissance à un courant électrique caractérisé en tout point M par $\vec{k}(M)$.

Copyright © 2007 Dunod.

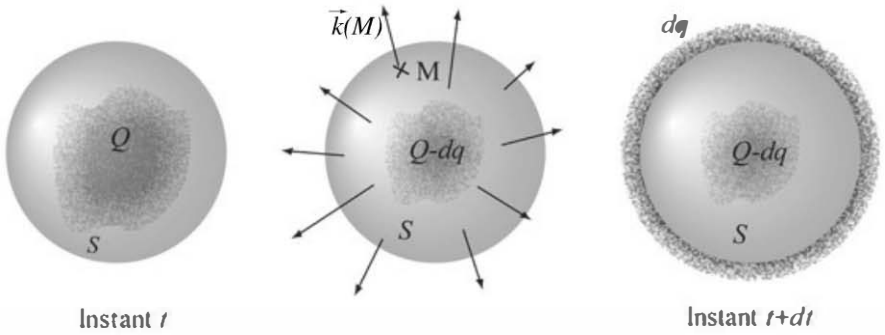


Figure 1.21

En électromagnétisme, on démontre que l'intensité du courant correspondant au passage de la charge dq à travers S est égale à :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La propriété de conservation de la charge impose que le déplacement de dq corresponde à la variation de charge dQ à l'intérieur de S :

$$dQ = Q(t + dt) - Q(t) = (Q - dq) - Q = -dq$$

Ainsi, la variation de charge à l'intérieur de S peut s'exprimer en fonction de l'intensité du courant qui est à l'origine de cette variation $i = -\frac{dQ}{dt}$:

– une fuite de charge ($dQ < 0$) correspond à une intensité positive ($i = i_{sortante} > 0$) ;

– un apport de charge ($dQ > 0$) correspond à une intensité négative ($i = i_{entrante} < 0$).

Cette propriété, communément appelée « équation de conservation de la charge », illustre que toute variation de charge dans un composant électrique induit nécessairement la présence d'un courant électrique.

L'analyse des circuits électriques, envisagée dans la deuxième partie de cet ouvrage, sera faite en régime **quasi stationnaire**. Dans ce cadre, on considère que les fréquences d'utilisation sont telles qu'il n'y a pas d'accumulation locale de charges (voir « Pour en savoir plus »). La charge contenue dans tout élément de volume est donc supposée rester constante au cours du temps $\left(\frac{dQ}{dt} = 0\right)$.

L'équation de conservation de la charge entraîne $i = i_{sortante} + i_{entrante} = 0$, ce qui implique $i_{sortante} = -i_{entrante}$. En d'autres termes, tout départ de charges est compensé par un apport identique.

Remarque : Pour évaluer l'intensité du courant traversant un contour fermé en régime quasi stationnaire, le choix de la surface ouverte s'appuyant sur ce contour n'a pas d'importance.

Copyright © 2007 Dunod.

1.4.5 Énergie et puissance électriques

➤ *Énergie électrique*

Considérons qu'une charge électrique q soit amenée à se déplacer entre deux points A et B le long d'un segment L_{AB}. Supposons que, lors de son déplacement, elle soit soumise à une force électrique $\vec{F}$ exercée par un système électrique Σ.

Une formulation de cet effet sur un plan énergétique consiste à dire que lors de son déplacement, une énergie électrique notée w, a été communiquée à q par Σ. On exprime aussi cela en disant que Σ a fait « travailler » q.

Par définition, l'expression de cette énergie est égale à :

$$w = \int_{L_{AB}} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Le travail s'identifie donc à la circulation de la force $\vec{F}$ le long de L_{AB}.

Si globalement, sur le trajet L_{AB}, la force a eu un effet moteur ($\vec{F}$ est dans le sens de $\overrightarrow{dl}$), alors on obtient $w > 0$ (le produit scalaire est positif).

L'origine électrique de cette force permet aussi de caractériser, en tout point M du déplacement de q, l'action du système par la présence d'un champ $\vec{E}$ tel que :

$$\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M)$$

On a donc :

$$w_{AB} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = \int_{L_{AB}} q\,\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = q \int_{L_{AB}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = q\,u_{AB}$$

En considérant $q > 0$, deux cas se présentent selon l'effet du champ électrique généré :

– si $u_{AB} > 0$, alors $w_{AB} > 0$: de l'énergie est apportée par le système à la charge ;

– si $u_{AB} < 0$, alors $w_{AB} < 0$: de l'énergie est restituée par la charge au système.

> La connaissance de la différence de potentiel entre deux points de l'espace permet d'exprimer l'énergie dépensée pour déplacer des charges électriques entre ces deux points.

➤ *Puissance électrique*

Considérons un élément de charge élémentaire dq, situé à un instant t dans une région délimitée par une surface S où règne un potentiel v_A (figure 1.22a). Supposons que celle-ci se déplace pendant un laps de temps très court dt dans une zone où le potentiel présente une valeur v_B (figure 1.22b et figure 1.22c).

Le transit de la charge pendant l'intervalle dt a donné lieu à un courant électrique de densité $\vec{k}$. L'intensité du courant associé au déplacement de la charge est évaluée à travers la surface S que la charge dq traverse.

Copyright © 2007 Dunod.

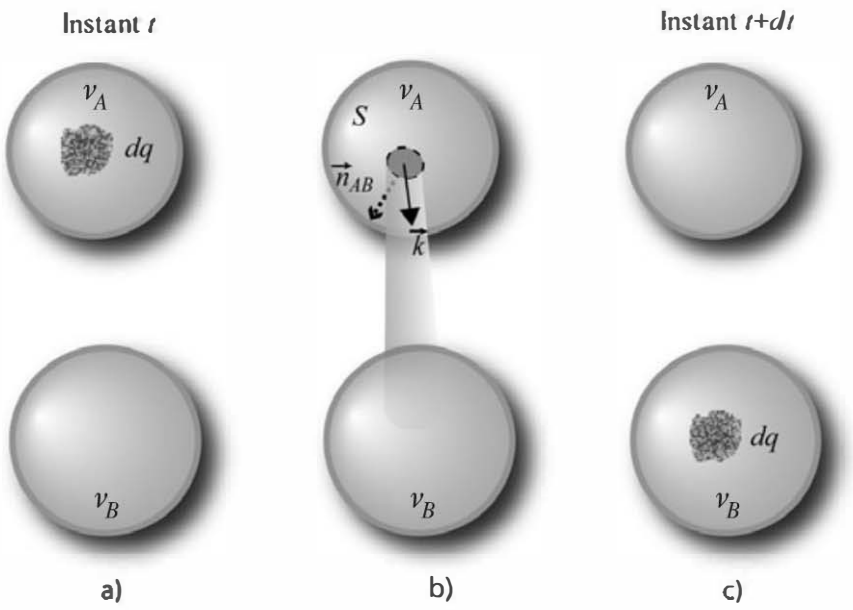


Figure 1.22

Elle a pour expression :

$$i_{AB} = \iint_S \vec{k}(M) \cdot \vec{n}_{AB}\, ds$$

La loi de conservation de la charge appliquée sur S impose :

$$i_{AB} = \frac{dq}{dt}$$

Si lors de ce mouvement, une force électrique a été exercée sur dq, le travail résultant de l'action de celle-ci est, comme nous l'avons vu :

$$dw = u\, dq$$

L'expression de la **puissance électrique** correspondant à cet échange d'énergie est égale par définition à :

$$p = \frac{dw}{dt}$$

Compte tenu des relations établies, on obtient finalement :

$$p = \frac{dw}{dt} = u\frac{dq}{dt} = u\, i_{AB}$$

Pour exprimer celle-ci, il convient d'orienter la tension par rapport au courant. Ainsi, deux possibilités existent pour orienter arbitrairement la tension : elles sont communément appelées **convention récepteur** et **convention générateur**.

Copyright © 2007 Dunod.

L'expression de la puissance électrique ne peut s'envisager qu'après avoir défini arbitrairement le sens relatif du courant par rapport à celui de la tension, et avoir défini, de fait, la convention utilisée.

• Convention récepteur

Si l'on décide d'orienter $\overrightarrow{dl}$ dans le même sens que $\vec{n}$ (figure 1.23), on considère implicitement que la force électrique a un effet moteur en participant au mouvement de la charge : cette dernière reçoit de l'énergie électrique de la part du système. On dit que l'on évalue la puissance en **convention récepteur**.

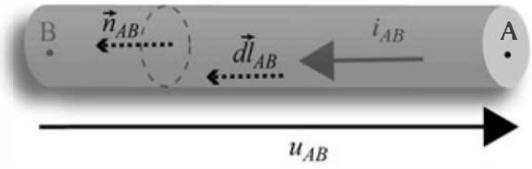


Figure 1.23

Alors :

$$u = \int_{L_{AB}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = u_{AB}$$

et donc :

$$p = i_{AB}\, u_{AB}$$

Une puissance électrique positive témoigne donc du fait que la charge reçoit effectivement de l'énergie électrique. Une puissance négative traduit, au contraire, une restitution d'énergie au système.

• Convention générateur

En décidant d'orienter $\overrightarrow{dl}$ dans un sens opposé à $\vec{n}$ (figure 1.24), on considère implicitement que la force électrique s'oppose au mouvement de la charge. Elle contribue ainsi à renforcer l'action électrique du système à l'origine de celle-ci. On dit que l'on évalue la puissance en **convention générateur**.

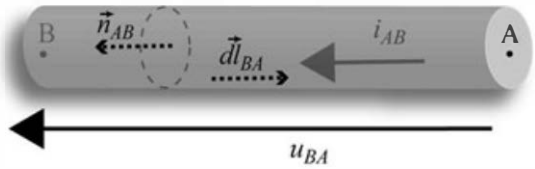


Figure 1.24

Dans ce cas, on a :

$$u = \int_{L_{AB}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{BA} = u_{BA}$$

et donc :

$$p = i_{AB}\, u_{BA}$$

Une puissance électrique de signe positif témoigne donc du fait que le système reçoit effectivement de l'énergie électrique. Dans le cas contraire ($p < 0$), de l'énergie est communiquée à la charge.

Rappelons qu'une puissance électrique s'exprime en watt (W). La puissance électrique constitue la troisième et dernière grandeur électrique permettant d'étudier le comportement électrique d'un composant.

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : La formulation énergétique d'un problème d'électricité revêt un caractère primordial dans l'étude des processus de conversion électromécanique et électrochimique. En effet, l'énergie (ou la puissance) est la seule grandeur physique transposable d'un domaine de la physique à un autre.

1.5 GRANDEURS PHYSIQUES MAGNÉTIQUES

1.5.1 Force magnétique

Une charge électrique q animée d'une vitesse $\vec{v}$, placée dans l'environnement d'un courant électrique de densité $\vec{k}$, va subir des effets qui vont contrarier son mouvement. Pour traduire ces effets dynamiques, il est fait usage d'une force $\vec{F}_m$ communément appelée **force magnétique**.

Toutes les expériences menées sur les effets de cette force contribuent à mettre en évidence que la direction de $\vec{F}_m$ est perpendiculaire à $\vec{v}$. Cette force, de support perpendiculaire au mouvement de la charge, ne donne pas lieu à un travail ; l'énergie cinétique de la charge n'est donc pas modifiée sous son action.

Remarque : Une approche relativiste des phénomènes électromagnétiques permet de mettre en évidence que les forces électrique et magnétique constituent en réalité deux facettes d'une même force appelée force de Lorentz.

1.5.2 Champ magnétique

➤ ***Définition***

Tout comme les effets électriques, les effets magnétiques peuvent être formulés en termes de champ.

On considère ainsi que l'action de la force magnétique $\vec{F}_m$, sur une charge électrique q, animée d'une vitesse $\vec{v}$, placée en un point M de l'espace, résulte de la présence d'un champ magnétique $\vec{B}(M)$ en ce point.

La relation entre $\vec{F}_m$ et $\vec{B}(M)$ est établie comme suit : $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$. L'unité du champ magnétique en système international est le tesla (T), bien qu'une ancienne unité (le gauss : G) soit encore largement utilisée $1\ \text{G} = 10^{-4}\ \text{T}$.

Donnons quelques ordres de grandeur des champs magnétiques pour estimer l'étendue de leurs valeurs :

Nikola TESLA (1856-1943)



D'origine serbe, cet inventeur de génie a considérablement contribué à faire entrer l'électromagnétisme dans sa phase industrielle. On dénombre à son actif plus de 900 brevets dont celui du moteur et de l'alternateur polyphasé. Son nom a été donné en 1960 à l'unité de champ magnétique, se substituant au gauss, utilisé en système CGS.

Copyright © 2007 Dunod.

– champ géomagnétique : 10 μT ;
– champ généré dans un moteur électrique : 100 mT à 1 T ;
– champ créé par des bobines supraconductrices en laboratoire : 50 T.

> ***Remarque*** : Le produit vectoriel traduit un effet dynamique induit par $\vec{F}_m$ perpendiculaire à la direction du mouvement définie par $\vec{v}$.

➤ ***Origine***

La présence de charges électriques en mouvement, donc de courants électriques localisés dans une région de l'espace, est à l'origine d'un champ magnétique $\vec{B}$.

L'intensité du courant électrique conditionne la circulation du champ magnétique. On peut donc exprimer la relation entre le champ magnétique et le courant électrique sous la forme suivante :

$$\oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \mu i$$

où i désigne l'intensité du courant enlacé par le contour C_A (figure 1.25).

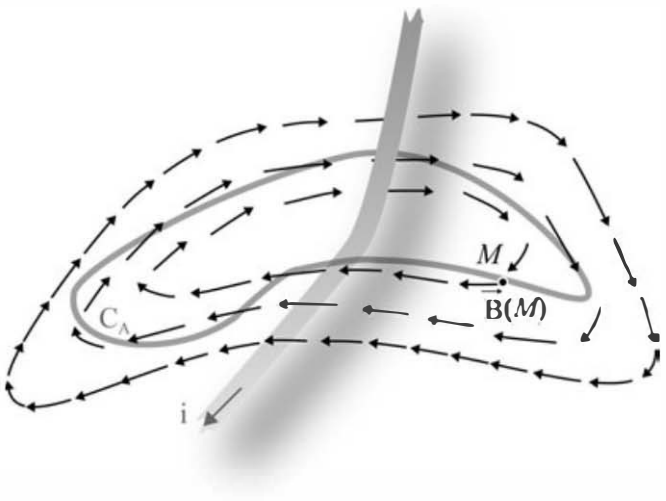


Figure 1.25

Cette relation est couramment appelée **théorème d'Ampère**. La constante μ est appelée perméabilité magnétique. Elle traduit l'aptitude du milieu où se manifeste le champ, à réagir magnétiquement à la présence de courants électriques.

Dans le vide, la perméabilité a pour valeur $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb} \cdot \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

1.5.3 Flux magnétique

➤ ***Définition***

Comme nous le verrons dans la suite de cet ouvrage, il s'avère nécessaire de chiffrer la « quantité » de champ magnétique présente dans une région de l'espace. Pour ce faire, on utilise la notion de flux magnétique.

Copyright © 2007 Dunod.

Considérons une région de l'espace où se manifeste un champ magnétique $\vec{B}$. Le flux du champ magnétique, ou **flux magnétique**, est mesuré à travers une surface S.

Son expression est :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds$$

où M est un point quelconque de la surface S, $\vec{n}$ correspondant à la normale en ce point. Le flux magnétique s'exprime en **weber** (Wb).

> ***Remarque*** : Bien que n'étant pas une grandeur vectorielle, il est parfois d'usage, comme cela a été fait pour l'intensité électrique, de flécher le flux magnétique dans le sens de la normale.

Wilhelm WEBER (1804-1891)



Collaborateur de C. F. Gauss, ils établirent ensemble un atlas du géomagnétisme. Les travaux de ce physicien allemand le conduisirent également à étudier l'interaction de charges électriques en mouvement. On lui doit également l'élaboration d'un modèle atomique décrivant la répartition de la charge dans la matière.

➤ ***Propriété***

Le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. Cette propriété dite de conservation du flux s'exprime sous la forme :

$$\oiint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext}\, ds = 0$$

Cette propriété illustre le caractère tournoyant du champ magnétique qui enlace ses sources (les courants). Les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes. Il n'existe donc pas l'équivalent magnétique de charges électriques « sources » ou « puits » de champ.

Cette propriété permet également de déterminer le flux du champ magnétique à travers la surface portée par un contour fermé, sans avoir à se soucier de la forme de la surface qui prend appui sur ce contour.

En effet, considérons un contour fermé C sur lequel s'appuient deux surfaces S_1 et S_2 (figure 1.26). On note S la surface fermée, composée des deux surfaces ouvertes S_1 et S_2.

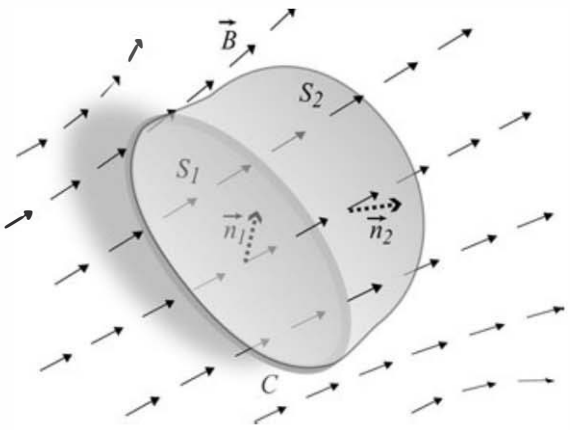


Figure 1.26

Le flux magnétique à travers S peut s'exprimer, de par sa propriété de linéarité, sous la forme :

$$\oiint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext}\, ds = \iint_{S_1} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext}\, ds + \iint_{S_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext}\, ds$$

Copyright © 2007 Dunod.

D'autre part, sachant que $\vec{n}_{ext} = -\vec{n}_1$ et $\vec{n}_{ext} = \vec{n}_2$, l'application de la propriété que nous venons d'énoncer sur la surface S entraîne :

$$\oiint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext}\, ds = \iint_{S_1} \vec{B}(M) \cdot (-\vec{n}_1)\, ds + \iint_{S_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_2\, ds$$

$$= \underbrace{-\iint_{S_1} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_1\, ds}_{\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_2\, ds}_{\Phi_2} = -\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Ainsi nous démontrons que :

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Pour en savoir plus...

PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ

Dès l'appui sur l'interrupteur d'une lampe, la lumière, comme par magie envahit la pièce. À combien peut-on estimer le temps qui sépare la fermeture de l'interrupteur de l'allumage de l'ampoule : très rapide, c'est un fait, instantané peut-être ?

Vitesse des charges électriques dans un conducteur

Un courant électrique a été présenté comme un déplacement collectif de charges.

On comprend dès lors qu'elles n'ont pas la possibilité de se déplacer à une vitesse infinie, ce qui trahirait les lois de la mécanique. Alors, à quelle vitesse transitent-elles ? Est-ce de l'ordre du m/s, du km/s, ou davantage... ?

Pour chiffrer cette vitesse, imaginons un fil de cuivre de diamètre 1 mm, parcouru par un courant électrique de 10 A. En considérant qu'en moyenne chaque atome de cuivre libère un électron libre, on obtient une vitesse moyenne de déplacement des charges libres de l'ordre de la centaine de µm/s !!!

De plus, quand on sait que pour le réseau électrique domestique français, de fréquence 50 Hz, le sens du courant s'inverse toute les 10 ms, il est clair que les électrons ne se déplacent que sur des distances de l'ordre du micromètre !!! En réalité, ceux contenus dans le filament de votre ampoule ne le quitteront jamais.

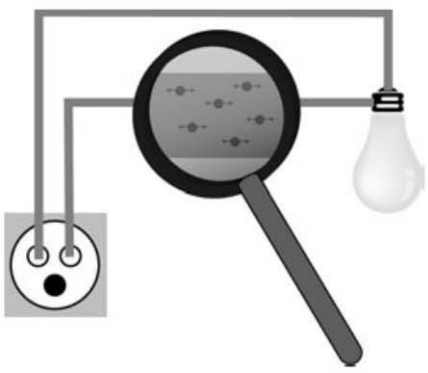


Figure 1.27

Copyright © 2007 Dunod.

Ainsi, l'image d'un ensemble de particules chargées naviguant d'un point à l'autre d'une installation électrique ne correspond pas à la réalité : les électrons vibrent quasiment sur place (figure 1.27). Toutefois, cela ne peut expliquer l'allumage quasi instantané de l'ampoule. Cette question aurait bien pu rester sans réponse sans l'avènement des travaux de James Clerk Maxwell au XVIIIe siècle sur la théorie des champs électromagnétiques.

Onde électromagnétique

Ce brillant scientifique a postulé l'existence d'un courant électrique appelé courant de déplacement de densité $\vec{k}_{\mathrm{D}} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, engendré par une variation du champ électrique $\vec{E}$.

L'intensité de ce courant à travers une surface S est :

$$\iint_S \vec{k}_{\mathrm{D}} \cdot \vec{n}\, ds = \varepsilon \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}\, ds$$

La prise en compte de ce nouveau courant modifie l'expression du théorème d'Ampère, qui prend alors la forme :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu i + \mu \varepsilon \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}\, ds = \mu i + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds \right)$$

De plus, il existe un processus physique qualifié d'induction électromagnétique, formulé par la relation suivante :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n}\, ds$$

Ce processus traduit le fait qu'une variation de flux magnétique à travers une surface S portée par un contour C engendre la circulation d'un champ électrique sur C. En rapprochant cette dernière équation de la nouvelle expression du théorème d'Ampère, on découvre une certaine complémentarité des processus d'induction. Nous découvrons qu'à son tour, toute variation de flux électrique engendre une circulation de champ magnétique. Ainsi, toute variation de flux d'un champ entraîne l'apparition d'une circulation de l'autre champ, ce processus pouvant s'étendre de proche en proche. Pour illustrer cette propagation, le physicien M. Faraday avait d'ailleurs proposé une représentation graphique traduisant l'entrelacement des champs électriques et magnétiques (figure 1.28).

Ces effets, que nous venons d'évoquer qualitativement, peuvent être formalisés en recombinant mathématiquement l'ensemble des équations traduisant les phénomènes électromagnétiques. On aboutit à un système de deux équations décrivant l'évolution spatio-temporelle des champs magnétique et électrique. Dans un milieu de permittivité ε, de perméabilité μ et de conductivité σ celles-ci s'expriment sous la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Delta}\vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

(les opérateurs $\vec{\Delta}\vec{E}$ et $\vec{\Delta}\vec{B}$ désignent les laplaciens vectoriels respectifs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$).

Copyright © 2007 Dunod.

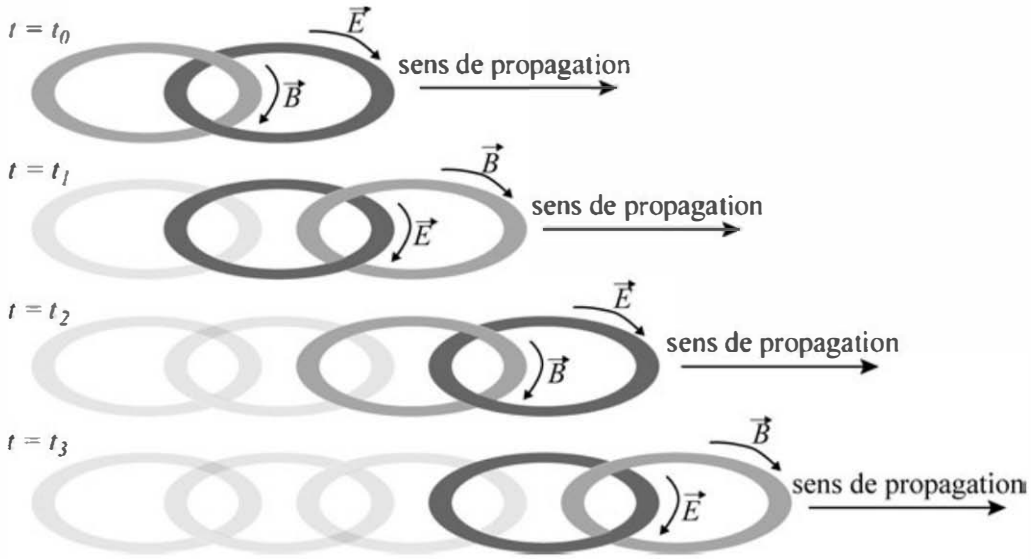


Figure 1.28

Propagation du champ électromagnétique

Résolvons ce système d'équation en régime permanent dans le cas d'une source émettrice sinusoïdale, à un instant t et une distance z de cette source. Distinguons les deux cas de figure correspondant à un milieu isolant et un milieu conducteur.

– Dans un milieu isolant comme l'air, à une fréquence $f = 50$ Hz ($\sigma \gg \omega\,\varepsilon$), les champs possèdent un comportement ondulatoire où les champs électromagnétiques se propagent à la vitesse $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} = 300\,000$ km/s. La solution aux équations est de la forme : $E(z,t) = E_M \cos\left(2\pi\left(f\,t - \dfrac{z}{\lambda}\right)\right)$ et $B(z,t) = B_M \cos\left(2\pi\left(f\,t - \dfrac{z}{\lambda}\right)\right)$, où la longueur d'onde λ est donnée par la relation $\lambda = \dfrac{v}{f}$. À une fréquence de 50 Hz, la longueur d'onde est donc de 6 000 km.

– Dans un milieu conducteur comme le cuivre à 50 Hz ($\sigma \gg \omega\,\varepsilon$), les champs possèdent un comportement diffusif. La solution aux équations est de la forme :

$$E(z,t) = E_{\max} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(2\pi\,f\,t - \frac{z}{\delta}\right) \text{ et } B(z,t) = B_{\max} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(2\pi\,f\,t - \frac{z}{\delta}\right).$$

Dans le cuivre, à 50 Hz, la vitesse de propagation des champs électromagnétiques est $v = 2\sqrt{\dfrac{\pi\,f}{\mu\,\sigma}} = 2{,}94$ m/s, et la longueur d'onde associée est égale à $\lambda = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{f\,\mu\,\sigma}} = 58{,}7$ cm. La grandeur notée $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\,f\,\mu\,\sigma}}$ porte le nom de profondeur de peau ; elle conditionne la décroissance exponentielle des amplitudes des champs électriques et magnétiques.

Copyright © 2007 Dunod.

L'atténuation des champs est telle que leur amplitude décroît d'un facteur e = 2,7 (figure 1.29) en une longueur d'onde. Le comportement ondulatoire des champs est donc à peine discernable dans un conducteur.

La profondeur de peau pour le cuivre à 50 Hz ($\delta = 9{,}3$ mm) est importante au regard du diamètre des fils de cuivre utilisés dans une installation domestique (de l'ordre du mm).

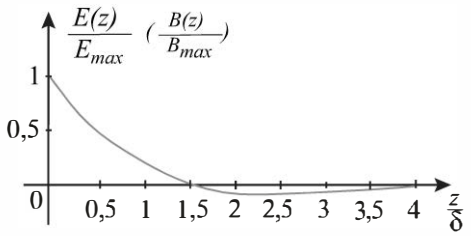


Figure 1.29

Le champ diffuse à l'intérieur du conducteur à la manière de la température à l'intérieur d'un conducteur thermique.

En conclusion, on réalise que les champs électrique et magnétique se propagent dans et à l'extérieur des câbles.

L'onde électromagnétique se propage dans l'air autour des câbles (fil de phase et fil de neutre) à une vitesse considérable (300 000 km.s^{-1}). L'ensemble de ces deux câbles constitue un guide d'onde, ou plus précisément une ligne de transmission bifilaire.

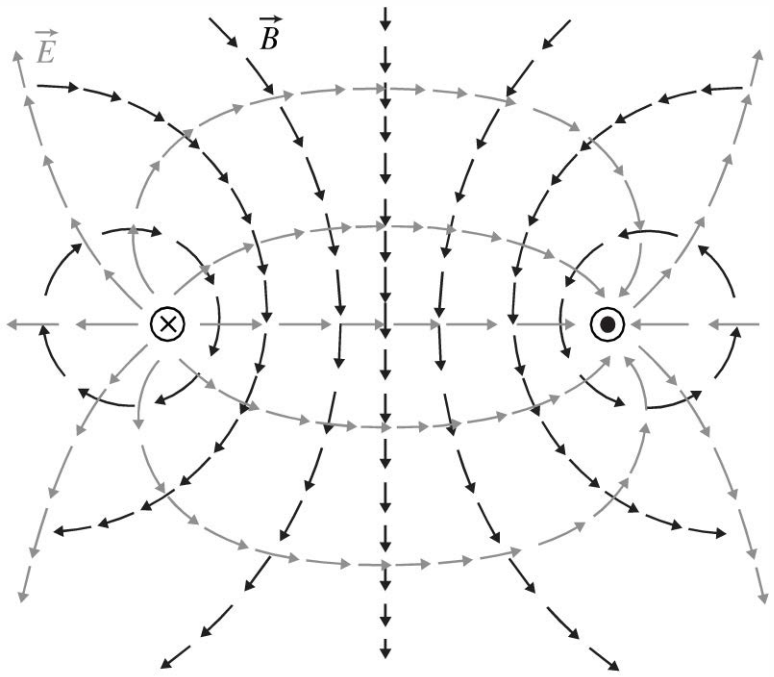


Figure 1.30

La figure 1.30 illustre la manière dont s'organisent les lignes de champs autour des câbles considérés comme perpendiculaires à la figure.

Approximation des régimes quasi stationnaires

Pour une ligne à haute tension destinée à l'acheminement de l'énergie électrique, longue de 1 500 km, la propagation de l'onde électromagnétique doit être prise en compte. En effet, à 50 Hz, la longueur totale des câbles équivaut à la distance séparant un ventre d'un creux ($\lambda/4 = 6\,000/4 = 1\,500$ km). En d'autres termes, à chaque instant, lorsqu'un champ est maximal à une extrémité, il est nul à l'autre extrémité.

Copyright © 2007 Dunod.

Néanmoins, pour une installation électrique domestique totalisant une longueur de câble n'excédant pas quelques centaines de mètres, la longueur d'onde apparaît comme considérable. De sorte que toute variation de champ le long de la ligne n'est pas décelable.

D'une manière générale, si l'on fait l'hypothèse que la longueur l du circuit électrique est faible devant la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique ($l << \lambda$), on peut considérer que la variation d'intensité des champs n'est pas significative. Il en résulte que les temps de propagation des champs $\tau = l/v$ sont très rapides au regard de la période T d'évolution de ceux-ci : $(\tau = l/v) << (T = \lambda/v)$. Sous cette hypothèse, on considérera que la réponse électrique d'un circuit sera instantanée. Cette approximation, qui correspond au cadre de l'étude des circuits menée dans cet ouvrage, constitue ce qu'il est d'usage d'appeler l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Dans ce type de régime, l'influence du courant de déplacement est négligée, au profit du courant de conduction.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

1.1 Parmi les quatre interactions fondamentales, quelle est celle qui régit les phénomènes électriques dans les circuits électriques ?

1.2 Quelle est la source d'un champ électrostatique ? Quelle relation existe-t-il entre le champ électrostatique et sa source ?

1.3 Qu'appelle-t-on courant électrique ? À quoi correspond l'intensité du courant électrique à travers une surface S ?

1.4 Quelle différence existe-t-il entre un milieu semi-conducteur et un milieu conducteur ?

1.5 En quoi consiste la propriété de conservation de la charge ?

1.6 L'intensité électrique et la tension électrique sont-elles des grandeurs scalaires ou vectorielles ?

1.7 Comment choisit-on le fléchage des tensions et des courants ?

1.8 Qu'appelle-t-on « convention générateur » et « convention récepteur » ?

1.9 Quelle est la source d'un champ magnétique ? Quelle relation existe-t-il entre le champ magnétique et sa source ?

1.10 Le flux magnétique est qualifié de conservatif. En quoi consiste cette propriété ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

1.11 On considère une charge ponctuelle $q_A > 0$ placée en un point A de l'espace assimilé au vide. Le champ électrique $\vec{E}$ qu'elle engendre en un point M, situé à une distance l de la charge, est dirigé comme indiqué figure 1.31.

Copyright © 2007 Dunod.

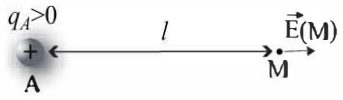


Figure 1.31

1) Par application du théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrostatique au point M.

2) Déduire de la question précédente l'expression de la tension électrique $u_{M_1M_2}$ entre deux points M_1 et M_2, respectivement distants de la charge de l_1 et l_2. Discuter du signe de $u_{M_1M_2}$ selon la position relative de M_1 et M_2 par rapport à A.

On considère qu'une charge $-q$ supposée ponctuelle, est placée au voisinage de q_A sous l'influence de celle-ci (figure 1.32).

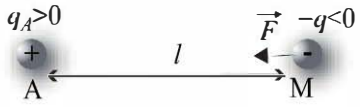


Figure 1.32

3) Déterminer la force électrique $\vec{F}$ exercée par q_A sur $-q$ lorsque cette dernière est positionnée au point M.

4) Déduire de la question précédente l'énergie $w_{M_1M_2}$ communiquée par q_A à $-q$ lorsque celle-ci se déplace de M_1 en M_2 sous l'effet de la force électrique.

1.12 Soit un tronçon de milieu conducteur de forme cylindrique (longueur l et section circulaire de diamètre D) (figure 1.33).

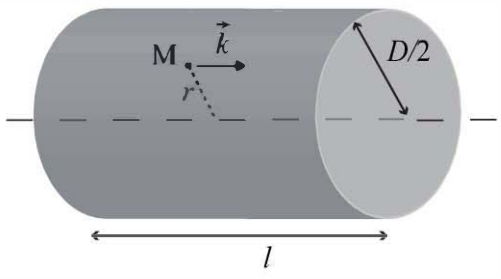


Figure 1.33

On considère que celui-ci est parcouru par un courant électrique caractérisé en tout point par une densité $\vec{k}$.
On met en évidence qu'en haute fréquence, le courant électrique circule préférentiellement sur la périphérie du conducteur. On traduit cet effet pelliculaire en exprimant la densité de courant en un point M, situé à une distance r de l'axe du cylindre à travers une loi du type : $\vec{k}(M) = \vec{k}_0(1 - e^{-\frac{r}{R_0}})$ où $\vec{k}_0$ et R_0 sont des constantes caractéristiques du milieu conducteur et de la fréquence du courant électrique. Déterminer l'intensité i du courant circulant dans le tronçon conducteur en régime quasi stationnaire.

1.13 On considère un fil rectiligne de diamètre D (négligeable au regard de sa longueur L), et parcouru par un courant d'intensité i.

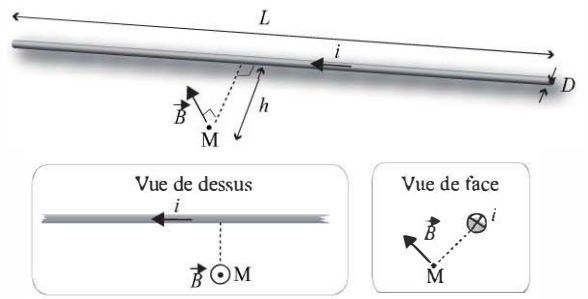


Figure 1.34

Sous réserve que l'on se place dans une région suffisamment éloignée de ses extrémités, on peut considérer que le champ magnétique créé par le fil est orthoradial (figure 1.34).

1) Par application du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le fil en un point M situé à une distance h du fil.

2) Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil à travers un cadre carré de côté a, situé à une distance b du fil ($D \ll b \ll a \ll L$), comme indiqué figure 1.35.

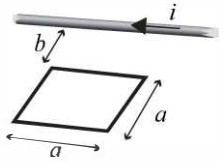


Figure 1.35

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 2

Composants électriques élémentaires

Objectifs

- Comprendre et modéliser les processus électromoteurs.
- Comprendre et modéliser le comportement de conducteur ohmique.
- Comprendre et modéliser le processus d'influence électrostatique.
- Comprendre et modéliser le processus d'induction électromagnétique.
- Définir des structures idéalisées modélisant le comportement électrique des composants usuels présents dans un circuit électrique.

Vocabulaire

Conduction ohmique	Force électromotrice
Champ électromoteur	Courant électromoteur
Influence électrostatique	Source de tension
Induction électromagnétique	Source de courant
Résistance	Résistor
Capacité	Condensateur
Auto-inductance	Inductance

Tout circuit électrique est constitué d'un certain nombre de composants électriques accomplissant différentes fonctions au sein de celui-ci. Les processus électromagnétiques mis en jeu dans la structure de ces composants sont divers. Ces processus sont responsables du comportement électrique de chaque composant. Ce chapitre se fixe pour objectif de présenter les principaux d'entre eux. Pour chacun, après une présentation du phénomène physique sous-jacent et des grandeurs électriques représentatives des mécanismes invoqués, une modélisation et son domaine de validité seront proposés. Cette approche s'inclut dans une démarche visant à définir des composants « idéalisés » de nature active (source de tension et courant) ou passive (résistance, condensateur, inductance). Ceux-ci interviennent de manière omniprésente dans la structure des circuits électriques étudiés dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Copyright © 2007 Dunod.

2.1 RÉSISTANCE

2.1.1 Conduction ohmique

Considérons un élément conducteur de longueur l soumis entre deux extrémités à une différence de potentiel u. La traduction locale de cette tension prend la forme d'un champ électrique $\vec{E}(M)$ qui se manifeste alors en tout point M du milieu tel que $u = \int_l \vec{E}(M).\,d\vec{l}$.

Au point M, sous l'effet de ce champ, les porteurs de charges électriques mobiles q se mettent en mouvement sous l'effet de la force électrique $\vec{F}_e = q\,\vec{E}(M)$.

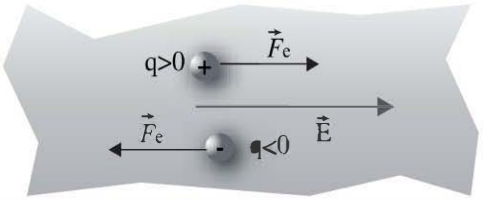


Figure 2.1

Les charges électriques positives se déplaceront dans le sens de $\vec{E}(M)$ et les négatives en sens inverse (figure 2.1).

Lors de leur déplacement à une vitesse $\vec{v}(M)$, les charges mobiles interagissent avec l'édifice cristallin. Dans certains milieux, qualifiés de **milieux ohmiques**, cette influence du réseau cristallin est assimilable en première approximation à une force de frottement fluide du type $\vec{F}_f = -\alpha\,\vec{v}(M)$ (modèle de P. K. Drude).

L'analyse du mouvement d'un porteur de charge q conduit à mettre en évidence un équilibre dynamique correspondant à $\vec{F}_f + \vec{F}_e = \vec{0}$.

L'expression de cet équilibre conduit à la mise en évidence d'une vitesse limite $\vec{v}(M) = \frac{q}{\alpha}\vec{E}(M)$ proportionnelle au champ électrique $\vec{E}(M)$. Le coefficient $\mu = \frac{q}{\alpha}$ appelé mobilité est une grandeur caractérisant l'aptitude que possèdent les charges mobiles à se déplacer sous l'effet d'un champ électrique.

> ***Remarque :*** Compte tenu du sens de déplacement des charges (figure 2.1), la mobilité est négative pour les charges négatives, et positive dans le cas contraire.

Le mouvement collectif de l'ensemble des charges mobiles est assimilable à la circulation d'un courant électrique défini en tout point par une densité de courant $\vec{k}(M) = \rho(M)\,\vec{v}(M)$. La relation entre courant électrique et champ électrique s'exprime donc sous la forme :

$$\vec{k}(M) = \mu\,\rho(M)\,\vec{E}(M)$$

Il est d'usage de définir un paramètre $\gamma(M) = \mu\,\rho(M)$ appelé **conductivité du milieu** au point M. La conductivité s'exprime en $\Omega^{-1}m^{-1}$.

> ***Remarque :*** Quel que soit le signe des porteurs de charge mobiles, le produit $\mu\,\rho$ confère au milieu une conductivité positive.

La conductivité est donc une grandeur caractérisant l'aptitude du milieu à laisser transiter un courant plus ou moins important. En effet, à champ électrique donné, plus la conductivité est élevée, plus le courant électrique résultant est intense. Des très bons conducteurs, comme le cuivre ($\gamma = 5{,}8{\cdot}10^7$ S/m), jusqu'à des matériaux isolants, comme le verre ($\gamma = 10^{-17}$ S/m), on mesure combien l'étendue des valeurs de γ est grande.

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : En électricité, il sera souvent fait référence à la résistivité ρ d'un élément conducteur (à ne pas confondre avec la densité de charge). Celle-ci est définie comme l'inverse de la conductivité : $\rho = \gamma^{-1}$.

L'intensité i du courant à travers une section S de conducteur, s'exprime alors sous la forme :

$$i = \iint_S \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S \gamma(M)\, \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds$$

2.1.2 Résistance électrique

Une variation de tension d'un facteur $\alpha (u' = \alpha u)$ induit une variation du champ électrique dans les mêmes proportions $(\vec{E}'(M) = \alpha \vec{E}(M))$; en effet :

$$u' = \alpha u = \alpha \int_l \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \int_l \alpha \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E}'(M) \cdot d\vec{l}$$

La nouvelle intensité i' résultante s'exprimera de la manière suivante :

$$i' = \iint_S \gamma(M)\, \vec{E}'(M) \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S \gamma(M)\, \alpha \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha \iint_S \gamma \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha i$$

Il est ainsi remarquable de constater qu'à géométrie donnée, le rapport entre la tension et l'intensité du courant entre deux points d'un conducteur ohmique est une constante : $\frac{u'}{i'} = \frac{\alpha u}{\alpha i} = \frac{u}{i} = \text{Cste} = \frac{\int_l \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds}$. Cette constante, définie positive, ne dépend que de la nature du milieu et de ses dimensions. Elle est notée $R = \frac{\int_l \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds}$ et porte le nom de **résistance électrique**.

La résistance s'exprime en ohm (symbole : Ω). Dans l'étude des circuits électriques, on utilise la notion de conductance (notée G) définie par l'inverse de la résistance. Celle-ci s'exprime donc en Ω^{-1} ou Siemens (symbole S).

La relation liant la tension et le courant circulant entre deux points d'un milieu conducteur ohmique peut s'exprimer de la manière suivante :

$$u = R\, i$$

Cette relation est communément appelée « loi d'Ohm ».

Georg Simon OHM (1789-1854)



Ce physicien allemand, sans connaître la nature profonde de l'électricité, en s'appuyant seulement sur quelques conclusions expérimentales, parvient à formuler sa célèbre loi sur le comportement électrique des conducteurs en 1827. Son nom fut attribué à l'unité de mesure de la résistance électrique par le congrès de Paris en 1881.

Copyright © 2007 Dunod.

2.1.3 Notion de résistor

On peut modéliser le processus de conduction ohmique à l'intérieur d'un composant électrique en définissant une structure idéalisée appelée **résistor**.

➤ ***Modélisation et représentation***

Un résistor est constitué d'un élément conducteur délimité par deux points A et B. Ces deux extrémités sont considérées comme étant équipotentielles. La géométrie et la structure du conducteur lui confèrent une certaine résistance notée R.

Sous l'effet d'une tension $u_{AB} > 0$ appliquée entre les extrémités, un champ électrique $\vec{E}$ s'établit, dirigé de A vers B (figure 2.2a).

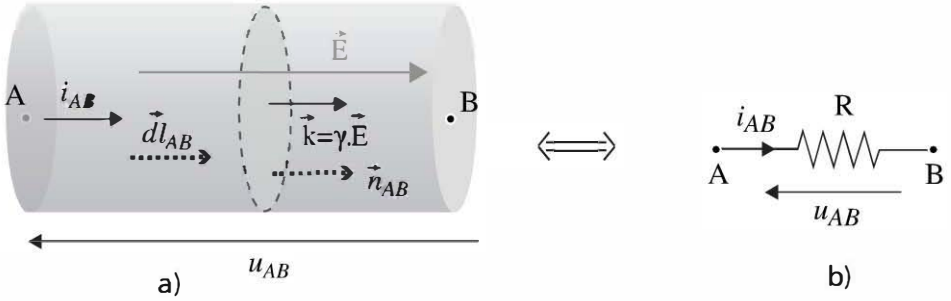


Figure 2.2

Le courant électrique de densité $\vec{k}$ qui résulte du champ, sera également dirigé de A vers B. L'intensité du courant i_{AB} évaluée de A vers B sera positive.
La relation liant courant et tension s'exprimera donc avec le fléchage choisi (convention récepteur) sous la forme :

$$u_{AB} = R\, i_{AB}$$

La représentation graphique usuelle d'un résistor est donnée figure 2.2b.

➤ ***Considérations énergétiques***

Lors de la circulation du courant électrique dans un milieu conducteur, une partie de l'énergie cinétique portée par les charges mobiles est perdue par les chocs répétés avec les autres atomes et ions du réseau cristallin.

Cette énergie cédée au milieu correspond à un dégagement de chaleur qui contribue à augmenter la température du conducteur.

L'intensité de ce processus physique, communément appelé « effet Joule », est grandement conditionnée par la valeur de la résistance de l'élément conducteur.

Pour quantifier cette énergie consommée par le conducteur, il semble logique de quantifier la puissance p reçue en convention récepteur : $p = u\, i = R\, i^2 = \dfrac{u^2}{R}$.

> Appréhendé sur un plan énergétique, un résistor traduit une dissipation d'énergie électrique sous forme de chaleur.

➤ ***Limitation du modèle***

Un élément conducteur ne pourra être assimilé à un conducteur ohmique que si l'état d'équilibre thermique est atteint. En effet, si la température de ce dernier est supposée constante,

Copyright © 2007 Dunod.

la conductivité est considérée comme constante, et donc à dimension donnée la résistance restera fixe. En particulier, tous les métaux considérés à température fixe peuvent être assimilés à des conducteurs ohmiques.

Sous l'effet d'une tension trop importante, le champ électrique à l'intérieur de la structure peut atteindre une valeur limite appelée champ disruptif. Les forces électriques sont alors suffisantes pour engendrer des phénomènes d'ionisation étendus venant rompre des liaisons covalentes. Ce phénomène entraîne la libération dans la structure d'un nombre important de porteurs de charges par effet d'avalanche. Le milieu voit ainsi sa densité de charges mobiles brutalement augmenter, entraînant une élévation très rapide du courant.

Les structures semi-conductrices ne peuvent pas être assimilées à des conducteurs ohmiques, les courants ne trouvant que partiellement leur origine dans des processus de conduction électrique.

2.2 SOURCES ÉLECTRIQUES

2.2.1 Processus électromoteurs

Un apport en continu d'énergie électrique à un circuit nécessite la présence de composants susceptibles d'assurer la circulation de manière durable d'un courant électrique. De tels composants réalisent cette opération en transformant une forme d'énergie non électrique vers une forme électrique. Cette transformation est appelée **conversion électrique**.

➤ ***Conversion électrique***

Les processus physiques sous-jacents à cette conversion sont qualifiés de processus **électromoteurs**. Les principaux exploités sur un plan industriel sont :

– la conversion électrochimique ;

– la conversion photoélectrique ;

– la conversion thermoélectrique ;

– la conversion électromécanique.

La plupart de ces processus sont **réversibles**, dans le sens où il est possible de restituer de l'énergie électrique à partir de la forme d'énergie initiale. Des composants électriques

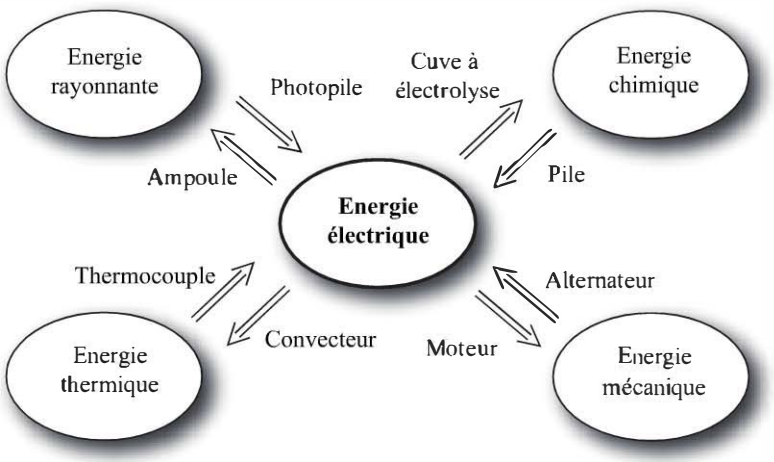


Figure 2.3

Copyright © 2007 Dunod.

aux complexités diverses, utilisés dans les circuits électriques, ont spécialement été conçus pour opérer ce type de transformation (figure 2.3).

Comme nous allons le détailler, ces conversions procèdent de deux types de mécanismes électromoteurs. L'un caractérisé par la présence d'un **champ électromoteur**, l'autre par la présence d'un **courant électromoteur**.

➤ *Champ électromoteur*

Un certain nombre de processus électromoteurs sont à l'origine de l'apparition d'une tension de manière permanente aux bornes de composants électriques, et ce, même en l'absence de courant électrique.

> ***Remarque :*** Ce processus est différent de celui responsable de l'apparition d'un champ électrique sous l'effet de charges électriques.

Pour traduire cet effet électromoteur, il convient d'invoquer la présence d'un champ qualifié de champ électromoteur, noté $\vec{E}_m$. Le champ électrique $\vec{E}$ présent dans une structure est donc la somme d'une composante dite « électrostatique » $\vec{E}_s$ qui résulte de la présence de charges dissociées, d'une composante « électromotrice » $\vec{E}_m$:

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$$

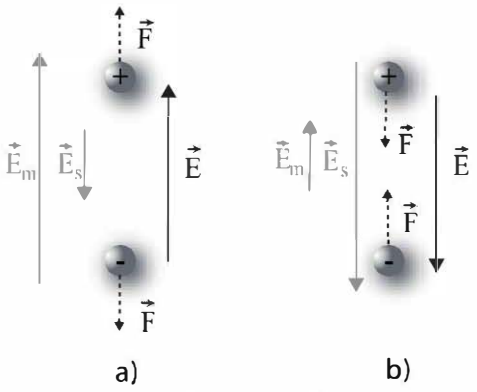


Figure 2.4

Pour analyser l'effet dynamique du champ électrique $\vec{E}$ sur les charges mobiles, il y a lieu de distinguer deux cas de figure :

– $||\vec{E}_s|| < ||\vec{E}_m||$: le champ électrique résultant contribue à séparer les charges (figure 2.4a) ;

– $||\vec{E}_s|| > ||\vec{E}_m||$: le champ électrique résultant contribue à rapprocher les charges (figure 2.4b).

➤ *Courant électromoteur*

Comme cela a été évoqué dans le chapitre 1 de cet ouvrage, un courant de conduction est caractérisé par sa densité $\vec{k}_c$. Cette densité est intimement liée à la concentration en porteurs de charges mobiles n par la relation :

$$\vec{k}_c = n\, q\, \vec{v}$$

où $\vec{v}$ correspond à la vitesse moyenne de déplacement des porteurs de charges.

En provoquant de manière plus ou moins étendue des phénomènes d'ionisation (figure 2.5), certains processus physiques agissent directement sur n. Ces phénomènes d'ionisation, qui contribuent à augmenter la concentration n, sont rendus possible par apport d'énergie à la structure (éclairage, augmentation de la température ...). Ainsi, si l'on considère que n subit un accroissement de Δ_n, la densité de courant s'exprime sous la forme :

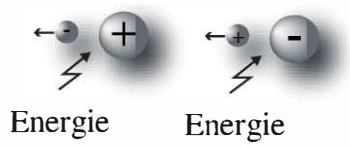


Figure 2.5

$$\vec{k} = (n + \Delta n)\, q\, \vec{v} = n\, q\, \vec{v} + \Delta n\, q\, \vec{v}$$

Copyright © 2007 Dunod.

Il est ainsi possible de fractionner la densité de courant en deux composantes. L'une caractérise le processus de conduction $\vec{k}_c = n\,q\,\vec{v}$; l'autre, notée $\vec{k}_m = \Delta n\,q\,\vec{v}$, correspond au processus de génération de charges mobiles. En ce sens, la densité $\vec{k}_m$ définit un courant appelé **courant électromoteur**.

Par exemple, l'effet photoélectrique traduit la présence d'un courant électromoteur. En effet, l'intensité lumineuse reçue par un milieu semi-conducteur dopé influence la génération d'électrons libres ou de trous.

La température, représentative de l'énergie interne d'une structure, apparaît comme la principale source d'ionisation, donc de courant électromoteur. Il est usuel d'étudier le comportement électrique d'un composant en négligeant les variations de température. L'énergie interne n'est donc pas assimilée à une source d'énergie à l'origine d'un processus électromoteur. On considère ainsi que la concentration n est une constante qui ne dépend que des caractéristiques du matériau utilisé à température donnée. Ainsi en est-il pour les structures semi-conductrices isolantes à 0 K, mais conductrices aux températures usuelles d'utilisation.

Comme nous le verrons par la suite, la concentration de charges mobiles est prise en compte à travers une grandeur appelée conductivité du milieu.

Il est possible de décomposer le courant $\vec{k}$ dans une structure conductrice en la somme d'un courant de conduction et d'un courant électromoteur : $\vec{k} = \vec{k}_c + \vec{k}_m$.

2.2.2 Grandeurs électromotrices

➤ *Force électromotrice*

Pour justifier pleinement la circulation permanente d'un courant dans un circuit constitué d'éléments conducteurs, il est nécessaire qu'il soit le siège d'un champ électromoteur $\vec{E}_m$.

Considérons un circuit C (figure 2.6) où se manifeste un champ électromoteur $\vec{E}_m$ en tout point. Si l'effet de $\vec{E}_m$ domine les effets électrostatiques, le champ électrique $\vec{E} \simeq \vec{E}_m$. Sous l'effet de $\vec{E}$, les charges soumises à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E} \simeq q\vec{E}_m$ se mettent en mouvement pour faire le tour du circuit et constituer un courant circulant en boucle fermée.

Il est d'usage de quantifier l'action de $\vec{E}$ le long de C par une grandeur appelée force électromotrice (f.é.m.) définie par $e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Dans le cas particulier d'un conducteur, siège d'un champ électromoteur dont les extrémités A et B sont laissées en l'air (figure 2.7), un courant électrique ne peut circuler de manière permanente entre les extrémités.

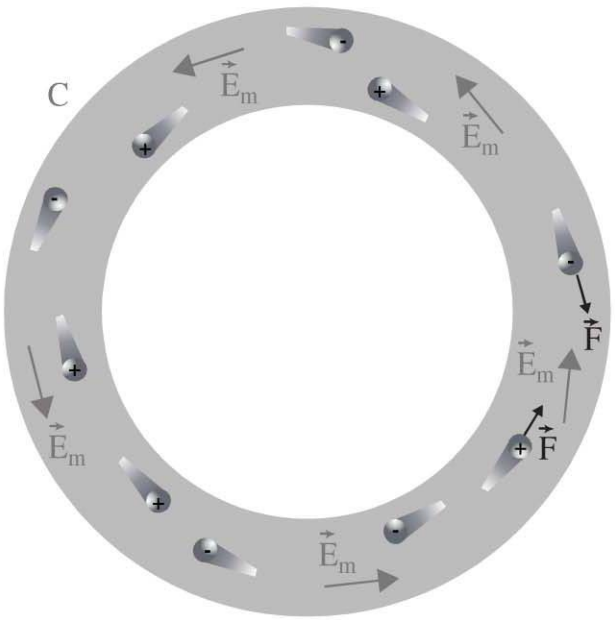


Figure 2.6

Copyright © 2007 Dunod.

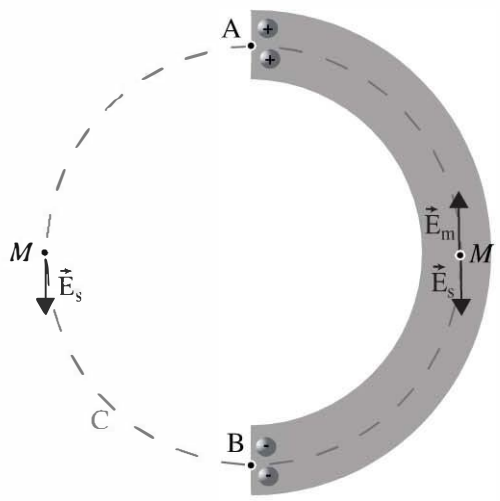


Figure 2.7

En effet, sous l'action du champ électromoteur $\vec{E}_m$, des charges se concentrent sur les extrémités. Sous l'effet de l'accumulation des charges, un champ électrostatique $\vec{E}_s$ prend alors naissance dans et à l'extérieur du conducteur. Le champ $\vec{E}_s$ s'oppose à l'action de $\vec{E}_m$, conduisant très rapidement à un équilibre électrique.

À l'équilibre, la force électrique qui s'exerce sur toute charge électrique q est :

$$\vec{F} = q\vec{E} = q(\vec{E}_s + \vec{E}_m) = \vec{0}$$

Cela implique qu'en tout point M à l'intérieur du conducteur, on a :

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_m$$

Cependant, hors du conducteur siège du processus électromoteur, seul subsistera le champ électrostatique $\vec{E}_s$.

Par suite, la force électromotrice résultante, évaluée sur un contour C fermé (figure 2.7), s'exprimera sous la forme :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{Extérieur} + \underbrace{\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{Intérieur} = \underbrace{\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l}}_{Extérieur} + \underbrace{\int_B^A \vec{0} \cdot d\vec{l}}_{Intérieur} = \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = u_{AB}$$

Une différence de potentiel u_{AB} s'établit donc entre les extrémités de l'élément électromoteur, comme manifestation de la force électromotrice à l'extérieur du conducteur.

> ***Remarque :*** Le terme de « force » électromotrice utilisé historiquement pour quantifier l'effet électromoteur apparaît aujourd'hui comme erroné : la manifestation de la f.é.m. se traduisant par la présence d'une tension et non d'une force au sens mécanique du terme.

➤ *Courant électromoteur*

Comme nous l'avons déjà vu, dans un processus de conduction électrique où se manifeste un effet électromoteur, le courant de densité $\vec{k}$ peut être exprimé sous la forme :

$$\vec{k} = \vec{k}_c + \vec{k}_m$$

La densité $\vec{k}_c$ correspond au courant de conduction et $\vec{k}_m$ au courant électromoteur. L'intensité électrique à travers la section S du conducteur où s'écoule le courant peut être décomposée sous la forme suivante :

$$i = \iint_S \vec{k}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S \left(\vec{k}_c(M) + \vec{k}_m(M)\right) \cdot \vec{n}\, ds = \underbrace{\iint_S \vec{k}_c(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{i_c} + \underbrace{\iint_S \vec{k}_m(M) \cdot \vec{n}\, ds}_{j}$$

Copyright © 2007 Dunod.

Un courant d'intensité j, manifestation du courant électromoteur, vient donc se rajouter au courant de conduction i_c, pour constituer l'intensité totale i du courant.

> ***Remarque :*** Par abus de langage, il est d'usage d'assimiler le courant électromoteur à l'intensité de celui-ci. Ce raccourci étant parfaitement justifié par le fait qu'en régime stationnaire l'intensité du courant sera la même en tout point de la structure électromotrice.

2.2.3 Notion de source électrique

On peut modéliser un phénomène électromoteur à l'intérieur d'un composant électrique en définissant une structure idéale appelée **source électrique**. Selon la nature du processus électromoteur invoqué (courant électromoteur ou force électromotrice), il sera question de source de courant ou de tension.

➤ *Source de tension*

Une source de tension est constituée d'un élément conducteur délimité par deux points A et B. Elle est le siège d'un phénomène électromoteur, caractérisé par un champ électromoteur $\vec{E}_m$ dirigé de B vers A. La géométrie du conducteur lui confère une certaine force électromotrice e (figure 2.8a) qui se manifeste sous l'apparence d'une tension entre A et B.

La représentation graphique d'une source de tension est donnée figure 2.8b.

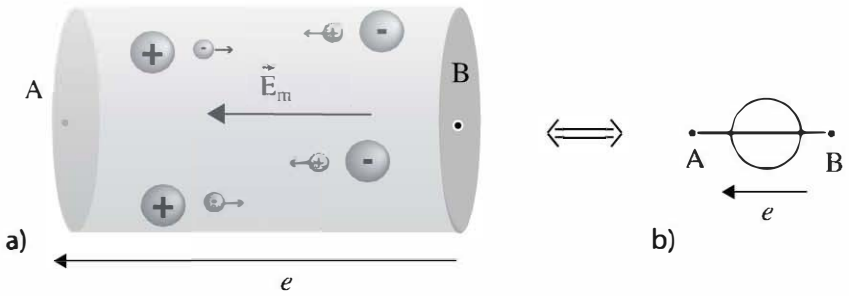


Figure 2.8

> ***Remarque :*** Il existe des sources de tension commandées électriquement où la force électromotrice est contrôlée par une autre grandeur électrique. C'est notamment le cas dans les transformateurs où, par un processus de mutuelle induction électromagnétique, la force électromotrice au secondaire est liée au courant primaire.

Le champ électromoteur à l'origine de l'apparition de la force électromotrice est indépendant du courant électrique que celui-ci engendre dans un circuit fermé. Ainsi, le raccordement d'une source de tension à un circuit électrique ne vient pas modifier la tension à ses bornes.

> La tension aux bornes d'une source de tension est indépendante du courant circulant entre ces bornes.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Source de courant*

Une source de courant est constituée d'un élément conducteur délimité par deux points A et B. Elle est le siège d'un courant électromoteur de densité $\vec{k}_m$ dirigé de A vers B. La géométrie du conducteur confère au courant qui y circule une certaine intensité notée j (figure 2.9a).

La représentation graphique d'une source de courant est donnée figure 2.9b.

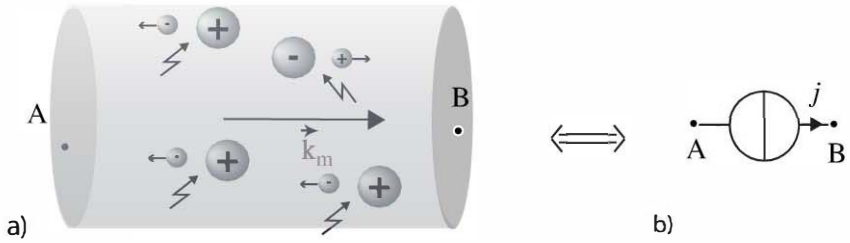


Figure 2.9

Remarque : Il existe des sources de courant commandées électriquement où le courant électromoteur est contrôlé par une autre grandeur électrique. Citons en particulier, « l'effet transistor » et « l'effet de champ », où le courant électromoteur est respectivement contrôlé par un autre courant électrique, ou par une tension.

Le processus de génération de charges mobiles à l'origine du courant électromoteur est indépendant du champ électrique. Ainsi, l'application d'une tension aux bornes d'une source de courant ne modifie pas le courant électromoteur généré par celle-ci.

Le courant délivré par une source de courant est indépendant de la tension à ses bornes.

➤ *Considérations énergétiques*

Si l'on organise en circuit fermé C un ensemble de conducteurs, parmi lesquels figure un élément électromoteur, on assiste à la circulation d'un courant (figure 2.10).

Pour maintenir le courant dans le circuit, un apport énergétique aux charges mobiles est nécessaire.

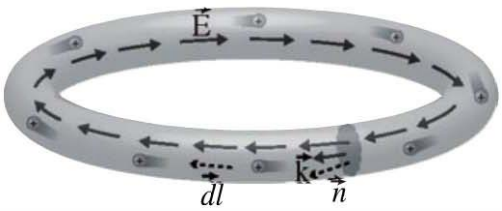


Figure 2.10

Considérons un circuit électrique C, siège d'un champ électrique trouvant son origine dans un processus électromoteur. L'énergie dw reçue par un élément de charge dq pour lui permettre de faire le tour du circuit est $dw = \oint_C dq\ \vec{E} \cdot d\vec{l} = dq \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = dq\, e$. Le terme $e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ correspond à la force électromotrice engendrée par le processus électromoteur.

Sous l'hypothèse d'un fonctionnement en régime quasi stationnaire, l'intensité i du courant électrique peut être évaluée en considérant le passage de dq à travers n'importe quelle section S de C.

Copyright © 2007 Dunod.

Si l'on considère qu'une durée dt est requise pour le transit de dq à travers S, alors l'application du principe de conservation de la charge conduit à :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Par suite, la puissance électrique p communiquée au circuit C par l'intermédiaire du processus électromoteur est :

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{e\,dq}{dt} = e\,i$$

De même, la présence d'un courant électromoteur j véhiculant des charges entre deux points où se manifeste une tension u, traduit l'apport d'une puissance électrique au circuit égale à :

$$p = j\,u$$

➤ ***Limitation du modèle***

Source de courant et de tension correspondent à des structures idéalisées. En effet, les processus de conduction ohmique sont négligés (*cf.* § 1) pour ne conserver que l'essence même du processus électromoteur. Le caractère ohmique de la structure, s'il est pris en considération, entraîne un couplage entre le courant circulant dans l'élément électrique et la tension à ses bornes.

En effet, la présence d'un champ électromoteur au sein d'un circuit induit la circulation d'un courant.

Si l'on prend en compte la résistance électrique interne de ce conducteur, la force électromotrice induira à ses bornes une chute de potentiel dépendant directement de l'intensité du courant y circulant :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = u_{AB} + R \iint_S \gamma \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds = u_{AB} + R\, i_{AB}$$

De même, comme vu précédemment, la présence d'un courant électromoteur à l'intérieur d'un conducteur s'accompagne de la présence d'un courant de conduction. Si l'on prend en compte la résistance électrique interne de ce conducteur, la circulation de ce courant de conduction entraîne l'apparition d'une tension aux bornes du conducteur :

$$i_{AB} = i_c + j = \iint_S \vec{k}_c(M) \cdot \vec{n}\, ds + j = \frac{1}{R} \int_L \frac{\vec{k}_c(M)}{\gamma} \cdot d\vec{l} + j = \frac{u_{AB}}{R} + j$$

Sources de courant et de tension doivent être associées à une résistance qui traduit le comportement ohmique du conducteur dans lequel prend naissance le processus électromoteur.

Copyright © 2007 Dunod.

2.3 CONDENSATEUR

2.3.1 Influence électrostatique

Considérons un ensemble de deux éléments conducteurs identiques A et B. Si l'on applique entre eux une différence de potentiel u_{AB}, un champ électrique prend naissance dans les conducteurs et contribue à mettre en mouvement les charges mobiles. Très rapidement, un état d'équilibre électrostatique s'instaure, caractérisé par une uniformisation du potentiel au niveau des conducteurs.

À l'équilibre, les porteurs de charge de signes opposés se regroupent sur les surfaces des conducteurs en regard (figure 2.11). Cette redistribution de la charge s'effectue à la surface des conducteurs, de préférence dans les régions les plus proches.

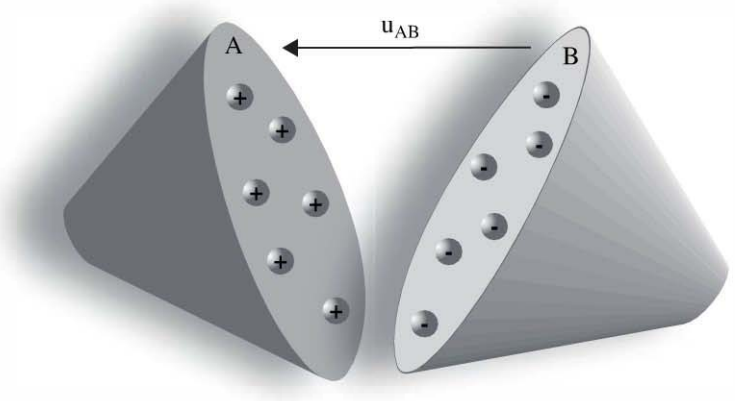


Figure 2.11

Ce processus **d'influence électrostatique** mutuelle est à l'origine d'un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace entre les conducteurs.

La répartition des charges Q_A et Q_B qui se développent respectivement sur les surfaces des conducteurs A et B conditionne l'organisation spatiale du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M extérieur aux conducteurs.

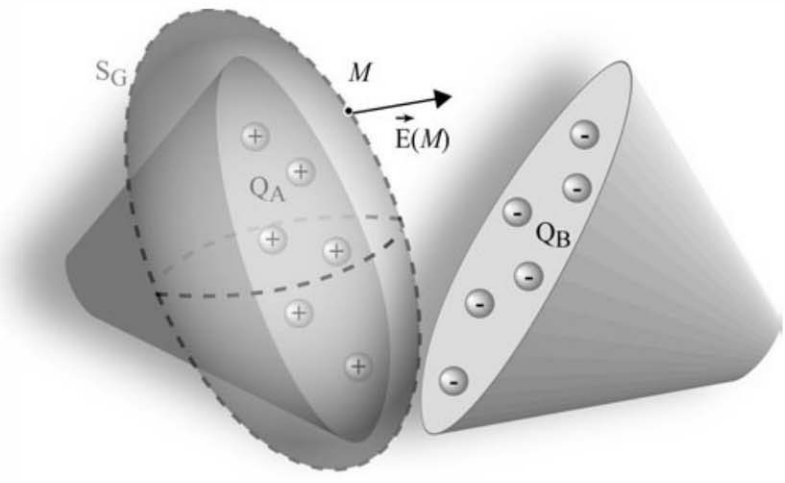


Figure 2.12

Copyright © 2007 Dunod.

Pour exprimer cette dépendance, on applique le théorème de Gauss (figure 2.12) sur une surface fermée (S_G) passant par M et enfermant l'un des conducteurs (le conducteur A par exemple) :

$$\frac{Q_A}{\varepsilon} = \oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds$$

À l'équilibre, le champ électrostatique est également lié à la tension u_{AB} par la relation suivante :

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Si l'on considère que toutes les lignes de champ électrostatique qui débutent sur la charge Q_A se referment sur la charge Q_B, on considère que l'on se situe dans le cadre d'une **influence électrostatique totale** entre conducteurs. Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée S enfermant les deux conducteurs est donc nul (figure 2.13).

L'application du théorème de Gauss conduit alors à :

$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds = 0 = \frac{(Q_A + Q_B)}{\varepsilon}$$

Ce qui implique :

$$Q_A = -Q_B$$

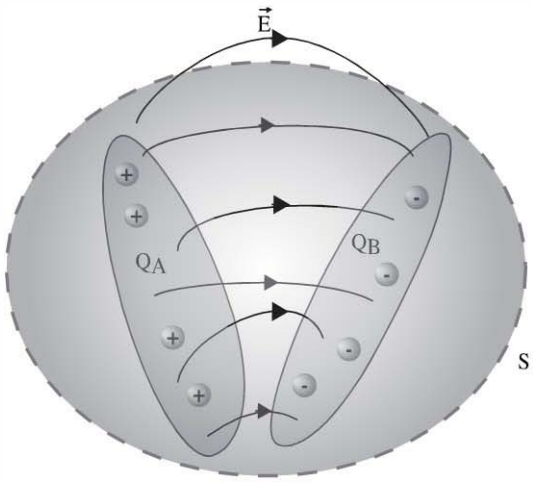


Figure 2.13

La charge développée par les surfaces en regard est donc opposée ; nous la noterons :

$$Q = Q_A = -Q_B$$

La distribution de charge sur des conducteurs en influence électrostatique totale conduit à des charges opposées.

2.3.2 Capacité électrique

Une variation de tension d'un facteur α $(u' = \alpha u)$ induit une variation du champ électrique dans les mêmes proportions $(\vec{E}'(M) = \alpha \vec{E}(M))$; en effet :

$$u' = \alpha u = \alpha \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \alpha \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{E}'(M) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Copyright © 2007 Dunod.

La nouvelle charge stockée Q' résultant s'exprimera de la manière suivante :

$$\frac{Q'}{\varepsilon} = \oiint_{S_G} \vec{E}'(M) \cdot \vec{n}\, ds = \oiint_{S_G} \alpha\, \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha \oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha \frac{Q}{\varepsilon}$$

soit encore :

$$Q' = \alpha\, Q$$

Il est ainsi remarquable de constater qu'à géométrie donnée, le rapport entre la tension et la charge stockée est une constante :

$$\frac{u'}{Q'} = \frac{\alpha\, u}{\alpha\, Q} = \frac{u}{Q} = \text{Cste} = \frac{\displaystyle\int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}}{\varepsilon \displaystyle\oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds}$$

Michael FARADAY (1791-1867)



Autodidacte et expérimentateur de génie, ses recherches ont conduit M. Faraday à explorer des domaines scientifiques relevant de la chimie et de la physique. On lui doit la découverte de nombreux effets électromagnétiques parmi lesquels l'induction électromagnétique. La formulation théorique de ses résultats expérimentaux permit à J. C. Maxwell de proposer une théorie unifiée des champs électromagnétiques.

Cette constante, définie positive, ne dépend que de la géométrie et de la position relative des deux éléments conducteurs. Elle est exprimée sous la forme :

$$C = \frac{\varepsilon \displaystyle\oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\, ds}{\displaystyle\int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}}$$

Elle porte le nom de **capacité électrique**.

La capacité électrique s'exprime en farad (symbole : F) en hommage aux travaux de M. Faraday.

2.3.3 Notion de condensateur

On peut modéliser un phénomène d'influence électrostatique à l'intérieur d'un composant électrique en définissant une structure idéalisée appelée **condensateur**.

➤ ***Modélisation et représentation***

Un condensateur est constitué de deux éléments conducteurs (appelés armatures) délimités par deux points A et B, séparés par un élément isolant.
Les armatures sont considérées comme équipotentielles et placées en influence électrostatique totale. La géométrie des armatures et leur position relative confèrent au condensateur une capacité C.

Copyright © 2007 Dunod.

Sous l'effet d'une différence de potentiel u_{AB} entre les armatures, ces dernières se chargent par un processus d'influence électrostatique totale. Les charges stockées par les armatures sont opposées $+Q$ et $-Q$ telles que :

$$Q = C\,u_{AB}$$

Une variation de tension du_{AB} sur u_{AB} induira une variation de charge élémentaire dQ sur l'armature connectée à A, avec $dQ = C\,du_{AB}$ (figure 2.14).

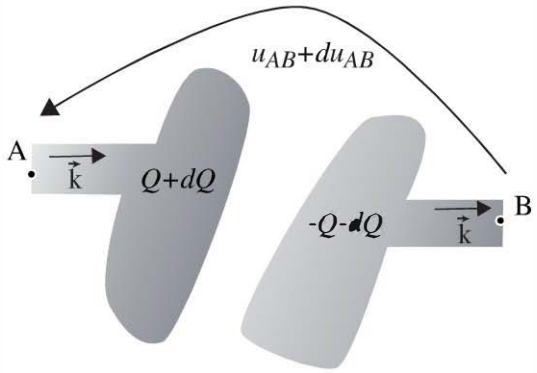


Figure 2.14

Cette variation résulte d'un apport de charges sur l'armature. Ce mouvement de charges implique donc l'existence d'un courant électrique $\vec{k}$.

Il est important de bien comprendre que, de par le processus d'influence électrostatique, on assiste à une variation de charge équivalente, mais opposée sur l'armature connectée à B. On a ainsi l'illusion que le courant électrique $\vec{k}$, qui s'établit entre les armatures, trouve son origine dans un déplacement de charges à travers l'isolant. Toutefois, il n'en est rien.

Pour chiffrer l'intensité du courant résultant de ce déplacement de charge, imaginons une surface fermée S englobant une armature dans laquelle nous appliquons la loi de conservation de la charge. En orientant le courant i_{AB} tel qu'indiqué figure 2.15a, la loi de conservation de la charge impose : $i_{AB} = \dfrac{dQ}{dt}$, avec une normale à S dirigée vers l'intérieur de celle-ci.

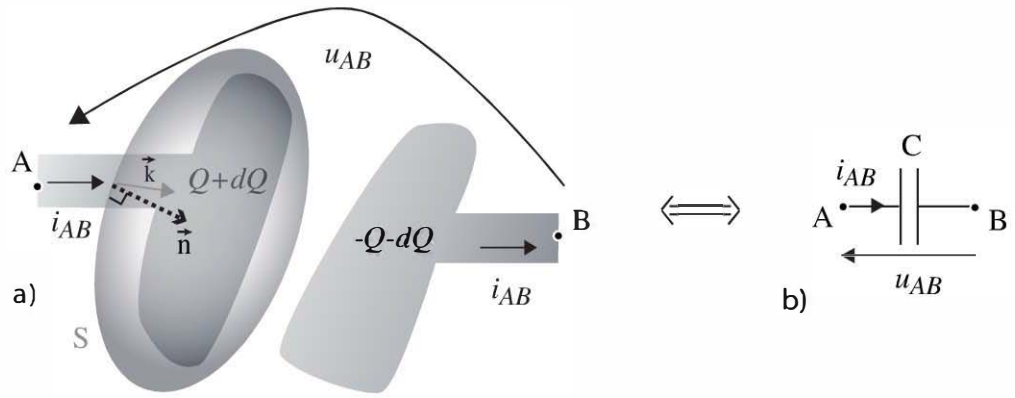


Figure 2.15

La relation liant l'intensité du courant i_{AB} à la variation de tension qui en est à l'origine, s'exprime donc sous la forme :

$$i_{AB} = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du_{AB}}{dt}$$

La représentation graphique d'un condensateur (figure 2.15b) matérialise la présence des deux armatures séparées par un isolant.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Considérations énergétiques*

Les charges stockées sur les armatures d'un condensateur le sont à des niveaux de potentiel différents. Une énergie est donc emmagasinée sous forme potentielle électrostatique.

Pour chiffrer cette énergie, partons d'un état d'équilibre où le condensateur a accumulé une charge q sous une tension $u_{AB} = v_A - v_B$. L'arrivée d'une charge élémentaire dq sur l'armature A correspond à un apport énergétique : $dq\, v_A$. Du fait de l'influence électrostatique, l'arrivée de dq en A s'accompagne d'une arrivée de charge $-dq$ en B.

Sous l'effet des variations de charge, l'apport énergétique élémentaire dw au condensateur est donc égal à :

$$dw = dq\, v_A + (-dq\, v_B) = dq(v_A - v_B) = dq\, u_{AB}$$

Que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

$$dw = \frac{q}{C} dq$$

puisque $q = C\, u_{AB}$

Partant d'un état initial où le condensateur n'est pas chargé, s'il retrouve un état d'équilibre en ayant emmagasiné une charge Q, l'énergie stockée par celui-ci est égale à :

$$w(t) = \int_0^{w(t)} dw = \int_0^{Q(t)} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^{Q(t)} q\, dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2(t)}{2} = \frac{1}{2} C\, u_{AB}^2(t)$$

Remarque : On prend en compte l'existence charge initiale $Q(0) = Q_0$ en ajoutant le terme $w_0 = \dfrac{Q_0^2}{2C}$ à l'expression de $w(t)$.

➤ *Limitation du modèle*

La relation liant i_{AB} et u_{AB} dans le modèle du condensateur ne reste bien évidemment valable que dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires. On considère ainsi qu'à chaque instant, l'intensité du courant au niveau de chaque armature est identique.

D'autre part, la condition de l'influence électrostatique totale ne peut, en toute rigueur, être vérifiée que si l'une des armatures est intégralement enfermée à l'intérieur de l'autre. On pourra néanmoins considérer que l'on est dans une bonne approximation de l'influence totale, si les armatures sont suffisamment proches au regard de leurs dimensions.

Le modèle du condensateur ne reste applicable que dans le cas où le milieu entre les armatures reste isolant. Or, en pratique, une trop grande quantité de charges stockées conduit à l'apparition d'un champ disruptif qui va conduire à une ionisation de l'isolant. Ce phénomène dit de claquage électrique, généralement destructeur, entraîne l'apparition d'un courant très intense dans le milieu isolant.

Copyright © 2007 Dunod.

2.4 INDUCTANCE

2.4.1 Auto-induction électromagnétique

Considérons une portion d'élément conducteur de géométrie filiforme. Si l'on provoque la circulation d'un courant électrique d'intensité i, un champ magnétique $\vec{B}$ prend naissance autour du conducteur.

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ se manifeste en particulier en tout point M de la surface S portée par l'élément conducteur filiforme. Pour établir la relation entre le champ magnétique et le courant, utilisons le théorème d'Ampère. Ce dernier exprimé sur un contour fermé (C_A) enlaçant le conducteur (figure 2.16) donne :

$$\mu i = \oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}$$

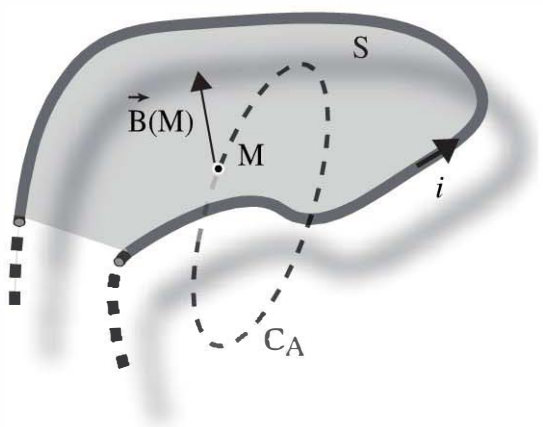


Figure 2.16

Ce champ magnétique est à l'origine de l'apparition d'un flux magnétique ϕ à travers S d'expression $\phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds$.

Toute variation de ce flux induit l'apparition d'un champ électrique $\vec{E}(P)$ en tout point P du conducteur (figure 2.17). Ce phénomène électromagnétique, traduisant un couplage entre champ magnétique variable et champ électrique, est appelé induction électromagnétique.

Il fut formalisé par Michael Faraday à travers la loi suivante :

$$\oint_C \vec{E}(P) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

où C désigne le contour fermé délimitant la surface S, matérialisé en pointillés sur la figure 2.17.

Il est important de remarquer la présence du signe négatif dans l'expression de la loi de Faraday. Ce signe traduit une nécessaire dépense d'énergie magnétique (variation du flux), pour obtenir un apport d'énergie électrique par la f.é.m.

> ***Remarque :*** Ce résultat est habituellement formulé à travers une règle dite « loi de Lenz » qui exprime de façon qualitative que la force électromotrice s'oppose par ses effets à la cause qui lui a donné naissance.

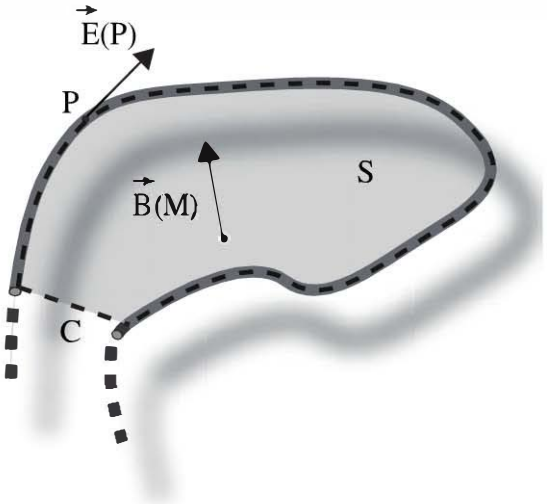


Figure 2.17

Copyright © 2007 Dunod.

2.4.2 Coefficient d'auto-induction

Une variation de courant d'un facteur α ($i' = \alpha i$) induit une variation du champ magnétique dans les mêmes proportions ($\vec{B}'(M) = \alpha \vec{B}(M)$) ; en effet :

$$i' = \alpha i = \frac{\alpha}{\mu} \oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \oint_{C_A} \alpha \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \oint_{C_A} \vec{B}'(M) \cdot d\vec{l}$$

Le nouveau flux ϕ' résultant s'exprimera de la manière suivante :

$$\phi' = \iint_S \vec{B}'(M) \cdot \vec{n}\, ds = \iint_S \alpha \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds = \alpha \phi$$

Il est ainsi remarquable de constater qu'à géométrie de conducteur donnée, le rapport entre le courant et le flux engendré est une constante :

$$\frac{\phi'}{i'} = \frac{\alpha \phi}{\alpha i} = \frac{\phi}{i} = \text{Cste} = \frac{\iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds}{\frac{1}{\mu} \oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}}$$

Cette constante, définie positive, ne dépend que de la géométrie de l'élément conducteur.

On appelle coefficient d'auto-induction (ou auto-inductance), le coefficient

$$L = \frac{\iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds}{\frac{1}{\mu} \oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}}\ .$$

Le coefficient d'auto-induction s'exprime en henry (symbole : H).

Joseph HENRY (1797-1878)



Ce physicien américain est à l'origine de la découverte de l'effet d'auto-induction et de son application à la télégraphie. Membre fondateur de la « National Academy of Sciences », il fut décidé de donner son nom à l'unité de mesure des coefficients d'induction.

2.4.3 Notion d'inductance

On peut modéliser un phénomène d'auto-induction à l'intérieur d'un composant électrique en définissant une structure idéalisée appelée **inductance**.

➤ ***Modélisation et représentation***

Une inductance est constituée d'un élément conducteur, d'extrémités A et B. La géométrie du conducteur confère à l'inductance un coefficient d'auto-induction noté L.

Copyright © 2007 Dunod.

Sous l'effet de la circulation d'un courant d'intensité i entre les extrémités de l'inductance, un flux magnétique $\phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n}\, ds$ se manifeste à travers la surface S portée par celui-ci, tel que $\phi = L\, i_{AB}$ (figure 2.18a).

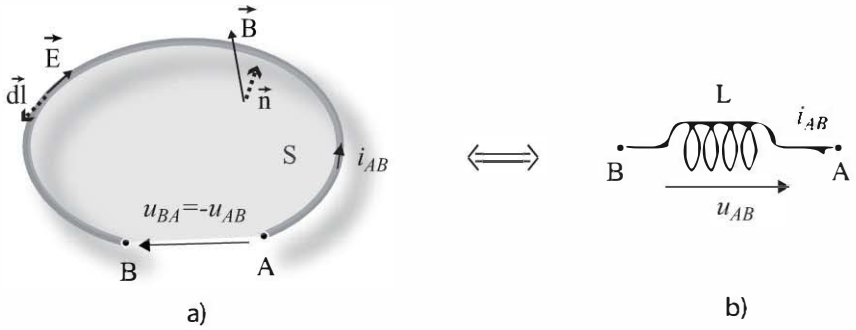


Figure 2.18

Toute variation d'intensité di_{AB} sur i_{AB} impliquera une variation de flux $d\phi$: $d\phi = L\, di_{AB}$, qui est à l'origine d'un processus d'induction électromagnétique à l'intérieur du conducteur.

Si l'on considère que cette variation s'opère durant une durée élémentaire dt, alors la force électromotrice induite est $e = \oint_C \vec{E}(P) \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\phi}{dt} = -L\dfrac{di_{AB}}{dt}$.

Cette f.é.m. conduit à l'apparition d'une tension u_{AB} entre les extrémités A et B.

En effet, $e = \oint_C \vec{E}(P) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}(P) \cdot d\vec{l}_{AB} + \int_B^A \vec{E}(P) \cdot d\vec{l}_{BA}$, et si on néglige le caractère ohmique du conducteur, on impose $\int_A^B \vec{E}(P) \cdot d\vec{l} = 0$. Par suite, on obtient $e = \int_B^A \vec{E}(P) \cdot d\vec{l}_{AB} = u_{BA} = -u_{AB}$. La relation liant la tension aux bornes de l'inductance à la variation d'intensité du courant électrique qui la traverse s'exprime sous la forme :

$$u_{AB} = -e = L\frac{di_{AB}}{dt}$$

La représentation graphique d'une inductance est présentée figure 2.18b.

➤ *Considérations énergétiques*

La circulation d'un courant à l'intérieur d'une inductance entraîne l'apparition d'un champ magnétique. Une énergie est ainsi emmagasinée sous forme magnétique.

En convention récepteur, la puissance électrique p reçue par une inductance est :

$$p = i_{AB}\, u_{AB} = i_{AB}\, L\frac{di_{AB}}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{di_{AB}^2}{dt}$$

L'apport d'énergie dw résultant du transfert de puissance pendant un laps de temps dt est :

$$dw = p\, dt = \frac{1}{2}L\, di_{AB}^2$$

Copyright © 2007 Dunod.

Partant d'un état initial où l'inductance n'est parcourue par aucun courant $i(0) = 0$, l'énergie stockée par celle-ci en présence d'un courant d'intensité i_{AB} est :

$$w(t) = \int_{\bullet}^{w(t)} dw = \int_{0}^{i_{AB}(t)} \frac{1}{2} L \, di_{AB}^2 = \frac{L}{2} \int_{\bullet}^{i_{AB}(t)} di_{AB}^2 = \frac{1}{2} L \, i_{AB}^2(t)$$

➤ ***Limitation du modèle***

Dans le modèle de l'inductance, on considère que la tension aux bornes de celle-ci découle exclusivement d'un processus d'induction électromagnétique. En ce sens, le caractère ohmique du conducteur dans lequel circule le courant n'est pas pris en considération, ni la chute de potentiel qui en résulte.

Le modèle de l'inductance ne reste valable que dans le cas où le milieu dans lequel se manifeste le champ magnétique possède une perméabilité μ constante. Dans certains milieux magnétiques matériels, la relation liant l'intensité du courant et le champ magnétique n'est pas linéaire, ce que l'on traduit en exprimant que la perméabilité μ est fonction de i. Citons notamment le cas des milieux ferromagnétiques doux fréquemment utilisés en électrotechnique. Ceux-ci sont qualifiés de saturable dans le sens où une élévation de i conduit à une augmentation relative du champ magnétique de moins en moins significative.

Pour en savoir plus...

ANALOGIES PHYSIQUES

Que peut-il bien y avoir de commun entre un vélo, l'arroseur de votre jardin, votre chaudière à gaz et un circuit électrique ? Rien au premier abord, car tous constituent des systèmes physiques qui sont gouvernés par des lois spécifiques. Néanmoins, comme nous allons le découvrir, les structures électriques, hydrauliques, mécaniques et thermiques présentent des analogies quand on analyse leur fonctionnement avec un peu de recul.

Évolution physique d'un système

Une approche possible pour étudier le comportement d'un système physique repose sur la définition de deux variables permettant de définir à tout instant l'état de la structure.

L'une d'elles, notée x, permet de traduire la potentialité d'évolution du système. Elle est, en ce sens, qualifiée de **variable de potentiel**. Il lui est associé une énergie dite potentielle.

L'autre, notée y, fait directement référence à l'évolution du système en caractérisant un transfert. Dans un grand nombre de structures physiques, y quantifie un véritable mouvement avec un déplacement effectif de matière. C'est pourquoi celle-ci est qualifiée de **variable cinétique**. L'énergie qui lui est associée est appelée énergie cinétique.

Le tableau 2.1 présente les grandeurs physiques associées aux variables de potentiel et cinétique dans quelques domaines de la physique.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 2.1

	Electricité	Hydraulique	Mécanique	Thermique
x	Tension [V]	Pression [Pa]	Force [N]	Température [K]
y	Intensité [A]	Débit [m^3/s]	Vitesse [m/s]	Flux thermique [W]

Remarque : La somme de l'énergie potentielle et cinétique constitue l'énergie mécanique.

Pour un système donné, trois **paramètres caractéristiques** notés K_1, K_2 et K_3 permettent de lier entre elles les variables x et y. Nous détaillerons dans les paragraphes suivants les éléments auxquels sont physiquement rattachés ces trois paramètres. La relation de causalité correspondant à la loi d'évolution du système est explicitée sous la forme $f(x, y) = 0$.

Cette équation est, par essence, de nature différentielle.

Éléments dissipatifs

Certains éléments physiques sont caractérisés par une relation du type :

$$y = K_1 x$$

Ils dissipent la forme d'énergie qui assure leur fonctionnement en chaleur. En ce sens, ils sont qualifiés d'éléments dissipatifs.

Par exemple, l'élément dissipatif d'un circuit électrique est la résistance. Celle-ci, parcourue par un courant, dissipe l'énergie électrique par effet joule. Le paramètre K_2 s'identifie à la résistance électrique R.

Il existe, en mécanique, un certain nombre de forces non conservatives, c'est-à-dire dont le travail engendré par celles-ci n'est pas récupérable sous forme d'énergie mécanique. Cette énergie perdue contribue à augmenter l'énergie interne du système et donc à provoquer une augmentation de la température de ce dernier. Parmi celles-ci, il en est une qui est l'équivalent mécanique d'une résistance. Il s'agit de la force de frottement visqueux : $F = \mu v$. Dans cette expression μ est appelé coefficient de frottement visqueux.

Le système mécanique équivalent à une résistance est donc un amortisseur visqueux (figure 2.19).

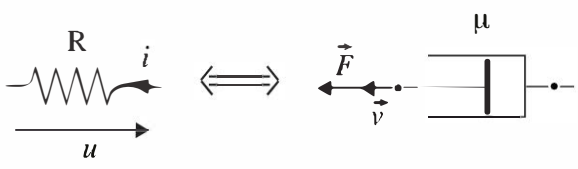


Figure 2.19

D'autres éléments dissipatifs existent dans d'autres domaines de la physique. Notons en particulier le rôle d'une restriction dans un système hydraulique qui engendre une perte de charge (chute de pression) lors du passage du liquide. L'énergie cinétique perdue étant également dissipée en chaleur.

Copyright © 2007 Dunod.

Éléments accumulateurs d'énergie potentielle

Certains éléments physiques sont caractérisés par une relation du type :

$$y = K_2 \frac{dx}{dt}$$

Ils assurent momentanément un stockage d'énergie sous forme potentielle. Celle-ci pourra être restituée ultérieurement au système dans lequel ils sont placés sous forme cinétique.

Par exemple, un condensateur emmagasine une énergie potentielle sous forme électrostatique en stockant des charges, tout comme un réservoir stocke du liquide en hydraulique. Le paramètre K_2 s'identifie à la capacité électrique C du condensateur.

En mécanique, un ressort comprimé exerce une force de rappel F proportionnelle à son écrasement x. Cet effet mécanique est traduit par la loi de Hooke sous la forme $F = k\,x$ (k désigne la constante de raideur du ressort). En dérivant par rapport au temps cette relation, on obtient la loi d'évolution de la vitesse de déformation :

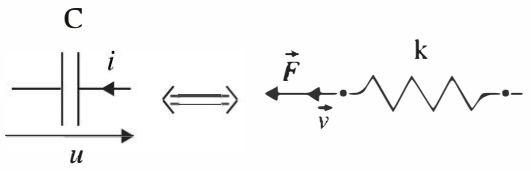


Figure 2.20

$$v = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$$

Le coefficient K_2 s'identifie donc à $1/k$.

On comprend dès lors en quoi un ressort correspond à l'équivalent mécanique d'un condensateur (figure 2.20).

Sans que le coefficient K_2 ne soit explicitement associé à un élément physique, il peut néanmoins caractériser une propriété de certaines structures. En thermique, K_2 s'identifie à la capacité thermique qui traduit l'aptitude d'une structure à emmagasiner de l'énergie sous forme d'énergie interne.

Éléments accumulateurs d'énergie cinétique

Certains éléments physiques sont caractérisés par une relation du type :

$$x = K_3 \frac{dy}{dt}$$

Généralement assimilés à des inerties, ils sont porteurs de l'énergie cinétique.

Un bobinage emmagasine une énergie cinétique sous forme magnétique. La loi de Lenz, traduisant les phénomènes d'induction, justifie le comportement inertiel du courant électrique en interdisant toute variation brutale de celui-ci. Le paramètre K_3 s'identifie au coefficient d'auto-induction L du bobinage.

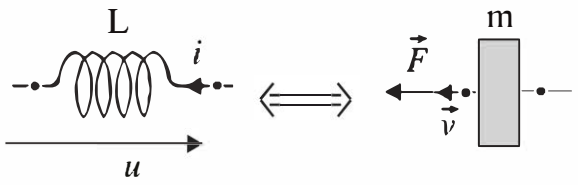


Figure 2.21

En mécanique, la loi de Newton : $F = m\frac{dv}{dt}$ traduit le principe d'inertie lié à la masse de systèmes physiques.

Le système mécanique traduisant au mieux un phénomène d'inertie est une masse-lotte, homologue de l'inductance en électricité (figure 2.21).

Copyright © 2007 Dunod.

Exemple de l'oscillateur harmonique

Il existe un système physique dont l'évolution repose sur une transformation cyclique de son énergie potentielle en énergie cinétique (figure 2.22a). Un tel système, qualifié d'oscillateur harmonique, est constitué d'un élément accumulateur d'énergie potentielle et d'un élément accumulateur d'énergie cinétique.

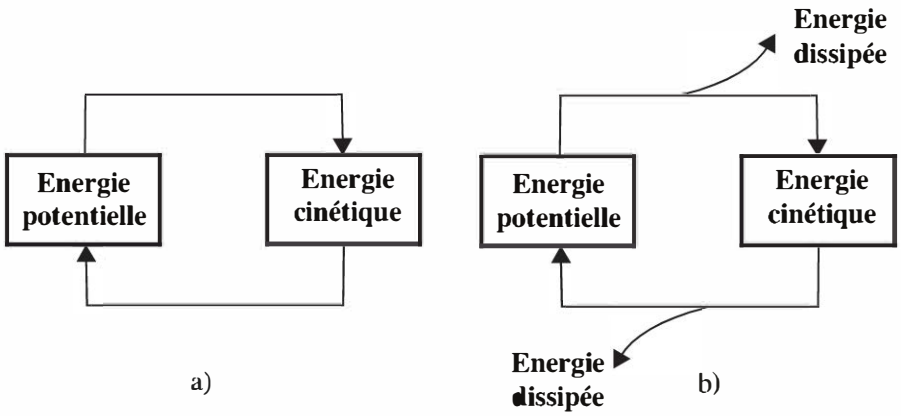


Figure 2.22

Rappelons que les lois de la thermodynamique interdisent l'existence d'un mouvement perpétuel de première espèce. C'est-à-dire qu'il est impossible que la transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique perdure éternellement sans apport extérieur d'énergie. Ceci légitime la présence d'éléments dissipatifs dans tout modèle d'oscillateur (figure 2.22b).

Un exemple d'oscillateur mécanique (figure 2.23a) est constitué d'une masselotte m reliée à deux points fixes, d'un côté par un ressort k et de l'autre par un amortisseur μ. Supposons que l'on abandonne la masselotte et que l'on souhaite décrire l'évolution de la vitesse de celle-ci.

L'application du principe fondamental de la mécanique sur le système conduit à effectuer le bilan des forces s'appliquant sur la masselotte :

– le poids de la masse : $\vec{P} = m\,g\,\vec{e}_z$;

– la force de rappel du ressort : $\vec{F}_e = -k\,x\,\vec{e}_z$;

– la force de frottement : $\vec{F}_f = -\mu\,\vec{v} = \mu\,v\vec{e}_z$.

La relation fondamentale de la mécanique s'exprime :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_f$$

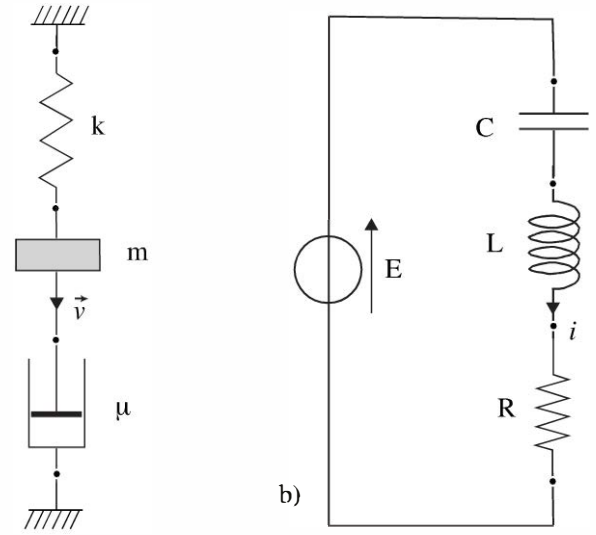


Figure 2.23

Après expression des différentes forces et projections sur l'axe vertical, on obtient la relation suivante :

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g - \mu\,v - k\,x$$

Copyright © 2007 Dunod.

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = -\mu\frac{dv}{dt} - k\frac{dx}{dt}$$

où $\frac{dx}{dt} = v$.

L'équation différentielle, régissant la vitesse de déplacement de la masse, peut donc s'écrire :

$$m\frac{d^2v}{dt^2} + \mu\frac{dv}{dt} + kv = 0$$

En exploitant les analogies mises en évidence aux paragraphes précédents, on peut établir un circuit électrique équivalent (figure 2.23b). La détermination de loi d'évolution du courant (voir deuxième partie de cet ouvrage) conduit à l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

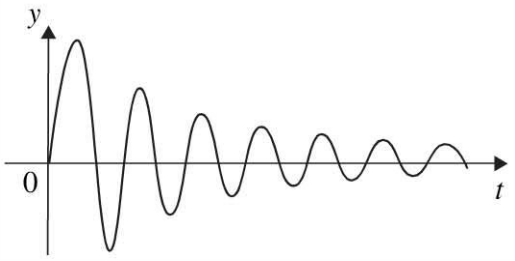


Figure 2.24

Chacune des équations différentielles précédentes est du type :

$$K_3\frac{d^2y}{dt^2} + K_1\frac{dy}{dt} + \frac{y}{K_2} = 0$$

Elles possèdent une solution qui traduit un comportement oscillatoire de la structure avec un amortissement progressif (figure 2.24).

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

(Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage)

2.1 Que modélise la présence de sources de tension et de courant dans un circuit électrique ?

2.2 Quelle est la relation entre courant et tension délivrés par une source de tension et une source de courant ?

2.3 En quoi consiste le processus de conduction ohmique ?

2.4 Qu'appelle-t-on résistor ? Quelle est la relation entre courant et tension que traduit la présence d'un résistor ?

2.5 En quoi consiste le processus d'influence électrostatique ?

2.6 Qu'appelle-t-on condensateur ? Quelle est la relation entre courant et tension que traduit la présence d'un condensateur ?

2.7 En quoi consiste le processus d'induction électromagnétique ?

2.8 Qu'appelle-t-on inductance ? Quelle est la relation entre courant et tension que traduit la présence d'une inductance ?

Copyright © 2007 Dunod.

Exercices

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

2.9 Soit un cadre conducteur carré de côté a tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe Δ passant selon la médiatrice de ses côtés (figure 2.25). Cette rotation s'effectue dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$ supposé uniforme.

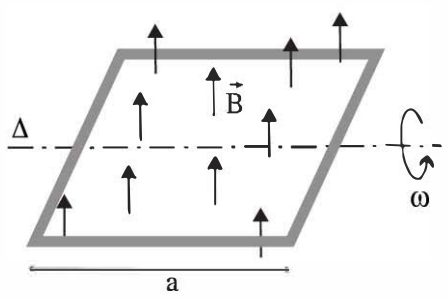


Figure 2.25

1) Déterminer l'expression du flux engendré par le champ magnétique à travers la surface portée par le cadre.

2) Déduire de la question précédente l'expression de la force électromotrice qui prend naissance dans le cadre, du fait d'un phénomène d'induction électromagnétique.

2.10 Soit une sphère de matériau semiconducteur. On considère que celle-ci est soumise à un éclairement se traduisant par une puissance lumineuse reçue P_p. L'énergie lumineuse apportée à la structure est à l'origine de la création de paires électron-trou par effet photoélectrique (figure 2.26).

1) Expliquer qualitativement le processus de création d'une paire électron-trou par effet photoélectrique.

2) On appelle rendement quantique η le rapport entre le nombre de photons reçus et le nombre de paires électron-trou créées. Déterminer l'expression du courant électromoteur j généré par effet photoélectrique.

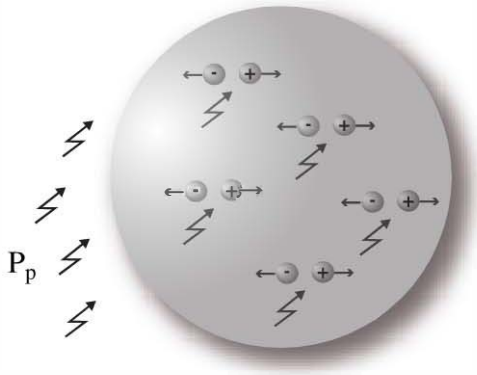


Figure 2.26

2.11 Soit un tronçon cylindrique conducteur ohmique de longueur l et de section s (figure 2.27). Le conducteur assimilé à un milieu ohmique homogène présente une résistivité ρ.

1) On considère que l'on applique une tension u entre les extrémités. En déduire l'expression de l'intensité i du courant qui circule dans le tronçon.

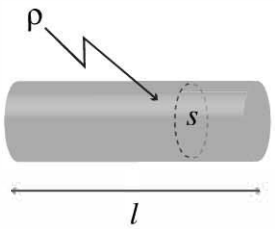


Figure 2.27

2) Déduire de la question précédente l'expression de la résistance R du tronçon.

2.12 Soit un ensemble de deux sphères conductrices S_1 et S_2 creuses concentriques de rayon respectif l_1 et l_2 ($l_1 < l_2$) (figure 2.28). Le milieu occupant l'espace entre les sphères est assimilé à un milieu isolant homogène et présente une permittivité ε.

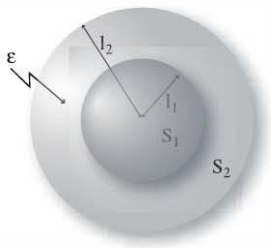


Figure 2.28

Copyright © 2007 Dunod.

1) On considère que la sphère S_1 stocke une charge Q. En déduire l'expression de la tension u apparaissant entre les deux sphères du fait d'une influence électrostatique.

2) Déduire de la question précédente, l'expression de la capacité C du condensateur constitué des armatures S_1 et S_2.

2.13 Soit une bobine de fil conducteur enroulé en spires jointives sur un matériau magnétique homogène de forme torique et de perméabilité μ. On note h la hauteur et respectivement l_1 et l_2 les rayons intérieur et extérieur du tore (figure 2.29).

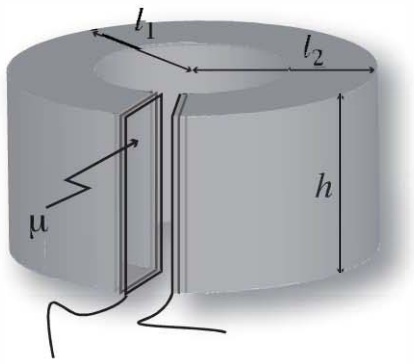


Figure 2.29

1) On considère que l'on fait circuler un courant d'intensité i dans le bobinage. En déduire l'expression du flux du champ magnétique créé à travers toute la surface portée par le bobinage.

2) Déduire de la question précédente l'expression du coefficient d'auto-induction L de l'inductance constituée par la bobine.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 3

Dipôles et quadripôles

Objectifs

- Présenter le formalisme dipolaire.
- Caractériser électriquement un dipôle.
- Identifier et simplifier une association de dipôles.
- Présenter le formalisme quadripolaire.
- Caractériser électriquement un quadripôle.
- Identifier et simplifier une association de quadripôles.

Vocabulaire

Dipôle passif et actif
Dipôle symétrique et réversible
Caractéristique graphique
Relation caractéristique
Association série et parallèle
Point et domaine de fonctionnement
Quadripôle électrique
Caractéristique d'entrée et de sortie
Caractéristique de transfert et de réaction
Association cascade

Un composant électrique est un système souvent complexe dont le comportement physique résulte d'un grand nombre de processus d'origine électrique ou non. Un circuit électrique peut être constitué d'une grande quantité de composants électriques interconnectés. L'analyse d'un circuit nécessite donc l'adoption d'une méthode de modélisation du comportement électrique individuel de chacun de ses composants. Cette méthode, développée au chapitre 4 de l'ouvrage, repose sur une modélisation de type « boîte noire » dipolaire. L'objectif de ce chapitre est de présenter le formalisme relatif à la caractérisation d'un dipôle ou d'une association de dipôles, ses enjeux et son utilisation. L'étude des quadripôles, venant compléter cette présentation, est traitée comme une généralisation de celle des dipôles, où les composants électriques se comportent comme un système « entrée-sortie ».

Copyright © 2007 Dunod.

3.1 DIPÔLES

3.1.1 Définitions

Que peut-il y avoir de commun entre une ampoule, un haut-parleur et une pile (figure 3.1) ? Au premier abord, pas grand-chose, si ce n'est qu'il s'agit de composants utilisés dans les circuits électriques.

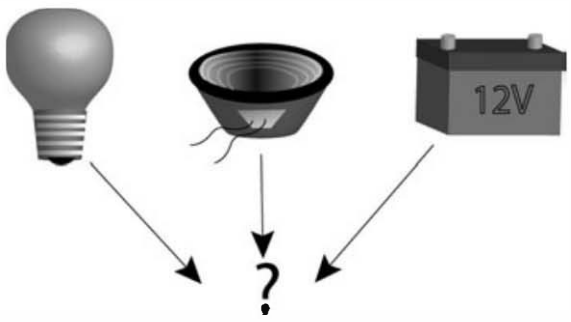


Figure 3.1

Pourtant, tous ces composants électriques possèdent **deux bornes** de connexion pour assurer leur fonctionnement électrique. En ce sens, on peut associer, à chacun d'entre eux, un **dipôle électrique** traduisant son comportement électrique au sein d'un circuit.

Un dipôle *D* est défini comme un élément électrique fonctionnel théorique, comportant deux bornes de connexion *A* et *B*, auquel est associé un **modèle électrique**.

Il est d'usage de le représenter par un rectangle délimité par ses deux bornes de connexion (figure 3.2).

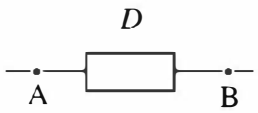


Figure 3.2

On retiendra que la notion de dipôle électrique est directement associée au modèle du composant électrique dont il traduit le fonctionnement.

On distingue deux grandes catégories de dipôles selon qu'ils traduisent une simple consommation d'énergie électrique ou une transformation active de cette énergie : les **dipôles passifs** et les **dipôles actifs**.

➤ ***Dipôles passifs***

La plupart des composants présents dans un circuit électrique consomment de l'énergie électrique, dont une certaine proportion est dissipée en chaleur par effet Joule. Cette chaleur contribue à augmenter la température des éléments qui la dissipent. C'est en particulier le cas de tous les composants qui comportent des connexions ohmiques.

D'autres composants stockent, de manière temporaire, l'énergie électrique qu'ils reçoivent. C'est notamment le cas des condensateurs qui stockent de l'énergie électrique sous forme électrostatique, et des bobinages qui effectuent ce stockage sous forme magnétique. Cette énergie emmagasinée est ensuite restituée aux autres éléments du circuit.

On modélise toute dissipation ou stockage temporaire d'énergie électrique au niveau d'un composant électrique, par un dipôle qualifié de **passif**.

➤ ***Dipôles actifs***

Il existe des composants électriques ou électroniques qui sont le siège de phénomènes électromoteurs (voir chapitre 2) ; ils sont capables de réaliser de manière permanente des conversions d'énergie électrique au sein du circuit dans lequel ils sont placés. De tels éléments seront modélisés par une catégorie de dipôles qualifiés d'**actifs**.

Un dipôle actif modélise indifféremment un processus de production d'énergie électrique, ou de conversion de celle-ci sous une autre forme d'énergie récupérable (mécanique, chimique…). Les processus électromoteurs sous-jacents sont en effet par nature, réversibles.

Copyright © 2007 Dunod.

On veillera à ne pas confondre « actif » et « générateur ». En effet, un dipôle actif peut, au cours d'une séquence de fonctionnement, tour à tour recevoir de l'énergie électrique ou en produire. Il passe ainsi d'un comportement « récepteur » à un comportement « générateur ».

> ***Remarque :*** Certains composants stockent de l'énergie électrique. Bien que n'étant pas structurellement électromoteurs, ils peuvent néanmoins transitoirement être modélisés par des dipôles actifs durant l'intervalle de temps où ils restituent l'énergie emmagasinée.

3.1.2 Conventions de signes

Lors d'une séquence de fonctionnement, **l'état électrique** du dipôle à chaque instant t est caractérisé par :

– l'**intensité** i du courant circulant entre ses bornes ;

– la **tension** u entre ses bornes ;

– la **puissance** p consommée ou fournie par celui-ci.

En régime stationnaire, le principe de conservation de la charge impose que l'intensité i du courant pénétrant par une borne, soit identique à celle du courant sortant par l'autre borne.

Rappelons que l'intensité du courant et la tension sont définies au signes près. Dès lors, on comprend que le fléchage de ces deux grandeurs sur le dipôle revêt un caractère arbitraire, mais néanmoins indispensable pour établir, sans ambiguïté, l'état électrique du dipôle.

Rappelons que pour établir la valeur de la puissance électrique (voir chapitre 1), il existe deux types de conventions de fléchage dites **convention générateur** et **convention récepteur**.

L'affectation d'une convention à un dipôle s'effectue antérieurement à toute étude électrique. Une fois adoptée, cette convention doit être conservée pendant toute l'étude du fonctionnement du dipôle.

> ***Remarque :*** Sans que cela ne constitue une obligation, il est cependant d'usage d'affecter respectivement une convention générateur aux dipôles actifs, et récepteur aux dipôles passifs.

➤ ***Convention récepteur***

En convention récepteur, on choisit un fléchage de la tension et du courant opposé (figure 3.3).

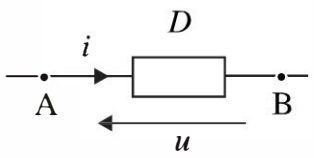


Figure 3.3

En électromagnétisme, avec ce fléchage, nous avons démontré que l'obtention de $i > 0$ et $u > 0$ traduit une consommation d'énergie électrique par le dipôle : $p = u\,i > 0$.

➤ ***Convention générateur***

En convention générateur, on choisit un fléchage de la tension et du courant identique (figure 3.4).

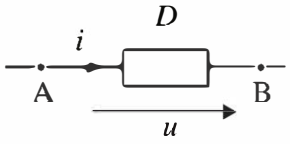


Figure 3.4

Copyright © 2007 Dunod.

Avec ce fléchage, l'obtention de $i > 0$ et $u > 0$ traduit une production d'énergie électrique par le dipôle : $p = u\,i > 0$.

3.1.3 Caractéristiques électriques

➤ ***Caractéristique graphique***

La convention associée à un dipôle étant définie, on décrit totalement son comportement électrique par sa **caractéristique graphique**.

Il s'agit d'une courbe représentée dans le plan électrique (u,i), traduisant graphiquement l'évolution de l'intensité du courant i en fonction de la tension u (figure 3.5).

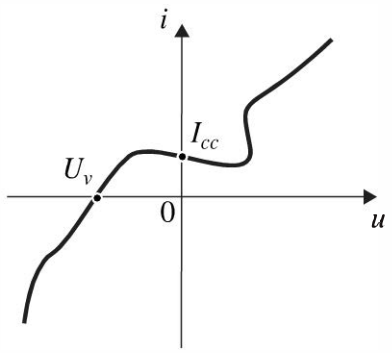


Figure 3.5

Sur cette courbe, deux points méritent une attention particulière :

– le point de coordonnées $(u = 0,\ i = I_{cc})$, où I_{cc} est appelé **courant de court-circuit** ;

– le point de coordonnées $(u = U_v,\ i = 0)$, où U_v est appelé **tension à vide**.

> ***Remarque :*** Dans certains cas de figure, il peut s'avérer plus judicieux de représenter la caractéristique graphique dans le plan (i,u).

Ne traduisant pas d'effet électromoteur, les dipôles passifs ne fournissent pas de tension à vide (pas de force électromotrice), ni de courant de court-circuit (pas de courant électromoteur).

On comprend dès lors que la caractéristique électrique d'un dipôle passif passe par l'origine, à la différence de celle d'un dipôle actif.

Il est important de bien comprendre que la caractéristique graphique illustre le comportement du modèle associé à un instant t. Un certain nombre de paramètres physiques (température, contraintes mécaniques…) peuvent contribuer à faire évoluer le caractère du composant électrique.

Pour tenir compte de cette évolution, le modèle doit être adapté. La caractéristique graphique associée peut donc subir des déformations au cours du temps (figure 3.6).

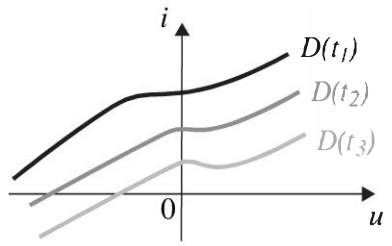


Figure 3.6

Pour identifier différentes séquences de fonctionnement, il est d'usage de décomposer le plan électrique en quatre quadrants (figure 3.7) :

– le quadrant I : $i > 0$ et $u > 0$;

– le quadrant II : $i < 0$ et $u > 0$;

– le quadrant III : $i < 0$ et $u < 0$;

– le quadrant IV : $i > 0$ et $u < 0$.

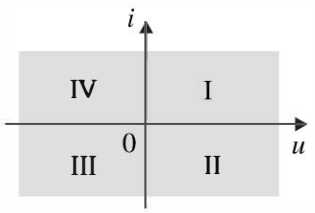


Figure 3.7

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Relation caractéristique***

Pour un grand nombre de dipôles, la caractéristique graphique peut être décrite sous forme analytique par une **relation caractéristique**. Celle-ci est exprimée indifféremment sous les formes suivantes $f(i,u) = 0$, $i = f(u)$ ou $u = f(i)$.

Un certain nombre de constantes viennent paramétrer mathématiquement la relation caractéristique ; ce sont des **paramètres caractéristiques**.

> ***Remarque :*** Il est d'usage d'appeler caractéristique d'un dipôle la relation entre courant et tension aux bornes d'un dipôle. Cette relation peut s'exprimer sous forme graphique (caractéristique graphique) ou sous forme analytique (relation caractéristique).

Considérons, par exemple, le cas d'une diode à jonction PN. Quand celle-ci devient passante, son comportement électrique peut être modélisé par une relation caractéristique du type :

$$i - I_S e^{u/U_T} = 0$$

Les éléments I_S et U_T constituent les paramètres caractéristiques.

> ***Remarque :*** Relation et paramètres caractéristiques peuvent évoluer indépendamment l'un de l'autre au cours du temps.

3.1.4 Différents types de dipôles

Selon les propriétés du composant qu'elle modélise, la caractéristique graphique d'un dipôle présentera un certain nombre de particularités intéressantes à savoir identifier.

➤ ***Dipôle passif***

Un dipôle passif est parcouru par un courant s'il est soumis à une tension. De même, en l'absence de circulation de courant, aucune tension n'apparaît aux bornes de ce type de dipôle. La caractéristique graphique associée doit donc traduire que pour $i = 0$, on doit avoir $u = 0$.

> La caractéristique graphique d'un dipôle passif passe nécessairement par l'origine du plan électrique.

➤ ***Dipôle actif***

Un dipôle actif traduit la présence d'un phénomène électromoteur qui rend le composant modélisé susceptible d'apporter de l'énergie électrique au circuit dans lequel il est placé. La caractéristique graphique doit donc traduire la capacité de générer un courant en l'absence de tension à ses bornes. La caractéristique électrique associée ne passe donc pas par l'origine du plan électrique, elle présente un courant de court-circuit ($I_0 \neq 0$) et une tension à vide ($U_0 \neq 0$).

> La caractéristique graphique d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine du plan électrique.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Dipôle symétrique*

Nombre de composants passifs conservent le même comportement électrique au sein du circuit, si on permute leurs bornes de connexions.

Une telle manipulation revient, au niveau du dipôle, à inverser les sens choisis pour orienter i et u (figure 3.8).

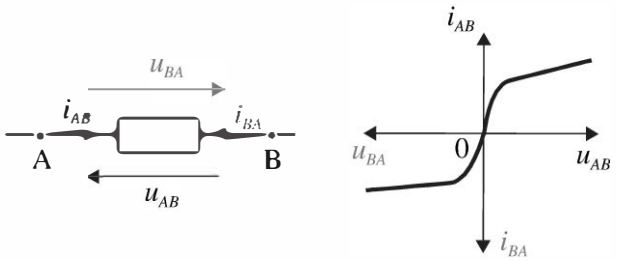


Figure 3.8

Une conséquence immédiate de cette propriété réside dans le fait que le dipôle associé possède une caractéristique graphique symétrique par rapport à l'origine. Il n'y a donc pas lieu d'effectuer de distinction entre les deux bornes. Un tel dipôle est qualifié de **symétrique**.

➤ *Dipôle réversible*

La réversibilité traduit l'aptitude d'un composant électrique à fonctionner en tant que générateur d'énergie ou en tant que récepteur d'énergie électrique. On distingue deux types de dipôles associés à ce comportement électrique : les dipôles réversibles en tension et les dipôles réversibles en courant.

• Dipôle réversible en tension

Un dipôle, dont la caractéristique graphique se situe dans les quadrants I et IV ($i > 0$) (figure 3.9a) ou dans les quadrants II et III ($i < 0$) (figure 3.9b), est qualifié de **réversible en tension**.

Le courant ne peut donc s'inverser, à la différence de la tension qui peut changer de sens au cours d'une même séquence de fonctionnement.

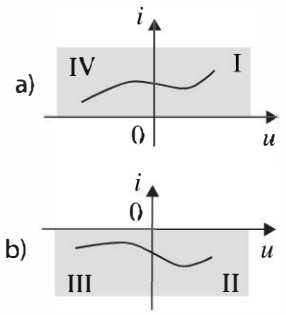


Figure 3.9

• Dipôle réversible en courant

Un dipôle, dont la caractéristique graphique se situe dans les quadrants I et II ($u > 0$) (figure 3.10a) ou dans les quadrants III et IV ($u < 0$) (figure 3.10b), est qualifié de **réversible en courant**.

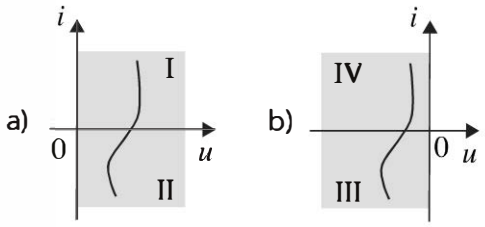


Figure 3.10

La tension ne peut s'inverser (une des deux bornes sera toujours à un potentiel plus élevé que l'autre), à la différence du courant qui peut changer de sens au cours d'une séquence de fonctionnement.

> ***Remarque :*** Certains composants électriques (une batterie d'accumulateurs par exemple) possèdent une borne « + » et une borne « − » clairement identifiées. On exprime ainsi, sans ambiguïté, que l'une des deux bornes sera structurellement toujours à un potentiel plus élevé que l'autre. Ces composants seront naturellement associés à un dipôle réversible en courant.

Copyright © 2007 Dunod.

Une caractéristique électrique réversible (qu'elle soit en tension ou en courant) traduit un fonctionnement où le composant est capable de fournir de l'énergie électrique, ou de la recevoir. En effet, quelle que soit la convention choisie, la puissance changera de signe lors du passage d'un quadrant à l'autre.

➤ ***Dipôle linéaire***

Parmi tous les types de dipôles, une catégorie mérite une mention particulière : les **dipôles linéaires**.

Ce type de dipôle modélise une relation caractéristique affine du type :

$$i = a\,u + b$$

Sa caractéristique graphique associée est une droite (figure 3.11).

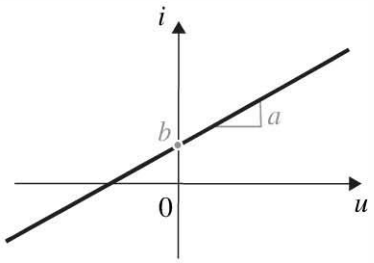


Figure 3.11

L'expression du courant de court-circuit est déterminée en fixant $u = 0$ dans l'expression de la relation caractéristique : $I_{cc} = b$. De même, l'expression de la tension à vide, déterminée en fixant $i = 0$, a pour expression $U_v = -b/a$.

Un dipôle passif linéaire dont la caractéristique passe par l'origine, aura un courant proportionnel à la tension à ses bornes.

Remarque : Les dipôles linéaires constituent les éléments de base de la définition de schémas électriques linéaires. Ces derniers définissent le cadre d'application des méthodes d'analyse proposées dans la deuxième partie de l'ouvrage.

3.2 ASSOCIATIONS DE DIPÔLES

Un circuit électrique correspond à l'association d'un ensemble de composants électriques, reliés entre eux par des fils conducteurs (figure 3.12a).

Pour étudier le fonctionnement de l'ensemble, il convient tout d'abord, de modéliser chaque composant par un dipôle décrivant au mieux son comportement électrique. Les différents dipôles sont alors substitués aux composants, à l'emplacement de ceux-ci. Ils sont ensuite interconnectés tels qu'ils sont reliés dans le circuit pour former le **schéma électrique** équivalent au circuit (figure 3.12b).

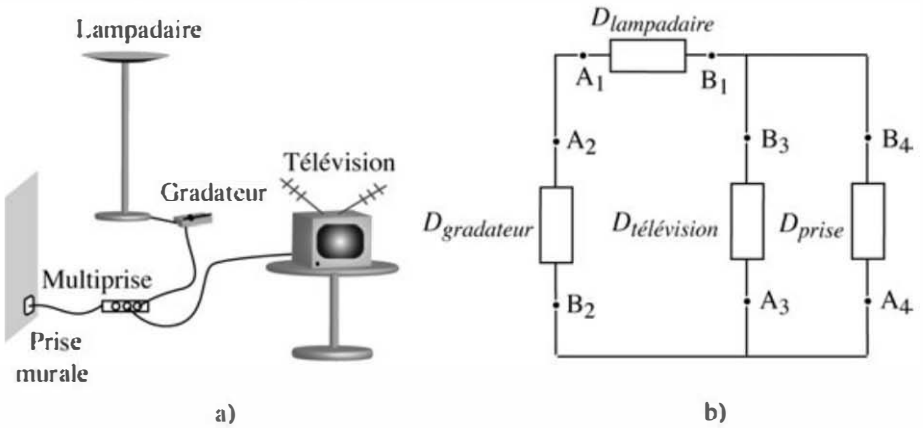


Figure 3.12

Copyright © 2007 Dunod.

Un schéma électrique constitue alors une association de dipôles interconnectés entre eux. Une grande partie des méthodes d'analyse du schéma électrique, détaillées dans la deuxième partie de l'ouvrage, repose sur l'identification d'associations types de dipôles.

3.2.1 Répartition des courants et des tensions

À l'intérieur d'un circuit électrique, les lois de l'électrocinétique imposent la répartition des courants et des tensions. Il est capital de savoir retranscrire ces impératifs physiques sur le schéma électrique d'une association.

Pour déterminer les règles de répartition des courants et des tensions, considérons l'association de trois dipôles D_1, D_2 et D_3 (figure 3.13).

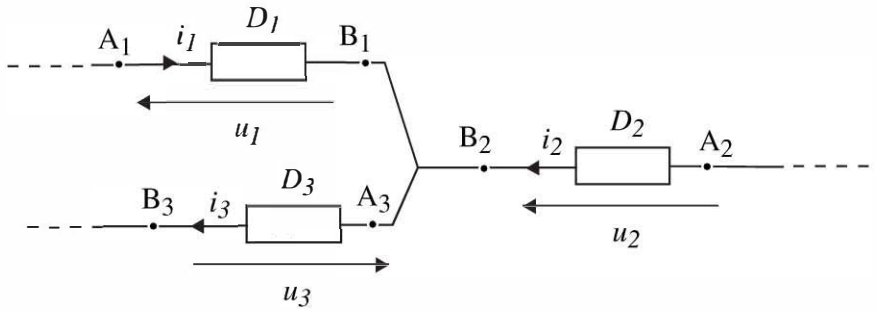


Figure 3.13

Remarque : Les fils qui assurent l'interconnexion entre les dipôles sont assimilés à des conducteurs parfaits de résistance nulle. Ils sont donc considérés comme équipotentiels.

➤ *Règle de répartition des courants*

La règle de répartition des courants i_1, i_2 et i_3 au point d'interconnexion des trois dipôles repose sur l'application du principe de conservation de la charge appliquée en régime quasi stationnaire.

En effet, enfermons le point d'interconnexion dans une sphère S et effectuons un agrandissement sur cette région (figure 3.14).

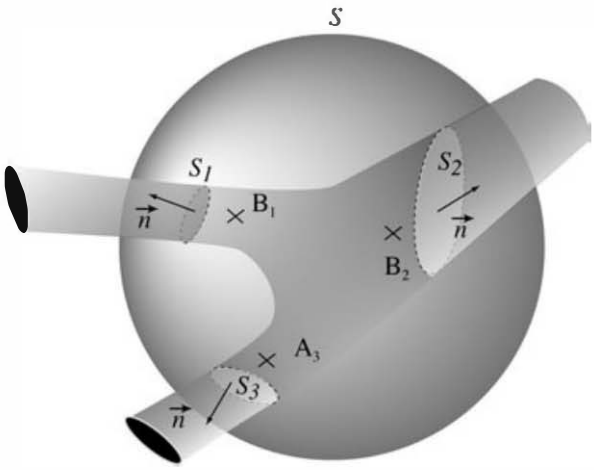


Figure 3.14

L'intensité du courant traversant S peut être décomposée sous la forme :

$$i = \oiint_S \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S_1} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds + \iint_{S_2} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds + \iint_{S_3} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds$$

où $\vec{n}$ désigne la normale à S orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

Compte tenu de l'orientation de la normale par rapport au fléchage choisi pour les intensités sur le schéma électrique, nous pouvons écrire :

Copyright © 2007 Dunod.

$$\iint_{S_1} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S_1} \vec{k} \cdot (-\vec{n}_{A_1B_1})\, ds = -\iint_{S_1} \vec{k} \cdot \vec{n}_{A_1B_1}\, ds = -i_1$$

$$\iint_{S_2} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S_2} \vec{k} \cdot (-\vec{n}_{B_3A_3})\, ds = -\iint_{S_2} \vec{k} \cdot \vec{n}_{B_3A_3}\, ds = -i_2$$

$$\iint_{S_3} \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S_3} \vec{k} \cdot \vec{n}_{A_3B_3}\, ds = i_3$$

L'intensité du courant à travers S est donc égale à :

$$i = -i_1 - i_2 + i_3$$

Dans l'hypothèse où l'on analyse la répartition des courants dans le cadre de régimes quasi stationnaires, alors :

$$i = \oiint_S \vec{k} \cdot \vec{n}\, ds = 0$$

La règle de répartition des courants s'exprime donc sous la forme :

$$i_3 = i_1 + i_2$$

➤ ***Règle de répartition des tensions***

La tension u_1 correspond à la différence de potentiel entre les points A_1 et B_1 :

$$u_1 = v_{A_1} - v_{B_1}$$

De même, les tensions u_2 et u_3 peuvent s'exprimer sous la forme : $u_2 = v_{B_2} - v_{A_2}$ et $u_3 = v_{A_3} - v_{B_3}$. La tension entre deux points de l'association peut donc être exprimée en exploitant les bornes des dipôles connectés entre ces points.

On peut donc écrire :

$$v_{A_1} - v_{A_2} = (v_{A_1} - v_{B_1}) + (v_{B_1} - v_{B_2}) + (v_{B_2} - v_{A_2}) = u_1 + 0 + u_2 = u_1 + u_2$$

$$v_{A_2} - v_{B_3} = (v_{A_2} - v_{B_2}) + (v_{B_2} - v_{A_3}) + (v_{A_3} - v_{B_3}) = -u_2 + 0 + u_3 = -u_2 + u_3$$

$$v_{B_3} - v_{A_1} = (v_{B_3} - v_{A_3}) + (v_{A_3} - v_{B_1}) + (v_{B_1} - v_{A_1}) = -u_3 + 0 - u_1 = -u_3 - u_1$$

3.2.2 Associations remarquables

Dans tout schéma électrique, on retrouve, de manière récurrente, deux associations particulières de dipôles qu'il s'avère très utile de savoir reconnaître : les associations **série** et **parallèle**.

➤ ***Association série***

Deux dipôles sont associés en série lorsqu'ils ont une seule borne de connexion en commun. Ainsi, un ensemble de n dipôles (D_1 à D_n) sont associés en série lorsqu'ils sont connectés comme représenté figure 3.15.

Copyright © 2007 Dunod.

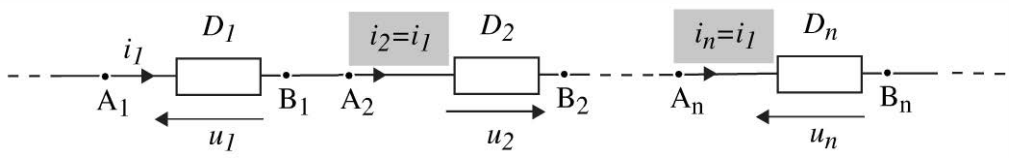


Figure 3.15

La règle de répartition des courants, appliquée sur chaque paire de bornes communes, met en évidence que le courant traversant chaque dipôle est identique :

$$i_1 = i_2 = \ldots = i_n$$

➤ ***Association parallèle***

Deux dipôles sont associés en parallèle lorsqu'ils ont leurs deux bornes de connexion en commun.

Un ensemble de n dipôles (D_1 à D_n) sont donc associés en parallèle lorsqu'ils sont connectés comme représenté figure 3.16.

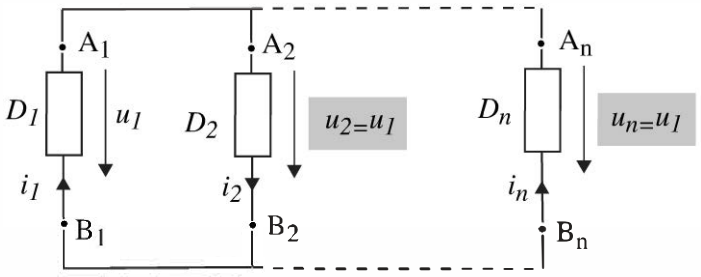


Figure 3.16

La règle de répartition des tensions, appliquée entre les bornes communes, met en évidence que la tension aux bornes de chaque dipôle est identique :

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n$$

Nous verrons par la suite que l'essentiel des associations de dipôles peut être décomposé en une combinaison d'associations série et parallèle.

3.2.3 Dipôle équivalent

➤ ***Notion de dipôle équivalent***

On appelle dipôle équivalent à une association de dipôles, considérée entre deux points A et B, le dipôle D_{AB} possédant une caractéristique électrique identique à l'ensemble de l'association (figure 3.17).

L'implication de cette définition est que le dipôle équivalent à une association considérée entre deux points, doit présenter à ses bornes une tension identique à celle présente aux bornes de l'association, quand un courant identique y circule.

Cette procédure permet notamment de simplifier l'étude d'un circuit électrique. En effet, une portion de celui-ci peut être remplacée par un seul dipôle ayant un comportement électrique identique (figure 3.18).

Copyright © 2007 Dunod.

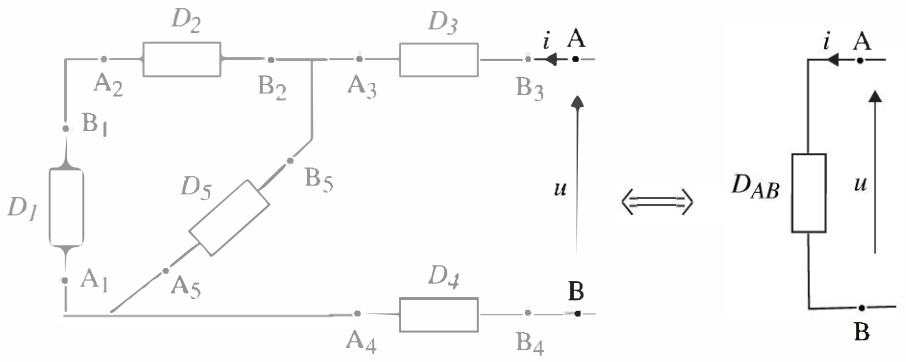


Figure 3.17

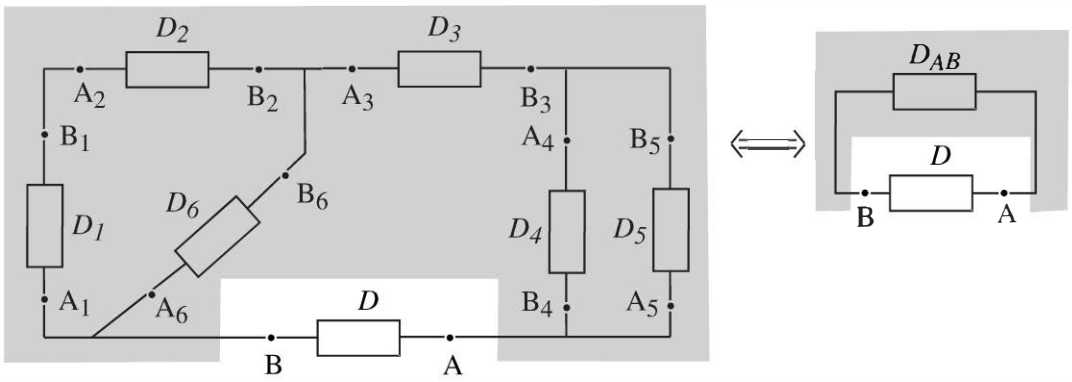


Figure 3.18

La notion de dipôle équivalent n'a de sens que si l'on spécifie les deux points qui délimitent la partie du circuit dont on recherche une équivalence.

➤ *Dipôle équivalent à une association série*

Considérons, par exemple, l'association série entre deux points A et B de deux dipôles D_1 et D_2 (figure 3.19).

Recherchons alors la caractéristique graphique associée au dipôle équivalent D_{AB}.

Premièrement, la règle de répartition des courants, appliquée au point de connexion, impose :

$$i = i_2 = i_1$$

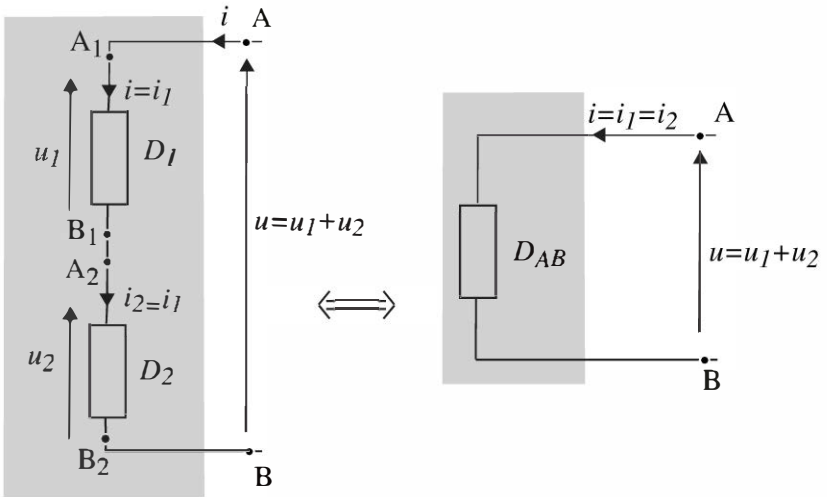


Figure 3.19

Copyright © 2007 Dunod.

Deuxièmement, la règle de répartition des tensions, appliquée entre les points A et B, s'exprime sous la forme :

$$u = u_{AB} = v_A - v_B = (v_{A_1} - v_{B_1}) + (v_{A_2} - v_{B_2}) = u_1 + u_2$$

> Le dipôle équivalent à l'association série de deux dipôles doit présenter, entre ses bornes, une tension égale à la somme des tensions, quand celui-ci est traversé par un courant de valeur identique.

Pour déterminer la caractéristique graphique associée au dipôle série équivalent, à partir des caractéristiques graphiques de D_1 et D_2, on réalise une sommation point par point des abscisses (figure 3.20).

Pour chaque valeur de i, la valeur correspondante de u est obtenue en effectuant la somme des tensions u_1 et u_2 correspondant à cette intensité sur chaque caractéristique.

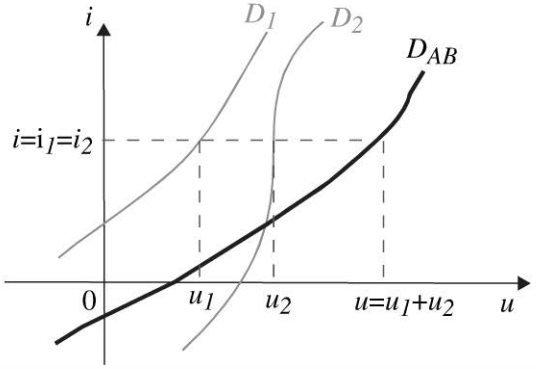


Figure 3.20

➤ *Dipôle équivalent à une association parallèle*

Considérons l'association parallèle entre deux points A et B, de deux dipôles D_1 et D_2 (figure 3.21) et recherchons la caractéristique graphique associée au dipôle équivalent D_{AB}.

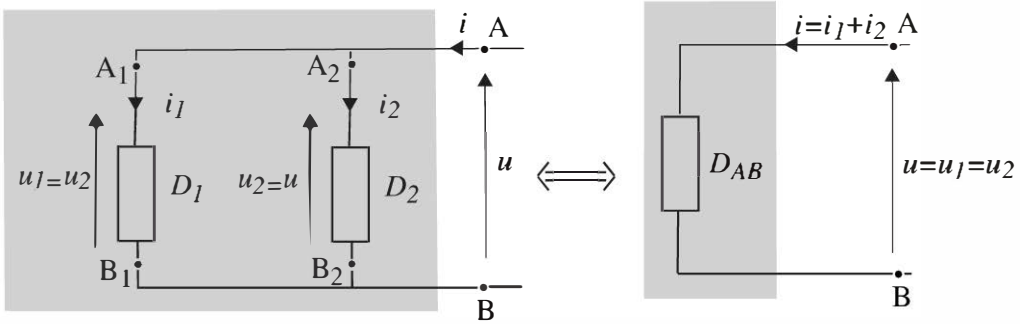


Figure 3.21

La règle de répartition des tensions, appliquée entre les points A et B, impose $u_1 = u_2$ et la règle de répartition des courants, appliquée au point de connexion, donne $i = i_1 + i_2$.

> Le dipôle équivalent à l'association parallèle de deux dipôles doit permettre la circulation, entre ses bornes, d'un courant égal à la somme des courants quand celui-ci est soumis à la même tension.

Pour déterminer la caractéristique associée au dipôle équivalent, on reporte les caractéristiques de D_1 et D_2 et on réalise une sommation point par point des ordonnées (figure 3.22).

Pour chaque valeur de u, la valeur correspondante de i est obtenue en effectuant la somme des intensités i_1 et i_2 correspondant à u sur chaque caractéristique.

Copyright © 2007 Dunod.

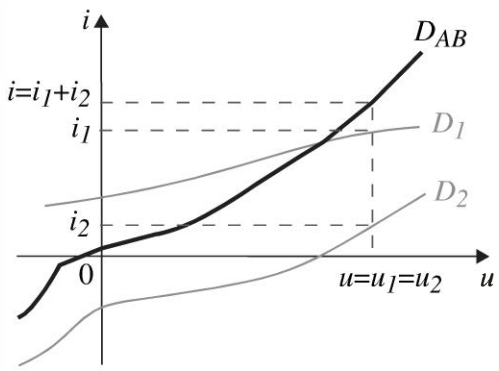


Figure 3.22

Remarque : En effectuant, au sein d'une association, une recherche successive de dipôles équivalents, il devient possible de réduire l'ensemble du comportement électrique de l'association à celui de son dipôle équivalent.

3.2.4 Point et domaine de fonctionnement

Le raccordement électrique de deux dipôles D_1 et D_2 peut conduire si, l'un au moins des deux est actif, à la circulation d'un courant d'intensité i et l'établissement d'une tension u à leurs bornes (figure 3.23a).

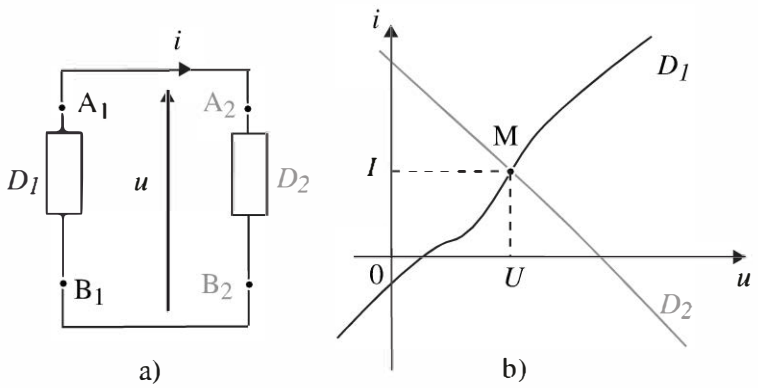


Figure 3.23

Notons I et U les valeurs effectives respectives de i et de u résultant de l'association des dipôles. La détermination de ces valeurs passe par la recherche du point M, intersection entre les caractéristiques graphiques des dipôles (figure 3.23b). Ce point M, de coordonnées $(I; U)$ dans le plan électrique, est appelé **point de fonctionnement** de l'association.

Il est important de remarquer qu'au cœur de l'association, une convention générateur sera nécessairement affectée à l'un des dipôles (D_1) et une convention récepteur à l'autre (D_2). Vis-à-vis du dipôle « générateur » D_1, le dipôle « récepteur » D_2 constitue ce qu'il est d'usage d'appeler une charge électrique. On nomme ainsi **caractéristique de charge**, la caractéristique électrique associée à D_2.

Remarque : Réciproquement, un changement de convention définissant le dipôle D_2 comme générateur, impose D_1 comme la charge de D_2.

Copyright © 2007 Dunod.

Si la caractéristique de charge évolue au cours du temps, le point de fonctionnement peut être amené à se déplacer sur la caractéristique du dipôle, décrivant ainsi un **domaine de fonctionnement** dans le plan électrique (figure 3.24).

D'une manière plus générale, tout dipôle D au sein d'un circuit peut être considéré comme chargé par le dipôle équivalent (D_{AB}) au reste du circuit, évalué entre les bornes A et B de D (figure 3.25).

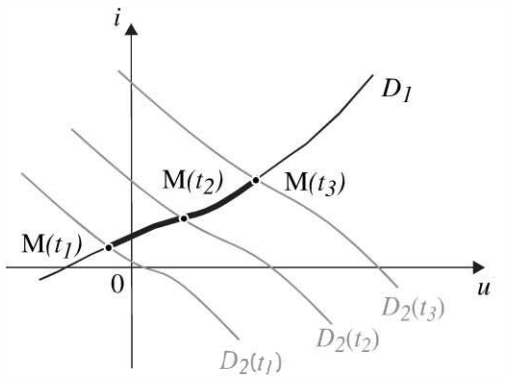


Figure 3.24

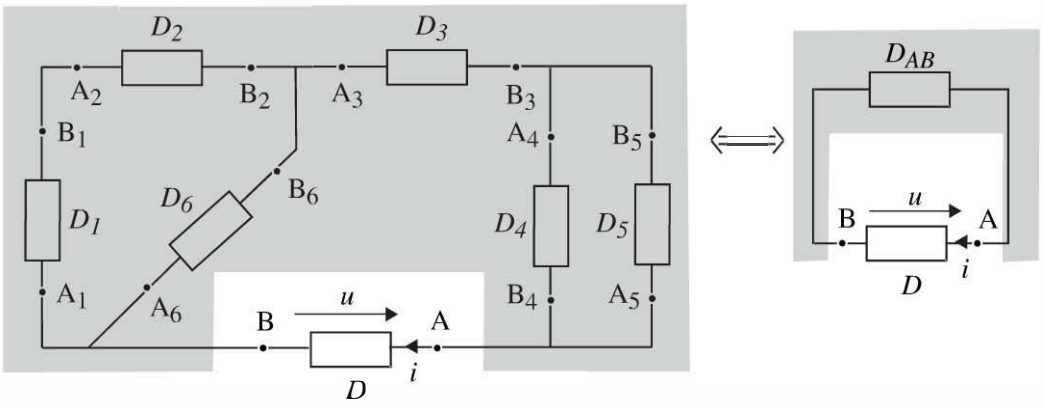


Figure 3.25

3.3 QUADRIPÔLES

3.3.1 Définitions

En regardant attentivement un transformateur électrique (figure 3.26a), on constate que cet élément possède quatre connexions électriques. La vocation de ce dispositif est d'assurer un couplage entre deux circuits (figure 3.26b). Les connexions sont reliées par paire à chacun des circuits.

Il en est ainsi pour bon nombre de composants électriques ou électroniques utilisés industriellement pour assurer une liaison entre deux circuits. On constate que leur compor-

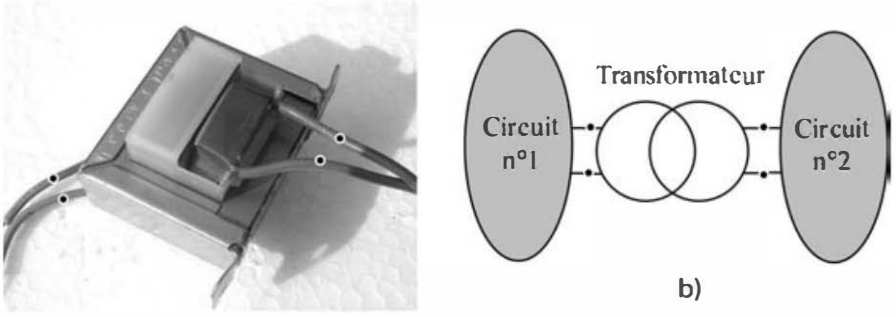


Figure 3.26

Copyright © 2007 Dunod.

tement ne peut pas être modélisé par un dipôle. Un nouveau type de structure doit donc être employé pour traduire les relations entre les grandeurs électriques présentes par paire de connexions. C'est précisément l'objectif du concept de **quadripôle**.

Un quadripôle Q est un élément électrique fonctionnel théorique comportant quatre bornes de connexion. Il est d'usage de le représenter par un carré délimité par ces quatre bornes de connexion (figure 3.27).

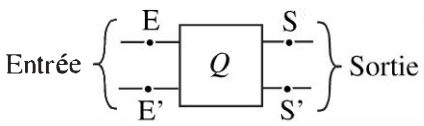


Figure 3.27

Deux d'entre elles sont dénommées **bornes d'entrée** (notées E et E'), les deux autres constituent les **bornes de sortie** (notées S et S').

Il est d'usage de toujours représenter un quadripôle en plaçant les bornes d'entrée à gauche du symbole et celles de sortie à droite.

Un modèle électrique est associé à un quadripôle. Ce modèle a pour vocation de décrire le couplage entre les grandeurs électriques présentes en entrée et en sortie.

Remarque : Certains composants, comme les transistors, possèdent trois connexions ; l'une d'entre elles étant simultanément reliée au circuit d'entrée et au circuit de sortie. Un modèle quadripolaire leur est affecté en considérant qu'une borne d'entrée est directement reliée à une borne de sortie.

3.3.2 Conventions de signes

Comme pour un dipôle, il convient, pour décrire l'état électrique d'un quadripôle, de flécher à chaque instant les courants et tensions caractéristiques. Ces derniers sont au nombre de quatre :

– le courant d'entrée et le courant de sortie : i_e et i_s ;

– la tension d'entrée et la tension de sortie : u_e et u_s.

Il est à noter que le quadripôle, raccordé à un circuit entre ses bornes d'entrées E et E', voit sortir le courant par une borne et revenir par l'autre. Un raisonnement similaire peut bien entendu être mené en sortie.

La structure même du quadripôle offre la possibilité de choisir un fléchage différencié, au niveau des bornes d'entrée et de sortie. L'expression de la puissance consommée ou fournie en entrée et en sortie, résulte de la convention choisie.

Il existe ainsi plusieurs associations de conventions possibles pour la caractérisation de la structure :

– récepteur en entrée et en sortie (figure 3.28a) ;

– générateur en entrée et en sortie (figure 3.28b) ;

– générateur en entrée et récepteur en sortie (figure 3.28c) ;

– récepteur en entrée et générateur en sortie (figure 3.28d).

Sauf mention contraire, dans le cadre de cet ouvrage, il sera fait usage d'une convention récepteur en entrée et en sortie.

Copyright © 2007 Dunod.

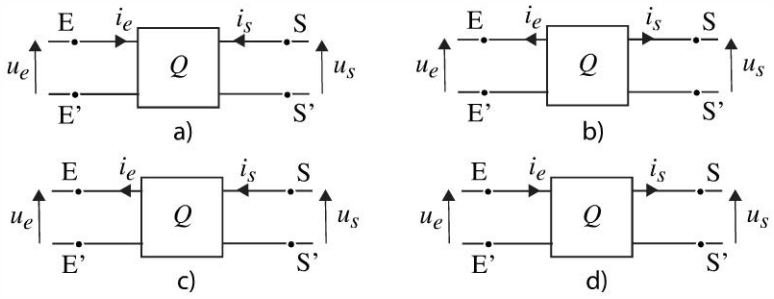


Figure 3.28

3.3.3 Caractéristiques électriques

Le comportement électrique d'un quadripôle est totalement décrit en explicitant les couplages entre les quatre grandeurs électriques présentes au niveau des bornes d'entrée (i_e et u_e) et de sortie (i_s et u_s). Ceux-ci peuvent être décrits à travers une relation caractéristique du type $f(i_e,i_s,u_e,u_s) = 0$.

Néanmoins, pour faciliter la caractérisation d'un quadripôle, il est usuel d'exprimer ces couplages à travers un ensemble de quatre **caractéristiques graphiques**. Ces dernières illustrent graphiquement les relations liant deux à deux les quatre grandeurs électriques. À ces représentations graphiques, peuvent être éventuellement associées, sous forme analytique, différentes **relations caractéristiques**.

➤ ***Caractéristique d'entrée***

La courbe, traduisant l'évolution du courant d'entrée i_e en fonction de la tension d'entrée u_e, constitue la caractéristique graphique d'entrée (figure 3.29). Celle-ci est tracée dans le plan électrique (i_e, u_e).

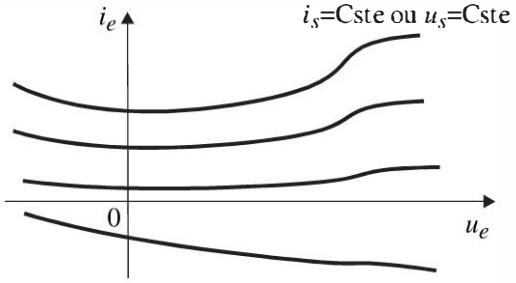


Figure 3.29

Il est important de noter que cette représentation correspond à un réseau de courbes paramétrées par la sortie. En effet, chaque courbe est tracée pour un état électrique fixé au niveau de la sortie. Elles sont donc tracées à i_s ou u_s constant.

Une relation caractéristique peut être associée à cette représentation graphique sous la forme $i_e = f_e(u_e)$ ou $u_e = f_e(i_e)$.

➤ ***Caractéristique de sortie***

De même, l'évolution du courant de sortie en fonction de la tension de sortie fait l'objet d'une caractéristique graphique dite de sortie (figure 3.30), tracée dans le plan électrique (i_s, u_s).

Cette caractéristique correspond à un réseau de courbes établi à état électrique d'entrée constant (i_e ou u_e constant). Dans certains cas, une relation caractéristique sous forme analytique $i_s = f_s(u_s)$ ou $u_s = f_s(i_s)$ peut être associée à la caractéristique graphique.

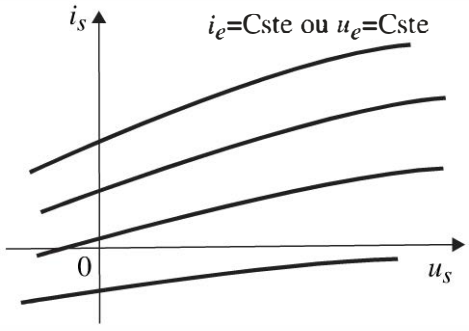


Figure 3.30

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Caractéristiques de transfert et de réaction***

Pour exprimer la dépendance électrique entre entrée et sortie d'un quadripôle, on complète les caractéristiques d'entrée et de sortie par une ou plusieurs caractéristiques supplémentaires. Celles-ci traduisent la relation entre une grandeur électrique d'entrée (courant ou tension) et une grandeur électrique de sortie (courant ou tension).

On distingue deux types de caractéristiques selon qu'elles expriment l'influence de l'entrée sur la sortie (caractéristique de transfert) ou de la sortie sur l'entrée (caractéristique de réaction).

• Caractéristiques de transfert

Lorsque l'on cherche à exprimer l'influence de l'entrée sur la sortie du quadripôle, on a recourt à une caractéristique graphique dite de transfert. Celle-ci peut traduire la relation entre grandeurs électriques du même type, « courant-courant » ou « tension-tension ») (figure 3.31a) ou de type différent, « courant-tension » ou « tension-courant ») (figure 3.31b).

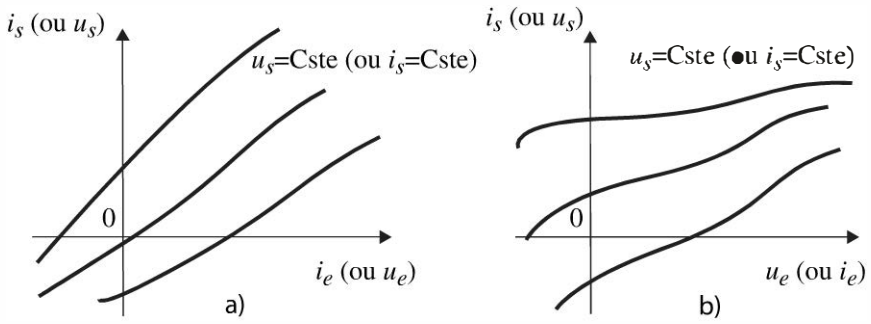


Figure 3.31

Chacune des courbes est tracée en considérant que la deuxième grandeur de sortie est maintenue constante. La caractéristique obtenue consiste donc en un réseau de courbes. Une relation $y = f_t(x)$ est associée à la caractéristique graphique quand celle-ci possède un caractère analytique.

• Caractéristiques de réaction

Bien que celles-ci soient généralement structurellement minimisées, il peut être utile de traduire la réaction de la sortie sur l'entrée d'un quadripôle. Il est alors fait usage de caractéristiques dites de réaction, exprimant la relation sortie-entrée. De la même manière que pour les caractéristiques de transfert, elles peuvent traduire la relation entre grandeurs électriques du même type (figure 3.32a), ou de type différent (figure 3.32b).

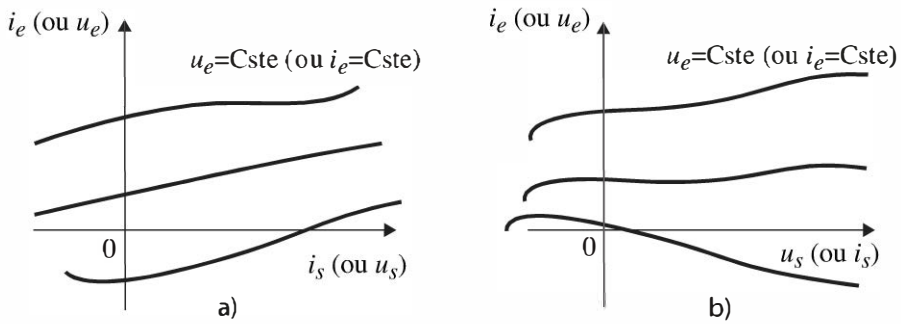


Figure 3.32

Copyright © 2007 Dunod.

Chacune des courbes est tracée en considérant que la deuxième grandeur d'entrée est maintenue constante. La caractéristique obtenue consiste donc en un réseau de courbes. Une relation $y = f_r(x)$ est associée à la caractéristique graphique quand celle-ci possède un caractère analytique.

3.3.4 Point et domaine de fonctionnement

En fonctionnement, un quadripôle Q est électriquement raccordé au niveau de ses quatre bornes à un circuit électrique. Cette connexion provoque la circulation de courant d'intensités i_e et i_s, et l'instauration de tensions u_e et u_s.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la portion de circuit, reliée aux bornes d'entrée E et E' de Q, est assimilable à un dipôle équivalent $D_{EE'}$ (figure 3.33). L'entrée du quadripôle apparaît donc comme étant chargée par $D_{EE'}$.

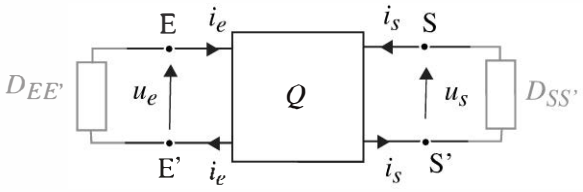


Figure 3.33

Un raisonnement similaire mené en sortie, conduit à considérer que le quadripôle est chargé en sortie par un dipôle équivalent $D_{SS'}$, entre les bornes de sortie S et S'.

La présence de ces charges dipolaires en entrée et en sortie conduit à l'instauration d'un point de fonctionnement $M(I_e; U_e; I_s; U_s)$ pour le quadripôle.

Il est important de bien comprendre que ce point de fonctionnement possède une position parfaitement définie sur l'ensemble des quatre caractéristiques du quadripôle (caractéristique d'entrée, de sortie, de transfert et de réaction) (figure 3.34).

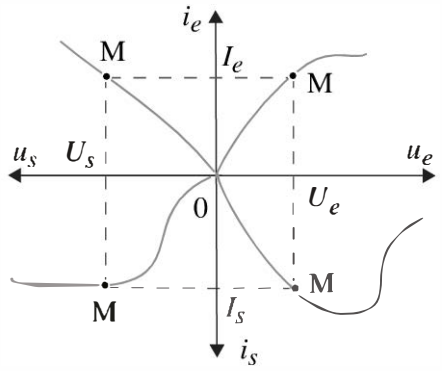


Figure 3.34

La détermination des valeurs effectives (I_e, U_e, I_s, U_s) des courants et tensions (i_s, u_e, i_e, u_s) passe par la recherche des intersections :

– de la caractéristique graphique de $D_{EE'}$ avec la caractéristique graphique d'entrée de Q correspondant aux valeurs de I_s et U_s présentes en sortie (figure 3.35a) ;

– de la caractéristique graphique de $D_{SS'}$ avec la caractéristique graphique de sortie de Q, correspondant aux valeurs de I_e et U_e présentes en entrée (figure 3.35b).

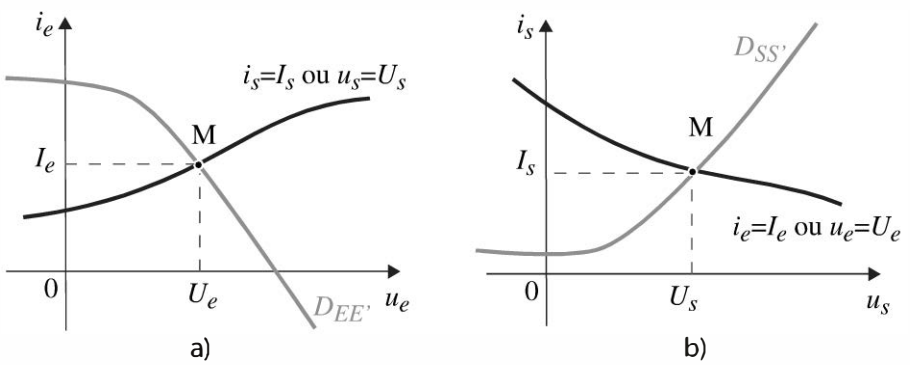


Figure 3.35

Copyright © 2007 Dunod.

Une évolution au cours du temps de la caractéristique graphique de la charge d'entrée $D_{EE'}$ (ou de $D_{SS'}$) va entraîner un déplacement du point M.

Le couplage existant entre les quatre grandeurs électriques va donc induire une variation des quatre grandeurs électriques (Δi_s, Δu_e, Δi_e, Δu_s) et donc un déplacement du point de fonctionnement simultanément dans les quatre plans (figure 3.36).

Sur chaque caractéristique de Q, le domaine délimitant la portion de caractéristique sur laquelle se déplace le point de fonctionnement, porte le nom de **domaine de fonctionnement**.

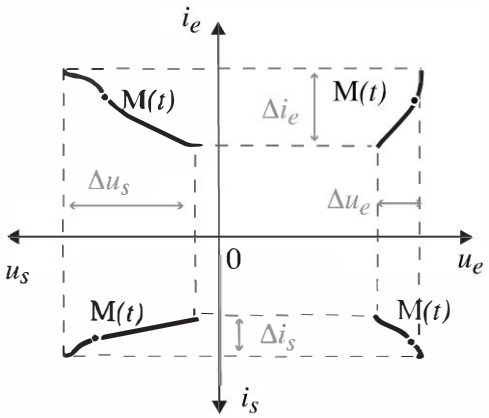


Figure 3.36

3.3.5 Notion de quadripôle équivalent

La notion de quadripôle peut s'avérer très utile pour faciliter l'analyse d'un schéma électrique.

Considérons, par exemple, le schéma électrique représenté figure 3.37a. On peut associer à la portion de circuit délimitée par les quatre points (M, N, O et P) un quadripôle équivalent, noté Q_{MNOP} (figure 3.37b).

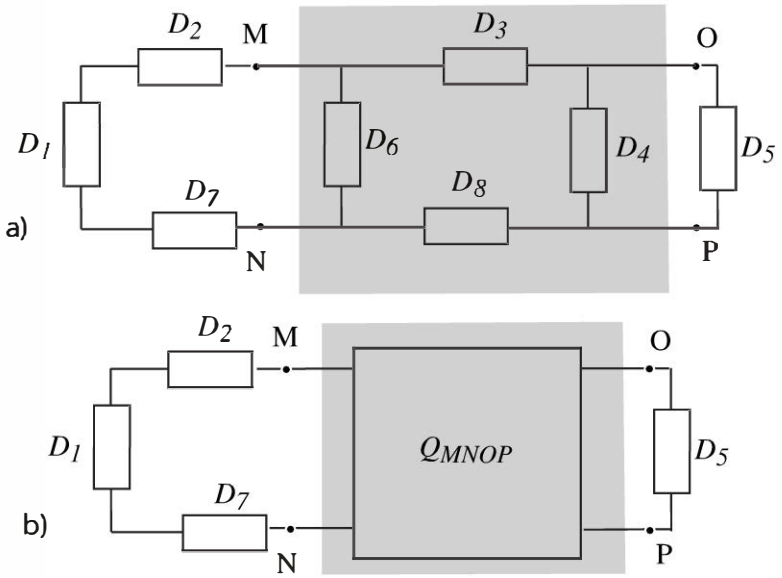


Figure 3.37

La détermination du quadripôle équivalent Q_{MNOP} passe par la recherche d'une structure électrique qui doit posséder un comportement électrique identique à l'association des dipôles (D_3, D_4, D_6, et D_8).

Il convient d'identifier, sans ambiguïté, les deux bornes d'entrée et de sortie du quadripôle équivalent sur le circuit initial, et d'orienter courant et tension d'entrée et de sortie. Le quadripôle équivalent doit alors présenter des caractéristiques d'entrée, de sortie, de transfert et de réaction, identiques à celles de l'association de dipôles délimitée par les quatre bornes.

Copyright © 2007 Dunod.

3.4 ASSOCIATION DE QUADRIPÔLES

3.4.1 Position du problème

L'analyse d'un circuit électrique passe par la modélisation dipolaire ou quadripolaire des composants électriques le constituant. La topologie du schéma électrique correspondant met en évidence, en plus des liaisons entre dipôles, des connexions entre quadripôles. Ainsi, après avoir évoqué les associations de dipôles, il est judicieux d'envisager l'étude de l'association de quadripôles.

Cette étude trouve une légitimité particulière dans le cadre de l'électronique, où les circuits, souvent complexes, sont élaborés à partir d'un grand nombre de modules ou blocs fonctionnels assimilés à des quadripôles.

Il est ainsi possible de réduire notablement la complexité d'un circuit électrique en substituant à tout ou partie d'associations de dipôles ou quadripôles, un dipôle ou quadripôle équivalent. Cette technique de réduction, constituant l'une des méthodes d'analyse des circuits électriques complexes, sera plus amplement développée dans la seconde partie de l'ouvrage.

3.4.2 Associations remarquables

Nous présenterons dans ce qui suit un certain nombre d'associations remarquables, rencontrées de manière récurrente dans les circuits électriques. Pour ce faire, nous réutiliserons les règles de répartition des courants et des tensions, déjà utilisées pour l'étude d'associations de dipôles. Elles serviront à définir les caractéristiques électriques du quadripôle équivalent à ces associations.

➤ ***Association série***

L'association des deux quadripôles Q_1 et Q_2, représentée figure 3.38, est qualifiée d'association série. En effet, par analogie à l'association série de dipôles, le courant circulant entre les bornes d'entrée E et E' est le même pour les deux quadripôles ($i_{e1} = i_{e2}$). De même, les bornes de sortie, elles aussi connectées en série, sont parcourues par un courant identique ($i_{s1} = i_{s2}$).

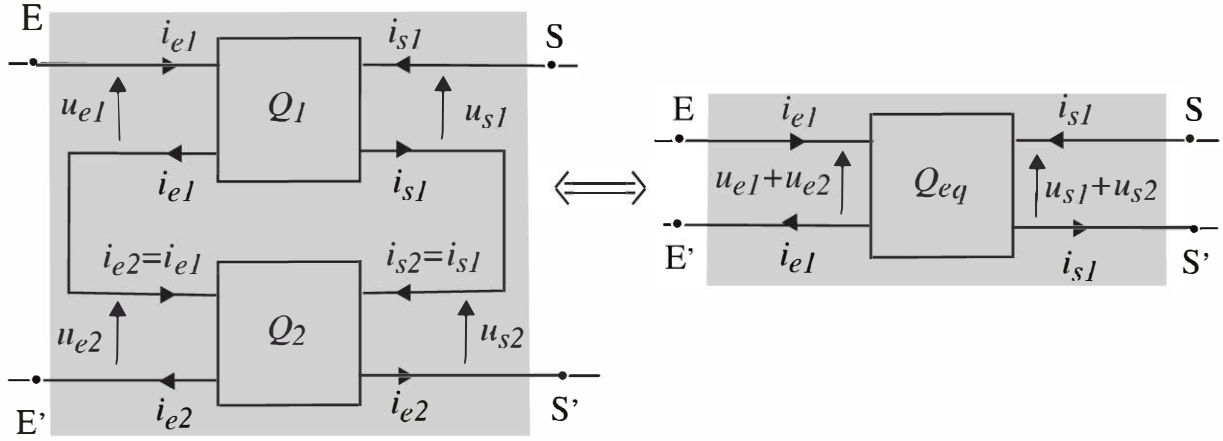


Figure 3.38

Copyright © 2007 Dunod.

La règle de répartition des tensions entre les bornes d'entrée et de sortie du quadripôle équivalent à l'association impose : $u_e = u_{e1} + u_{e2}$ et $u_s = u_{s1} + u_{s2}$.

➤ ***Association parallèle***

L'association des deux quadripôles Q_1 et Q_2 (représentée figure 3.39) est qualifiée d'association parallèle. En effet, par analogie avec une association parallèle de dipôles, la tension entre les bornes d'entrée E et E' est la même pour les deux quadripôles ($u_{e1} = u_{e2}$). De même, les bornes de sortie, elles aussi connectées en parallèle, sont soumises à une tension identique ($u_{s1} = u_{s2}$).

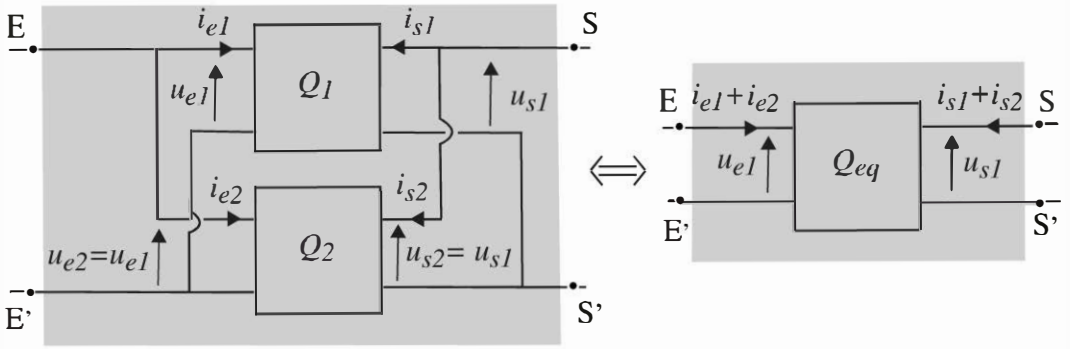


Figure 3.39

La règle de répartition des courants sur les bornes d'entrée et de sortie du quadripôle équivalent à l'association impose : $i_e = i_{e1} + i_{e2}$ et $i_s = i_{s1} + i_{s2}$.

➤ ***Association cascade***

L'association des deux quadripôles Q_1 et Q_2, représentée figure 3.40, constitue une association cascade, dans le sens où les bornes d'entrée de Q_2 sont connectées aux bornes de sortie de Q_1. Ce type d'association impose ainsi $i_{e2} = -i_{s1}$ et $u_{e2} = u_{s1}$.

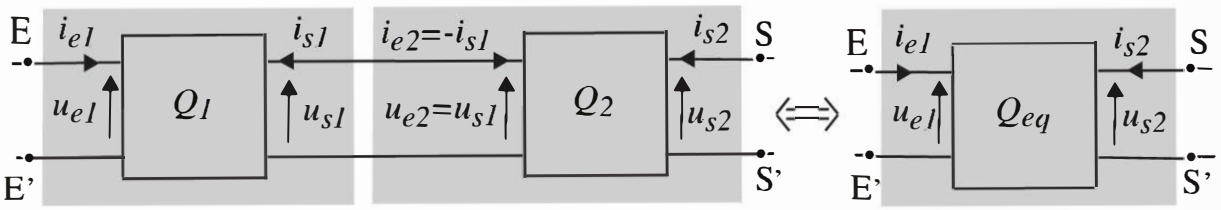


Figure 3.40

Le quadripôle équivalent à cette association présente donc, en entrée, une tension u_{e1} et un courant i_{e1} et, en sortie, une tension u_{s2} et un courant i_{s2}.

Copyright © 2007 Dunod.

Pour en savoir plus...

STABILITÉ DU POINT DE FONCTIONNEMENT

La détermination du point de fonctionnement d'un dipôle, au sein d'un circuit, passe par la recherche de la ou des intersections de la caractéristique graphique de l'élément étudié et de la caractéristique de charge. Toutefois, certaines associations conduisent, sous certaines conditions, à une dérive du point de fonctionnement et à une instabilité de la structure.

Définition

Le point de fonctionnement d'un ensemble de deux dipôles est qualifié de stable, si l'association réagit à toute dérive de ce point, en le ramenant à sa position initiale.

Mise en évidence

Considérons l'association de deux dipôles, l'un défini en convention générateur D_G, l'autre en récepteur D_R (figure 3.41a). Le point de fonctionnement de l'association est noté M.

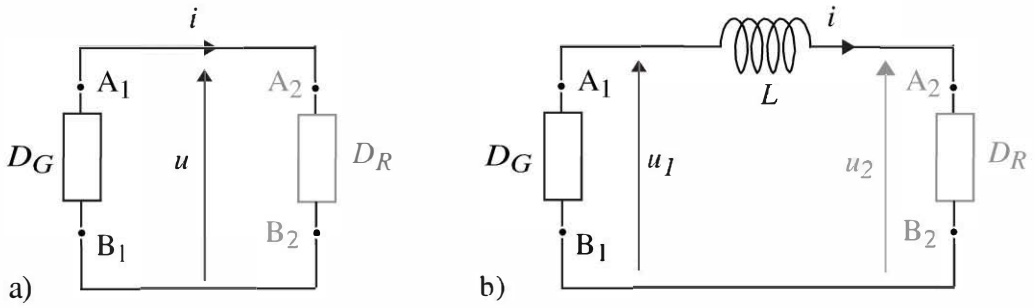


Figure 3.41

Pour caractériser la stabilité de l'association, il s'avère nécessaire de traduire le comportement électrique des fils assurant la liaison entre les deux éléments. Ceux-ci possèdent intrinsèquement un comportement inductif. On peut ainsi modéliser l'ensemble des fils de liaison par une inductance de paramètre caractéristique L en série avec les deux dipôles (figure 3.41b). Intéressons-nous à l'évolution du point de fonctionnement si, de manière transitoire, l'intensité du courant varie d'une valeur infinitésimale di pendant un laps de temps très court dt. Les tensions aux bornes de chaque dipôle sont reliées par $u_1 - u_2 = L\dfrac{di}{dt}$.

Nous sommes amenés à examiner deux cas de figure correspondant à des caractéristiques graphiques présentant des positions relatives différentes (figure 3.42).

Copyright © 2007 Dunod.

Dans le premier cas (figure 3.42a), la variation de courant di induit une tension u_2 aux bornes de D_R et une tension u_1 aux bornes de D_G, avec $u_1 > u_2$. Par suite $u_1 - u_2 = L\dfrac{di}{dt} > 0$, soit $\dfrac{di}{dt} > 0$, traduisant une augmentation du courant.

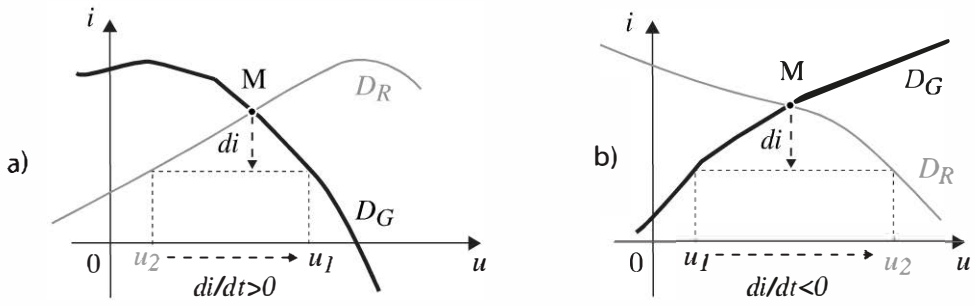


Figure 3.42

L'association des dipôles cherche donc à lutter contre la diminution de courant en provoquant un accroissement de celui-ci. Ainsi, l'association cherchera à ramener le point de fonctionnement à sa position initiale. Le point M constitue, en ce sens, un **point de fonctionnement stable**.

Dans le deuxième cas (figure 3.42b), la variation de courant di induit une tension u_2 aux bornes de D_R et une tension u_1 aux bornes de D_G, avec $u_1 < u_2$. Par suite $u_1 - u_2 = L\dfrac{di}{dt} < 0$ soit $\dfrac{di}{dt} < 0$ qui traduit une diminution du courant.

L'association des dipôles cherche, cette fois-ci, à encourager la diminution de courant. Ainsi, le point de fonctionnement va s'écarter de la position qu'il occupait au point M. Le point M est qualifié de **point de fonctionnement instable**.

> ***Remarque :*** Un raisonnement similaire mené avec une augmentation de courant conduirait à une conclusion similaire quant à la stabilité du premier cas et l'instabilité du second.

Critère de stabilité

À partir de l'analyse menée précédemment, on peut ainsi traduire la stabilité d'un point de fonctionnement, en effectuant la soustraction entre la caractéristique graphique « générateur », et celle du dipôle « récepteur ». Si celle-ci est décroissante autour du point de fonctionnement (figure 3.43a), ce dernier est stable, et il est instable dans le cas contraire (figure 3.43b).

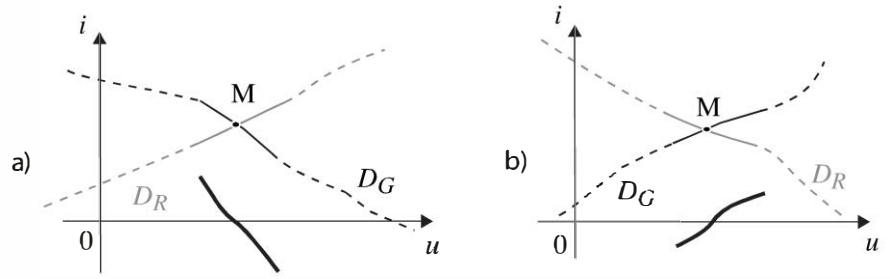


Figure 3.43

Copyright © 2007 Dunod.

Application : oscillateur à diode à effet tunnel

Considérons le circuit électrique constitué de l'association d'un dipôle D_G et d'un dipôle D_R (figure 3.44).

Le dipôle D_G est constitué de l'association série d'une source de tension de force électromotrice e et d'un résistor de résistance R. Le dipôle D_R est une diode à effet tunnel.

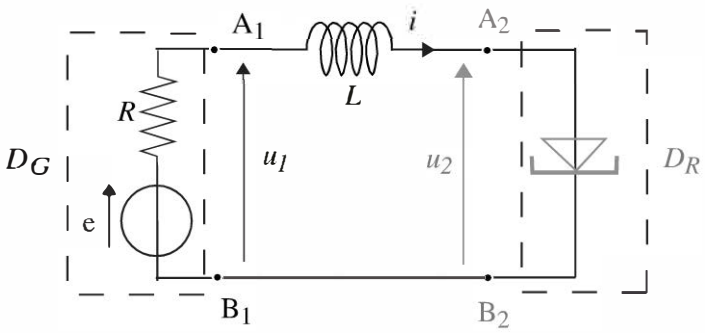


Figure 3.44

Les tensions aux bornes des dipôles sont liées par l'expression $u_1 - u_2 = L\dfrac{di}{dt}$. La caractéristique graphique de la diode à effet tunnel est donnée figure 3.45.

Le dipôle D_G équivalent à l'association série de la source et de la résistance possède la relation caractéristique suivante :

$$i = \frac{e - u_1}{R}$$

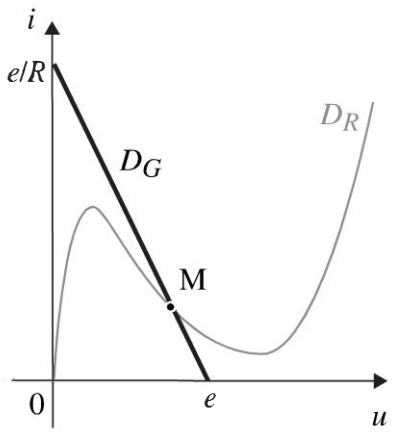


Figure 3.45

À cette relation, est associée une droite de pente $1/R$ et d'ordonnée à l'origine e/R (figure 3.45).

Selon le critère énoncé précédemment, le point de fonctionnement M de l'association de D_G et de D_R est instable.

Examinons le déplacement du point de fonctionnement de la diode tunnel partant d'un état initial où celui-ci est en M_0 ($i = 0$; $u_2 = 0$) (figure 3.46).

Lorsque $u_2 = 0$, la tension u_1 correspondant à $i = 0$, donnée par la caractéristique graphique de D_G est e, par suite $e - 0 = L\dfrac{di}{dt} > 0$. Le courant i augmente donc : le point de fonctionnement se déplace en M_1.

En ce point, $u_1 - u_2 > 0$, le courant ne peut décroître ($L\dfrac{di}{dt} > 0$), le point de fonctionnement se déplace ainsi brutalement en M_2. En ce point,

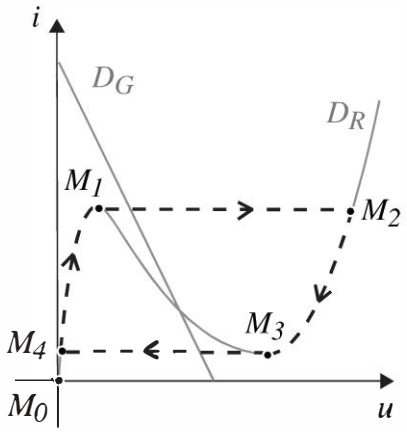


Figure 3.46

Copyright © 2007 Dunod.

$u_1 - u_2 < 0$, le courant peut alors décroître, car $L\frac{di}{dt} < 0$. Le point de fonctionnement redescend la caractéristique graphique. Arrivé en M_3, on a $u_1 - u_2 < 0$, le courant ne peut augmenter ($L\frac{di}{dt} < 0$), le point de fonctionnement se déplace ainsi brutalement en M_4. En M_4, $u_1 - u_2 > 0$ ($L\frac{di}{dt} > 0$), le courant augmente et contribue à déplacer le point de fonctionnement en M_1. Désormais, le fonctionnement sera cyclique, le point de fonctionnement se déplaçant sur le domaine de fonctionnement délimité par les points (M_1, M_2, M_3, M_4) représentés en pointillés figure 3.46.

L'association des dipôles D_G et D_R réalise ainsi un oscillateur, la tension aux bornes de D_R évoluant de manière périodique. L'allure de la tension u_2 est représentée figure 3.47.

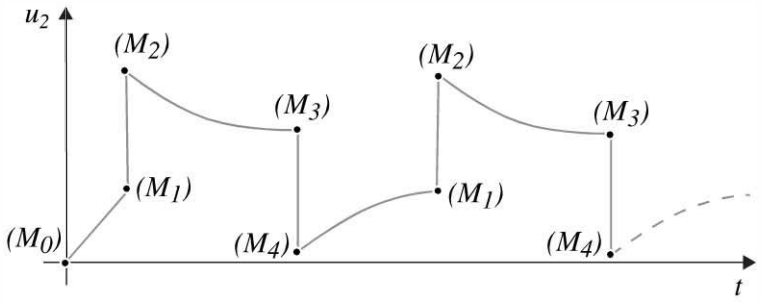


Figure 3.47

Les positions occupées par le point de fonctionnement, au cours du temps, sont indiquées entre parenthèses sur cette figure.

La transition entre le point M_1 et M_2 s'effectue en passant par le point instable M (figure 3.45). En effet, il existe un condensateur parasite de jonction (non pris en compte dans notre étude) aux bornes de la diode. Au passage du point M_1, le courant circulant dans ce condensateur change de sens de variation ; il commence à croître en entraînant une élévation rapide de u_2. Le point de fonctionnement passe ainsi très rapidement de M_1 en M_2. On assiste à un phénomène similaire, mais en sens inverse, lors de la transistion de M_3 à M_4.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

(Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage)

3.1 Comment effectue-t-on le fléchage du courant et de la tension sur un dipôle en convention récepteur ? Reprendre la même question pour une convention générateur.

3.2 Comment distingue-t-on un dipôle actif d'un dipôle passif ?

3.3 Quelle convention doit-on adopter pour étudier le fonctionnement d'un dipôle réversible en courant ?

3.4 Un dipôle passif peut-il être réversible en tension ? en courant ?

3.5 Quelle particularité présente la caractéristique électrique associée à un dipôle linéaire passif ?

Copyright © 2007 Dunod.

3.6 Comment se répartissent les tensions et courants sur les dipôles au sein d'une association parallèle et d'une association série ?

3.7 Combien de caractéristiques graphiques sont nécessaires à la caractérisation électrique complète d'un quadripôle ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

3.8 Parmi les composants suivants, cocher ceux dont la modélisation correspond à un dipôle actif, lors d'une séquence nominale de fonctionnement.

☐ une pile ☐ une ampoule électrique
☐ un moteur à courant continu

3.9 Considérons les caractéristiques données figure 3.48. Caractériser, dans chaque cas, le dipôle associé ; est-il passif, actif, réversible, symétrique, linéaire ?

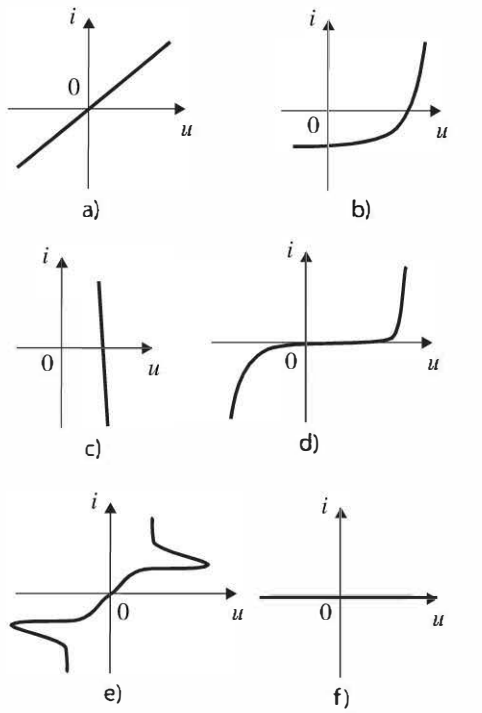
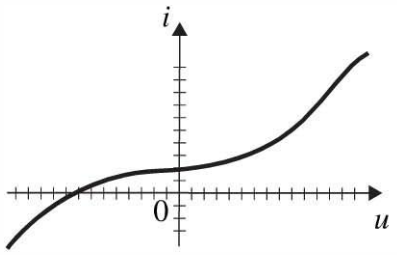


Figure 3.48

3.10 On donne, figure 3.49, la caractéristique graphique d'un dipôle. Déterminer sur celle-ci la valeur du courant de court-circuit et de la tension à vide du dipôle.



Courant : 10 mA/div Tension : 1 V/div

Figure 3.49

3.11 Déterminer les relations caractéristiques du dipôle équivalent à l'association série de :

a. deux résistors de résistances R_1 et R_2 ;

b. deux inductances de coefficients d'induction L_1 et L_2 ;

c. deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

3.12 Déterminer les relations caractéristiques du dipôle équivalent à l'association parallèle de :

a. deux résistors de résistances R_1 et R_2 ;

b. deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 ;

c. deux inductances de coefficients d'induction L_1 et L_2.

3.13 Une diode Zéner (figure 3.50a) peut être modélisée par un dipôle dont la caractéristique est donnée figure 3.50b. Déterminer la caractéristique graphique du dipôle équivalent à l'association de diodes représentée figure 3.50c.

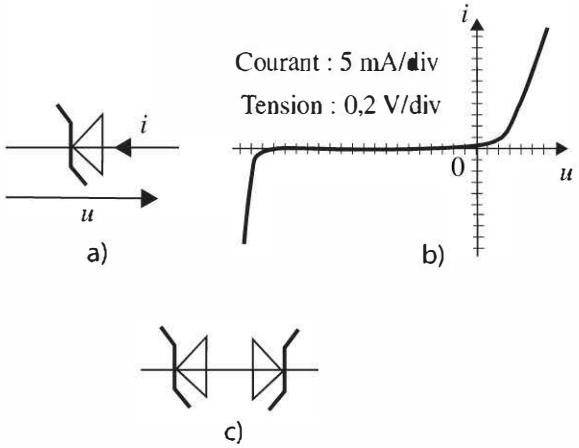


Figure 3.50

Copyright © 2007 Dunod.

3.14 1) Considérons le quadripôle représenté figure 3.51a. Déterminer ses caractéristiques d'entrée, de sortie, de transfert et de réaction.

2) En faisant apparaître des associations de quadripôle du type de celle étudiée dans la question précédente, déterminer les relations caractéristiques du quadripôle représenté figure 3.51b.

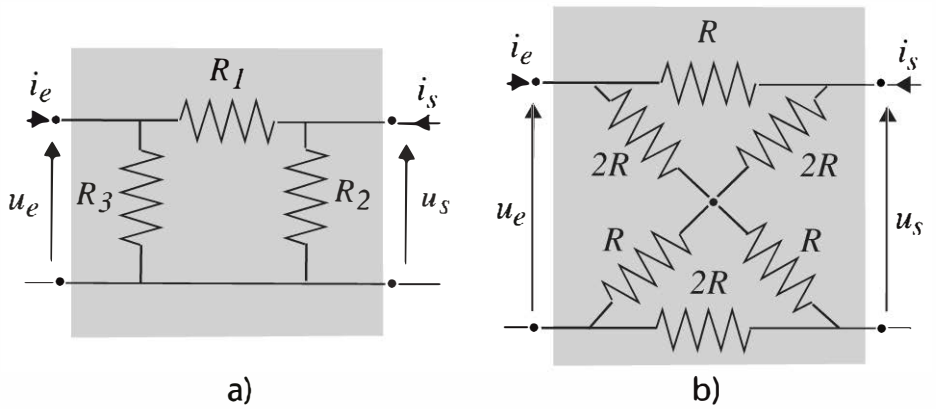


Figure 3.51

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 4

Modélisation de composants électriques

Objectifs

- Proposer des techniques de modélisation dipolaire et quadripolaire.
- Établir le domaine de validité d'un modèle et définir ses limitations.
- Dresser le modèle linéaire statique et dynamique d'un composant non linéaire.

Vocabulaire

Modèle de comportement
Modèle de connaissance
Modélisation statique et dynamique
Domaine de validité
Modèles de Thévenin et de Norton
Représentations paramétriques
Quadripôle du premier ordre
Quadripôle du deuxième ordre

Ce chapitre, qui clôt la première partie de cet ouvrage, a pour objectif la présentation des différentes techniques de modélisation du comportement d'un composant électrique. Il se propose de les présenter au travers de deux types d'approches : la modélisation comportementale et de connaissance. Exploitant le formalisme dipolaire et quadripolaire exposé dans le chapitre 3, les techniques de modélisation seront évoquées tant sur un plan statique que dynamique. L'essentiel de cette présentation consiste en une définition de modèles linéaires par approximation au premier ordre. En ce sens, ce chapitre pose les bases de l'analyse des circuits électriques linéaires, qui constituent la deuxième partie du présent ouvrage.

Copyright © 2007 Dunod.

4.1 NOTION DE MODÈLE ÉLECTRIQUE

Étape préalable à l'analyse de toute structure électrique, l'élaboration d'un modèle pour chacun des composants est une opération capitale. La modélisation d'un élément électrique consiste à déterminer les relations entre les grandeurs électriques régissant son fonctionnement.

La difficulté principale de l'étape de modélisation réside dans le fait qu'elle résulte bien souvent d'un compromis à trouver entre la complexité et la vraisemblance du modèle. La volonté d'obtenir un modèle réaliste nécessite de prendre en compte l'influence de facteurs d'origine non électriques. La modélisation peut ainsi conduire à une modélisation multifactorielle poussant à introduire un nombre de variables très important dans les relations.

De plus, les lois physiques gouvernant le comportement électrique d'un composant conduisent rarement à des relations linéaires, qui peuvent tout aussi bien ne pas pouvoir être associées à une forme analytique.

Selon l'emplacement et l'utilisation effective du composant électrique à modéliser au sein du circuit, le choix s'oriente vers un formalisme dipolaire ou quadripolaire.

> ***Remarque :*** L'analyse d'un circuit électrique ne réside pas exclusivement sur la modélisation des composants matériels présents. Elle dépend aussi de l'ensemble des parties où de l'énergie électrique est présente.

4.1.1 Modèle de connaissance et de comportement

En tenant compte des connaissances relatives à son fonctionnement, on peut dresser le modèle électrique d'un composant électrique de deux façons différentes, par **modélisation de connaissance** ou par **modélisation comportementale**.

➤ ***Modèle de connaissance***

Cette approche nécessite de connaître les processus physiques qui gouvernent le comportement interne du composant. On traduit alors théoriquement les relations entre les grandeurs physiques internes (figure 4.1).

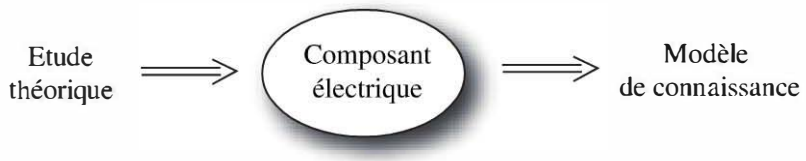


Figure 4.1

Il est important de bien comprendre que le comportement électrique d'un composant résulte bien souvent d'un ensemble de réactions mécaniques, thermodynamiques, thermochimiques et parfois même optiques. Cette description interne de la structure conduit généralement à un modèle complexe (influence de facteurs multiples) et non linéaire (lois physiques généralement non linéaires).

Copyright © 2007 Dunod.

Compte tenu du contexte d'utilisation du composant, il est donc nécessaire de négliger l'influence de paramètres jugés peu significatifs, et d'envisager une simplification des relations physiques. Comme nous le verrons par la suite, un modèle de connaissance doit systématiquement être rattaché à un domaine de validité qui correspond à celui des lois physiques utilisées et des approximations effectuées.

Le modèle de connaissance exprimé en termes mathématiques permet d'envisager différentes représentations (temporelle, fréquentielle, énergétique...) de l'élément étudié.

La modélisation de connaissance constitue l'approche utilisée pour pouvoir effectuer une simulation sur calculateur du comportement de composants électriques au sein d'un circuit.

➤ ***Modèle de comportement***

L'élaboration d'un modèle de comportement consiste à envisager le composant comme une « boîte noire » sans se préoccuper des lois physiques qui le gouvernent. On cherche alors à établir des relations de « cause à effet » entre les grandeurs d'entrée et de sortie, traduisant au mieux le comportement du système.

Ces relations empiriques sont établies par une série de tests menés expérimentalement. Des techniques d'identification, généralement numériques, permettent ensuite à partir des résultats obtenus, de dresser une relation entre ces grandeurs (figure 4.2).



Figure 4.2

Dans cette approche, contrairement à celle décrite au paragraphe précédent, il n'est plus question de comprendre le fonctionnement du composant, mais de décrire au mieux, de façon empirique, le comportement observé.

La modélisation comportementale de composants électriques convient bien à l'établissement d'un modèle dans un contexte d'utilisation préalablement établi.

4.1.2 Domaine de validité

La complexité d'un modèle électrique dépendra en grande partie du domaine d'utilisation du composant étudié.

Prenons, par exemple, le cas d'une simple portion de câble électrique comprise entre deux points *A* et *B* assurant le transport du courant dans une installation électrique domestique (figure 4.3). Il semble normal, compte tenu de la faible valeur de sa résistance, de modéliser ce conducteur par un simple fil. Néanmoins, pour des courants de quelques dizaines d'ampères, il peut s'avérer nécessaire d'introduire dans le modèle une résistance, seule capable de traduire l'échauffement de ce dernier. Qu'en est-il du comportement électrique de ce même câble vis-à-vis des fréquences utilisées pour véhiculer un signal par la

Copyright © 2007 Dunod.

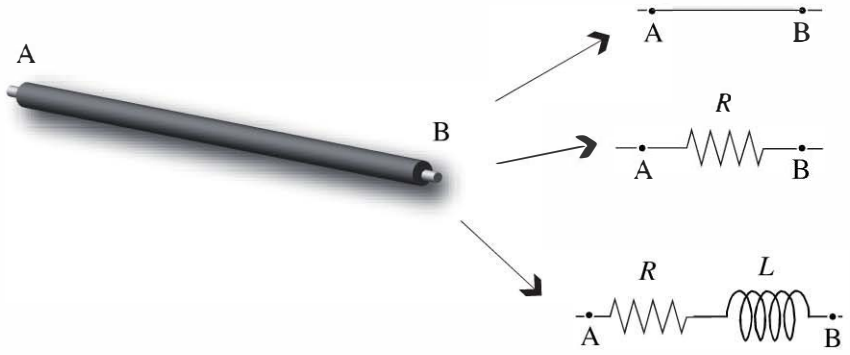


Figure 4.3

technique des courants porteurs de lignes, où le caractère inductif de celui-ci ne peut plus être ignoré ?

Ainsi, est-il capital de prendre en ligne de compte le domaine d'utilisation du composant électrique, avant d'envisager sa modélisation. On en vient donc à définir un domaine de validité du modèle tenant compte d'un certain nombre de paramètres physiques, électriques ou non. Dans le cadre de ce domaine de validité, le modèle traduit le comportement électrique du composant avec le degré d'approximation escompté.

> Toute modélisation électrique doit nécessairement être rattachée à un domaine de validité.

Le domaine de validité du modèle associé à un composant électronique doit également prendre en compte que la tension, l'intensité du courant et la puissance ne peuvent excéder certaines valeurs pour ne pas risquer d'endommager celui-ci.

Ces limites de fonctionnement sont traduites sur la caractéristique graphique (figure 4.4) par :

- une droite $u = U_{Max}$ correspondant à la valeur maximale admissible de tension pour éviter un phénomène de claquage diélectrique entre les deux bornes du composant ;
- une droite $i = I_{Max}$ correspondant à la valeur maximale admissible en courant compte tenu de la section des bornes du composant ;
- une hyperbole $ui = P_{MAX}$ correspondant à la puissance maximale admissible par le composant sans l'endommager.

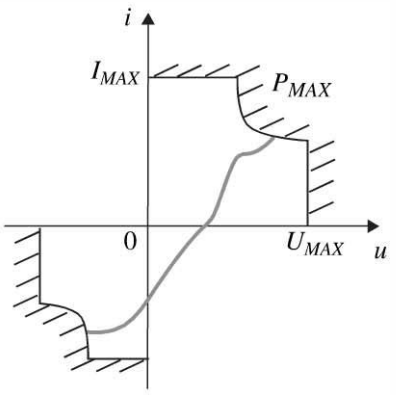


Figure 4.4

4.1.3 Modélisation statique et dynamique

Considérons une ampoule à filament de tungstène, alimentée par une pile (figure 4.5a). Un rhéostat est placé en série avec l'ensemble, tandis qu'un ampèremètre (A) et un voltmètre (V) assurent la mesure de l'intensité du courant i dans l'ampoule et de la tension u aux bornes de celle-ci.

Copyright © 2007 Dunod.

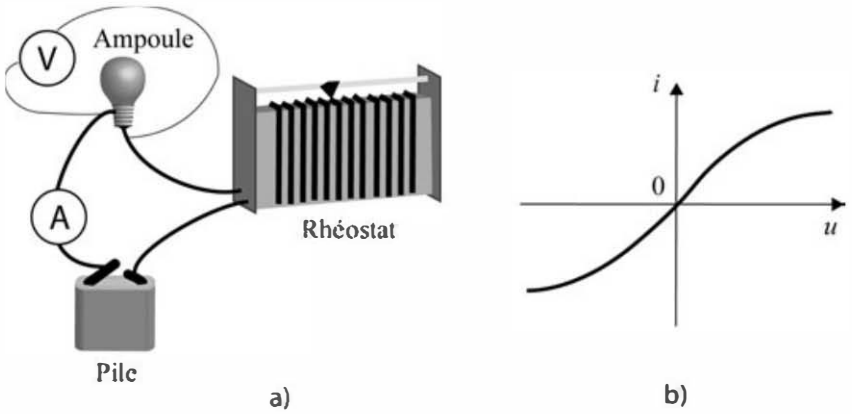


Figure 4.5

Pour différentes positions du curseur du rhéostat, on mesure le courant i et la tension u. On considère qu'entre chaque mesure, on attend qu'un état d'équilibre correspondant à un éclat fixe de l'ampoule, s'instaure. On reporte ensuite sur un graphe les différents points correspondants au couple de valeurs mesurées. La courbe obtenue met clairement en évidence que pour des tensions de valeurs croissantes, l'augmentation correspondante de l'intensité du courant est de moins en moins significative (figure 4.5b).

Ce phénomène trouve son origine dans le fait qu'une tension croissante engendre une puissance à dissiper par effet joule accrue. L'élévation de la température du filament qui en résulte engendre une augmentation de la résistivité de ce dernier, donc un infléchissement progressif de la croissance de l'intensité.

On peut ainsi considérer que la caractéristique graphique a été tracée en supposant que, pour chaque point de mesure, l'équilibre thermique était atteint.

Le dipôle associé à cette caractéristique non linéaire ne peut raisonnablement décrire le comportement de l'ampoule qu'en considérant que chaque point de fonctionnement de celle-ci, correspond à un état d'équilibre. En ce sens, la caractéristique graphique obtenue servira de base à une modélisation qualifiée de statique de l'ampoule.

Imaginons maintenant que nous substituions à la pile un générateur de tension, variable, alternatif, et que nous visualisions à chaque instant l'évolution du courant grâce à un shunt, et de la tension sur un oscilloscope (figure 4.6a).

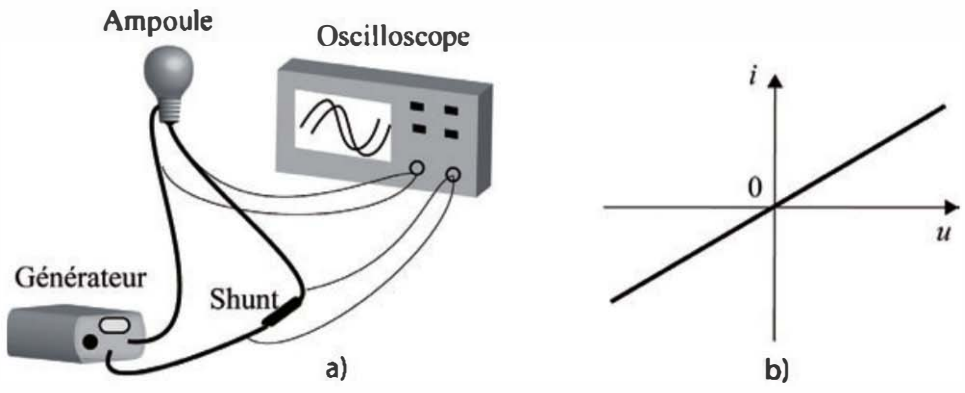


Figure 4.6

Copyright © 2007 Dunod.

Pour des fréquences de quelques mHz, l'intensité lumineuse émise par l'ampoule fluctue. La courbe tracée à partir des mesures effectuées à différents instants, s'identifie à celle obtenue avec la pile.

En revanche, pour des fréquences sensiblement plus élevées (quelques centaines de Hz), l'éclat de l'ampoule reste constant. En effet, l'inertie thermique du filament lisse les variations de température résultant des variations rapides d'intensité. La température n'évoluant pas, la résistivité reste constante et les points se trouvent sensiblement alignés sur la courbe (figure 4.6b). La caractéristique graphique obtenue traduira la relation entre courant et tension au cours d'une évolution temporelle. La modélisation associée sera qualifiée de dynamique.

Ainsi, d'une manière générale, le comportement électrique d'un composant sera décrit par deux types de modèles :

- un **modèle statique**, qui traduira le comportement du composant à l'équilibre, c'est-à-dire en considérant que les facteurs influençant son évolution électrique restent sensiblement constants au cours du temps ;
- un **modèle dynamique**, traduisant le comportement du composant dans un processus évolutif (hors de son état d'équilibre).

> ***Remarque :*** On notera en particulier, qu'un modèle statique ne prend pas en considération le caractère capacitif ou inductif. En effet, ce type de modélisation ne peut traduire la relation temporelle liant la tension et le courant.

4.2 MODÉLISATION LINÉAIRE STATIQUE

4.2.1 Approximation polynomiale

Les travaux du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731) ont conduit celui-ci à démontrer que toute fonction $f(x)$ continûment dérivable peut être approximée au voisinage d'un point $M(x_0, y_0, z_0...)$ par le polynôme suivant :

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} + \ldots$$

Ce développement comportant une infinité de termes (série) est en pratique tronqué à un ordre n. Pour $n = 1$, la fonction est approximée par une droite, on parle d'approximation linéaire. Pour $n = 2$, on complète l'approximation linéaire par un terme quadratique traduisant une évolution parabolique.

Cette relation appliquée à l'électricité, permet d'effectuer une approximation locale de la relation caractéristique $i = f(u)$ d'un composant, au voisinage d'un point de fonctionnement.

En effet, considérons qu'au cours d'une séquence de fonctionnement, le point de fonctionnement se déplace légèrement du point $M_0(U_0, I_0)$ vers le point $M(U, I)$ situé à proximité (figure 4.7).

Copyright © 2007 Dunod.

Alors, en effectuant un développement limité au voisinage du point M, il devient possible d'exprimer les coordonnées de M en fonction de celles de M_0 selon l'expression suivante :

$$f(U) \simeq f(U_0) + (U - U_0) \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0} + \frac{(U-U_0)^2}{2} \left.\frac{d^2 f}{du^2}\right|_{M_0} + \ldots + \frac{(U-U_0)^n}{n!} \left.\frac{d^n f}{du^n}\right|_{M_0} + \ldots$$

où $f(U) = I$ et $f(U_0) = I_0$.

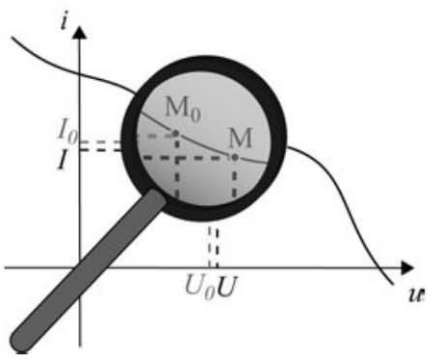


Figure 4.7

Compte tenu de l'allure générale des caractéristiques graphiques associées aux composants électriques usuels, un développement limité au premier ordre ($n = 1$) offre déjà une modélisation assez réaliste du comportement électrique du composant. Il est ainsi possible d'écrire :

$$I = f(U) \simeq I_0 + (U - U_0) \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0} = I_0 - U_0 \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0} + U \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0}$$

Une approximation de la relation caractéristique sur un domaine de fonctionnement, réduit au voisinage du point M_0, peut ainsi être exprimée sous la forme :

$$I \simeq b + aU$$

La courbe associée à cette relation, représentée dans le plan électrique (i,u) est donc une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b.

Les constantes $b = I_0 - U_0 \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0}$ et $a = \left.\frac{df}{du}\right|_{M_0}$ constituent les paramètres caractéristiques du modèle linéaire.

La pente étant donnée par la dérivée de la relation caractéristique, l'approximation graphique de la caractéristique graphique correspondra à la tangente à la courbe au point de fonctionnement (figure 4.8).

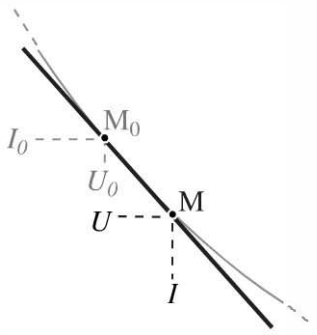


Figure 4.8

Il est à noter que le modèle électrique linéaire possède un domaine de validité limité au domaine de fonctionnement sur lequel l'approximation est réalisée. Selon la partie de la caractéristique où se situe le domaine de fonctionnement, il est possible d'effectuer une linéarisation par morceau de la caractéristique graphique (figure 4.9).

Cette approximation permet de dresser un modèle linéaire du composant dans son domaine de fonctionnement. Si cette opération de linéarisation est menée sur l'intégralité

Copyright © 2007 Dunod.

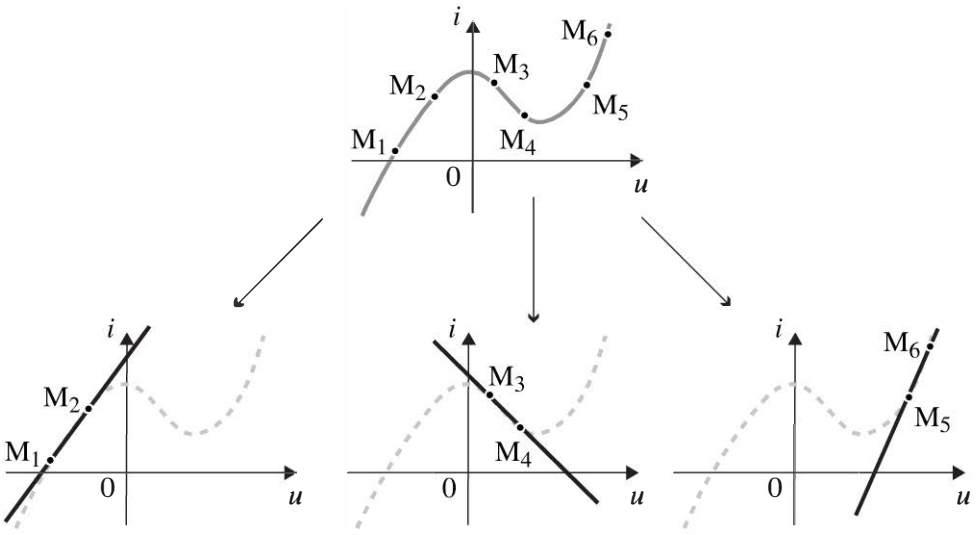


Figure 4.9

des composants d'un circuit, il est alors possible d'assimiler ce dernier à un **circuit électrique linéaire**.

Dès lors, un certain nombre de méthodes propres à l'analyse de ces circuits électriques peuvent être employées, simplifiant alors considérablement l'étude du comportement de ceux-ci.

4.2.2 Modèle linéaire statique

➤ ***Définition***

La réalisation d'une approximation linéaire assimile la caractéristique graphique d'un composant à une droite sur son domaine de fonctionnement. Un modèle linéaire statique peut ainsi être associé au composant ou encore, de façon plus synthétique, nous lui associons « un dipôle linéaire statique ».

Selon le type de relations caractéristiques affines utilisées pour caractériser le dipôle, deux modèles sont utilisés (figure 4.10). Ceux-ci sont usuellement appelés modèle de **Norton** (ou dipôle de Norton) et modèle de **Thévenin** (ou dipôle de Thévenin).

Leur définition repose sur l'association d'un résistor et d'une source de courant ou de tension.

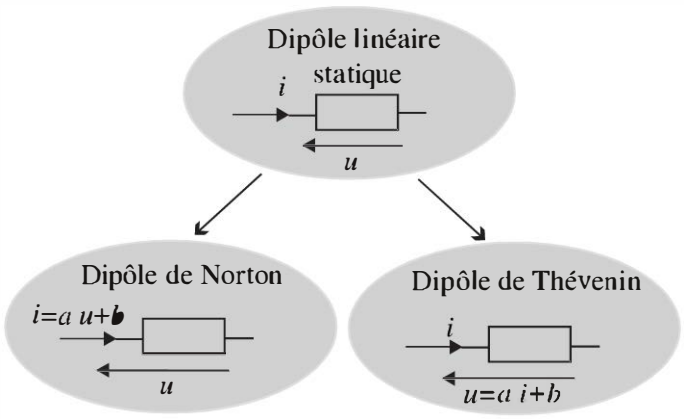


Figure 4.10

➤ ***Dipôle de Norton***

Un modèle équivalent de Norton est constitué de l'association parallèle d'une source de courant (courant électromoteur J) et d'un résistor de résistance R (figure 4.11).

Copyright © 2007 Dunod.

La règle de répartition des courants, pour une association parallèle, permet d'exprimer la relation caractéristique associée à ce dipôle. Le courant i s'exprime comme la somme des courants circulant dans le résistor R (loi d'Ohm) et du courant électromoteur J engendré par la source de courant : $i = J + \dfrac{u}{R}$

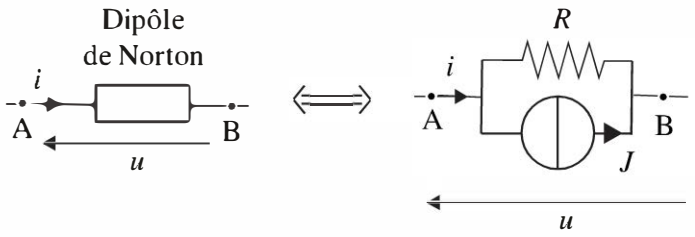


Figure 4.11

Dans le plan électrique (i,u), la caractéristique graphique associée est une droite (figure 4.12) qui possède les paramètres suivants :

- une pente $= 1/R$;
- un courant de court-circuit $I_{cc} = J$;
- une tension à vide $U_v = -RJ$.

Le modèle de Norton est bien adapté pour traduire le comportement d'un composant sur un domaine de fonctionnement assimilable à une droite proche de l'horizontale.

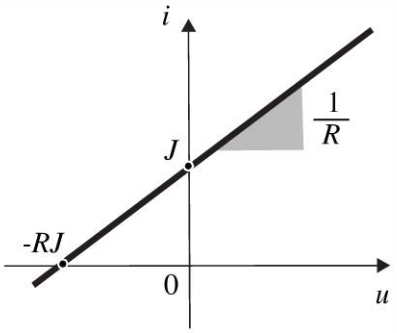


Figure 4.12

➤ *Dipôle de Thévenin*

Un modèle équivalent de Thévenin est constitué de l'association série d'une source de tension de force électromotrice E et d'un résistor de résistance R (figure 4.13).

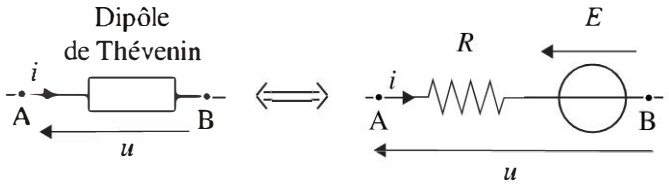


Figure 4.13

La règle de répartition des tensions pour une association série permet d'exprimer la tension u comme la somme de la tension aux bornes du résistor R (loi d'Ohm) et de la force électromotrice E, générée par la source de tension :

$$u = Ri + E$$

Dans le plan électrique (u,i), la caractéristique graphique associée est une droite (figure 4.14) qui possède les paramètres suivants :

- une pente $= R$;
- un courant de court-circuit $I_{cc} = -E/R$;
- une tension à vide $U_v = E$.

Le modèle de Thévenin est bien adapté pour traduire le comportement d'un composant sur un domaine de fonctionnement assimilable à une droite proche de l'horizontale.

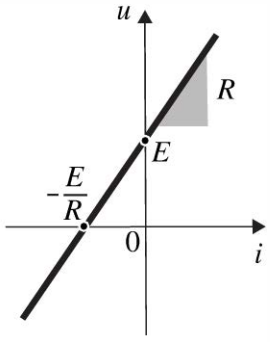


Figure 4.14

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Équivalence entre modèles***

Correspondant tous deux à des modèles linéaires statiques, il existe des relations d'équivalence entre modèles de Norton et de Thévenin.

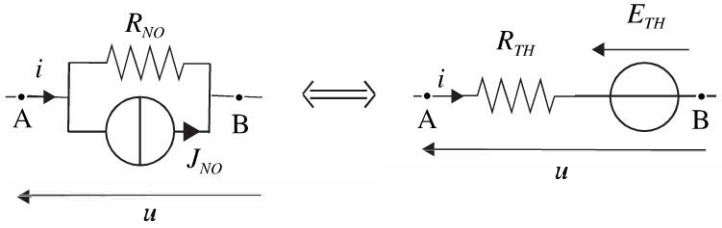


Figure 4.15

Les relations caractéristiques associées aux deux modèles proposés (figure 4.15) sont respectivement : $i = J_{NO} + u/R_{NO}$ et $u = R_{TH}i + E_{TH}$. L'équivalence entre les deux dipôles doit porter en particulier sur les tensions à vide et les courants de court-circuit :

- la relation $i = 0$ conduit à $U_v = -J_{NO}\, R_{NO} = E_{TH}$;
- la relation $u = 0$ conduit à $I_{cc} = J_{NO} = -E_{TH}/R_{TH}$.

Les relations d'équivalence entre les paramètres du modèle de Thévenin et ceux du modèle de Norton sont donc : $R_{NO} = R_{TH} = R$ et $-J_{NO}\, R = E_{TH}$.

4.2.3 Représentations paramétriques

L'approximation linéaire réalisée pour un dipôle peut aussi être menée au voisinage du point de fonctionnement d'un quadripôle. Rappelons que ce type de structure électrique est associé à une relation caractéristique du type $f(w,x,y,z)$. Les variables w, x, y, et z correspondent aux quatre variables électriques i_e, i_s, u_e, et u_s décrivant son comportement. Comme cela a été évoqué au chapitre 3, un système de deux relations caractéristiques implicitement associées à f, peut être défini :

$$\begin{cases} z = f_1(w,x) \\ y = f_2(w,x) \end{cases}$$

Exactement comme pour les dipôles, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de ces fonctions, au voisinage d'un point de fonctionnement $M_0(W_0,X_0,Y_0,Z_0)$. Il conduit à :

$$\begin{cases} z = f_1(w,x) \simeq Z_0 + (w - W_0)\left.\dfrac{\partial f_1}{dw}\right|_{M_0} + (x - X_0)\left.\dfrac{\partial f_1}{dx}\right|_{M_0} \\ y = f_2(w,x) \simeq Y_0 + (w - W_0)\left.\dfrac{\partial f_2}{dw}\right|_{M_0} + (x - X_0)\left.\dfrac{\partial f_2}{dx}\right|_{M_0} \end{cases}$$

À travers cette linéarisation des fonctions f_1 et f_2, il devient possible de dresser un modèle linéaire du quadripôle sur un domaine de fonctionnement de faible étendue, autour du point M_0. Selon la manière dont sont exprimées les relations caractéristiques entre les quatre grandeurs électriques (i_e, i_s, u_e, u_s), la modélisation associée à l'approximation linéaire conduit à différentes représentations. Les paramètres intervenant dans ces relations conduisent à des représentations paramétriques conductances, résistances ou hybrides.

Copyright © 2007 Dunod.

Ces représentations paramétriques constituent une généralisation des modèles de Thévenin et Norton, appliquée aux quadripôles.

➤ ***Paramètres conductances***

Un premier type de représentation consiste à exprimer, à travers les relations paramétriques, les courants (i_e, i_s), en fonction des tensions (u_e, u_s) :

$$\begin{cases} i_e = f_1(u_e, u_s) \\ i_s = f_2(u_e, u_s) \end{cases}$$

Un développement limité de f_1 et f_2 au premier ordre, au voisinage d'un point de fonctionnement $M_0(I_{e0}, I_{s0}, U_{s0}, U_{e0})$ conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} i_e = I_{e0} + (u_e - U_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} + (u_s - U_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} \\ i_s = I_{s0} + (u_e - U_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} + (u_s - U_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} \end{cases}$$

Que l'on peut encore écrire, sous forme développée :

$$\begin{cases} i_e = \left(I_{e0} - U_{e0} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} - U_{s0} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0}\right) + u_e \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} + u_s \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} \\ i_s = \left(I_{s0} - U_{e0} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} - U_{s0} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0}\right) + u_e \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} + u_s \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} \end{cases}$$

ou sous forme simplifiée :

$$\boxed{\begin{cases} i_e = J_{10} + G_{11}\, u_e + G_{12}\, u_s \\ i_s = J_{20} + G_{21}\, u_e + G_{22}\, u_s \end{cases}}$$

avec :

$$J_{10} = I_{e0} - U_{e0} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} - U_{s0} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} ; \quad J_{20} = I_{s0} - U_{e0} \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} - U_{s0} \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} ;$$

$$G_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} ; \quad G_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} ; \quad G_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} ; \quad G_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} .$$

Les constantes J_{10}, J_{20}, G_{11}, G_{12}, G_{21}, et G_{22} constituent les paramètres caractéristiques du modèle linéaire. Les paramètres G_{11}, G_{12}, G_{21}, et G_{22} homogènes à des conductances (inverses de résistances) sont communément appelés **paramètres conductances**. On peut, de manière plus synthétique, exprimer les relations caractéristiques sous forme matricielle :

Copyright © 2007 Dunod.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_e \\ i_s \end{bmatrix}}_{[I]} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{[G]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_e \\ u_s \end{bmatrix}}_{[U]} + \underbrace{\begin{bmatrix} J_{10} \\ J_{20} \end{bmatrix}}_{[J_0]} \Longleftrightarrow [I] = [G]\,[U] + [J_0]$$

Un schéma électrique peut être associé à ces relations (figure 4.16) :

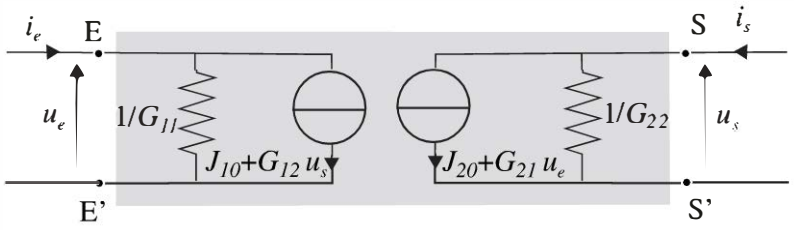


Figure 4.16

En effet, en exprimant les lois d'Ohm sur les résistances $1/G_{11}$ et $1/G_{22}$, et en appliquant la règle de répartition des courants aux points E et S, on obtient :

$$\begin{cases} i_e = (J_{10} + G_{12}u_s) + \dfrac{u_e}{1/G_{11}} = J_{10} + G_{11}u_e + G_{12}u_s \\ i_s = (J_{20} + G_{21}u_e) + \dfrac{u_s}{1/G_{22}} = J_{20} + G_{21}u_e + G_{22}u_s \end{cases}$$

La linéarisation d'un quadripôle sous forme de représentation conductance, consiste ainsi en une détermination d'un modèle linéaire statique (dipôle de Norton) entre les bornes d'entrée et de sortie de celui-ci (figure 4.16). La différence notable avec la modélisation dipolaire repose sur l'utilisation de sources liées, dont la grandeur électromotrice est contrôlée par une grandeur électrique. C'est en effet par elles qu'est traduite l'influence de l'entrée sur la sortie et vice versa. Notons que ces sources de courant sont totalement compatibles avec le processus physique décrit au chapitre 2, dans le sens où le courant électromoteur qu'elles génèrent est indépendant de la tension à leurs bornes.

Les paramètres G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}, J_{10} et J_{20} sont identifiés sur les quatre caractéristiques graphiques (entrée, sortie, transfert et réaction) évoquées au chapitre 3.

$$G_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_e}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_e}{du_e}\right|_{M_0}$$

où $i_e = f_e(u_e)$ à $u_s = U_{S0}$ désigne la caractéristique graphique d'entrée. Le paramètre G_{11} correspond à la pente de cette caractéristique graphique en M_0 (figure 4.17).

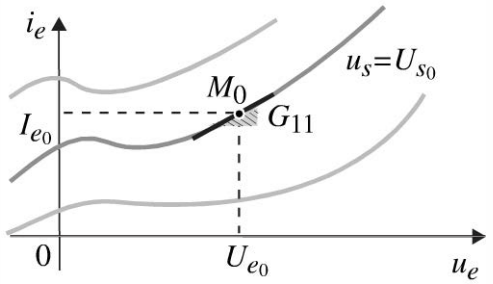


Figure 4.17

$$G_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_s}{du_s}\right|_{M_0}$$

où $i_s = f_s(u_s)$ à $u_e = U_{e0}$ désigne la caractéristique graphique de sortie. Le paramètre G_{22} correspond à la pente de cette caractéristique graphique en M_0 (figure 4.18).

Copyright © 2007 Dunod.

$$G_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_r}{du_s}\right|_{M_0}$$

où $i_e = f_r(u_s)$ à $u_e = U_{e0}$ désigne la caractéristique graphique de réaction. Le paramètre G_{12} correspond à la pente de cette caractéristique graphique, prise au point de fonctionnement M_0 (figure 4.19).

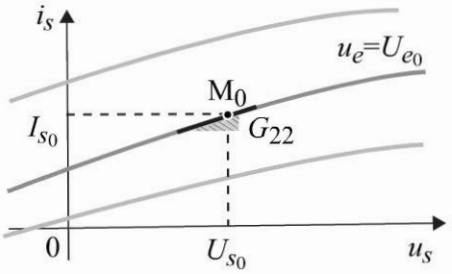


Figure 4.18

$$G_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_e}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_t}{du_e}\right|_{M_0}$$

où $i_s = f_t(u_e)$ à $u_s = U_{S0}$ désigne la caractéristique graphique de transfert. Le paramètre G_{21} correspond à la pente de cette caractéristique graphique, prise au point de fonctionnement M_0 (figure 4.20).

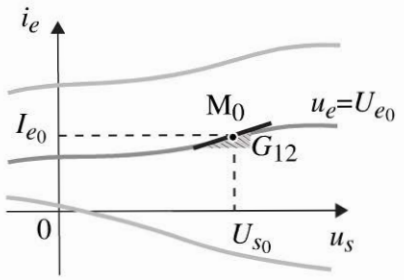


Figure 4.19

Les paramètres J_{10} et J_{20} (homogènes à des courants) intègrent les valeurs des grandeurs électriques prises au point de fonctionnement autour duquel est faite l'approximation linéaire.

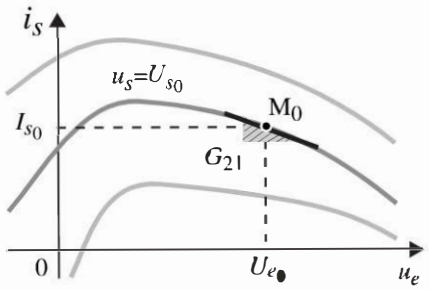


Figure 4.20

➤ ***Paramètres résistances***

Dans d'autres cas, les relations caractéristiques exprimeront plus facilement les tensions (u_e, u_s), en fonction des courants (i_e, i_s) :

$$\begin{cases} u_e = f_1(i_e, i_s) \\ u_s = f_2(i_e, i_s) \end{cases}$$

Un développement limité de f_1 et f_2 au premier ordre, au voisinage d'un point de fonctionnement $M_0(I_{e0}, I_{s0}, U_{s0}, U_{e0})$ conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_e = U_{e0} + (i_e - I_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} + (i_s - I_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0} \\ u_s = U_{s0} + (i_e - I_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} + (i_s - I_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0} \end{cases}$$

Que l'on peut encore écrire, sous forme développée :

$$\begin{cases} u_e = \left(U_{e0} - I_{e0} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} - I_{s0} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0}\right) + i_e \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} + i_s \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0} \\ u_s = \left(U_{s0} - I_{e0} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} - I_{s0} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0}\right) + i_e \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} + i_s \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0} \end{cases}$$

Copyright © 2007 Dunod.

ou sous forme simplifiée :

$$\boxed{\begin{cases} u_e = E_{10} + R_{11} i_e + R_{12} i_s \\ u_s = E_{20} + R_{21} i_e + R_{22} i_s \end{cases}}$$

avec :

$$E_{10} = U_{e0} - I_{e0} \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} - I_{s0} \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0} ; \quad J_{20} = U_{s0} - I_{e0} \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} - I_{s0} \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0} ;$$

$$R_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} ; \quad R_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0} ; \quad R_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} ; \quad R_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0} .$$

Les constantes E_{10}, E_{20}, R_{11}, R_{12}, R_{21}, et R_{22} constituent les paramètres caractéristiques du modèle linéaire. Les paramètres R_{11}, R_{12}, R_{21} et R_{22} homogènes à des résistances sont communément appelés **paramètres résistances**.

On peut, de manière plus synthétique, exprimer les relations caractéristiques sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_e \\ u_s \end{bmatrix}}_{[U]} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{[R]} \underbrace{\begin{bmatrix} i_e \\ i_s \end{bmatrix}}_{[I]} + \underbrace{\begin{bmatrix} E_{10} \\ E_{20} \end{bmatrix}}_{[E_0]} \Longleftrightarrow [U] = [R]\,[I] + [E_0]$$

Un schéma électrique peut être associé à cette représentation paramétrique (figure 4.21) :

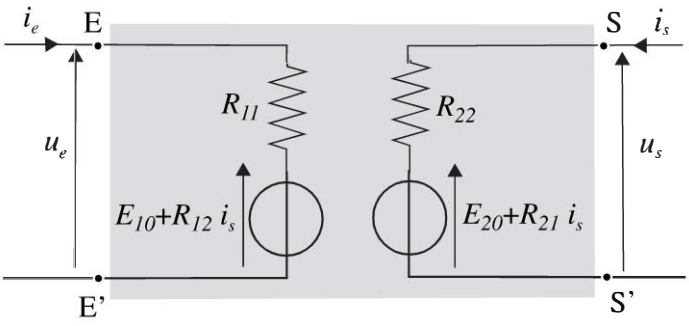


Figure 4.21

En effet, en explicitant les lois d'Ohm sur les résistances R_{11} et R_{22}, et en appliquant la règle de répartition des tensions entre les points E et E' d'une part, et S et S' d'autre part, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} u_e = (E_{10} + R_{12} i_s) + R_{11} i_e \\ u_s = (E_{20} + R_{21} i_e) + R_{22} i_s \end{cases}}$$

Le schéma équivalent fait clairement apparaître des sources de tensions liées, c'est-à-dire dont la force électromotrice est contrôlée par le courant qui circule dans les bornes opposées du quadripôle.

Copyright © 2007 Dunod.

Les paramètres R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, E_{10} et E_{20} sont identifiés sur les quatre caractéristiques graphiques (entrée, sortie, transfert et réaction). En effet, par un raisonnement similaire à celui mené pour les paramètres conductances :

- $R_{11} = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{df_e}{di_e}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique d'entrée ($u_e = f_e(i_e)$ à $i_s = U_{s0}$) ;
- $R_{12} = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_s}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{df_r}{di_s}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de réaction ($u_e = f_r(i_s)$ à $i_e = U_{e0}$) ;
- $R_{21} = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{df_t}{di_e}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de transfert ($u_s = f_t(i_e)$ à $i_s = U_{s0}$) ;
- $R_{22} = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_s}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{df_s}{di_s}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de sortie ($u_s = f_s(i_s)$ à $i_e = U_{e0}$).

Les forces électromotrices E_{10} et E_{20} intègrent les valeurs des grandeurs électriques, prises au point de fonctionnement autour duquel est faite l'approximation linéaire.

> ***Remarque :*** La représentation d'un quadripôle en paramètres résistances, consiste en une détermination d'un modèle équivalent de Thévenin (figure 4.21) entre ses bornes d'entrée et de sortie.

➤ *Paramètres hybrides*

Certains composants électriques ont un comportement physique qui conduit naturellement aux relations caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} u_e = f_1(i_e, u_s) \\ i_s = f_2(i_e, u_s) \end{cases}$$

Un développement limité de f_1 et f_2 au premier ordre, au voisinage d'un point de fonctionnement $M_0(I_{e0}, I_{s0}, U_{s0}, U_{e0})$ conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_e = U_{e0} + (i_e - I_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} + (u_s - U_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} \\ i_s = I_{s0} + (i_e - I_{e0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} + (u_s - U_{s0}) \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} \end{cases}$$

Après développement, on peut aussi les écrire sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} u_e = E_{10} + H_{11} i_e + H_{12} u_s \\ i_s = J_{20} + H_{21} i_e + H_{22} u_s \end{cases}}$$

Copyright © 2007 Dunod.

où

$$E_{10} = U_{e0} - I_{e0}\left.\frac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} - U_{s0}\left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} \quad ; \quad J_{20} = I_{s0} - I_{e0}\left.\frac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} - U_{s0}\left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0}$$

$$H_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} \quad ; \quad H_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} \quad ; \quad H_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} \quad ; \quad H_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0}$$

Les constantes E_{10}, J_{20}, H_{11}, H_{12}, H_{21} et H_{22} constituent les paramètres caractéristiques du modèle linéaire. Ces paramètres qualifiés de **paramètres hybrides** ne possèdent pas tous la même dimension physique. En effet, H_{11} est homogène à une résistance, H_{22} à une conductance, H_{12} et H_{21} étant sans dimension.

On peut, de manière plus synthétique, exprimer les relations caractéristiques sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_e \\ i_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{[H]} \begin{bmatrix} i_e \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{10} \\ J_{20} \end{bmatrix}$$

Un schéma électrique peut être associé à cette représentation paramétrique (figure 4.22) :

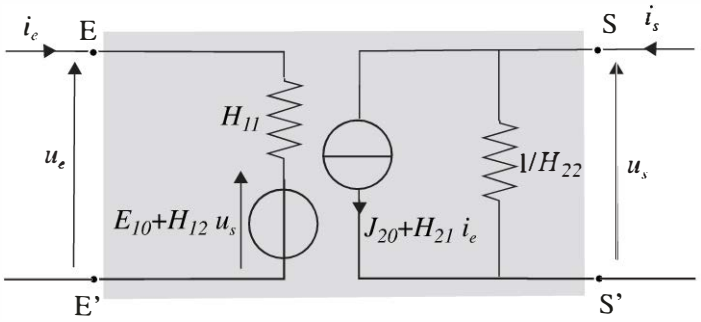


Figure 4.22

En effet, en explicitant les lois d'Ohm sur les résistances H_{11} et $1/H_{22}$ et en appliquant la règle de répartition des tensions entre E et E' et des courants au point S, on obtient :

$$\begin{cases} u_e = (E_{10} + H_{12}u_s) + H_{11}i_e \\ i_s = (J_{20} + H_{21}i_e) + H_{22}u_s \end{cases}$$

Les paramètres H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}, E_{10} et J_{20} sont identifiés sur les quatre caractéristiques graphiques (entrée, sortie, transfert et réaction), on obtient alors :

- $H_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_e}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_e}{di_e}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique d'entrée ($u_e = f_e(i_e)$ à $u_s = U_{s0}$) ;
- $H_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_s}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_r}{du_s}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de réaction ($u_e = f_r(u_s)$ à $i_e = I_{e0}$) ;

Copyright © 2007 Dunod.

- $H_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_e}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_t}{di_e}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de transfert ($i_s = f_t(i_e)$ à $u_s = U_{s0}$) ;
- $H_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_s}\right|_{M_0} = \left.\frac{df_s}{du_s}\right|_{M_0}$ correspond à la pente en M_0, de la caractéristique graphique de sortie ($i_s = f_s(u_s)$ à $i_e = I_{e0}$).

Les paramètres E_{10} et J_{20} intègrent les valeurs des grandeurs électriques prises au point de fonctionnement autour duquel est faite l'approximation linéaire.

> ***Remarque :*** La linéarisation d'un quadripôle sous forme de représentation conductance, consiste en une détermination d'un modèle équivalent de Thévenin entre les bornes d'entrée, et de Norton entre celles de sortie (figure 4.22).

Il existe un autre type de représentation hybride, résultant d'une linéarisation d'équations caractéristiques sous la forme :

$$\begin{cases} i_e = f_1(u_e, i_s) \\ u_s = f_2(u_e, i_s) \end{cases}$$

Un développement limité au premier ordre de celles-ci, au voisinage d'un point de fonctionnement $M_0(I_{e0}, I_{s0}, U_{s0}, U_{e0})$, conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} i_e = J_{10} + K_{11}u_e + K_{12}i_s \\ u_s = E_{20} + K_{21}u_e + K_{22}i_s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} i_e \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ i_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{10} \\ E_{20} \end{bmatrix}$$

Auxquelles est associé le schéma électrique présenté figure 4.23.

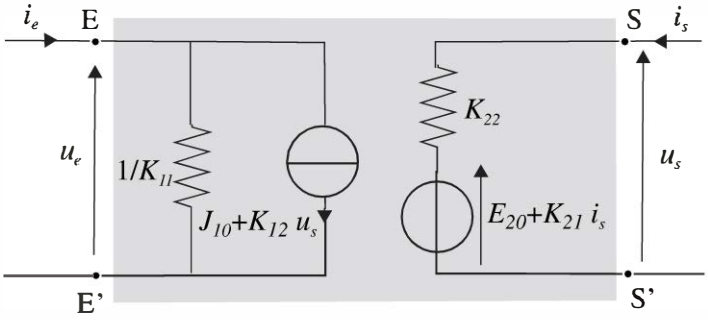


Figure 4.23

Les paramètres caractéristiques K_{11}, K_{12}, K_{21} et K_{22} correspondent respectivement aux pentes des caractéristiques, $i_e = f_e(u_e)$ à $i_s = I_{s0}$, $i_e = f_r(i_s)$ à $u_e = U_{e0}$, $u_s = f_t(u_e)$ à $i_s = I_{s0}$, et $u_s = f_s(i_s)$ à $u_e = U_{e0}$, prise au point M_0.

> ***Remarque :*** Cette dernière représentation consiste en une recherche d'un modèle équivalent de Norton entre les bornes d'entrée et un modèle de Thévenin entre celles de sortie (figure 4.23).

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Relations de passage***

Toutes les relations définissant les différentes représentations qui viennent d'être proposées sont de nature algébrique et linéaire. Il est donc possible d'établir des relations matricielles entre paramètres regroupées dans le tableau 4-1.

Tableau 4.1

	$[G]$	$[R]$	$[H]$	$[K]$
$[G]$	$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} R_{22}/\Delta R & -R_{12}/\Delta R \\ -R_{21}/\Delta R & R_{11}/\Delta R \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/H_{11} & -H_{12}/H_{11} \\ H_{21}/H_{11} & \Delta H/H_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta K/K_{22} & K_{12}/K_{22} \\ -K_{21}/K_{22} & 1/K_{22} \end{matrix}$
$[R]$	$\begin{matrix} G_{22}/\Delta G & -G_{12}/\Delta G \\ -G_{21}/\Delta G & G_{11}/\Delta G \end{matrix}$	$\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta H/H_{22} & H_{12}/H_{22} \\ -H_{21}/H_{22} & 1/H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/K_{11} & -K_{12}/K_{11} \\ K_{21}/K_{11} & \Delta K/K_{11} \end{matrix}$
$[H]$	$\begin{matrix} 1/G_{11} & -G_{12}/G_{11} \\ G_{21}/G_{11} & \Delta G/G_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta R/R_{22} & R_{12}/R_{22} \\ -R_{21}/R_{22} & 1/R_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} K_{22}/\Delta K & -K_{12}/\Delta K \\ -K_{21}/\Delta K & K_{11}/\Delta K \end{matrix}$
$[K]$	$\begin{matrix} \Delta G/G_{22} & G_{12}/G_{22} \\ -G_{21}/G_{22} & 1/G_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/R_{11} & -R_{12}/R_{11} \\ R_{21}/R_{11} & \Delta R/R_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{22}/\Delta H & -H_{12}/\Delta H \\ -H_{21}/\Delta H & H_{11}/\Delta H \end{matrix}$	$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix}$

4.3 MODÉLISATION LINÉAIRE DYNAMIQUE

4.3.1 Position du problème

La connaissance de la structure physique d'un composant électrique peut justifier une modélisation dynamique. Celle-ci est notamment nécessaire pour rendre compte de couplages électriques se manifestant entre courants et tensions lorsque ceux-ci évoluent au cours du temps.

Il s'avère donc nécessaire d'introduire un ensemble de termes différentiels temporels dans l'expression de la relation caractéristique de la structure modélisant le comportement dynamique du composant $f(i,u,t) = 0$. L'établissement d'un modèle linéaire dynamique passe par la définition d'une relation caractéristique de forme différentielle du type :

$$f(i,u,t) = c + a_0\, u + a_1 \frac{du}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_0\, i + b_1 \frac{di}{dt} \ldots + b_n \frac{d^n i}{dt^n} + \ldots = 0$$

L'élément de base qui sert à définir un modèle dynamique linéaire est le dipôle statique linéaire défini au paragraphe précédent. En associant ce dernier à des condensateurs ou inductances, il est alors possible de définir un dipôle équivalent dont l'équation caractéristique est de nature différentielle.

Il sera évoqué dans ce paragraphe des modélisations dynamiques du premier et du second ordre dont l'équation caractéristique sera respectivement d'ordre un et deux. Comme

Copyright © 2007 Dunod.

cela sera largement développé dans la seconde partie de cet ouvrage, toute relation différentielle d'ordre supérieur à deux constitue une association de structures du premier et du second ordre.

4.3.2 Modèles du premier ordre

➤ ***Modèle capacitif***

La présence d'un couplage capacitif entre les extrémités du composant conduit à ajouter au dipôle linéaire statique, un condensateur en parallèle (figure 4.24).

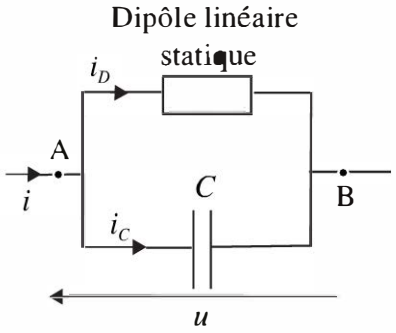


Figure 4.24

La règle de répartition des courants impose :

$$i = i_C + i_D$$

où $i_D = au + b$ et $i_C = C\,\dfrac{du}{dt}$.

Par suite, $\boxed{i = C\,\dfrac{du}{dt} + au + b}$.

Dans la relation caractéristique, il est possible de prendre en compte un comportement dynamique linéaire de la tension (du/dt).

➤ ***Modèle inductif***

La présence d'un effet inductif lors du passage du courant dans la structure du composant conduit à ajouter au dipôle linéaire statique, une inductance en série (figure 4.25).

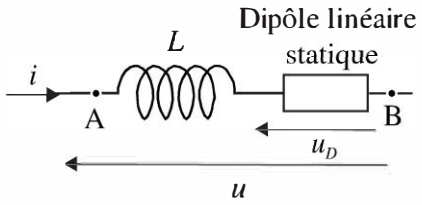


Figure 4.25

La règle de répartition des tensions impose :

$$u = u_L + u_D$$

où $u_D = ai + b$ et $u = L\,\dfrac{di}{dt}$. Par suite, $\boxed{u = L\,\dfrac{di}{dt} + ai + b}$.

Dans la relation caractéristique, on peut prendre en compte le comportement dynamique linéaire du courant (di/dt).

4.3.3 Modèles du second ordre

➤ ***Modèle inductif à effet capacitif***

Pour tenir compte d'un couplage capacitif entre les connexions du composant, tout en traduisant un comportement inductif à l'intérieur de la structure, on utilise l'association représentée figure 4.26.

Copyright © 2007 Dunod.

La règle de répartition des courants impose :

$$i = i_C + i_D$$

où $i_C = C \dfrac{du}{dt}$. De plus, la règle de répartition des tensions impose :

$$u = u_D + L \frac{di_D}{dt}$$

avec $u_D = a\, i_D + b$.

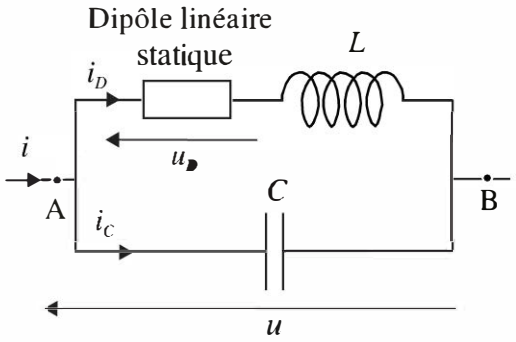


Figure 4.26

Par suite, $u = a\left(i - C\dfrac{du}{dt}\right) + b + L\dfrac{d\left(i - C\dfrac{du}{dt}\right)}{dt}$, d'où l'on déduit la relation caractéristique du dipôle équivalent :

$$\boxed{LC\frac{d^2u}{dt^2} + aC\frac{du}{dt} + u = L\frac{di}{dt} + ai + b}$$

La relation caractéristique prend en compte le comportement dynamique de la tension (du/dt) et du courant (di/dt), mais aussi leur action conjuguée, traduisant des phénomènes de résonance, comme nous le verrons dans la deuxième partie de l'ouvrage.

➤ ***Modèle capacitif à effet inductif***

Pour tenir compte d'un effet inductif inhérent à la longueur de connexions du composant, tout en traduisant un comportement capacitif à l'intérieur de la structure, on adopte l'association représentée figure 4.27.

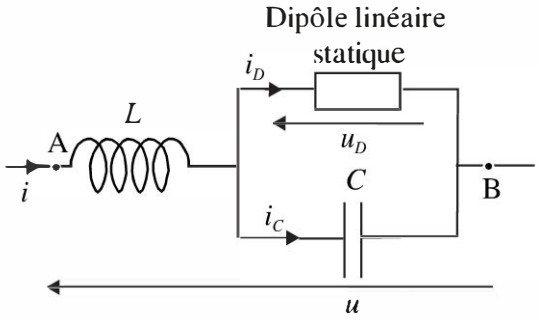


Figure 4.27

La règle de répartition des courants impose :

$$i = i_C + i_D$$

où $i_C = C\dfrac{du_D}{dt}$ et $i_D = a\, u_D + b$, et la règle de répartition des tensions impose :

$$u = u_D + L\frac{di}{dt}$$

On obtient alors $i = C\dfrac{d\left(u - L\dfrac{di}{dt}\right)}{dt} + a\left(u - L\dfrac{di}{dt}\right) + b$, d'où l'on déduit la relation caractéristique du dipôle équivalent :

$$\boxed{LC\frac{d^2i}{dt^2} + aL\frac{di}{dt} + i = C\frac{du}{dt} + au + b}$$

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : Tous les résultats établis dans le cas des configurations dipolaires peuvent être étendus aux quadripôles. On rajoute alors des condensateurs et inductances aux dipôles linéaires statiques, présents sur les différentes représentations paramétriques. Il peut être également utile de rajouter des condensateurs entre bornes d'entrée et de sortie, traduisant des couplages capacitifs.

Pour en savoir plus...

SIMULATION INFORMATIQUE

L'utilisation de modèles **linéaires** pour caractériser le comportement électrique des composants, constitue la première étape dans l'analyse théorique du circuit électrique dans lequel ceux-ci sont placés. Toutefois, ne restituant pas les non linéarités intrinsèques de la plupart des composants, notamment ceux reposant sur une structure semi-conductrice, cette méthode ne permet malheureusement pas de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes observés en pratique.

Une analyse mathématique du comportement de circuits électriques non linéaires s'avère fastidieuse et n'aboutit malheureusement que rarement à une solution analytique. L'outil informatique permet alors d'envisager l'utilisation de modèles **non linéaires**, tant sur un plan statique que dynamique. Il devient alors possible de déterminer, *via* des méthodes de calcul numérique, le comportement électrique de composants non linéaires au sein de circuits électriques.

Programme de simulation

Le comportement électrique d'un composant électrique est décrit à travers une ou plusieurs équations appelées relations caractéristiques. Celles-ci expriment les relations liant les différentes grandeurs électriques (courants, tensions) traduisant l'état électrique du composant. Ces équations, de la forme $f(i,u,t) = 0$, intègrent généralement l'évolution temporelle des grandeurs au cours du temps.

Le processus de simulation du comportement électrique d'un composant, visant à résoudre cette équation à différents instants, repose sur trois étapes (figure 4.28) :

- une **modélisation** du composant en vue d'obtenir une ou plusieurs relations caractéristiques liant les grandeurs électriques ;
- une **discrétisation** de l'évolution temporelle des grandeurs électriques par une procédure d'intégration numérique ;
- une **résolution** de l'équation caractéristique, par processus itératif, débouchant sur la détermination des valeurs des grandeurs électriques à différents instants.

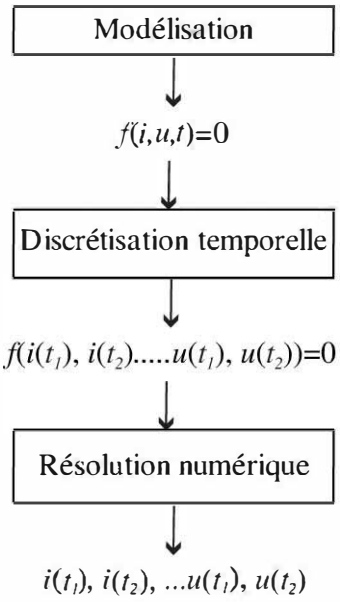


Figure 4.28

Copyright © 2007 Dunod.

Modélisation des composants

Les logiciels de simulation intègrent une bibliothèque de modèles mathématiques décrivant le comportement statique et dynamique de composants élémentaires.

Le tableau 4.2 présente les composants élémentaires conducteurs (tableau 4.2a), et semi-conducteurs (tableau 4.2b), utilisés par le logiciel PSPICE.

Tableau 4.2

Composant	Symbole
Résistance	*RES*
Condensateur	*CAP*
Auto-Inductance	*IND*
Mutuelle Inductance	*CORE*
Interrupteur	*VSWITCH* *ISWITCH*
Ligne de transmission	*TRN*

a)

Composant	Symbole
Diode	*D*
Transistor bipolaire	*NPN* *PNP* *LPNP*
JFET	*NJF* *PJF*
MOSFET	*NMOS* *PMOS*
MESFET AsGa	*GASFET*

b)

À chacun de ces composants est associée une relation caractéristique non linéaire pouvant intégrer, selon la complexité de la structure, jusqu'à plusieurs dizaines de paramètres. Le plus emblématique d'entre eux, est sans nul doute le modèle *D* qui traduit le comportement électrique d'une jonction semiconductrice PN entre deux régions dopées N et P (figure 4.29a). La relation caractéristique d'une telle jonction (dite équation de Shockley) est :

$$i = I_S \left[\exp\left(\frac{u}{nU_T} \right) - 1 \right]$$

Les paramètres du modèle sont le courant inverse de saturation I_s, la tension thermodynamique U_T, et un coefficient n.

La jonction PN est d'une grande importance, car apparaissant dans la structure de nombreux composants électroniques. Un transistor à effet de champ (figure 4.29b) est ainsi réalisé autour d'une jonction, le transistor bipolaire (figure 4.29c) autour de deux, et autour de trois pour le thyristor (figure 4.29d).

Les non-linéarités peuvent aussi être prises en compte sur un plan dynamique. C'est par exemple le cas pour le modèle de condensateur *CAP*, dont la relation caractéristique est de la forme :

$$i = C(1 + VC_1 u + VC_2 u^2) \frac{du}{dt}$$

Copyright © 2007 Dunod.

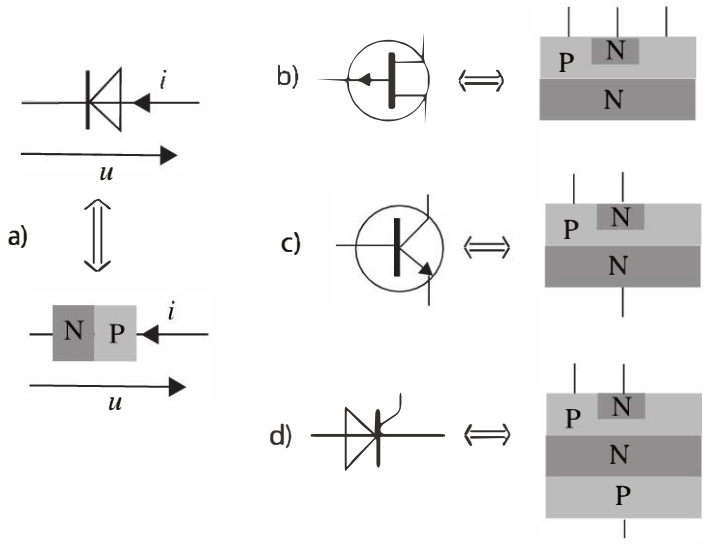


Figure 4.29

Les paramètres caractéristiques du modèle sont le coefficient multiplicateur C, le coefficient linéaire de tension VC_1 et le coefficient quadratique de tension VC_2.

Le logiciel de simulation peut également intégrer l'influence de paramètres non électriques. Ainsi dans le modèle RES de résistance, l'action de la température est prise en considération à travers la relation caractéristique de la forme :

$$u = R(1 + TC_1(T - T_0)(1 + TC_2(T - T_0)^2)i$$

où T_0 désigne une température de référence et T correspond à la température effective de la résistance.

Cependant, la volonté d'obtenir un modèle réaliste conduit, bien souvent, à la définition d'une quantité importante de paramètres, qui implique des temps de simulation très long. Le modèle complet du transistor NMOS intègre jusqu'à 67 paramètres !

Pour pallier cette difficulté, une solution réside dans la définition de plusieurs niveaux de modélisation conduisant à des structures plus ou moins élaborées, traduisant différents aspects du composant. On dispose ainsi de modèles dédiés à certains types de simulations.

Discrétisation temporelle

Une fois le modèle défini, l'étape de simulation du comportement temporel du composant débute par la définition d'un « horizon temporel » correspondant à l'intervalle de temps pendant lequel on désire connaître l'évolution du composant. On réalise ensuite une discrétisation de cet intervalle en définissant des instants (ou « nœuds ») particuliers t_i où seront évaluées les grandeurs électriques.

Pour commencer la simulation, l'utilisateur doit définir un ensemble de valeurs initiales pour les grandeurs électriques, généralement établi par la recherche d'un état d'équilibre statique du composant. Ensuite, une intégration numérique est appliquée à chaque instant t_i, permettant de transformer la relation caractéristique différentielle en simple équation algébrique.

Copyright © 2007 Dunod.

Pour mieux comprendre, prenons le cas d'un condensateur de capacité C où la relation caractéristique est :

$$i = C\,\frac{du}{dt}$$

L'inversion de cette relation permet d'exprimer l'évolution de la tension entre deux instants t_i et t_{i+1} :

$$u(t_{i+1}) = \frac{1}{C}\int_{t_i}^{t_{i+1}} i(t)dt + u(t_i)$$

Le calcul de l'intégrale est généralement réalisé par la « méthode des trapèzes » (figure 4.30). Le principe de cette méthode consiste à assimiler l'évolution du courant à une droite entre les instants t_i et t_{i+1}.

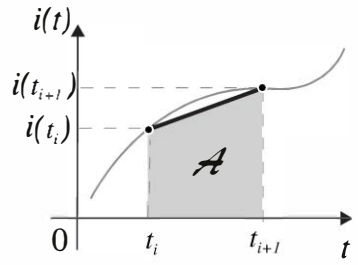


Figure 4.30

Par suite, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} i(t)\,dt$ correspond à l'aire du trapèze ainsi défini :

$$\mathcal{A} = (t_{i+1} - t_i)\left(\frac{i(t_i) + i(t_{i+1})}{2}\right)$$

Par suite, $u(t_{i+1}) = \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{C}\right)\left(\frac{i(t_i) + i(t_{i+1})}{2}\right) + u(t_i)$.

On obtient une équation récursive permettant la détermination de $u(t_{i+1})$ connaissant la valeur de $u(t_i)$.

Résolution numérique

De nombreux modèles de composants reposent sur une relation caractéristique non linéaire. La détermination à chaque instant des valeurs des courants et tensions définissant le point de fonctionnement, n'est donc pas envisageable de manière analytique. Une méthode numérique de nature itérative est donc nécessaire pour parvenir à la résolution de celle-ci.

Pour expliquer son principe, prenons l'exemple (figure 4.31) de la détermination, à un instant t_i, du point de fonctionnement $M(u(t_i),i(t_i))$ d'une diode chargée par un générateur de tension de résistance interne R et de f.é.m. $e(t_i)$.

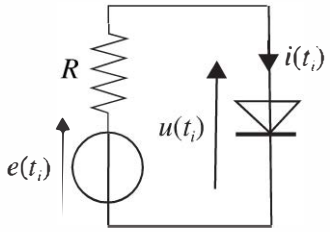


Figure 4.31

À cet instant, la relation caractéristique de la diode passante est donnée par l'équation de Shockley : $i(t_i) = I_S\left[\exp\left(\frac{u(t_i)}{nU_T}\right) - 1\right]$ et la relation caractéristique du générateur de tension est : $u(t_i) = e(t_i) - Ri(t_i)$. La détermination du point de fonctionnement passe donc

Copyright © 2007 Dunod.

par la recherche des zéros de la fonction $f_i(u(t_i)) = \dfrac{u(t_i) - e(t_i)}{R} + I_S\left[\exp\left(\dfrac{u(t_i)}{nU_T}\right) - 1\right]$ qui donnera la valeur de $u(t_i)$ de laquelle nous déduirons celle de $i(t_i)$.

Une technique pour la résolution de cette équation est donnée par la méthode de Newton-Raphson, illustrée sur la figure 4.32.

Soit $u(t_i)^0$ une valeur initiale de $u(t_i)$ et $f_i(u(t_i)^0)$ la valeur de la fonction associée. On assimile localement la courbe, au point d'abscisse $u(t_i)^0$, à la droite de pente égale à la dérivée en ce point $f'(u(t_i)^0)$.

Cette droite coupe donc l'axe des abscisses pour une valeur $u(t_i)^1$ telle que :

$$u(t_i)^1 = u(t_i)^0 - \frac{f(u(t_i)^0)}{f'(u(t_i)^0)}$$

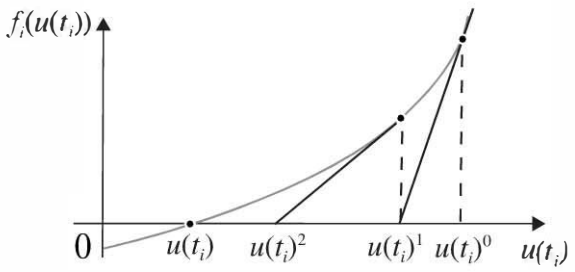


Figure 4.32

On répète alors le même procédé en $f(u(t_i)^1)$ pour obtenir une nouvelle valeur $u(t_i)^2 = u(t_i)^1 - \dfrac{f(u(t_i)^1)}{f'(u(t_i)^1)}$ ... On obtient ainsi à chaque itération, des valeurs de $u(t_i)^k$ de plus en plus proches de la solution $u(t_i)$ attendue. On poursuit ainsi le processus itératif, jusqu'à obtenir la précision requise.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

4.1 Qu'est ce qui différencie le « modèle de connaissance » du « modèle de comportement » ?

4.2 Qu'appelle-t-on « domaine de validité d'un modèle électrique » ?

4.3 En quoi consiste la modélisation statique d'un composant électrique par un dipôle linéaire ? Quel est son domaine de validité ?

4.4 Qu'appelle-t-on dipôle de Norton et dipôle de Thévenin ?

4.5 Comment détermine-t-on les paramètres caractéristiques d'un modèle statique linéaire ?

4.6 Quels éléments électriques est-il nécessaire d'ajouter à un modèle linéaire statique pour traduire un comportement dynamique linéaire ?

4.7 D'où vient le terme de modèle dynamique linéaire du premier ordre ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

4.8 Une diode Zener (figure 4.33a) est un composant semi-conducteur utilisé en électronique pour la régulation de tension. Sa caractéristique graphique est donnée figure 4.33b.

Copyright © 2007 Dunod.

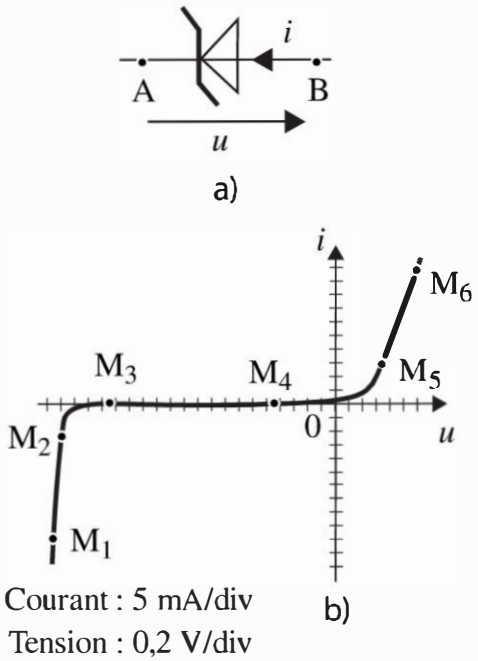


Figure 4.33

Proposer un modèle dipolaire de Thévenin décrivant au mieux le fonctionnement de la diode :

1) Sur le domaine $[M_1,M_2]$.

2) Sur le domaine $[M_2,M_3]$.

3) Sur le domaine $[M_3,M_4]$.

4.9 Il existe deux grandes catégories de transistors : les structures à injection et les structures à effet de champ.

Le fonctionnement d'un transistor bipolaire NPN (figure 4.34a) repose sur un principe d'injection ; un MOSFET canal N (figure 4.34b) exploite un effet de champ.

La caractéristique électrique de sortie du transistor bipolaire ($i_s = f_s(u_s)$ à $i_e =$ Cste) est représentée figure 4.35a. Celle du MOSFET ($i_s = f_s(u_s)$ à $u_e =$ Cste) est représentée figure 4.35b.

La caractéristique électrique de transfert du transistor bipolaire ($i_s = f_t(i_e)$) est une droite (figure 4.36a). Celle du MOSFET $i_s = f_t(u_e)$ est une parabole (figure 4.36b).

Proposer un modèle dipolaire décrivant au mieux le fonctionnement de la sortie de chacun de ces transistors sur le domaine de fonctionnement [*M*1,*M*2].

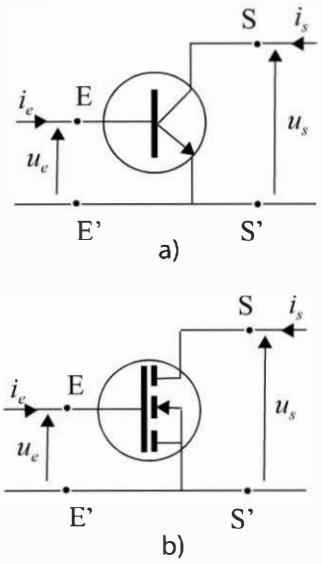


Figure 4.34

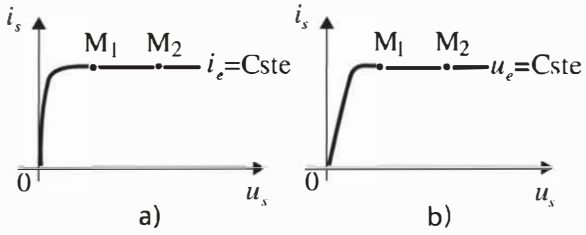


Figure 4.35

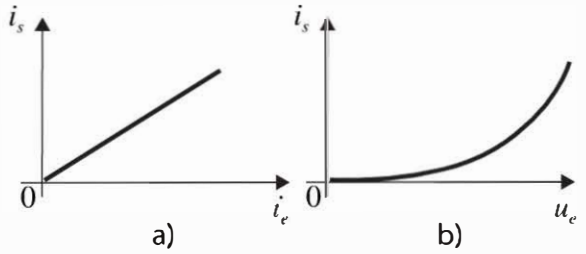


Figure 4.36

4.10 Un câble coaxial est destiné à la visualisation et la mesure de tension sur un dispositif électrique.

Il est constitué d'un fil conducteur central (« l'âme » du câble) enfermé dans une gaine isolante diélectrique, elle-même recouverte d'une tresse métallique (figure 4.37). Une gaine extérieure protège le câble.

Une représentation simplifiée d'une portion de câble de longueur *l* consiste à le modéliser par deux cylindres coaxiaux séparés par un isolant (figure 4.38).

Copyright © 2007 Dunod.

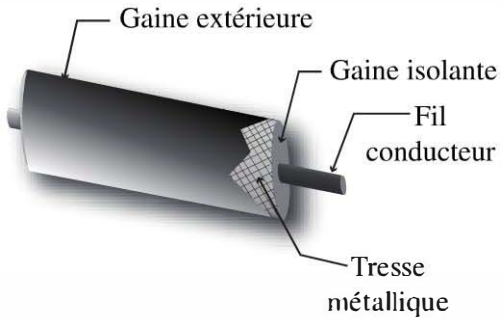


Figure 4.37

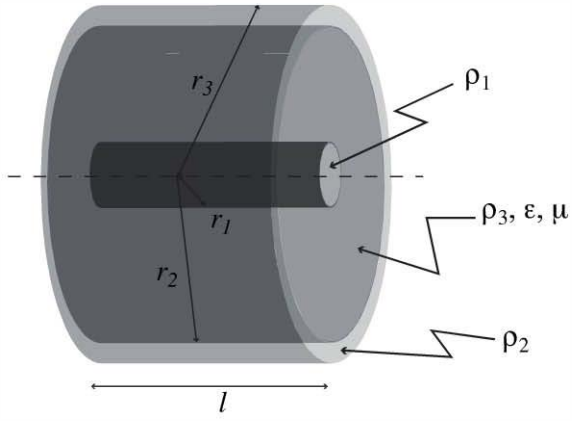


Figure 4.38

L'un correspond à l'âme du câble (rayon r_1, longueur l et résistivité ρ_1). L'autre (rayon interne r_2, rayon externe r_3, longueur l, résistivité ρ_2) figure la présence de la tresse métallique. Le milieu isolant compris entre les deux cylindres figure la présence de la gaine isolante qui possède une permittivité ε, une perméabilité μ et une résistivité ρ_3.

Pour tenir compte de l'influence du câble lors de mesure sur des phénomènes transitoires de courte durée, la portion de câble est modélisée par la structure présentée figure 4.39.

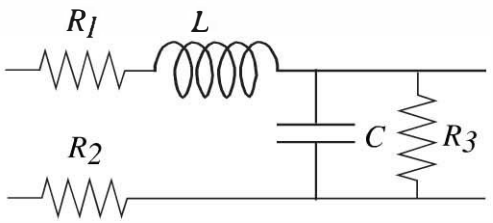


Figure 4.39

1) Donner l'origine physique des paramètres caractéristiques R_1, R_2, R_3, C et L.

2) Déterminer l'expression des résistances R_1, R_2 et R_3, du coefficient d'auto-induction L et de la capacité C.

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

Étude des circuits électriques

PARTIE 2

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 5

Caractérisation et mise en équation

Objectifs

- Présenter les différentes représentations des circuits électriques.
- Présenter les inconnues dans les circuits électriques.
- Introduire la notion de systèmes d'équations, associés au schéma électrique.
- Introduire un modèle d'analyse des circuits sous la forme d'un graphe.
- Donner les règles de transformation d'un schéma électrique.
- Donner les règles d'écriture des équations : les lois de Kirchhoff.
- Présenter les régimes transitoire et permanent.
- Présenter les différents régimes de fonctionnement permanent.
- Bâtir un organigramme d'étude des circuits électriques.

Vocabulaire

Circuit électrique
Schéma électrique
Graphe, graphe connexe
Sous-graphe
Réseau connexe
Arbre, arbre couvrant
Nœuds, branches, mailles, boucles
Branche généralisée
Fils électriques, de connexion, d'interconnexion
Points de connexion
Équation homogène
Ordre d'une équation différentielle
Conditions initiales
Régime libre – Régime forcé
Régime transitoire – Régime permanent
Régime permanent continu (RPCC)
Régime permanent alternatif (RPCA)
Superposition des régimes permanents
Études différenciées

Ce chapitre apporte les éléments de base à la compréhension des représentations du circuit électrique et propose un algorithme d'étude des circuits. Le circuit électrique, assemblage de composants électriques, possède une représentation graphique et mathématique. Le schéma électrique est une représentation plane d'un circuit électrique physique, parfois très volumineux et permet d'établir un graphe associé. La représentation mathématique permet, à partir de son système d'équations bâti autour du graphe, d'effectuer des calculs sur les grandeurs du circuit électrique. L'étude du circuit électrique peut être menée en régime transitoire ou en régime permanent : cette distinction est fondamentale, car elle conditionne les méthodes d'études développées dans les chapitres qui suivront.

Copyright © 2007 Dunod.

5.1 INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

5.1.1 Le circuit électrique et ses représentations

Un circuit électrique comporte en général, au moins un générateur (source d'énergie) des composants (récepteurs) électriques et des fils électriques (figure 5.1).

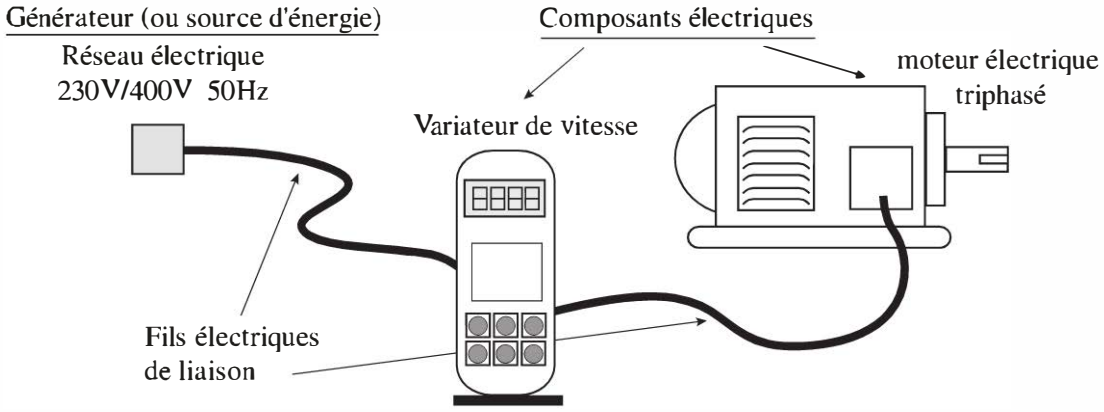


Figure 5.1

Il est très rare qu'un circuit électrique dans un système électrique réel ne comporte qu'une seule source. De même, il est fréquent de voir dans un circuit une multitude de sources de **nature différente**. La nature des sources d'énergie traitées dans cet ouvrage sera continue, sinusoïdale, périodique[1] ou transitoire, car la très grande majorité des circuits électriques intègre de telles sources.

Dans le circuit électrique, les récepteurs électriques les plus simples sont les résistances (R_i), les inductances (L_i) et les condensateurs (C_i). Les composants électriques plus complexes sont toujours modélisables sous la forme d'une association de dipôles élémentaires, dont les arrangements et les valeurs dépendent du contexte immédiat dans lequel est utilisé le circuit ; la première partie de cet ouvrage a largement développé la notion de modélisation, qui s'applique aussi au champ des composants non linéaires.

Les fils électriques sont en général considérés dans les circuits électriques comme des conducteurs idéaux, servant à conduire le courant entre les différents dipôles sources et charges. Cette hypothèse est forte, car elle implique que les fils électriques reliés entre eux sont équipotentiels. Dans la réalité, il convient parfois d'ajouter au schéma électrique un modèle dipolaire propre aux fils électriques de liaison, car ceux-ci peuvent être de longueur importante ou possèdent une géométrie particulière.

> ***Remarque :*** Les **interrupteurs** sont considérés en première approche comme des fils électriques qui ont deux états, ouvert ou fermé. Dans chacun de ces états, les interrupteurs possèdent les propriétés des fils électriques : mêmes potentiels entre les bornes si l'interrupteur est fermé, et potentiels différents si l'interrupteur est ouvert.

[1] Un signal périodique de période T est un signal qui reproduit indéfiniment son amplitude définie dans l'intervalle $[0, T]$. Dans cet intervalle l'amplitude peut être quelconque.

Copyright © 2007 Dunod.

D'après ce qui précède, un circuit électrique est défini comme un ensemble de dipôles passifs ou actifs, reliés par des fils électriques.

La fonction des circuits électriques n'est pas facilement identifiable, car chaque circuit est unique et peut être utilisé dans des domaines très différents. Toutefois, il est possible de distinguer des catégories de fonctions.

– Échange d'énergie entre des sources et des récepteurs, par exemple pour produire de la chaleur, des mouvements mécaniques, des ondes électromagnétiques…
– Transfert d'énergie entre des sources de même nature ou de nature différente, par exemple entre le réseau d'alimentation nationale 50Hz et des batteries d'accumulateurs.
– Pour transporter l'énergie : cas des réseaux électriques nationaux et internationaux, cas des répétiteurs sous-marins…
– Transformation du signal provenant d'une source, pour l'amplifier (les amplificateurs HI-FI, HF) pour en extraire ou en « réjecter » une partie (filtres harmoniques)…
– Association des signaux provenant de sources différentes, par exemple pour réaliser un multiplexage temporel ou fréquentiel dans le domaine des télécommunications…
– …

Bien que les circuits électriques aient des formes différentes et assurent des fonctions différentes, il convient d'avoir un référentiel commun pour les représenter. Il existe plusieurs représentations pour un même circuit électrique, chacune visant des objectifs différents.

Il est commode de représenter le circuit électrique par un dessin : le **schéma électrique**, qui constitue la **représentation graphique** du circuit électrique. Il en existe d'autres : la **représentation mathématique** (systèmes d'équations, matrices) la **représentation fonctionnelle** (analyse fonctionnelle, analyse systémique)…

La représentation graphique, par le schéma électrique, vise à décontextualiser le circuit électrique et le rendre plus facile à analyser, à manipuler mentalement. Ce schéma électrique est construit à partir d'un modèle des composants électriques du circuit (figure 5.2).

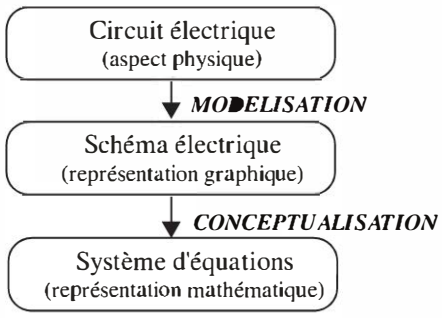


Figure 5.2

La représentation mathématique est en revanche une conceptualisation du circuit électrique qui autorise des calculs, débouchant sur la détermination des grandeurs électriques internes, ou permet encore le dimensionnement d'éléments du circuit électrique. La représentation mathématique est issue du schéma électrique.

5.1.2 Le schéma électrique comme une représentation graphique

Un même circuit électrique comporte plusieurs représentations graphiques. Toutes sont des schémas électriques, dont chacun possède des qualités différentes et s'adresse en général à un public différent : installateur, concepteur, personnel de maintenance, ingénieur fiabilité…

Copyright © 2007 Dunod.

Par exemple, les électrotechniciens utilisent surtout les schémas électriques multifilaires ou unifilaires, tandis que les électroniciens utilisent principalement les schémas électriques développés.

➤ *Schéma électrique multifilaire et unifilaire*

Le **schéma électrique multifilaire** représente par des pictogrammes, l'ensemble des composants électriques du circuit électrique, puis par un trait, chacun des fils électriques (figure 5.3). Le chemin de câble doit figurer sur le dessin, en empruntant en général le chemin physique des canalisations électriques in situ ; les conducteurs sont regroupés par appareil électrique alimenté ; les liaisons et les raccordements sont précisés.

Dans cette représentation sont indiqués :

– les longueurs des fils ;
– les sections des fils ;
– les parcours à l'échelle du bâtiment ou l'armoire ;
– les repères des fils, leur numérotation ;
– le raccordement des fils aux appareils ;
– …

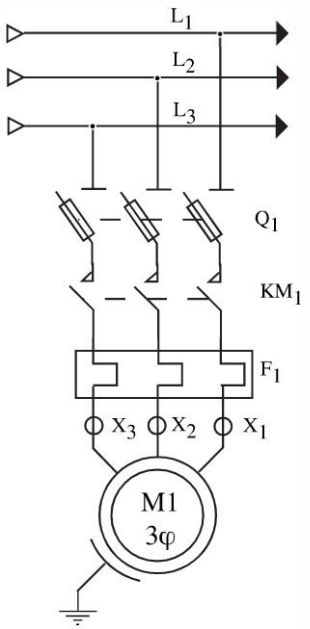


Figure 5.3

Ce schéma est l'outil le plus approprié pour un installateur, car il lui permet de câbler un bâtiment ou une armoire électrique en ayant immédiatement sous les yeux la géométrie physique du parcourt des câbles, ainsi que le câblage de chacun des fils.

Le schéma électrique unifilaire a les mêmes caractéristiques que le schéma multifilaire, mais sur ce dernier sont rassemblés sous un même trait les fils électriques de la phase, du neutre et de la terre. Le dessin est ainsi allégé et devient plus pratique à utiliser pour un installateur. Le trait possède en général un « label », un commentaire pour regrouper ses propriétés telles que le nombre de fils, la section…

➤ *Schéma électrique développé*

Le **schéma électrique développé** (figure 5.4), contrairement aux deux précédents schémas, fait apparaître pour chaque appareil l'ensemble de ses fils de connexion, sans se soucier de la répartition spatiale des câbles. Chaque trait symbolise un conducteur d'interconnexion parfait, équipotentiel. Ce type de schéma est destiné à la compréhension du fonctionnement et au dimensionnement des composants.

Si ce schéma ne prend pas en compte les contraintes mécaniques (dimensions, câblage)

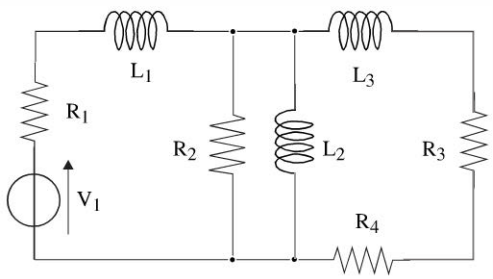


Schéma électrique développé, par phase, d'un moteur électrique triphasé asynchrone à partir de son modèle en régime permanent

Figure 5.4

Copyright © 2007 Dunod.

il rassemble cependant le détail de l'ensemble des éléments électriques, en intégrant les modèles équivalents des appareils.

Dans la suite de l'ouvrage, les circuits électriques seront tous représentés sous la forme de leurs schémas électriques développés.

La réalisation d'un schéma électrique à partir d'un circuit électrique nécessite un ensemble de règles de l'art. Nous recommandons vivement aux lecteurs scrupuleux de consulter des ouvrages techniques spécifiques qui indiquent avec précision la représentation de chacun des composants électriques, la manière de les agencer, ainsi que le principe de numérotation des éléments du schéma.

Dans la suite de cet ouvrage, tous les schémas respecteront les quelques règles élémentaires suivantes (figure 5.5) :

– privilégier une représentation « planaire » où les fils ne se coupent pas ;
– respecter une même symbolisation pour les principaux dipôles électriques ;
– placer un point de connexion, pour représenter le lien physique entre plusieurs fils de même potentiel (les fils électriques) ;
– faire figurer la notion de fil dessus ou fil dessous, si nécessaire, pour tout croisement de fils de potentiel différent, en créant une rupture de ligne pour le fil dessous ;
– privilégier la position verticale ou horizontale dans le placement des symboles des dipôles et des lignes de liaison électrique.

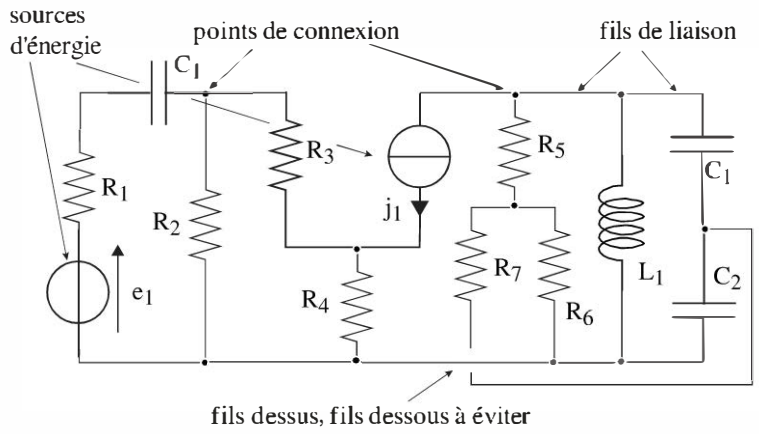


Figure 5.5

5.1.3 Un système d'équations comme représentation mathématique

Le schéma électrique, utilisé comme moyen de représentation du circuit électrique, est aussi l'élément à partir duquel la représentation mathématique peut être mise en place. Celle-ci, à partir d'équations, confirmera la véracité du modèle du circuit en retrouvant les valeurs des tensions et courants mesurés expérimentalement, et permettra la définition des éléments inconnus.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Courants dans les dipôles, les inconnues du circuit***

L'exemple du circuit électrique de la figure 5.6 permet d'énoncer des résultats remarquables, généralisables et qui seront largement utilisés dans cet ouvrage.

Soit le circuit électrique élémentaire (figure 5.6a) constitué d'une résistance R en série avec une source de tension continue U. Les valeurs de U et R sont connues : $U = 10$ V et $R = 10\ \Omega$.

À partir de la **loi d'Ohm** (voir partie 1 de l'ouvrage), on détermine aisément le courant électrique I qui circule dans la résistance R : $U = RI$, d'où $I = \dfrac{U}{R} = 1$ A.

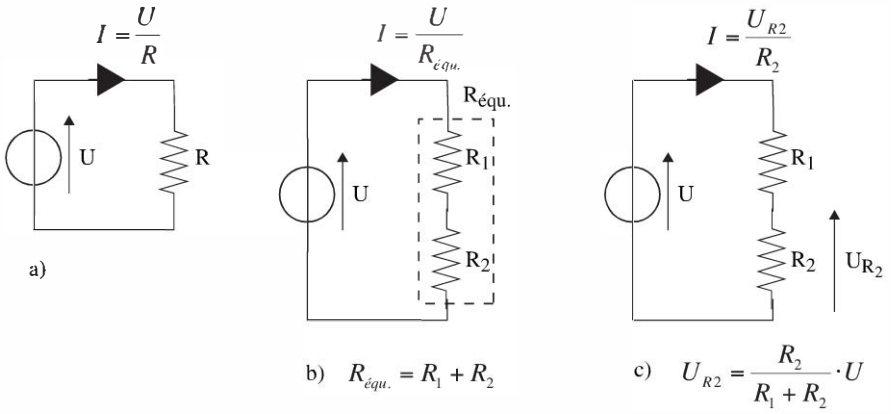


Figure 5.6

En plaçant dans le circuit électrique précédent une deuxième résistance connue $R_2 = 40\ \Omega$ en série avec la première $R_1 = 10\ \Omega$ ((figure 5.6b) le courant électrique I ne possède plus la même valeur ; le circuit électrique est différent. Le courant I ne peut plus être déterminé directement à partir de la loi d'Ohm, car les tensions aux bornes des résistances sont inconnues.

Pour déterminer la nouvelle valeur du courant électrique, il convient de connaître de nouvelles règles, complémentaires de la loi d'Ohm.

Par exemple, on peut utiliser la règle d'**association des résistances** (voir partie 1) qui annonce que la mise en série de deux résistances conduit à une résistance unique équivalente, dont la valeur est égale à la somme des valeurs des deux résistances, $R_{équ.} = R_1 + R_2$. Le circuit peut alors être transformé pour reprendre la forme du schéma électrique de la figure 5.6a, mais avec cette fois $R = R_1 + R_2 = 50\ \Omega$, dans lequel l'application de la loi d'Ohm donne directement l'expression du nouveau courant $I = \dfrac{U}{R_{équ.}} = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}2$ A.

> ***Remarque :*** I étant calculé, toutes les tensions aux bornes des résistances deviennent connues, $U_{R1} = R_1 I = 2$ V et $U_{R2} = R_2 I = 8$ V.

Pour déterminer I, on peut utiliser une autre méthode basée sur la connaissance à priori de la règle du **pont diviseur de tension** (figure 5.6c). Avec cette règle, on détermine directement la tension aux bornes de la résistance R_2, $U_{R2} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} U = 8$ V, qui conduit à la

Copyright © 2007 Dunod.

détermination du courant I par application de la loi d'Ohm : $U_{R2} = R_2 I$, d'où : $I = \dfrac{U_{R2}}{R_2}$

$= \dfrac{R_2 U}{R_1 + R_2} \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}2$ A.

Cet exemple a permis de montrer que, dans les circuits des figures 5.6a et 5.6b, le courant électrique I dans les dipôles U, R, R_1, R_2 est l'inconnue principale ; la seule détermination de I induit la valeur des tensions inconnues U_{R1} et U_{R2}.

De même, cet exemple souligne un autre résultat important : il existe plusieurs méthodes, plus ou moins astucieuses, pour déterminer la valeur de l'inconnue I.

Ces deux résultats se généralisent. Un circuit électrique formé de n dipôles connus, possède les n courants des n dipôles comme inconnues ; la détermination de ces n courants permet de déterminer toute tension dans le circuit électrique.

Toutefois, en général le nombre des courants inconnus dans un circuit électrique est bien plus faible que le nombre de dipôles.

Le circuit électrique de la figure 5.7 est une illustration de cette remarque.

Les caractéristiques des six dipôles élémentaires E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R_4 étant connues, les inconnues seraient les six courants dans les dipôles. Toutefois, les courants dans des dipôles en série étant identiques, la connaissance de l'un implique la connaissance de l'autre : E_1 et R_1 ont le même courant I_1, E_2 et R_2 le même courant I_2, ainsi que R_4 et R_3 le même courant I_3. Le nombre de courants indépendants inconnus se réduit alors aux trois courants I_1, I_2 et I_3.

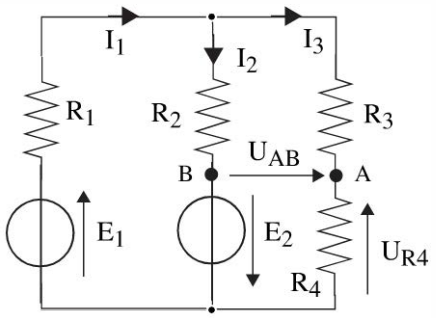


Figure 5.7

On comprend qu'une fois ces trois courants connus, l'application de la loi d'Ohm dans chaque dipôle permet la détermination des tensions aux bornes de chacun des dipôles passifs : $U_{R1} = R_1 I_1$, $U_{R2} = R_2 I_2$, $U_{R3} = R_3 I_3$ et $U_{R4} = R_4 I_3$.

De même, toute tension dans le circuit devient parfaitement connue. Par exemple, la tension entre les points A et B, $U_{AB} = U_{R4} + E_2 = R_4 I_3 + E_2$ est entièrement définie.

➤ *Système d'équations associé au circuit*

Comme l'a montré le paragraphe précédent, la détermination des courants inconnus dans les dipôles résulte de la résolution d'un système d'équations algébriques.

Le nombre d'équations du système est fonction du nombre de dipôles contenu dans le circuit, mais est aussi fonction de l'architecture d'interconnexion des dipôles.

Pour des circuits électriques importants, le processus de mise en équation doit être systématisé, car sinon il n'est pas sûr que toutes les équations soient écrites, et surtout il est impératif que celles trouvées soient indépendantes. On rappelle que seule la résolution d'un système d'équations linéaires indépendantes conduit à une solution non nulle.

Copyright © 2007 Dunod.

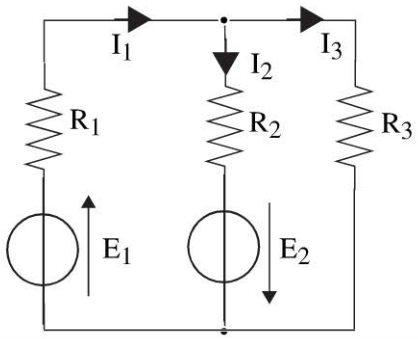
Pour un circuit donné, le système d'équations n'est pas unique. Toutefois, tous les systèmes d'équations associés au même circuit conduisent heureusement à des valeurs de courants identiques ; ce qui prouve qu'ils sont mathématiquement dépendants.

Il existe une relation biunivoque entre le circuit électrique (contenu et architecture) et son système d'équations indépendantes. Le système d'équations est donc une représentation mathématique du circuit électrique comme le schéma électrique est une représentation graphique du circuit électrique.

Dans l'exemple, à la figure 5.8, les deux systèmes d'équations algébriques différents, *A* et *B*, représentent mathématiquement le même circuit électrique. Tous deux conduisent à une solution unique pour les trois courants I_1, I_2 et I_3.

Système d'équations A

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \\ E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 \end{cases}$$



Système d'équations B

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 \\ -E_2 = -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\cdot E_1 - R_3 \cdot E_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \qquad I_2 = \frac{R_3 \cdot E_1 - (R_1 + R_3)\cdot E_1}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \qquad I_3 = \frac{R_2 \cdot E_1 - R_1 \cdot E_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

Figure 5.8

Un circuit électrique possède une représentation mathématique sous la forme d'un système d'équations indépendantes. Le système d'équations n'est pas unique, mais tous conduisent heureusement au même résultat.

La méthodologie de **mise en équation organisée** des circuits électriques est basée sur la notion de **graphe orienté**, où chaque circuit électrique est vu comme un graphe comportant des **nœuds** et des **branches**.

La **théorie des graphes** appliquée aux circuits électriques engendre un certain nombre de résultats remarquables : le nombre d'équations à rechercher, la nature des équations et la localisation des équations à écrire. Le paragraphe suivant (§ 5.2) présente les éléments importants de la théorie des graphes, utiles pour les circuits.

Pour mettre en équations les circuits, des règles d'écriture sont nécessaires. Pour cela, en 1845, G. Kirchhoff propose une méthodologie qui permet d'écrire les équations ; celle-ci est rapidement devenue une référence incontournable.

5.2 THÉORIE DES GRAPHES APPLIQUÉE AUX CIRCUITS

5.2.1 Notion de graphe orienté, connexe

➤ ***Graphe, nœuds et branches***

C'est lors de sa promenade quotidienne dans la ville de Königsberg (figure 5.9a) qu'Euler pose le problème qui est sans doute à l'origine de la célèbre **théorie des graphes**.

Copyright © 2007 Dunod.

Cette promenade l'entraînait à parcourir les sept ponts qui enjambent la rivière de la ville (figure 5.9b) ; il cherche à raccourcir la longueur de son chemin, en ne parcourant qu'une seule fois chacun des sept ponts.

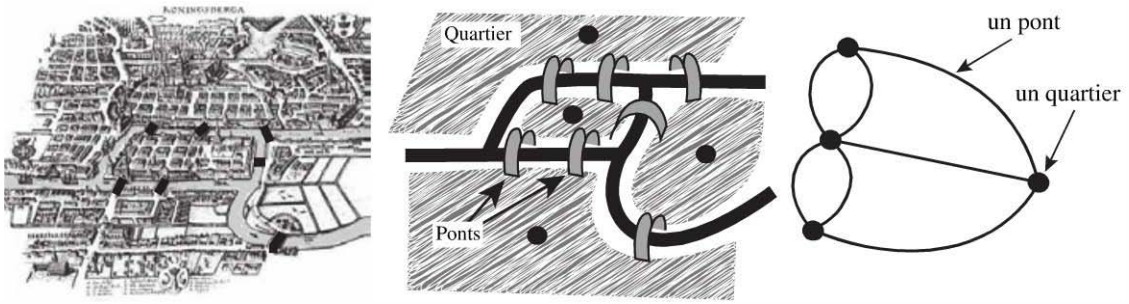
Pour résoudre son problème, Euler crée un **graphe** (figure 5.9c) qui englobe un ensemble d'objets (les quartiers) et leurs relations (les ponts). Les objets (figure 5.9c) sont représentés par des points (ou des **nœuds**) et les relations entre les objets par des arcs (ou des **branches**).

Malheureusement, ce chemin idéal ne put être trouvé, car comme il l'a montré, il aurait fallu que chaque quartier reçoive un nombre pair de ponts ; on arrive par un pont, on ressort du quartier par un autre, il doit donc y avoir autant d'entrées que de sorties, d'où un nombre pair de ponts autour des quartiers.

Leonhard Euler (1707-1783)



L'illustre mathématicien et physicien suisse du XVIIIe, Leonhard Euler, est né à Bâle. Il est considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Pourtant aveugle à la fin de sa vie, il produit pratiquement la moitié de ses travaux durant cette période.



a) Schéma de la ville de Königsberg b) Schéma simplifié c) Graphe associé

Figure 5.9

Un graphe (figure 5.10a) est défini comme un ensemble de nœuds et de branches. On notera n le nombre de nœuds et b le nombre de branches. n est aussi l'ordre du graphe.

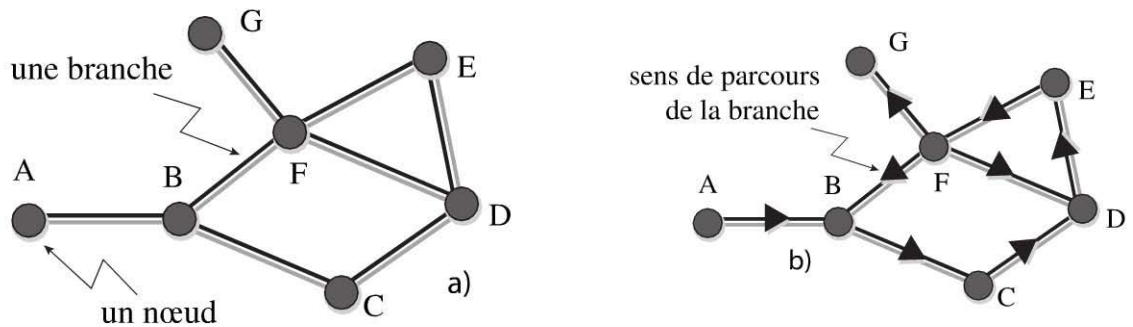


Figure 5.10

Un **graphe orienté** (figure 5.10b) est un graphe particulier qui possède toutes ses branches dirigées, avec un sens de parcours symbolisé par une flèche.

Copyright © 2007 Dunod.

Un **sous-graphe** (figure 5.11a) est un sous-ensemble du graphe sans certains nœuds. Un **graphe partiel** (figure 5.11b) est un sous-ensemble du graphe sans certaines branches.

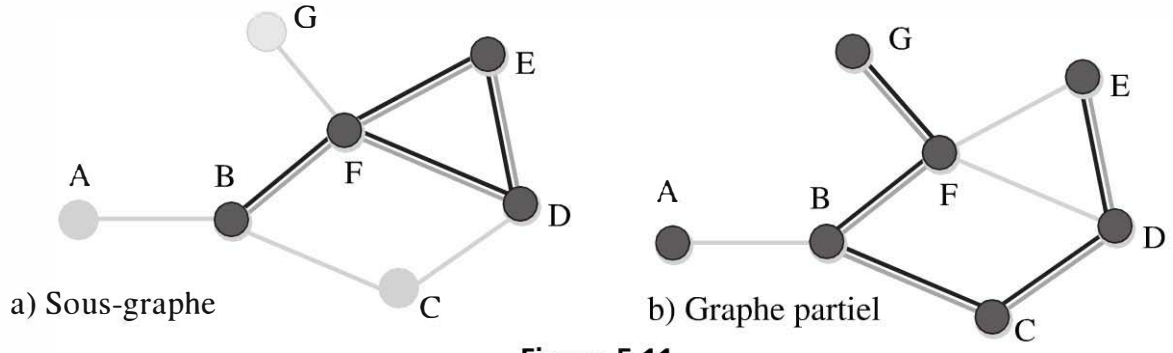


Figure 5.11

➤ ***Chemin, maille, boucle et graphe connexe***

Un **chemin** est un ensemble de nœuds tel qu'il existe une branche entre chaque nœud successif. La longueur du chemin est le nombre de branches qu'il parcourt. Un **chemin simple** est un chemin qui parcourt une seule fois chaque branche ; le **chemin élémentaire** visite une seule fois chacun de ses sommets.

Une **maille** est un chemin simple qui part et revient sur le même nœud. Une boucle est une maille à une seule branche. Une boucle s'appuie sur le nœud auquel la branche est incidente.

Le graphe de la figure 5.12 est ainsi un graphe qui contient par exemple le chemin (A, B, G, D, E, F, F, D, C) qui inclut la maille (D, E, F, D) et la boucle (F, F) incidente au nœud F.

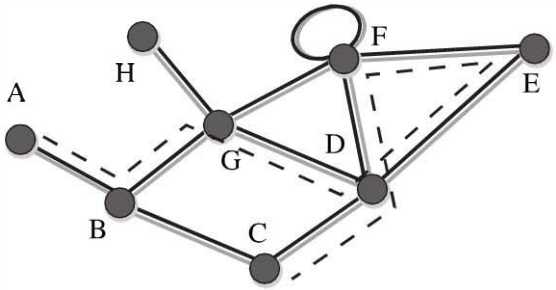


Figure 5.12

Pour qu'un graphe soit un **graphe connexe**, il faut qu'il existe toujours un chemin entre deux nœuds quelconques (figure 5.13). Un graphe connexe a au moins $n - 1$ branches.

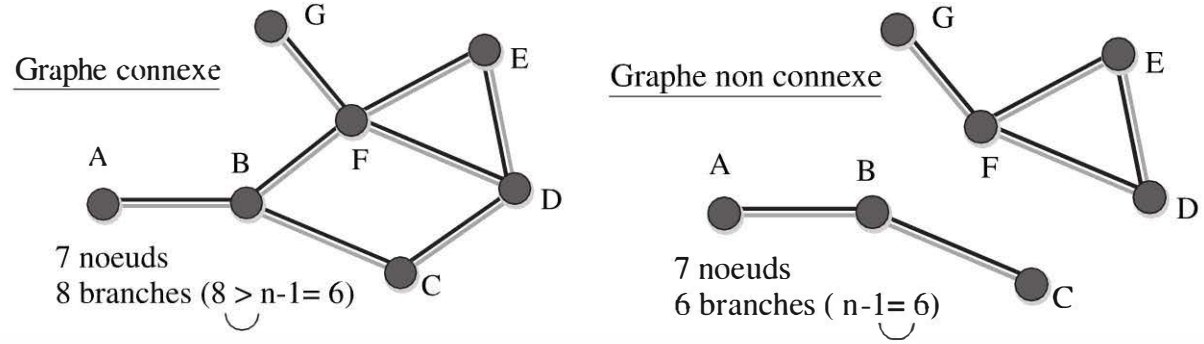


Figure 5.13

➤ ***Arbre et coarbre associé***

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne possède aucune maille (figure 5.14a). Un arbre d'ordre n possède $n - 1$ branches. Le **coarbre** associé à un arbre est l'ensemble des branches et des nœuds qui n'appartient pas à l'arbre.

Copyright © 2007 Dunod.

Un graphe dont le degré de ses sommets est au moins égal à deux, possède au moins un arbre. Dès qu'une branche du coarbre est ajoutée à un **arbre couvrant** (arbre qui possède les *n* nœuds du circuit) alors apparaît une maille (figure 5.14b).

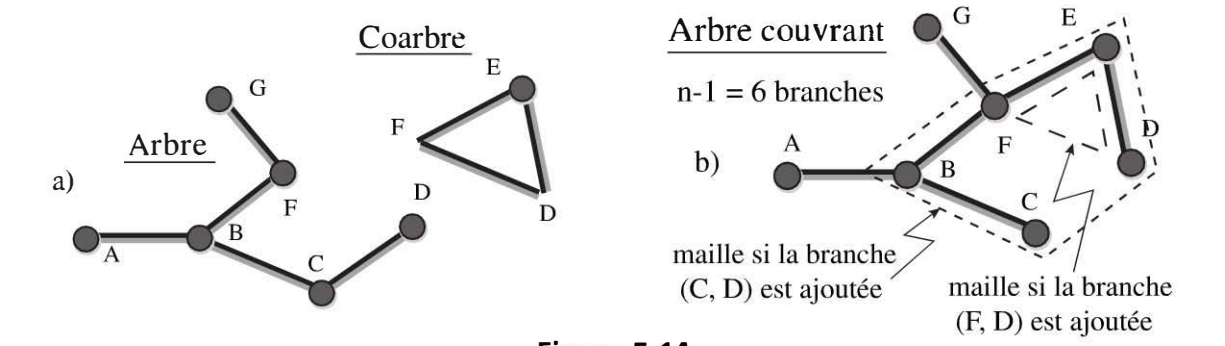


Figure 5.14

➤ ***Réseau, capacité et coupe***

Un **réseau** est un graphe orienté dans lequel toutes les branches ont, en plus d'un sens de parcourt, une **capacité** positive. La capacité d'une branche est l'équivalent d'un débit qui circule à travers la branche (figure 5.15a).

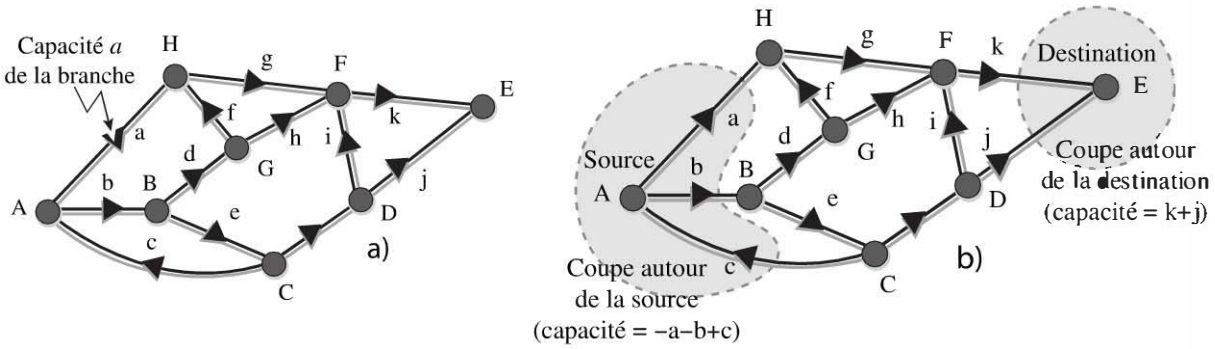


Figure 5.15

Une **coupe** est un ensemble de branches qui déconnecte la source de la destination (figure 5.15b). La capacité de la coupe correspond à la somme algébrique des capacités des branches de la coupe.

5.2.2 Le schéma électrique est un réseau connexe

Après avoir établi le vocabulaire et les propriétés des graphes, nous allons montrer qu'un schéma électrique est un élément qui appartient à l'ensemble des applications de la théorie des graphes et qui en possède donc les propriétés.

➤ ***Nœuds d'un schéma électrique***

Dans le schéma électrique associé au circuit, on définit (figure 5.16) :

– un **fil électrique** : conducteur électrique parfait assurant la circulation du courant électrique sans différence de potentiel à ses bornes ;

– un **fil de connexion** : fil électrique partant de l'extrémité d'un dipôle ;

Copyright © 2007 Dunod.

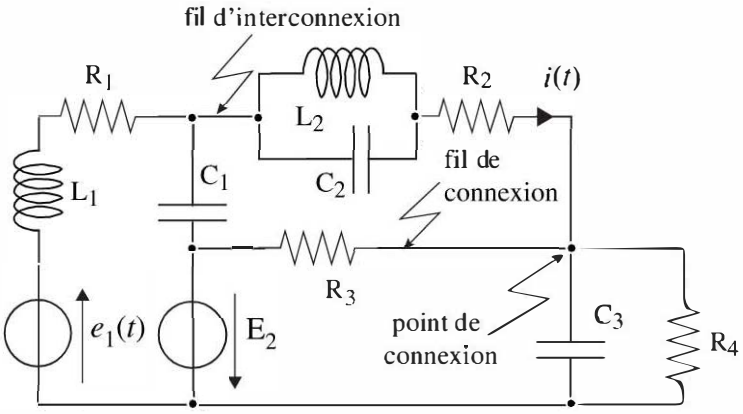


Figure 5.16

– un **point de connexion** : un point de rassemblement entre des fils de connexion, tous de même potentiel électrique ; à travers un point de connexion, les charges électriques circulent, mais ne sont pas stockées ;

– un **fil d'interconnexion** : fil électrique entre deux points de connexion ;

– la **frontière** d'un nœud : limite qui encercle les points de connexion, les fils d'interconnexion ; seuls les fils de connexion traversent la frontière.

On définit un nœud comme le lieu de rassemblement de tous les fils électriques qui ont même potentiel électrique.

Pour un circuit électrique volumineux, un nœud comprend en général des fils de connexion, des points de connexion et des fils d'interconnexion (figure 5.17).

Les notions d'électrocinétique, étudiées en première partie de l'ouvrage, ont montré que, si tous les éléments d'un nœud assurent la circulation des charges électriques dans les fils, ils n'ont toutefois pas le pouvoir de les stocker.

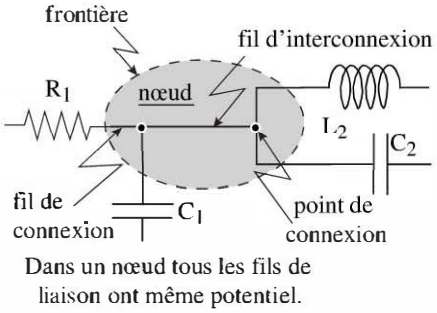


Figure 5.17

Les courants électriques qui arrivent en chaque nœud, en traversant sa frontière, ont une somme algébrique nulle (figure 5.18) car le courant est conservatif. Chaque coupe (réunion de frontières) possède alors une capacité nulle.

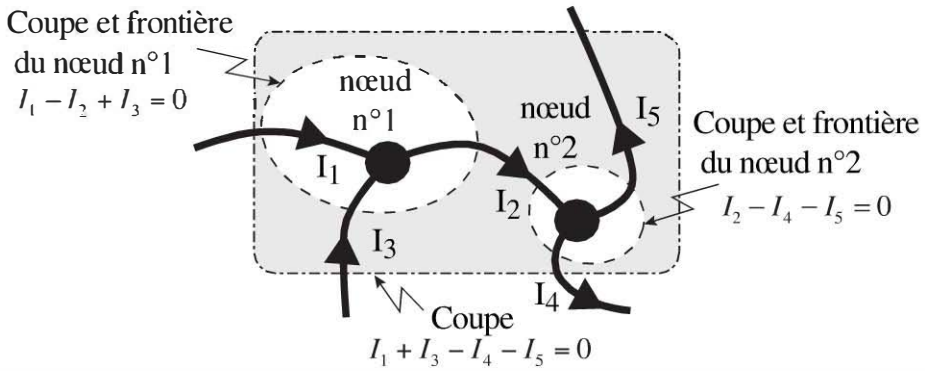


Figure 5.18

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Branches d'un schéma électrique*

À chaque nœud du schéma électrique correspond un potentiel électrique différent. Entre toute paire de nœuds, il existe alors une tension parfaitement définie.

La liaison entre deux nœuds du circuit est assurée par un élément dans lequel circule un courant électrique et aux bornes duquel existe la tension entre nœuds. L'élément de liaison entre deux nœuds est naturellement un dipôle électrique.

> Les dipôles, dans lesquels circulent les courants électriques, sont les branches du graphe. La capacité d'une branche du graphe est le courant circulant dans le dipôle.

➤ *Dipôles en série – Ordre du graphe*

Par définition, un point de connexion entre seulement deux dipôles fait apparaître un nœud, car il relie deux extrémités de branches (le degré du nœud est alors égal à deux). Les deux dipôles forment alors deux branches. Les courants dans chacune d'elles ont alors des noms différents.

L'association en série de d dipôles conduit à $d - 1$ nœuds ; le même courant électrique, traversant les d dipôles, porte d noms différents (figure 5.19).

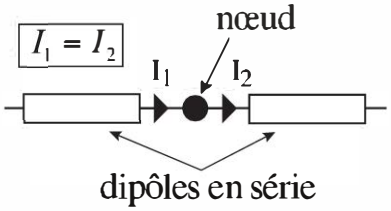


Figure 5.19

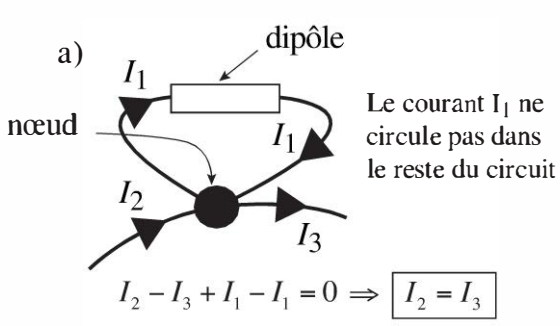
Les inconnues dans les circuits étant les courants, la représentation mathématique de l'association série comporte alors d inconnues supplémentaires.

Pour réduire la formulation mathématique et parce que chacun sait que le courant traversant une association série est identique, nous choisissons de définir la notion de nœud dans les circuits électriques, comme l'intersection entre trois extrémités de branches ; le degré d'un nœud électrique est au moins égal à trois.

> Dans un circuit électrique, un nœud possède un degré supérieur ou égal à trois. Les branches du graphe sont formées par l'ensemble des dipôles incidents aux nœuds du graphe, de degré égal ou supérieur à trois.

➤ *Branche particulière : la boucle*

Dans une boucle, la branche est incidente au même nœud : le courant électrique entre et ressort dans le même nœud. Il n'y a donc pas de partage du courant avec les autres branches du circuit (figure 5.20a).



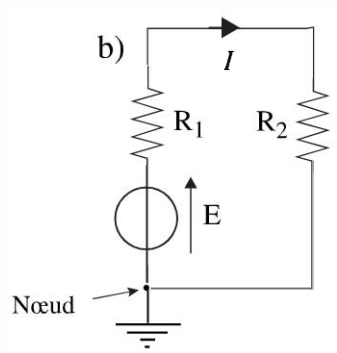


Figure 5.20

Copyright © 2007 Dunod.

Le courant I_1 dépend uniquement des dipôles (actifs ou passifs) insérés dans la boucle. Le nœud sert de référence de potentiel à la boucle.

Le circuit de la figure 5.20b fait apparaître deux dipôles en série – un dipôle de Thévenin et une résistance –, qui forment une boucle et qui possèdent un nœud. Le fil de terre est ici indispensable, car sans lui, ni nœud, ni graphe.

Il est important de souligner que le potentiel de chaque nœud d'un circuit est toujours défini par rapport à la terre[2] ; le fil de terre devrait toujours apparaître sur tous les schémas électriques. Toutefois, bien souvent il est oublié, car implicite.

➤ *Réseau connexe associé au circuit électrique*

Les paragraphes précédents ont montré que le circuit électrique forme un graphe avec ses nœuds – qui rassemblent les fils électriques équipotentiels – et ses branches formées par l'ensemble des dipôles.

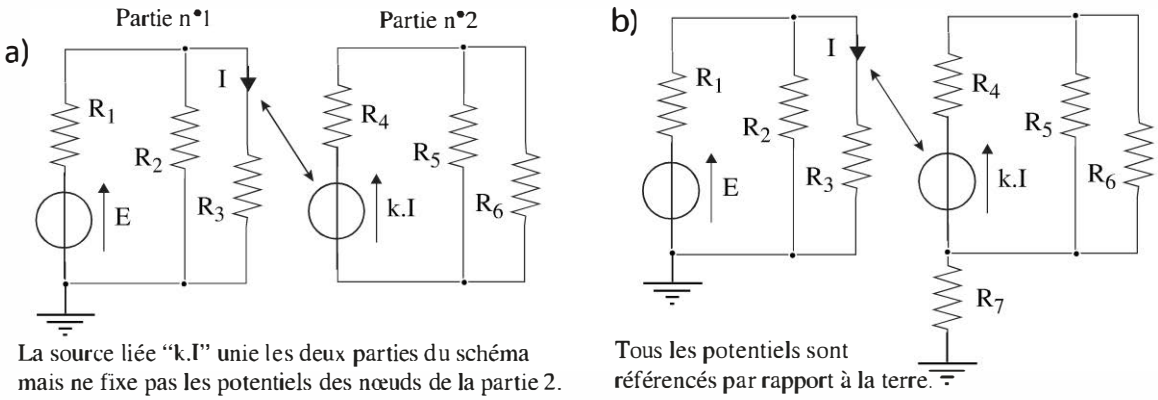
Aucun des nœuds d'un circuit électrique n'est isolé (degré nul) car la définition même du nœud exclut un degré inférieur à trois.

De même, il n'existe aucun sous-graphe isolé dans un circuit, car le potentiel de tous les nœuds d'un graphe de circuit est référencé au moins par rapport au potentiel zéro de la terre. Un chemin est donc présent entre chaque nœud du circuit.

Le graphe du schéma électrique de la figure 5.21a comporte deux sous-graphes dont un est isolé (partie n° 2). Ce schéma est incomplet, car les potentiels des nœuds du sous-graphe isolé sont flottants et non définis. Le schéma électrique ne traduit pas la réalité expérimentale du circuit électrique qu'il veut représenter.

En revanche, le schéma électrique de la figure 5.21b traduit parfaitement l'expérimentation autour d'un circuit électrique qui possède un nœud de sa partie n° 1 connecté à la terre, et un nœud de sa partie n° 2 relié à la terre par exemple par l'intermédiaire d'un dipôle résistif. Tous les potentiels sont référencés ; les potentiels absolus des nœuds des deux parties sont parfaitement définis.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe toujours un chemin entre deux nœuds du graphe d'un circuit. Le graphe est alors un graphe orienté connexe.



La source liée "k.I" unie les deux parties du schéma mais ne fixe pas les potentiels des nœuds de la partie 2.

Tous les potentiels sont référencés par rapport à la terre.

Figure 5.21

[2] Voir « Pour en savoir plus : Terre, masses électrique et mécanique ».

Copyright © 2007 Dunod.

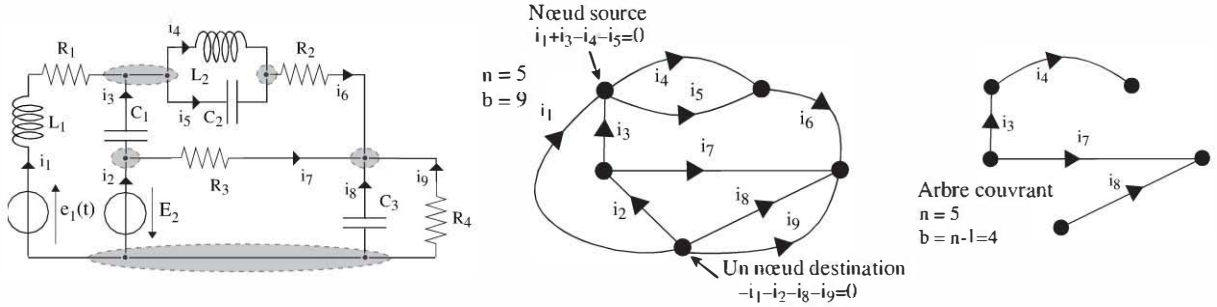


Figure 5.22

L'exemple du circuit complexe de la figure 5.22 illustre parfaitement la notion de représentation du circuit par un graphe orienté connexe.

Il ressort que le graphe associé à un circuit électrique est orienté, connexe, souvent multiple (il existe parfois plusieurs dipôles en parallèle entre deux nœuds) très rarement complet (il n'existe pas forcément une branche entre deux nœuds). Le graphe possède toutes les propriétés d'un réseau connexe !

➤ ***Arbre, coarbre associés aux circuits électriques***

Le réseau électrique possède au moins un arbre puisque chaque nœud est de degré strictement supérieur à deux, et un arbre couvrant car le graphe est connexe.

L'arbre couvrant par définition possède les n nœuds du graphe et $n - 1$ branches.

Le coarbre de l'arbre couvrant possède les $b - (n - 1)$ branches restantes. Le paragraphe précédent a montré qu'en ajoutant à l'arbre couvrant une branche du coarbre, alors apparaît une maille qui passe par la branche ajoutée. On peut donc, de cette façon, former $b - (n - 1)$ mailles différentes.

Le réseau possède $b - (n - 1)$ mailles différentes et indépendantes.

En définissant arbitrairement un nœud comme **nœud source** du réseau (voir le graphe de la figure 5.22), il existe alors $n - 1$ nœuds pouvant faire office de **nœud destination**.

Le réseau possède ainsi $n - 1$ coupes différentes, qui entourent les nœuds de destination, dont les capacités sont nulles.

5.2.3 Construction du graphe à partir du circuit électrique

➤ ***Éléments constitutifs d'une branche***

Dans les branches du graphe circulent les courants qui forment les inconnues du système d'équations (voir § 5.1.3). La détermination des courants de branches doit entraîner sans ambiguïté la détermination de toutes les tensions de nœuds.

La branche est donc un dipôle qui possède une relation courant-tension linéaire : connaissant le courant, on calcule alors la tension sans ambiguïté.

Copyright © 2007 Dunod.

Avec cette définition, la branche est formée par (figure 5.23) :

– les dipôles passifs R, L et C ;

– les dipôles de Thévenin (E et R) ;

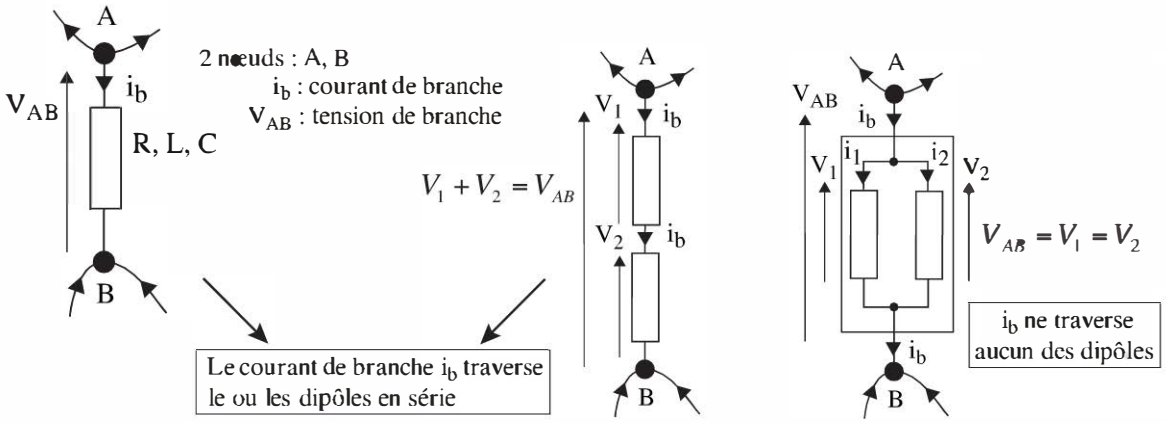
– les dipôles de Norton (J et R) ;

– les dipôles équivalents à une association série des dipôles cités (figure 5.23b) ;

– les dipôles équivalents à une association parallèle ; l'étude du circuit détermine alors le courant i_b qui passe dans l'association et non i_1 et i_2 (figure 5.23c).

Une source de tension E (seule) peut former une branche ; sachant pourtant qu'il n'existe pas de relation linéaire entre tension et courant. C'est une exception. Elle se justifie par le fait que, placée entre deux nœuds, la tension des nœuds est alors parfaitement définie, quel que soit le courant qui circule dans la source. Cela vérifie notre définition de la branche dans un circuit.

En revanche, une source de courant J (seule) n'est pas une branche, car la tension à ses bornes n'est pas parfaitement définie à partir du courant. Pour analyser un circuit qui contient une source de courant, il faut l'associer à un autre dipôle (R, L, C, E) en parallèle.



a) La branche est formée par un seul dipôle

b) La branche est formée par des dipôles en série

c) La branche est formée par des dipôles en parallèle

Figure 5.23

➤ *Notion de branche généralisée*

Un modèle d'une branche (dite généralisée) est donné (figure 5.24a) par l'association d'un dipôle passif (R, L, C) en série avec une source de tension et une source de courant en parallèle de l'ensemble ; apparaissent alors, toutes les combinaisons possibles qui forment des branches (figure 5.24b à f).

> ***Remarque :*** La configuration de la figure 5.24g, où la source de courant est en court-circuit entre les deux nœuds A et B, n'a pas d'intérêt pratique puisqu'elle revient à supprimer un des deux nœuds du circuit.

➤ *Recherche des branches et des nœuds*

La recherche des nœuds et des branches pour réaliser le graphe associé au schéma électrique est une opération sans difficulté majeure, qui demande l'application stricte des définitions. La méthodologie est précisée figure 5.25.

Copyright © 2007 Dunod.

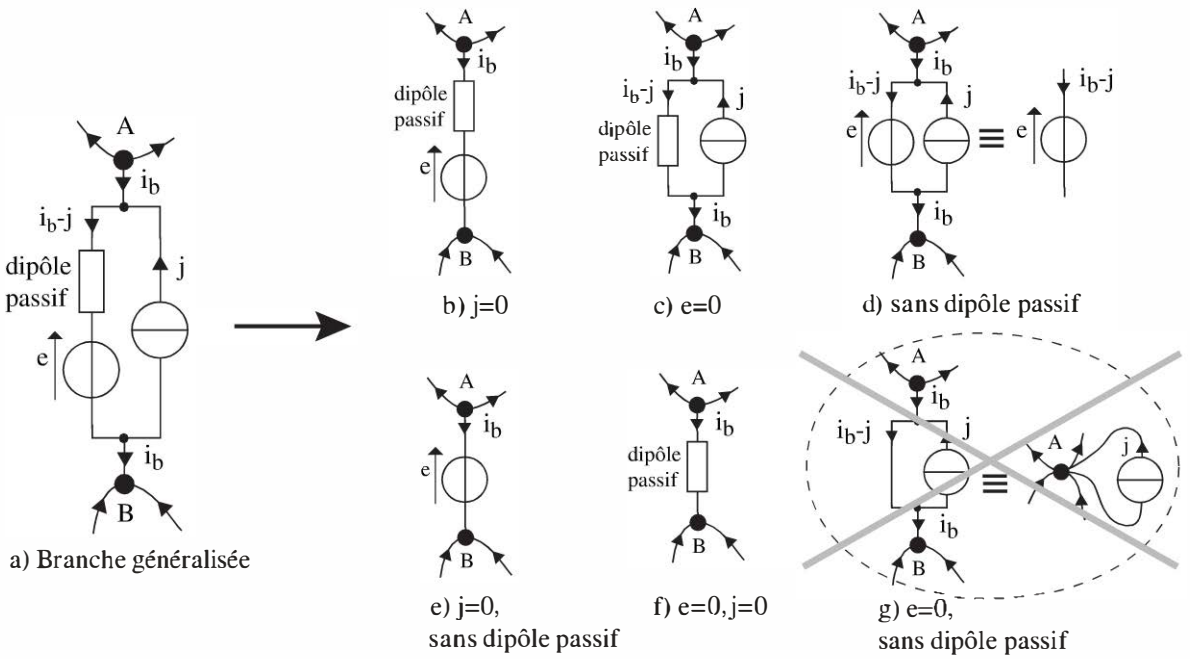


Figure 5.24

Toutefois, avant de bâtir le graphe qui conditionne le nombre d'équations à résoudre, il est intéressant de regrouper les dipôles – en utilisant les règles d'associations – pour en réduire l'ordre.

> ***Remarque :*** Le graphe prend une configuration différente suivant les choix d'associations, série ou parallèle, réalisés parmi les dipôles.

Par exemple, suivant les associations des dipôles du schéma de la figure 5.26a on dessine trois graphes distincts, dont chacun comporte un nombre de nœuds et de branches différent. *Ipso facto*, les inconnues dans ces graphes sont différentes, ainsi que les systèmes d'équations associés.

Dans le premier graphe (figure 5.26b) tous les courants des dipôles deviennent des courants de branche. Après résolution des équations, i_{d1}, i_{d2}, i_{d3}, et i_{d4} seront connus. Les tensions des dipôles U_{d1}, U_{d2}, U_{d3}, et U_{d4} s'en déduisent à partir des relations courant-tension. L'information dans le circuit est maximale.

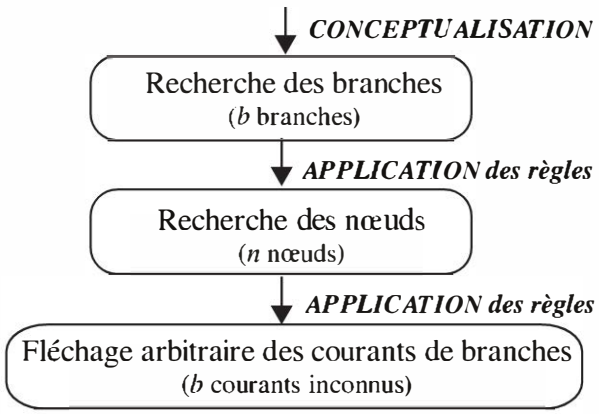


Figure 5.25

Copyright © 2007 Dunod.

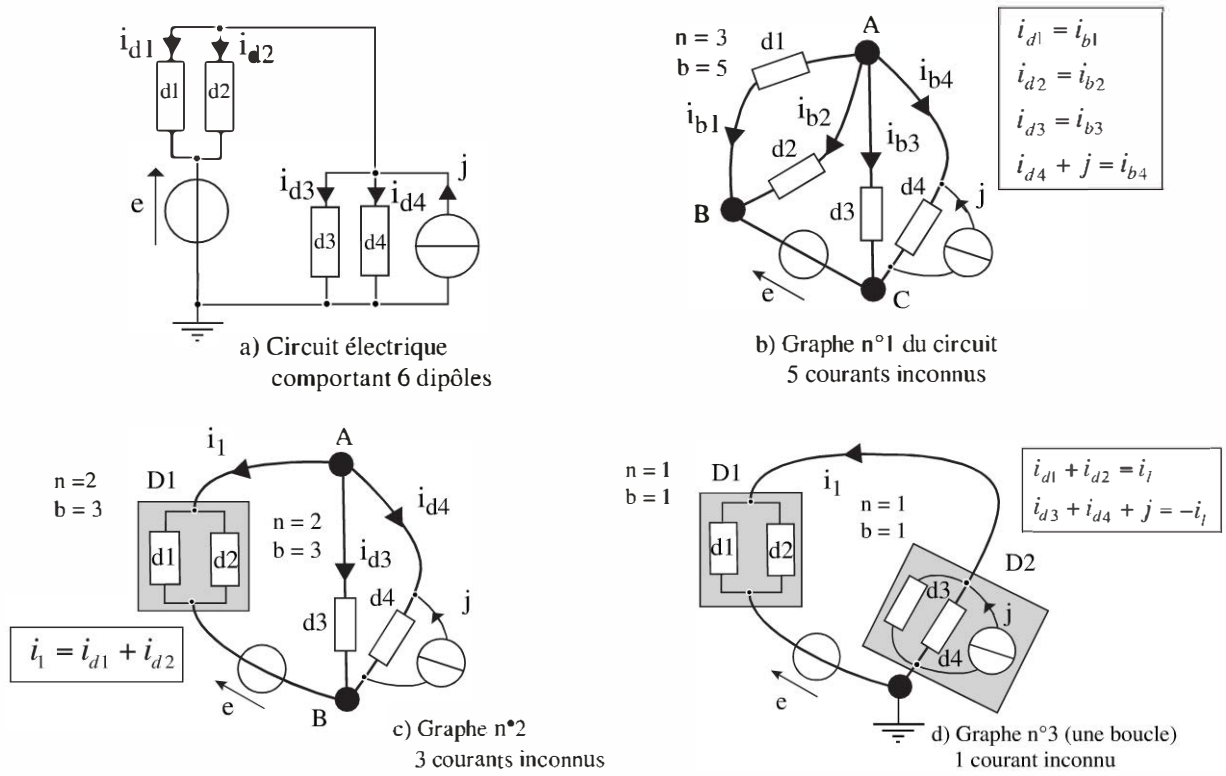


Figure 5.26

L'association en parallèle des dipôles d_1 et d_2 dans le deuxième graphe (figure 5.26c) est équivalente au dipôle D_1. Les courants individuels des deux dipôles i_{d1} et i_{d2} fusionnent pour construire le courant global i_1 dans D_1. Après résolution, i_1, i_{d3} et i_{d4} seront déterminés, mais i_{d1} et i_{d2} resteront inconnus. L'intérêt d'un regroupement est la réduction du nombre d'inconnus (trois au lieu de quatre) au détriment toutefois de la connaissance de toutes les grandeurs du circuit.

Dans la boucle du dernier graphe (figure 5.26d) seul, le courant de branche i_1 sera connu. Les courants des dipôles ne sont alors plus définis individuellement.

> ***Remarque :*** La réduction du nombre de branches, obtenue à travers la progression des graphes, nécessite le calcul préalable des valeurs des dipôles équivalents aux associations des dipôles d_1 et d_2, puis d_3 et d_4.

La représentation du schéma électrique par un graphe n'est pas unique. Elle dépend des associations réalisées, basées sur la détermination de certains courants plutôt que d'autres. Toutefois, l'information s'en trouve modifiée.

La perte d'informations dans un circuit n'est pas forcément un soucis. Par exemple, pour dimensionner le fusible d'une batterie d'accumulateurs dans une voiture, il n'est pas nécessaire de connaître la parfaite répartition des courants dans les composants électriques du réseau de bord du véhicule, car seule la somme est nécessaire.

5.2.4 Transformations du schéma électrique

Les circuits électriques sont représentés graphiquement par un schéma électrique, développé, de préférence planaire et dont la conception du dessin résulte d'un parti pris du réalisa-

Copyright © 2007 Dunod.

teur. En effet, l'agencement libre des dipôles permet une multitude d'associations. Le schéma électrique n'est donc pas unique. Certains dessins sont plus harmonieux, d'autres permettent une mise en équation plus immédiate, mais ils sont surtout le fruit de l'expérience du réalisateur. Il est donc possible de modifier à souhait le dessin du schéma électrique pour passer d'une représentation à une autre.

> Toutefois, attention aux « fausses bonnes manipulations », car trop souvent le dessin est presque le même et pourtant il conduit à des circuits radicalement différents.

Il existe principalement deux niveaux de transformation dans un schéma électrique. Le premier regroupe les opérations de déplacement de dipôles – laissant intact le graphe –, le second consiste à réaliser des associations de dipôles pour en général réduire l'ordre – amenant aussi une modification du graphe.

➤ *Déplacement d'une branche au sein d'un nœud*

On rappelle qu'un nœud est un ensemble de fils de connexion, de fils d'interconnexion et de points d'interconnexion, tous de même potentiel électrique. Avec ces définitions, tous les nœuds d'un graphe sont forcément de potentiel différent. Ils sont tous délimités par leur frontière.

> Avec cette définition, le déplacement d'une branche ne doit en aucun cas entraîner le déplacement d'une de ses extrémités vers un autre nœud, sinon le graphe et la tension de la branche deviennent différents.

La frontière du nœud encercle tous les éléments du nœud en ne coupant que les fils de connexion des branches (figure 5.27).

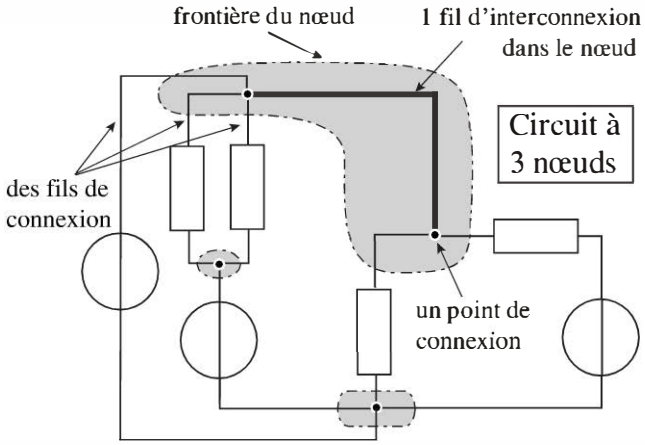


Figure 5.27

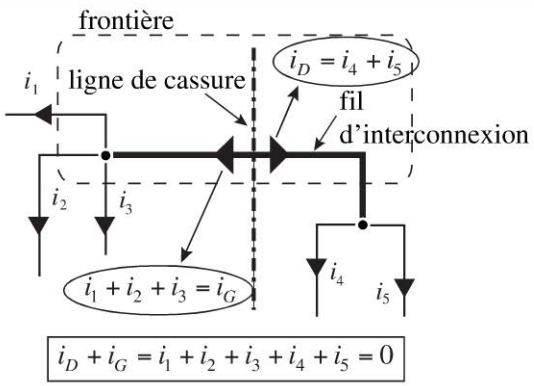


Figure 5.28

> Après déplacement d'une des branches, ses propres fils de connexions doivent toujours couper les deux mêmes frontières initiales.

Pour comprendre l'effet du déplacement d'une branche, définissons tout d'abord la **ligne de cassure** (figure 5.28) comme la ligne qui scinde en deux un fil d'interconnexion et produit une partie à droite et une partie à gauche de la ligne.

Copyright © 2007 Dunod.

Les courants qui circulent vers la droite i_D ou vers la gauche i_G du fil d'interconnexion scindé sont opposés $i_G + i_D = 0$. Le courant de droite i_D est la somme algébrique des courants qui circulent dans les branches de la partie droite du dessin $i_D = i_4 + i_5$; le courant de gauche i_G est la somme algébrique des courants qui circulent dans les branches à gauche du dessin $i_G = i_1 + i_2 + i_3$.

En déplaçant la branche du courant i_3 (figure 5.29a) le fil d'interconnexion ne voit plus circuler le même courant avant $i_G = i_1 + i_2 + i_3$ et après le déplacement $i_G = i_1 + i_2$ (figure 5.29b) alors que le courant dans chacune des branches reste identique ; l'équation du nœud reste inchangée $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$.

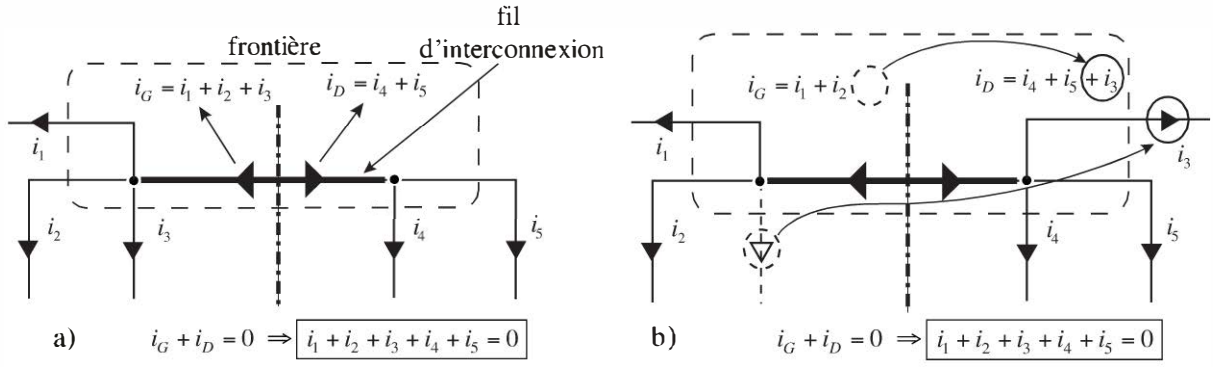


Figure 5.29

La modification d'architecture des connexions dans un nœud ne modifie ni le graphe, ni les valeurs des courants dans les branches. En revanche, elle change les courants dans les fils d'interconnexion du nœud.

➤ *Déplacement des dipôles au sein d'une branche*

Une branche peut comporter plusieurs dipôles. Ces dipôles sont alors forcément reliés en série, car si deux dipôles d_2 et d_3 d'un circuit sont en parallèle (figure 5.30a) alors la construction du graphe (figure 5.30b) fait apparaître deux branches associées à d_2 et d_3, reliées par un nœud (intersection des deux branches).

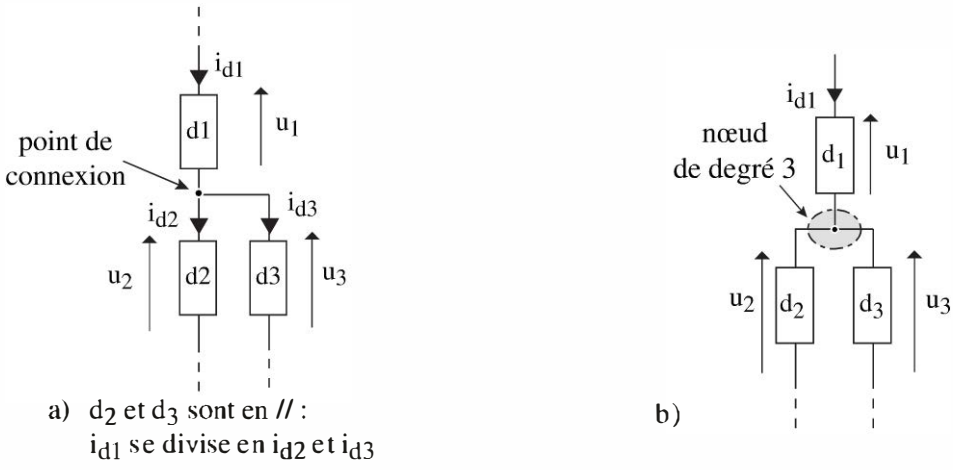


Figure 5.30

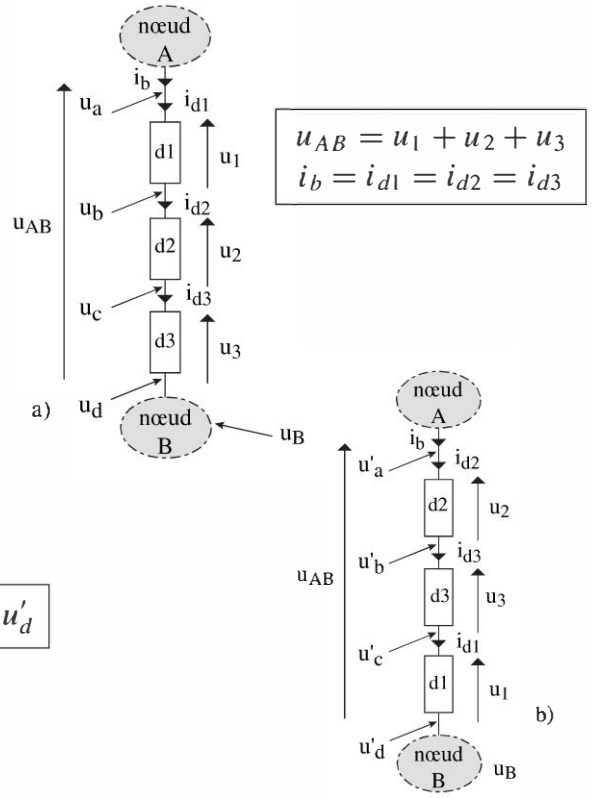
Copyright © 2007 Dunod.

Le courant i_b traversant un ensemble de dipôles en série, induit des tensions électriques u_1, u_2 et u_3 aux bornes de chacun (figure 5.31a). La somme des tensions des dipôles produit la différence de potentiel $u_{AB} = u_1 + u_2 + u_3$ aux bornes des deux nœuds de la branche incidente.

Connaissant le potentiel d'un nœud référencé par rapport à la terre u_B, les potentiels u_a, u_b, u_c et u_d aux extrémités des dipôles sont parfaitement définis à partir des relations :

$$\begin{vmatrix} u_d = u_B \\ u_c = u_d + u_3 = u_B + u_3 \\ u_b = u_c + u_2 = u_B + u_3 + u_2 \\ u_a = u_b + u_1 = u_B + u_3 + u_2 + u_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u'_d = u_B \\ u'_c = u'_d + u_1 = u_B + u_1 \\ u'_b = u'_c + u_3 = u_B + u_1 + u_3 \\ u'_a = u'_b + u_2 = u_B + u_1 + u_3 + u_2 \end{vmatrix}$$



$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_a = u'_a \\ u_b \neq u'_b \\ u_c \neq u'_b \\ u_d = u'_d \end{array}} \Longrightarrow \boxed{u_a - u_d = u_{AB} = u'_a - u'_d}$$

Figure 5.31

En permutant les dipôles dans la branche (figure 5.31b) qui correspond à un glissement le long du fil de branche, alors :

– les courants restent identiques au courant de branche $i_b = i_{d1} = i_{d2} = i_{d3}$;
– les d.d.p., u_1, u_2, u_3 aux bornes des dipôles sont inchangées ;
– la tension entre les nœuds $u_{AB} = u_2 + u_3 + u_1$ reste identique ;
– le graphe associé au circuit électrique n'est pas non plus modifié ;
– seuls les potentiels u'_a, u'_b, u'_c, u'_d aux extrémités des dipôles subissent des transformations, mais sans toutefois entraîner de conséquence sur l'analyse globale du circuit.

> Une branche ne peut être constituée que de dipôles en série. Les permutations des dipôles dans la branche conservent le graphe du circuit.

5.2.5 Détermination des équations associées au circuit

➤ *Propriétés du système d'équations*

Les paragraphes 5.1.3 et 5.2.2 ont montré que les courants dans les b branches du graphe sont les inconnues principales du circuit électrique. Pour résoudre ces b inconnues du cir-

Copyright © 2007 Dunod.

cuit linéaire, le système d'équations doit comporter b équations indépendantes. Ces équations sont tirées des deux résultats essentiels du paragraphe 5.2.1 :

– le réseau possède $n - 1$ coupes différentes qui entourent les nœuds de destination et dont les capacités sont nulles ;

– le réseau possède $b - (n - 1)$ mailles différentes, indépendantes.

Le premier point génère $n - 1$ équations, appelées les *ni* équations indépendantes de nœuds. Le second point apporte $b - (n - 1)$ équations supplémentaires, appelées les *mi* équations de mailles indépendantes.

La somme *ei* des *ni* équations de mailles et des *mi* équations de nœuds correspond aux b équations du système d'équations recherché.

➤ *Écriture des équations de nœuds et de mailles*

Le physicien Gustave Robert Kirchhoff a introduit deux lois extrêmement célèbres, connues sous le nom des **lois de Kirchhoff** et qui s'énoncent sous :

– la **loi des nœuds** : la somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est nulle ;

– la **loi des mailles** : la somme algébrique des tensions de branches dans une maille fermée est nulle.

Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887)



Le physicien Gustave Robert Kirchhoff né en 1824 à Königsberg (ancienne Prusse) est encore étudiant lorsqu'il émet en 1845 les très célèbres lois d'électrocinétique ou lois de Kirchhoff.

Isoler un nœud par une coupe conduit naturellement à énoncer la loi des nœuds. Mathématiquement, cette loi s'exprime par l'équation, $\boxed{\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}}$ qui devient $I_4 + I_2 = I_1 + I_3$ sur la figure 5.32.

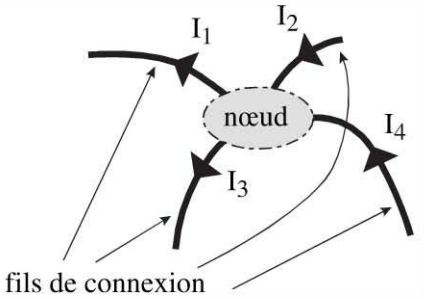


Figure 5.32

Depuis la définition du potentiel (voir première partie de l'ouvrage) la d.d.p. aux extrémités d'un chemin simple est égale à la somme des tensions de branches qui le constituent. Si de surcroît, le chemin décrit une maille, alors la somme algébrique de toutes les tensions des branches de la maille est nulle et donne l'expression de la deuxième loi de Kirchhoff, qui s'écrit $\boxed{\sum u_i = 0}$, avec u_i la tension aux bornes du dipôle i.

Copyright © 2007 Dunod.

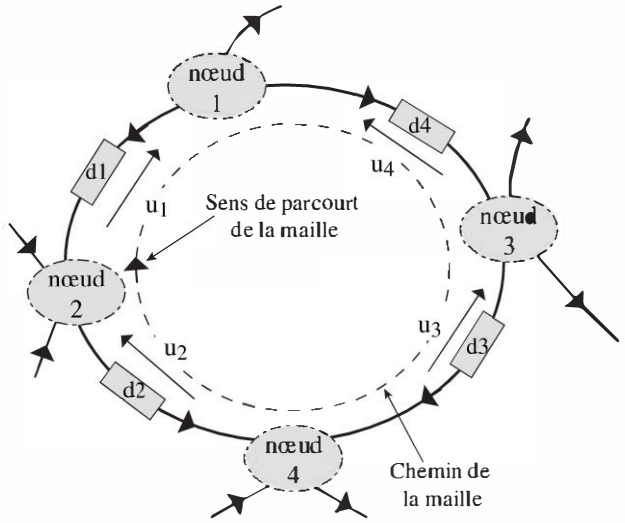


Figure 5.33

Cette somme est algébrique ; le sens relatif des tensions aux bornes des branches de la maille est donc capital. Il convient alors de définir un sens de parcours de la maille pour faire apparaître les signes des tensions ; arbitrairement, on compte positives les tensions orientées dans le sens du parcours.

La loi des mailles, appliquée au sous-graphe de la figure 5.33, entraîne l'expression mathématique : $u_1 - u_4 - u_3 + u_2 = 0$; mais aussi $u_1 + u_2 = u_4 + u_3$ qui traduit que la somme des tensions dans un sens est égale aux tensions dans l'autre sens.

> ***Remarque :*** Le sens du parcours est arbitraire. En effet, en choisissant un sens opposé, on obtiendrait : $-u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$.

5.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ASSOCIÉES AUX CIRCUITS

Le nombre, la nature des équations associées à un circuit électrique, ainsi que les lois d'écriture des équations ayant été déterminés dans le paragraphe précédent (§ 5.2), il convient maintenant de s'intéresser aux termes contenus dans les équations du circuit.

5.3.1 Équations différentielles dans une maille

➤ ***Équations différentielles des dipôles élémentaires passifs R, L et C***

La première partie de l'ouvrage a mis l'accent sur la modélisation des composants électriques et a permis d'établir les relations courant-tension des dipôles linéaires.

Pour les dipôles élémentaires L, C et R, les relations courant-tension s'expriment sous forme temporelle par une expression différentielle.

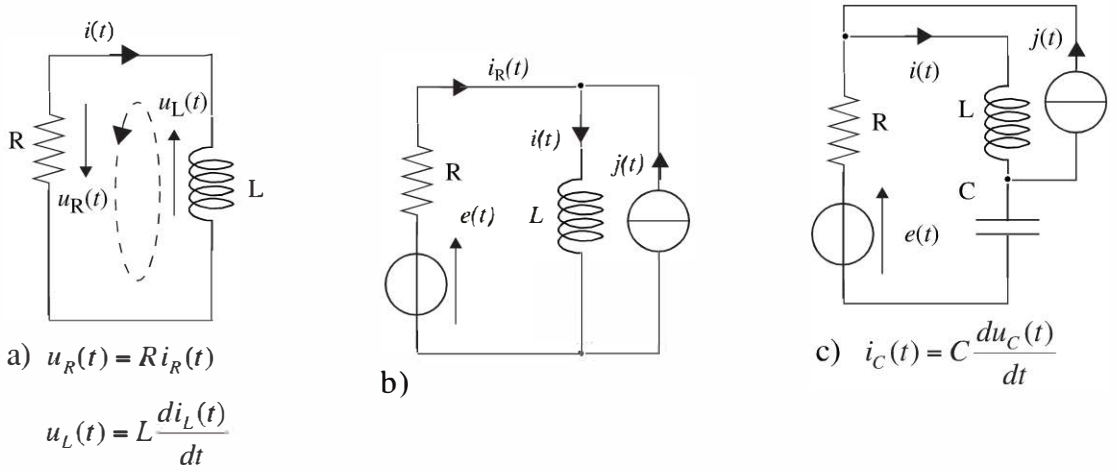
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \; ; \qquad i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \; ; \qquad u_R(t) = Ri_R(t) \, .$$

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Forme de l'équation différentielle d'une maille***

Lorsque l'agencement des dipôles forme une maille, alors l'écriture complète de l'équation associée à la maille s'obtient d'abord en appliquant la loi des mailles $\sum u_i(t) = 0$, puis en écrivant les relations courant-tension des dipôles.

Par exemple, l'application de la loi des mailles pour le circuit de la figure 5.34a, permet d'écrire tout d'abord $u_R(t) + u_L(t) = 0$, puis en intégrant les relations courant-tension des deux dipôles, on obtient l'équation différentielle dite « homogène » de la maille $Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} = 0$, qui s'écrit aussi $\boxed{\dfrac{L}{R}\dfrac{di(t)}{dt} + i(t) = 0}$.



a) $u_R(t) = Ri_R(t)$

$u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$

b)

c) $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

Figure 5.34

En ajoutant des sources dans le circuit, par exemple une source de tension et une source de courant (figure 5.34b), l'équation de la maille devient : $u_R(t) - e(t) + u_L(t) = 0$, avec $i_R(t) = i(t) - J$ l'équation différentielle devient $\boxed{\dfrac{L}{R}\dfrac{di(t)}{dt} + i(t) = \dfrac{e(t)}{R} + J}$. On retrouve un premier membre identique et le second membre fonction des deux sources introduites ($e(t)$ et $j(t)$).

L'introduction (figure 5.34c) d'un 3e dipôle passif (le condensateur C), change l'équation de maille $u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - e(t) = 0$; d'où, en intégrant les relations courant-tension, $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \int \dfrac{i(t)}{C}\,dt = e(t) + Rj(t)$, qui s'écrit après dérivation et transformation $\boxed{LC\dfrac{d^2i(t)}{dt^2} + RC\dfrac{di(t)}{dt} + i(t) = C\dfrac{d(e(t) + Rj)}{dt}}$. Le 1er membre fait apparaître des coefficients constants fonctions uniquement des dipôles passifs (L et C) et le 2e membre est une fonction linéaire des sources d'énergie dans le circuit ($e(t)$ et $j(t)$).

Des exemples précédents, on doit principalement retenir que dans l'équation :

– le terme à gauche est modifié après un réagencement des dipôles passifs du circuit ;

– les sources d'énergie conditionnent l'expression du terme à droite.

Copyright © 2007 Dunod.

La forme des équations produites par les exemples précédents se généralise (voir au chapitre 10 « régime libre »). Le terme à gauche est directement lié à la présence des dipôles passifs dans le circuit et à leurs agencements, tandis que le terme à droite est une expression issue des dipôles actifs, sources d'énergie (voir « régime forcé »).

5.3.2 Système d'équations différentielles du circuit électrique

➤ ***Forme du système d'équations différentielles du circuit***

Le circuit électrique comportant n nœuds et b branches est décrit (§ 5.2) par un système d'équations comportant b équations (à b inconnues) : $ni = n - 1$ équations parmi les n nœuds et $mi = b - (n - 1)$ équations de mailles. On a $ei = ni + mi = b$.

> ***Remarque :*** Si le circuit ne comporte que des résistances alors les équations seront purement algébriques. Pour un circuit comportant en plus inductances et condensateurs, les équations du système comportent des équations différentielles.

Considérons un circuit (figure 5.35a et figure 5.35b) à quatre branches $b = 4$ et deux nœuds $n = 2$. Le système possède alors quatre équations ($ei = 4$), dont une équation de nœud $ni = 1$ et trois équations de mailles $mi = 3$. Il y a quatre courants de branche inconnus ($b = 4$) : $i(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$, $i_{R2}(t)$.

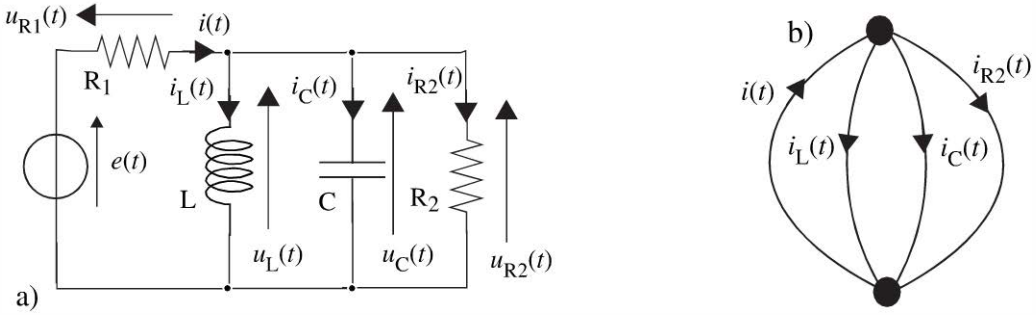


Figure 5.35

L'équation de nœud s'écrit :

$$i(t) = i_L(t) + i_R(t) + i_C(t)$$

Les trois équations de mailles sont :

$$e(t) - u_{R1}(t) - u_L(t) = 0$$

$$u_{R2}(t) - v_L(t) = 0$$

$$u_L(t) - u_C(t) = 0$$

d'où :

$$\begin{cases} i(t) = i_L(t) + i_{R2}(t) + i_C(t) = i_L(t) + i_{R2}(t) + C\dfrac{du_C(t)}{dt} \\ \dfrac{e(t) - u_L(t)}{R_1} = i(t) \\ L\dfrac{di_L(t)}{dt} = u_C(t) \\ u_{R2}(t) = u_C(t) \end{cases}$$

Copyright © 2007 Dunod.

qui, en faisant ressortir les quatre courants des branches, devient :

$$\begin{cases} i(t) = i_L(t) + i_{R2}(t) + i_C(t) \\ i_C(t) = CL\dfrac{d^2 i_L(t)}{dt^2} \\ i_{R2}(t) = \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ LC\dfrac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left(\dfrac{L}{R_1} + \dfrac{L}{R_2}\right)\dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \dfrac{e(t)}{R_1} \end{cases}$$

On remarque que la dernière équation comporte la seule variable $i_L(t)$, un courant de branche inconnu. Le terme à gauche de cette équation regroupe les dérivées successives de l'inconnue $i_L(t)$ associées aux valeurs des dipôles passifs (R, L, C) ; le terme à droite est une expression qui reprend la valeur de la source de tension du circuit $e(t)$. On retrouve les résultats du paragraphe précédent : le terme à gauche ne dépend que des dipôles passifs du schéma électrique et le terme à droite est lié aux sources.

La résolution de la dernière équation permet d'établir l'expression de l'inconnue $i_L(t)$, connaissant les paramètres des dipôles passifs et l'expression de la source de tension. Les trois autres équations servent à déterminer les expressions des trois courants de branches inconnus à partir de l'expression de $i_L(t)$.

Une fois les quatre courants de branche exprimés, on rappelle (§ 5.1) que toutes les tensions entre nœuds, toutes les tensions aux bornes des dipôles peuvent être formulées.

Le système à b équations comportera toujours des équations différentielles si le circuit intègre des inductances et des condensateurs. De plus, lorsque le graphe du circuit ne comporte aucune boucle et aucun sous-graphe indépendant, alors le système pourra toujours s'écrire sous la forme canonique :

– d'une équation différentielle qui admet comme seule variable une inconnue ; on appelle **équation principale** cette équation du système ;

– de $b - 1$ autres équations, fonction de cette variable.

➤ *Ordre du système*

Les seuls dipôles qui apportent l'opérateur différentiel sont les condensateurs C et les inductances L. Une relation différentielle entre tension et courant est ajoutée au système pour chacun de ces dipôles ; la notion d'ordre du système est donc étroitement liée au nombre, au type et à l'architecture des connexions des composants passifs L et C du circuit.

On pourrait penser que l'ordre du système soit donné par le nombre total des condensateurs et des inductances présents dans le circuit électrique. En réalité, ce nombre n'exprime que la valeur de l'ordre maximal du système, car les équations peuvent être liées (notion développée dans le chapitre 10).

On retiendra que l'ordre du système est directement lié au nombre de condensateurs et d'inductances dans le circuit, mais aussi à leurs agencements.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Conditions initiales***

Les méthodes mathématiques pour résoudre les équations différentielles qui décrivent les circuits, conduisent à une famille de solutions appartenant à un domaine de validité. Dans cette famille, il existe une solution unique qui correspond au circuit en expérimentation ; elle ne peut être déterminée que si l'on connaît avec certitude une valeur à un instant donné.

En général, dans les systèmes électriques, ces relations sont bâties autour des **conditions initiales**. Le nombre de conditions initiales ajoutées est égal à l'ordre du système ; par exemple, un ordre quatre impose quatre conditions initiales supplémentaires pour développer la solution complète et unique.

Une manière efficace pour déterminer les conditions initiales est de rechercher les tensions aux bornes des condensateurs et les courants dans les inductances à un l'instant initial, souvent à $t = 0$. Les tensions des condensateurs et les courants dans les inductances sont appelés les **variables d'état** du circuit électrique ; elles seront introduites et étudiées en détail au chapitre 10.

> ***Remarque :*** Les conditions initiales sont les valeurs des tensions et des courants dans les condensateurs et les inductances du circuit, qui ont conditionné l'ordre du circuit.

La résolution du système d'équations différentielles munie de ses conditions initiales produit une solution unique : autant de conditions initiales différentes, autant de solutions différentes.

5.4 ÉTUDES DIFFÉRENCIÉES DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

5.4.1 Notion de régime transitoire et régime permanent

➤ ***Régimes libre et forcé***

La résolution classique d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants consiste à réaliser trois opérations pour obtenir une solution unique (Sol_{finale}) :

– déterminer l'expression générale de la solution de l'équation différentielle sans second membre ($Sol_{gén.éq.hom.}$), **l'équation homogène** ; c'est la solution du **régime libre** qui ne dépend que des dipôles passifs dans le circuit et de l'énergie stockée dans les inductances et condensateurs à l'instant initial ($1/2\,Cu_0^2$ et $1/2\,Li_0^2$) ;

– trouver une **solution particulière** de l'équation différentielle avec second membre ($Sol_{part.}$) avec des conditions initiales (C.I.) nulles ; cette solution est dite solution particulière du **régime forcé** (forcé par les sources du circuit) ;

– trouver la **solution finale** parmi la famille de solutions, obtenue par la somme des solutions des deux opérations précédentes. Cette solution doit aussi vérifier les conditions initiales.

On peut traduire cette procédure par l'expression suivante :

$$Sol_{finale} = [Sol_{part.} + Sol_{gén.éq.hom.}]_{+C.I.}$$

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Régimes transitoire et permanent***

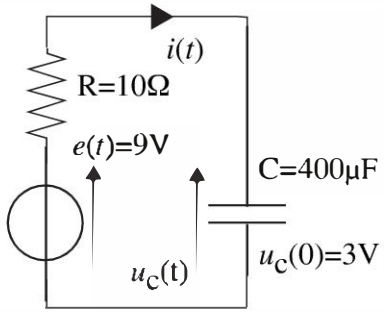
Toutefois, une procédure proche de la précédente ramène la détermination de cette même solution finale (Sol_{finale}) en deux opérations. Pour cela, des **C.I. modifiées** remplacent les C.I. réelles, et sont utilisées pour extraire une solution unique ($[Sol_{gén.éq.hom.}]_{+C.I.modifiées}$) de la famille des solutions de l'équation homogène ($Sol_{gén.éq.hom.}$). Ensuite, une solution particulière du régime forcé, la solution dite du **régime permanent**[3], est ajoutée à la précédente. On a alors :

$$Sol_{finale} = [Sol_{gén.éq.hom.}]_{+C.I.modifiées} + Sol_{rég.permanent}$$

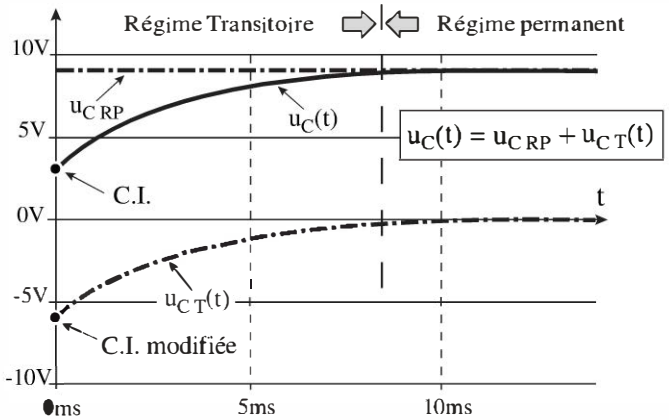
Cette dernière procédure fait clairement apparaître la somme de :
– la solution transitoire[4] du régime libre ($[Sol_{gén.éq.hom.}]_{+C.I.modifiées}$) ;
– la solution permanente du régime forcé ($Sol_{rég.permanent}$).

(Le chapitre 10 de cet ouvrage développe largement ces procédures.)

Par exemple, à la figure 5.36 le circuit RC du 1er ordre produit :
– la solution transitoire du régime libre $u_{CT}(t)$ issue de la résolution de l'équation homogène $RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$ avec la condition initiale modifiée (C.I. modifiée) ;
– la solution permanente du régime forcé u_{CRP} issue de la résolution de l'équation différentielle $RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$, avec t très grand.



a) $RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$



b) C.I. modifiée = C.I. – $u_{C\,RP(t=0)}$

Figure 5.36

[3] La solution de régime permanent est la solution obtenue après la disparition des termes transitoires. Son évolution est alors monotone (une constante, une forme périodique…).

[4] Solution qui s'évanouie au cours du temps ($\longrightarrow 0$ quant $t \longrightarrow \infty$).

Copyright © 2007 Dunod.

La séparation de la solution en deux termes, obtenus indépendamment, produit l'image d'un circuit électrique dans lequel deux régimes évoluent séparément :

– le régime transitoire où les variables du régime libre évoluent librement dans le circuit électrique, à partir de l'énergie initiale stockée et tendent à s'annuler après un temps suffisamment long ;

– le régime permanent où les sources du circuit conditionnent l'évolution permanente des variables du régime forcé.

La solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants est caractérisée par un régime transitoire et un régime permanent. Ces deux régimes peuvent être dissociés et les solutions sont alors calculées séparément après avoir modifié les conditions initiales.

Remarque : La solution recherchée tend vers la solution permanente en régime forcé, puisque la solution du régime libre est transitoire.

5.4.2 Forme mathématique des solutions en régime permanent

Dans beaucoup d'études, la connaissance des courants et tensions en régime transitoire n'est pas primordiale : seule compte la solution du régime permanent.

Par exemple (figure 5.37), un « circuit d'horloge » pour un microprocesseur est censé délivrer une tension carrée pérenne. Connaître la forme de la tension au démarrage n'a aucune utilité !

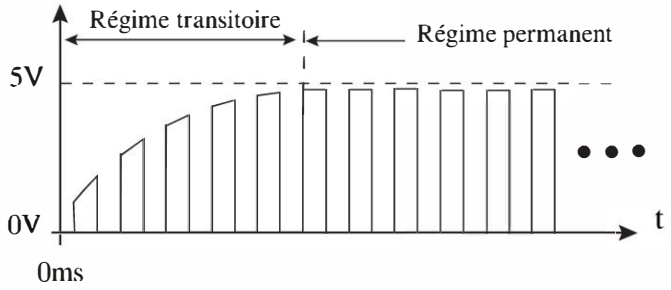


Figure 5.37

Ne rechercher que la solution de régime permanent, entraîne une simplification des procédures de résolution des équations différentielles :

– la résolution de l'équation homogène, qui apporte la solution du régime libre, n'est plus nécessaire ;

– la forme de la solution du régime permanent – solution particulière de l'équation différentielle avec second membre –, ne dépend que de la forme des dipôles sources contenus dans le second membre. La forme de la solution est mathématiquement prévisible.

➤ ***Circuits composés de dipôles sources continus***

Lorsqu'un circuit est constitué d'une ou de plusieurs sources continues alors le second membre de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants est une constante (C). Les mathématiciens montrent qu'alors la solution du régime permanent est une constante.

$$A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = C, \text{ admet pour solution } i(t) = B.$$

Copyright © 2007 Dunod.

On a alors $A_n \dfrac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \dfrac{di(t)}{dt} = 0$, et la solution de régime permanent :

$$A_0 i(t) = C \Longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{C}{A_0} = \text{Cste}}.$$

La solution en régime permanent de l'équation différentielle d'un circuit alimenté par des sources continues est formée de courants et tensions continus. Le chapitre 6 développe la méthode.

➤ ***Circuits composés de sources sinusoïdales de même fréquence***

Si les dipôles sources du circuit sont des sources sinusoïdales, toutes de mêmes fréquences f, alors le second membre est un signal sinusoïdal à cette fréquence f. La solution mathématique en régime permanent est une grandeur sinusoïdale aussi à la fréquence f.

$A_n \dfrac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \dfrac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = B_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$ admet pour solution

$$i(t) = B_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

où seule la fréquence f reste inchangée. On a alors :

$$A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} = B_1 \sum_{i=1}^{n} \left(A_i \omega^i \cos\left(\omega t + \alpha_1 + i \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

qui devient :

$$A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} = B_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \ ;$$

d'où la forme de la solution de régime permanent (de même fréquence f que les sources) :

$$A_0 i(t) = B_0 \cos(\omega t + \alpha_0) - B_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = C \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\Longrightarrow \boxed{i(t) = D \cos(\omega t + \alpha)} \quad (D \text{ et } \alpha : \text{constantes à déterminer suivant le circuit}).$$

La solution en régime permanent d'un circuit constitué de sources sinusoïdales est une sinusoïde de même fréquence que la fréquence des sources. Le chapitre 7 développe la méthode.

➤ ***Circuits en présence de sources de formes différentes***

Lorsque le circuit électrique est formé de sources de natures différentes – par exemple comportant des sources continues et sinusoïdales, ou avec des sources sinusoïdales de fréquences différentes –, alors l'équation différentielle associée reste toujours une équation linéaire à coefficients constants, car le premier membre de l'équation est uniquement la conséquence des dipôles passifs du circuit (voir § 5.3).

La solution répond alors au **principe de linéarité**, voulant qu'en physique « l'effet de toute excitation, composée d'excitations élémentaires, soit égal à la somme des effets de chacune des excitations élémentaires ».

Copyright © 2007 Dunod.

La conséquence immédiate du principe est que l'étude de la solution $s(t)$ de l'équation différentielle devient la somme des solutions $s_i(t)$ issues d'une suite d'études partielles $s(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i(t)$. Chaque étude partielle est définie comme l'étude du circuit électrique en présence des sources de même nature, les autres étant éteintes. On réalise alors autant d'études que de natures de sources différentes. Cette méthode de résolution est appelée **le principe de superposition des régimes**, et sera développée au chapitre 8.

Par exemple, l'étude d'un circuit en présence d'une source continue et d'une source sinusoïdale est la somme des solutions de deux études partielles : une étude en continu, l'autre en sinusoïdale.

➤ *Circuits avec une source périodique*

Une **source périodique** est définie comme un dipôle actif dont la forme du signal temporel se reproduit à l'identique dans le temps, introduisant ainsi la notion de périodicité. Les signaux périodiques les plus utilisés sont les signaux :

– carrés ou rectangulaires ;

– triangulaires ou en dents de scie.

L'expression mathématique de la solution en présence de sources périodiques n'est pas aussi immédiate que dans les cas précédents. On utilise souvent la transformation de Laplace (développée au chapitre 7) pour rechercher la solution quand la source périodique possède une expression mathématique simple.

Toutefois, il existe une autre alternative basée sur la **décomposition en série de Fourier**[5], qui utilise les résultats précédents et qui a l'avantage de fournir une solution rapide, parfois complète, le plus souvent partielle, mais jugée « suffisante ». Cette très célèbre décomposition, remplace la source périodique par plusieurs sources (figure 5.38) : une source continue et des sources sinusoïdales de fréquences multiples.

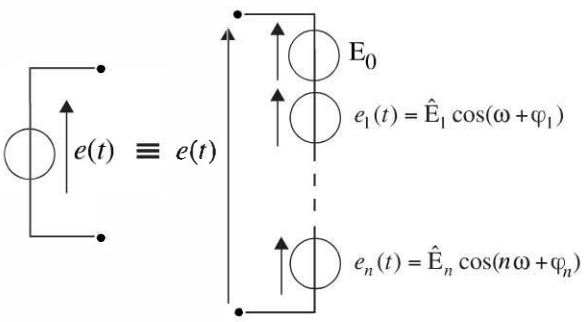


Figure 5.38

Joseph Fourier (1768-1830)



Le mathématicien français Joseph Fourier, né à Auxerre, était destiné à l'état monastique, mais il y préféra les mathématiques. Il se distingua dans l'étude des fonctions périodiques et sur la propagation de la chaleur. Il fut membre de l'académie des sciences (1817) et de l'académie française (1826). À son habileté scientifique s'ajoutèrent des compétences politiques, car après avoir accompagné Napoléon Ier dans sa campagne d'Égypte (1798) il occupa des fonctions de haut diplomate.

[5] Voir, en fin de ce chapitre, le « Pour en savoir plus : Décomposition en série de Fourier ».

Copyright © 2007 Dunod.

La source périodique devient un ensemble de sources différenciées. La méthode de résolution reprend alors la méthode du paragraphe précédent. Le point critique de la méthode réside dans la quantité généralement infinie des sources différenciées. Il convient alors, suivant le cas, de ne garder que les sources significatives (par exemple le fondamental…).

La solution du régime permanent de l'équation différentielle, lorsque la source est périodique et décomposable en série de Fourier, est celle d'un circuit en présence de sources de nature différente. La résolution utilise le principe de superposition des régimes. La méthode est développée au chapitre 8.

5.4.3 Étude simplifiée d'un circuit en régime permanent

Jusqu'alors, la détermination de la solution était basée sur la résolution complète ou partielle de l'équation différentielle associée au circuit électrique.

En se plaçant dans le cas particulier où seule la solution du régime permanent est importante, n'existe-t-il pas des méthodes qui déterminent la solution sans passer par l'équation différentielle, souvent fastidieuse à résoudre ?

L'exemple de la figure 5.39 montre une évolution relativement complexe des signaux en régime transitoire, alors que la solution de régime permanent se résume à tout simplement une constante.

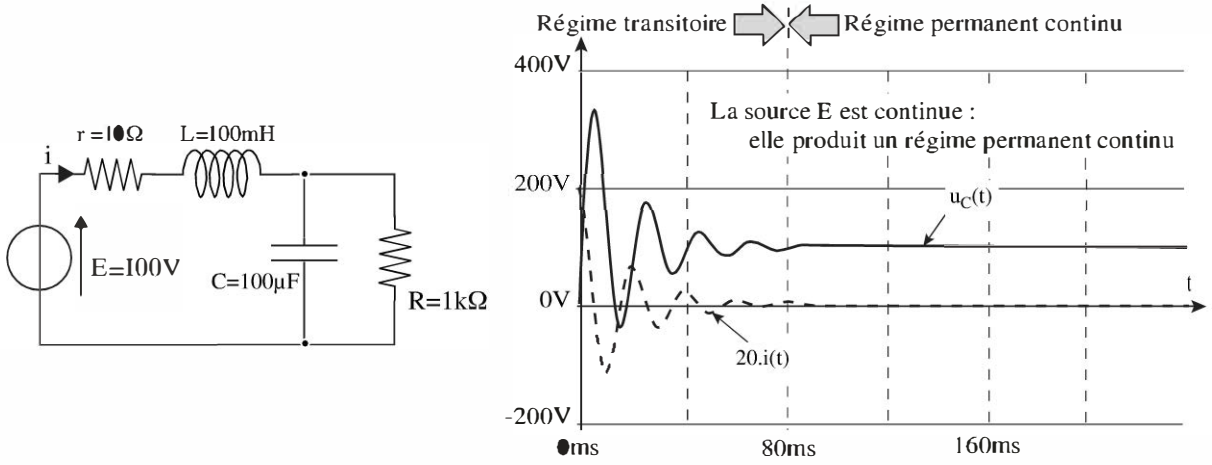


Figure 5.39

Toutes les méthodes qui évitent la résolution directe d'équations différentielles, transforment le circuit électrique en un modèle équivalent, qui dépend de la nature des sources du circuit (continues, sinusoïdales à fréquence fixe ou variable).

On retrouve, suivant la forme des sources du circuit (continue ou alternative) deux modélisations principales qui transforment le circuit électrique : le modèle du régime permanent en courant continu (RPCC) et le modèle du régime permanent en courant alternatif sinusoïdal (RPCA).

Copyright © 2007 Dunod.

5.4.4 Algorithme d'étude des circuits électriques

Un algorithme est construit (figure 5.40) pour guider le lecteur vers une méthode appropriée à sa recherche des tensions et des courants dans le circuit électrique, et est basé sur le type de solution recherchée ainsi que sur la nature des sources contenues dans le circuit.

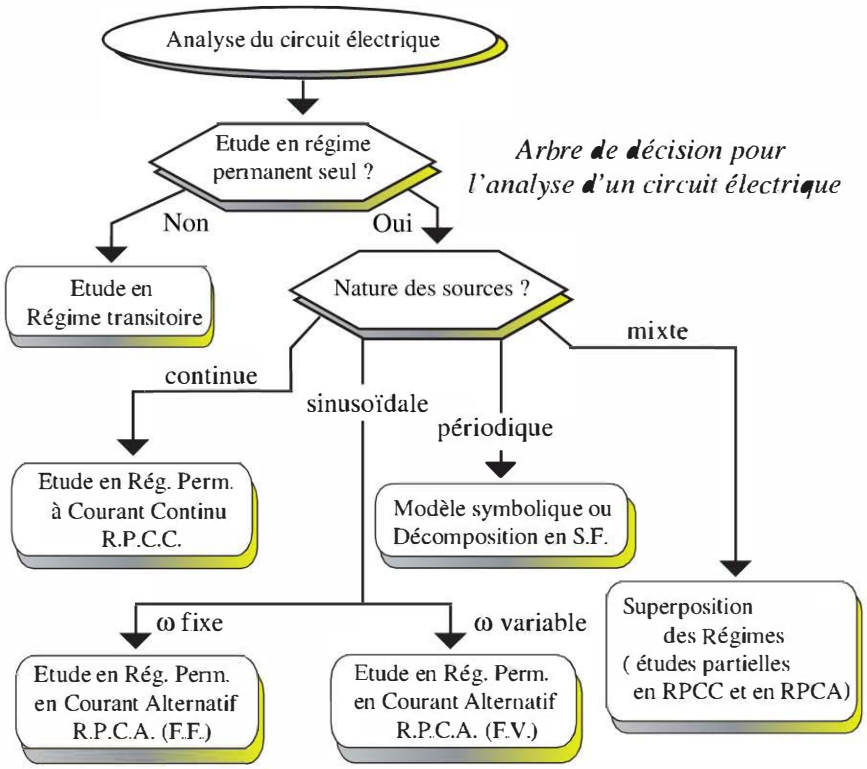


Figure 5.40

Pour en savoir plus...

TERRE, MASSES ÉLECTRIQUE ET MÉCANIQUE

Masse conductrice de la terre

La terre ou plutôt la masse conductrice de la terre sert de référence de potentiel et est définie comme **la référence zéro volt**. On considère en effet que partout sur le globe, le potentiel est constant ; la terre (le sol physique) forme une équipotentielle.
« Tout élément de matière est électrisable », ce qui signifie que tout élément possède un potentiel électrique positif, négatif ou nul, référencé par rapport au zéro de la terre.
Suivant la norme française NF C 15.100, tous les conducteurs que nous pouvons toucher doivent avoir un potentiel zéro, pour éviter l'électrocution ; ils doivent alors être connectés

Copyright © 2007 Dunod.

physiquement à la terre. De même, tout élément conducteur protégé par un isolant doit avoir un potentiel parfaitement défini, référencé.

> Dans tout circuit électrique, le potentiel de chacun des nœuds doit avoir pour référence la terre ; un nœud du graphe associé est donc forcément relié à la terre.

Mise à la terre, fil de terre et prise de terre

La **mise à la terre** est l'opération qui consiste à relier un élément conducteur à la terre. Pour cela, l'élément est connecté à un **fil de terre**, qui lui-même est relié à la **prise de terre**. La prise de terre est unique pour un site, elle représente le point de contact théoriquement parfait avec le sol. Si le fil de terre sert à référencer les potentiels, en revanche il ne servira jamais à faire circuler un courant permanent.

Masse électrique ou électronique, masse mécanique

Dans un circuit électrique (figure 5.41) tous les potentiels électriques ont pour référence le potentiel zéro d'une source ; celui-ci est appelé la **masse électrique**. Cette masse sert de conducteur de retour pour le courant de la source d'énergie.
Il est fréquent de relier un potentiel électrique du circuit à la carcasse métallique de l'objet (la **masse mécanique**) qui contribue ainsi au retour du courant.
L'ensemble de ces masses est en final référencé à la terre.

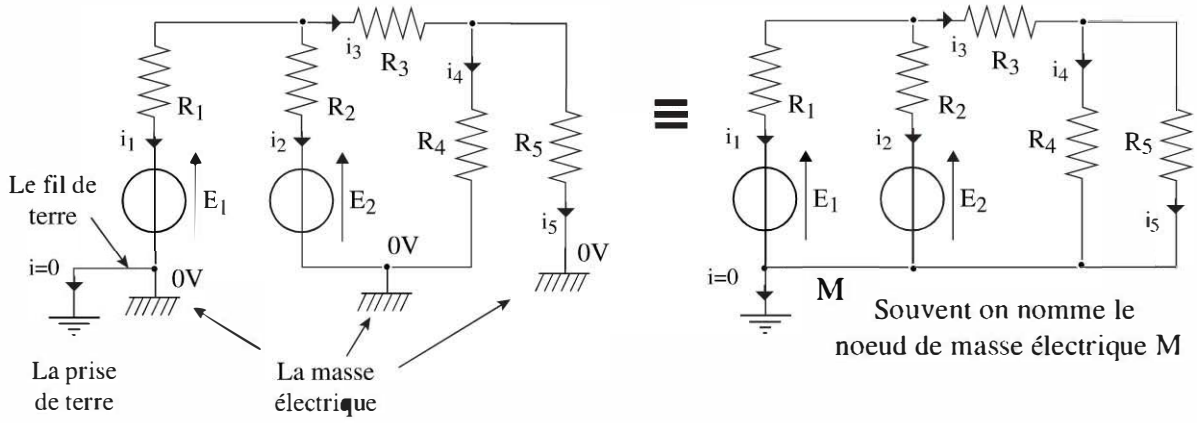


Figure 5.41

DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FOURIER

Joseph Fourier propose de représenter tout signal périodique par une série de fonctions sinusoïdales d'amplitudes c_n, de phases ϕ_n et de pulsations $\omega_n = n\omega$, différentes. La décomposition en série de Fourier est le processus de calcul des c_n et ϕ_n. L'ensemble des c_n et ϕ_n, forme le **spectre en fréquence** de $s(t)$.
L'opération inverse qui utilise le spectre en fréquence pour reconstruire la fonction $s(t)$, n'aboutit pas rigoureusement au bon résultat quel que soit $s(t)$. Toutefois, l'opération est parfaitement réussie quand $s(t)$ est continue et dérivable.

Copyright © 2007 Dunod.

On détermine le spectre en fréquence de $s(t)$ à partir des expressions suivantes :

$$\boxed{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))},$$

avec $\omega \dfrac{2\pi}{T}$, T la période et :

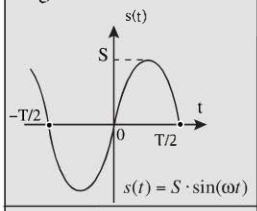
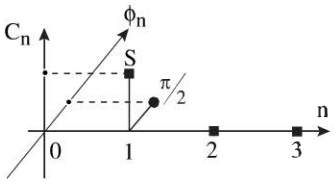
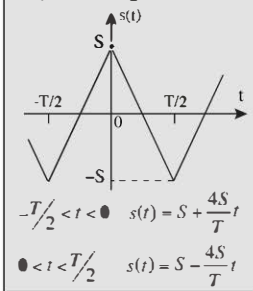
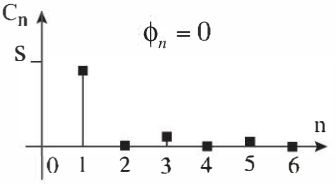
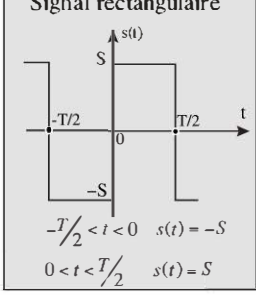
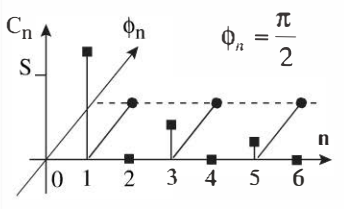
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt = c_0 \; ; \; a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(n\omega t)dt \; ; \; b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(n\omega t)dt\,.$$

a_0 est la valeur moyenne de $s(t)$. On obtient en contractant l'expression :

$$\boxed{s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \phi_n)} \text{ avec } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \mathrm{tg}(\phi_n) = \frac{b_n}{a_n}$$

c_0 représente la **valeur moyenne** de $s(t)$; c_1 est la **composante fondamentale** de $s(t)$, ou le fondamental de $s(t)$; c_n est l'**harmonique** de rang n de $s(t)$.
Le tableau 5.1 donne quelques exemples de décomposition en série de Fourier de signaux courants.

Tableau 5.1

Fonction périodique	Décomposition et spectre	
Signal sinusoïdal 	$c_0 = 0$ $c_1 = S$; $\phi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ $c_2 \cdots c_n = 0$	
Signal triangulaire 	$c_0 = 0$ *Pour n impaires:* $\Rightarrow c_n = \dfrac{8 \cdot S}{n^2 \cdot \pi^2}$; $\phi_n = 0$ *Pour n paires:* $\Rightarrow c_n = 0$	
Signal rectangulaire 	$c_0 = 0$ *Pour n impaires:* $\Rightarrow c_n = \dfrac{4 \cdot S}{n \cdot \pi}$; $\phi_n = \dfrac{\pi}{2}$ *Pour n paires:* $\Rightarrow c_n = 0$	

Copyright © 2007 Dunod.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

5.1 Dans un circuit électrique, où tous les dipôles sont parfaitement définis, quelles sont les inconnues principales et pourquoi le sont-elles ?

5.2 Dans un circuit électrique, quelle est la définition d'un nœud, quel est son degré minimal et quelle est la définition de sa frontière ? Pourquoi dans un circuit un nœud est-il forcément relié à la terre ?

5.3 Quelle est la définition d'une branche ? Quel peut être le contenu d'une branche ? Que représente la branche généralisée ?

5.4 Pour un graphe à b branches et n nœuds, combien y a-t-il d'équations de nœuds indépendants ni, d'équations de mailles indépendantes mi et d'équations indépendantes ei dans le système d'équations associées ?

5.5 Quelle est la différence entre la solution du régime libre et celle du régime forcé ?

5.6 Qui conditionne la solution en régime permanent d'un circuit ?

5.7 Qu'appelle-t-on régime transitoire ? Pourquoi cherche-t-on à utiliser des méthodes particulières pour trouver la solution en régime permanent ?

5.8 Comment étudier un circuit en régime permanent qui contient une source continue et une source sinusoïdale de fréquence fixe ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

5.9 À partir du circuit électrique de la figure 5.42 :

1. Identifier les nœuds en dessinant les frontières. Existe-t-il des fils d'interconnexion dans les nœuds ?
2. Déterminer le nombre de nœuds n, de branches b et de mailles m.

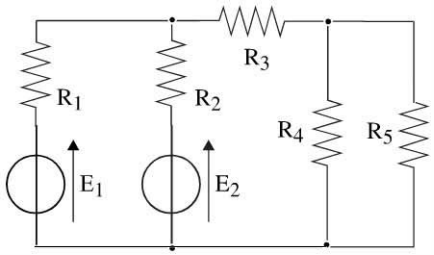


Figure 5.42

3. Déduire le nombre d'équations de nœuds ni, de mailles mi et totales ei.
4. En remplaçant R_4 et R_5 en parallèle par une résistance équivalente, redessiner le schéma électrique et reprendre les questions de 1 à 3.

5.10 Sur la maille de la figure 5.43 :

1. Flécher les tensions U_{R1}, U_{R2}, U_{R3} aux bornes des résistances de la maille, en respectant les conventions de la loi d'Ohm ;
2. Écrire la loi des mailles avec le sens de circulation indiqué, puis (avec la loi d'Ohm) réécrire l'expression en intégrant les courants.

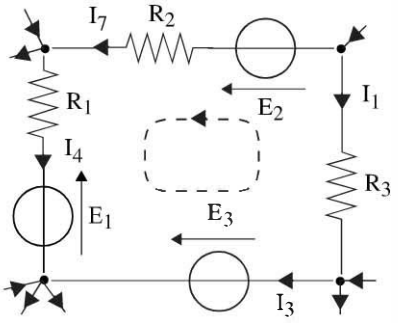


Figure 5.43

5.11 Même exercice que 5.10 mais avec la maille de la figure 5.44.

Copyright © 2007 Dunod.

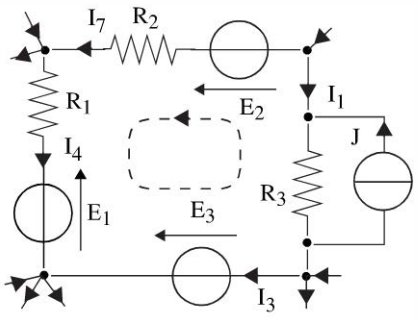


Figure 5.44

5.12 Dans le circuit de la figure 5.45 on recherche le courant I. Pour cela :

1. Dessiner le graphe en faisant apparaître I_{R1}, I_{R2}, $I_{R3} = I$;
2. Déterminer n, b, m, ei, ni et mi ;
3. Écrire les équations des n nœuds. Les comparer ;
4. Écrire les équations des m mailles. Les comparer ;
5. Écrire le système d'équations indépendantes du circuit électrique ;
6. Déterminer l'expression des courants inconnus. En déduire I.

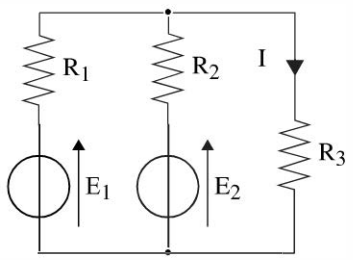


Figure 5.45

5.13 Parmi les schémas de la figure 5.46, lequel est dissemblable ?

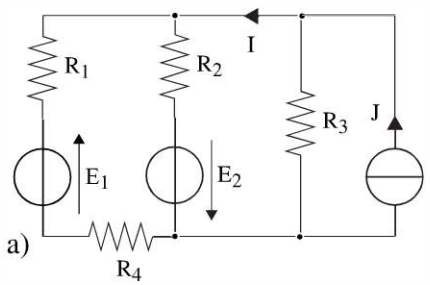


Figure 5.46

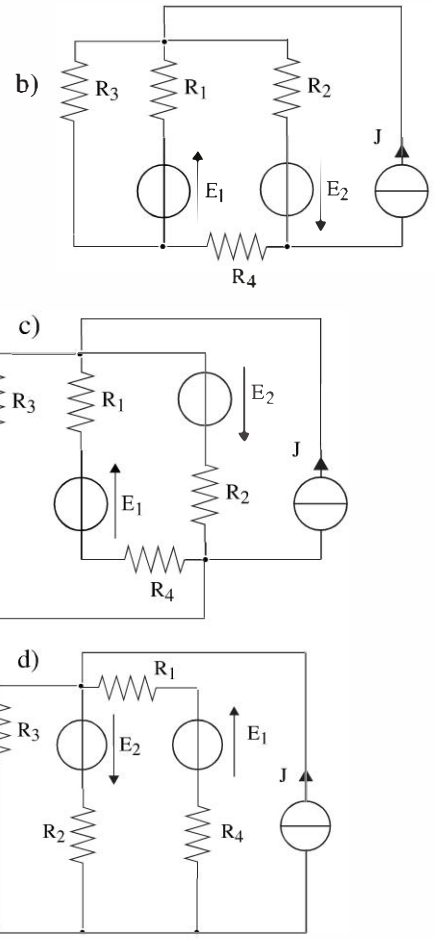


Figure 5.46 (bis)

5.14 Figure 5.47a et figure 5.47b : quels sont les courants qui restent identiques ?

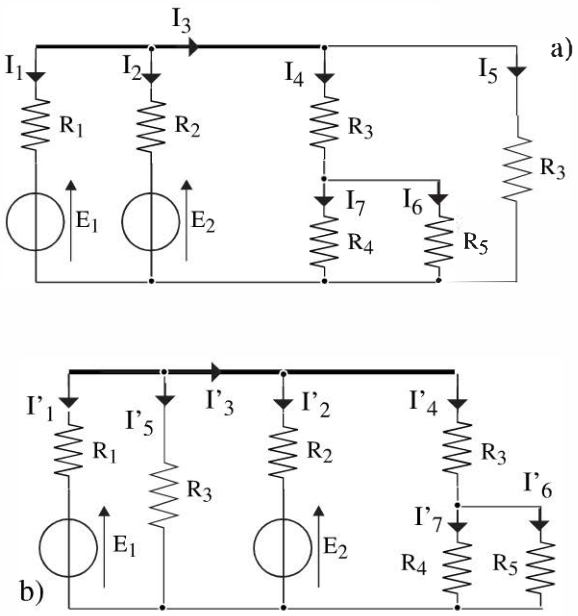


Figure 5.47

Copyright © 2007 Dunod.

5.15 On cherche à déterminer l'expression de $i(t)$ en régime permanent dans le circuit de la figure 5.48a.

1. Déterminer :

a) Combien trouve-t-on de sources de nature différente dans ce circuit ?

b) Quel est le régime d'étude à retenir ?

c) Y a-t-il des études partielles à mener ? Lesquelles ?

2. Mêmes questions pour le schéma de la figure 5.48b.

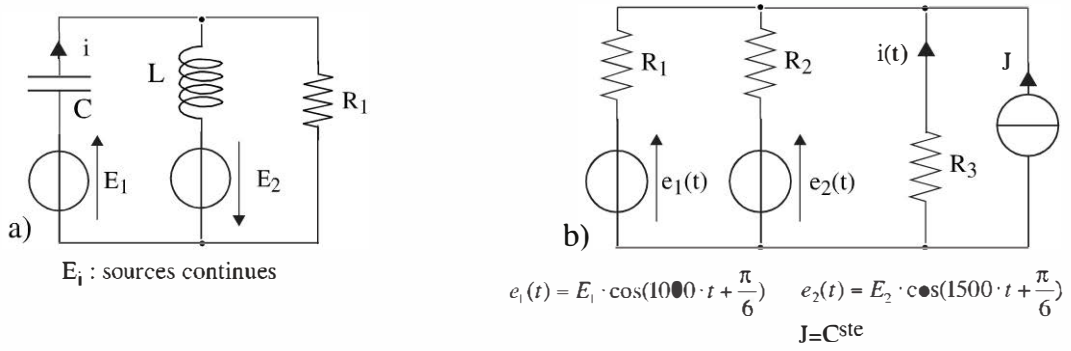


Figure 5.48

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 6

Étude en régime permanent continu

Objectifs

- Présenter les conditions d'étude en régime permanent continu (RPCC).
- Montrer quels types de circuits nécessitent une étude en RPCC.
- Définir les transformations que doit subir le schéma électrique en RPCC.
- Proposer des méthodes de résolution des équations algébriques.
- Définir des règles de calcul et des théorèmes.
- Présenter une méthodologie de réduction des schémas électriques.
- Définir les méthodes de calcul et de mesure de la puissance en RPCC.

Vocabulaire

Régime permanent continu RPCC
Schéma électrique équivalent en RPCC
Pont diviseur de tension
Pont diviseur de courant
Règle de Millman
Théorème de superposition
Dipôle à réduire
Réduction suivant Thévenin et Norton
Puissance continue
Distribution des puissances

Ce chapitre, qui traite de l'étude des circuits en régime permanent continu, propose une modélisation simple pour déterminer facilement les solutions des courants de branches et des tensions dans un circuit constitué par des sources continues. Cette méthode est aussi utilisable pour déterminer les valeurs moyennes des courants et des tensions, lorsque le circuit est composé de sources périodiques.
D'autre part, l'établissement de règles et de théorèmes va permettre, en complément des lois de Kirchhoff et de la loi d'Ohm, de simplifier la détermination des solutions et bien souvent en évitant les erreurs de calcul d'un système comprenant beaucoup d'équations.

Copyright © 2007 Dunod.

6.1 CONDITIONS D'ÉTUDE EN RÉGIME PERMANENT CONTINU

6.1.1 Régime permanent continu

Le chapitre 5 a montré que les circuits électriques sont décrits d'une manière générale par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dont l'équation différentielle principale du système se met sous la forme générale suivante :

$$A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f\left(e_1(t), \ldots, e_m(t), \frac{de_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{de_m(t)}{dt}, \frac{d^2 e_1(t)}{dt^2}\right)$$

Ce chapitre a aussi montré que le premier membre de l'équation traduit la façon dont sont agencés les dipôles ; le second membre est quant à lui constitué par une fonction des sources du circuit.

Nous avons aussi appris que la forme de la solution de l'équation en régime permanent dépend essentiellement du contenu et de la forme du second membre.

L'étude des circuits en **régime permanent à courant continu (RPCC)** a pour but de déterminer l'expression de la solution lorsque le second membre comporte des termes constants.

6.1.2 Conditions d'émergence d'un second membre constant

Les termes constants du second membre sont issus :

– des sources continues de tension ou de courant ;

– des sources périodiques dont la décomposition en série de Fourier[1] fait apparaître une valeur moyenne ;

– une combinaison des deux cas précédents.

➤ ***Circuits avec des sources uniquement continues***

En présence de sources continues, les dérivées dans le second membre de l'équation différentielle principale s'annulent et l'équation s'écrit alors :

$$A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f(E_0, \ldots, E_s)$$

La solution mathématique de l'équation est un courant constant (voir chapitre 5) :

$$i(t) = I = \frac{f(E_0, \ldots, E_s)}{A_0}, \text{ car } A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} = 0.$$

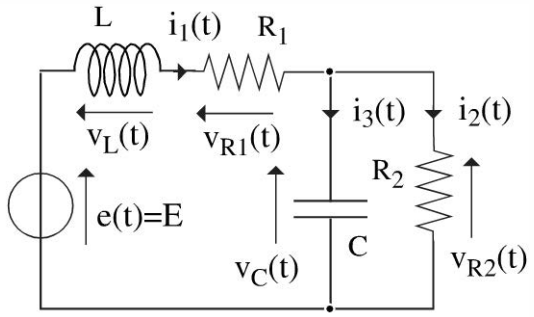
[1] Voir le « Pour en savoir plus : Décomposition en série de Fourier » du chapitre 5.

Copyright © 2007 Dunod.

Pour exemple, considérons le schéma du circuit électrique de la figure 6.1 qui est constitué de deux nœuds et de trois branches. Ce circuit est décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \\ v_{R1}(t) + v_L(t) - e(t) + v_{R2}(t) = 0 \\ v_{R1}(t) + v_L(t) - e(t) + v_C(t) = 0 \end{cases}$$

avec : $v_L(t) = L\dfrac{di_1(t)}{dt}$ et $i_3(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$.



n=2; b=3; n_i=1; m_i=2

Figure 6.1

Après développement et avec $e(t) = E$, on obtient pour $i_1(t)$ l'équation suivante :

$$\frac{R_2LC}{(R_1+R_2)} \times \frac{d^2i_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1R_2C+L}{(R_1+R_2)}\right)\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \frac{E}{(R_1+R_2)}$$

Comme toutes les solutions en RPCC sont des constantes[2], les dérivées successives s'annulent pour donner la solution :

$$i_1(t) = I_1 = \frac{E}{R_1+R_2}$$

De manière similaire, on obtient :

$$I_2 = I_1 = \frac{E}{R_1+R_2} \quad \text{et} \quad I_3 = 0$$

➤ ***Circuits avec des sources périodiques***

Une source périodique $e(t)$ dans un circuit, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, peut se décomposer en série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = E_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(E_i \cos(i\,\omega t + \alpha_i)),$$

où E_0 est une constante représentant la valeur moyenne de $e(t)$ et où la somme $\sum_{i=1}^{\infty}(E_i \cos(i\,\omega t + \alpha_i))$ est formée uniquement de termes sinusoïdaux. En intégrant $e(t)$ dans l'équation différentielle principale on obtient :

$$A_n\frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1\frac{d^1 i(t)}{dt} + A_0 i(t) = f\left(e(t), \frac{de(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^s e(t)}{dt^s}\right)$$

[2] On prendra l'habitude de noter les constantes par des lettres majuscules.

Copyright © 2007 Dunod.

Le calcul de la dérivée première de $e(t)$ aboutit à :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d\left(E_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(E_i \cos(i\,\omega t + \alpha_i))\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(E_i \frac{d\,(\cos(i\,\omega t + \alpha_i))}{dt}\right)$$

D'où :

$$\frac{de(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(E_i i\omega \cos(i\,\omega t + \alpha_i + \frac{\pi}{2})\right)$$

Cette expression est essentiellement composée de termes sinusoïdaux, qui par définition, ne possèdent pas de valeur moyenne.

De même, le calcul des autres dérivées ne fait apparaître que des termes sinusoïdaux :

$$\frac{d^m e(t)}{dt^m} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(E_i\,(i\omega)^m\,\cos(i\omega t + \alpha_i + m\,\frac{\pi}{2})\right)$$

En résumé, puisque le système est linéaire, le second membre de l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$f\left(e(t), \frac{de(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^s e(t)}{dt^s}\right) = f(E_0) + f\left(e(t) - E_0, \frac{de(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^s e(t)}{dt^s}\right)$$

qui contient un terme constant $f(E_0)$ et des termes sinusoïdaux de pulsations $i\,\omega$ différentes. La solution (voir chapitre 5) est alors constituée d'une constante et d'un terme sinusoïdal :

$$i(t) = \frac{f(E_0)}{A_0} + \sum_{i=1}^{\infty}(B_i \cos(i\,\omega t + \delta_i))$$

La constante $I = \dfrac{f(E_0)}{A_0}$, représente la valeur moyenne de $i(t)$.

> Pour déterminer la valeur moyenne des signaux périodiques dans le circuit électrique, on est amené à étudier le circuit en RPCC avec les sources périodiques remplacées par leur constante.

Dans l'exemple du circuit de la figure 6.2, où la source périodique $e(t)$ est formée d'une constante E_0 et d'une sinusoïde $E_1 \cos(\omega t)$, la solution complète (représentée sur la courbe) fait apparaître la somme de la valeur moyenne I_0 et d'une sinusoïde $I_1 \cos(\omega t + \beta_1)$.

En reprenant les résultats du circuit de la figure 6.1, on vérifie bien que la solution constante est égale à $I_0 = \dfrac{E_0}{R_1 + R_2} = \dfrac{15}{10 + 5} = 0{,}1$ A, obtenue en remplaçant dans le schéma $e(t)$ par sa valeur moyenne E_0.

> Un circuit qui comporte une ou plusieurs sources périodiques à valeurs moyennes non nulles, possède un terme constant dans le second membre de son équation différen-

Copyright © 2007 Dunod.

tielle principale. L'étude du circuit en RPCC permet la détermination des valeurs moyennes des courants. Cette étude est menée en remplaçant les sources périodiques par leurs valeurs moyennes respectives.

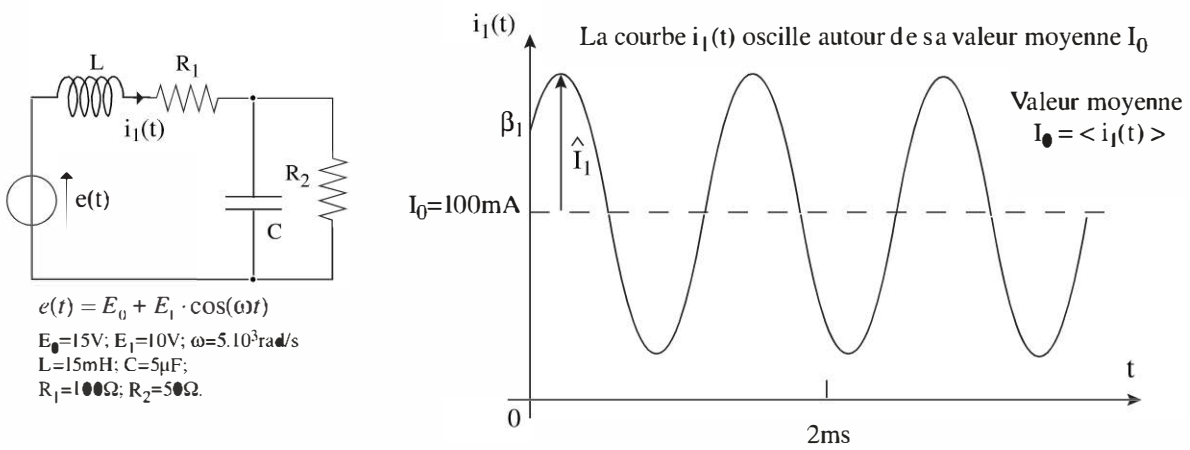


Figure 6.2

6.1.3 Comportement des dipôles passifs en RPCC

Le paragraphe précédent a permis de montrer qu'en RPCC et en présence de sources continues, seuls des courants et des tensions continus parcourent le circuit électrique. Dans ces conditions, leurs dérivées temporelles ont naturellement été annulées dans les équations.

Les expressions des tensions et courants dans les dipôles passifs L et C, incluent des dérivées. Il est donc nécessaire de revoir ces expressions en RPCC et d'évaluer le résultat.

➤ *Condensateur*

Sachant qu'en RPCC, la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = \text{Cste} = U_C$, l'expression du courant dans le condensateur s'annule $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt} = C\dfrac{dU_C}{dt} = 0.$

Aucun courant ne peut traverser le condensateur si la tension à ses bornes est constante.

Quelles que soient les sources d'énergie constantes dans le circuit, le condensateur ne dérive plus de courant. La branche du graphe associé au schéma électrique du condensateur n'a alors plus de raison d'exister, car le courant est nul. Le graphe peut ainsi se réduire en éliminant toutes les branches qui comportent des condensateurs en série. Les condensateurs du schéma électrique sont alors remplacés par des circuits ouverts.

En redessinant le schéma électrique associé au graphe réduit, tous les condensateurs sont effacés du dessin.

➤ *Inductance*

Le courant dans l'inductance $i_L(t) = \text{Cste} = I_L$, implique une tension aux bornes qui s'annule $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} = C\dfrac{dI_L}{dt} = 0.$

Copyright © 2007 Dunod.

Il n'y a pas de tension aux bornes d'une inductance lorsque le courant qui la traverse est constant.

Puisque les potentiels aux deux extrémités sont égaux, le graphe associé au schéma électrique voit les nœuds de part et d'autre de l'inductance se confondre ; l'élimination des nœuds réduit l'ordre du graphe. Dans le schéma électrique, redessiné en RPCC, les inductances sont remplacées par des courts-circuits.

6.2 TRANSFORMATION DES CIRCUITS EN RPCC

La présence d'inductances et de condensateurs dans le circuit entraîne, pour son étude en RPCC, une transformation du schéma électrique initial le modélisant ; la transformation aboutit au **schéma électrique équivalent** en RPCC.

6.2.1 Tableau des équivalents

Pour construire le schéma électrique équivalent en RPCC, il faut connaître dans ce régime les modèles utilisés pour tous les dipôles actifs (sources continues, sources périodiques) et passifs (R, L et C)

➤ ***Modèles équivalents des générateurs en RPCC***

Contrairement aux générateurs continus qui ne subissent aucune transformation (voir § 6.1) les générateurs périodiques du schéma électrique initial sont remplacés par des générateurs continus, dont les valeurs sont celles de leurs valeurs moyennes.

Le circuit de la figure 6.3 comportant une source de tension continue $e(t) = E$ et une source de courant continue $j(t) = J$ (figure 6.3a) ne subit aucune transformation pour son étude en RPCC (figure 6.3b).

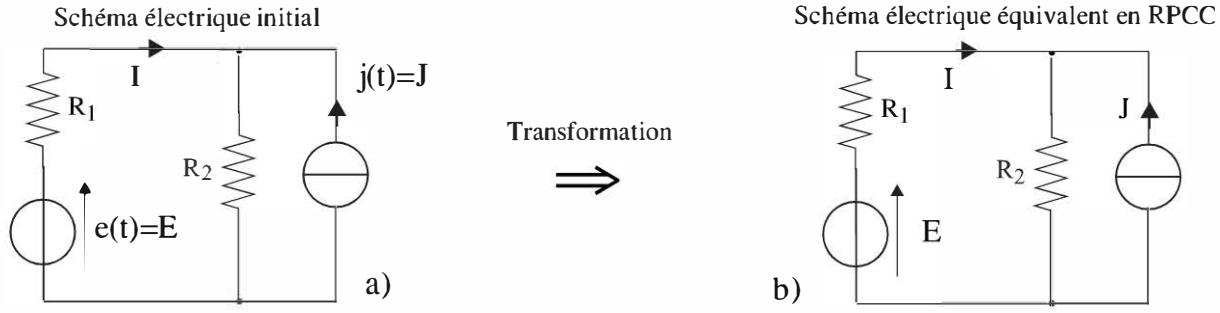


Figure 6.3

Tandis que le même schéma électrique initial (figure 6.4) avec $e(t)$ et $j(t)$ périodiques formés d'une constante (E_0 et J_0) et d'une partie variable ($e_v(t)$ et $j_v(t)$) se transforme pour ne laisser que les parties constantes E_0 et J_0 ; les sources variables ont été **éteintes**[3].

[3] On rappelle qu'éteindre une source de tension, c'est la remplacer par un court-circuit, et éteindre une source de courant, c'est lui substituer un circuit ouvert.

Copyright © 2007 Dunod.

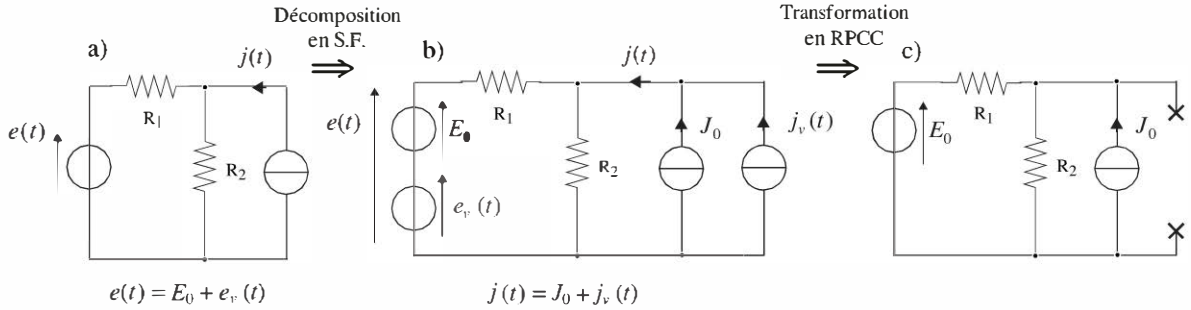


Figure 6.4

Lorsque les générateurs périodiques sont sans valeur moyenne, ils sont alors purement et simplement éteints (figure 6.5).

Le tableau 6.1 présente quelques exemples de modèles de générateurs issus de leurs décompositions en série de Fourier. Le tableau 6.2 est une généralisation.

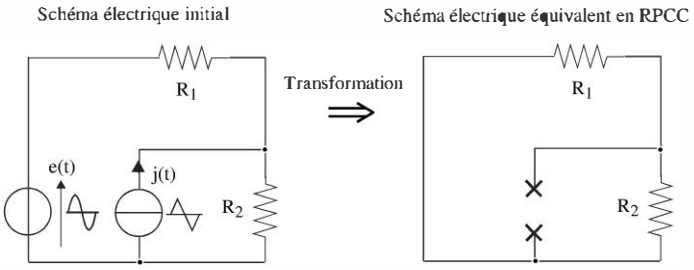
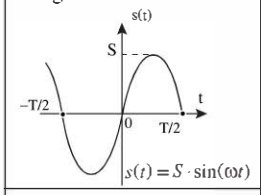
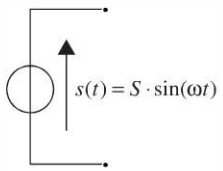
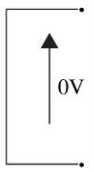
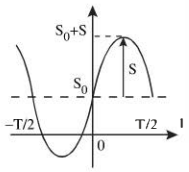
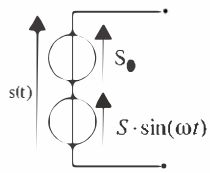
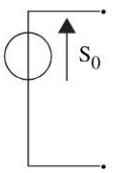
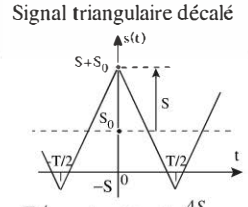
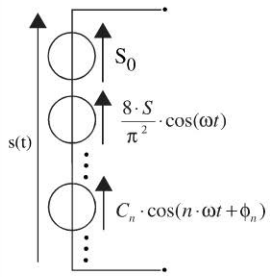
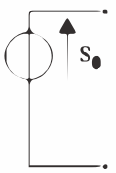


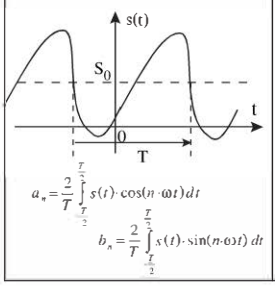
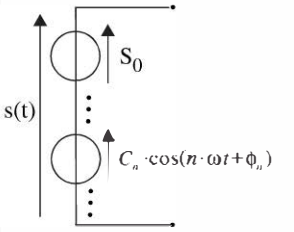
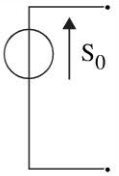
Figure 6.5

Tableau 6.1

Générateur périodique	Décomposition en S.F.	Modèle général	Modèle équivalent en RPCC	
Signal sinusoïdal  $s(t) = S \cdot \sin(\omega t)$	$c_0 = 0$ $c_1 = S;\quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ $c_2 \cdots c_n = 0$	 $s(t) = S \cdot \sin(\omega t)$	 0V	*Exemples de générateurs*
Signal sinusoïdal décalé  $s(t) = S_0 + S \cdot \sin(\omega t)$	$c_0 = S_0$ $c_1 = S;\quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ $c_2 \cdots c_n = 0$	 s(t) $S \cdot \sin(\omega t)$	 S_0	
Signal triangulaire décalé  $-\frac{T}{2} < t < 0 \quad s(t) = S + \frac{4S}{T}t + S_0$ $0 < t < \frac{T}{2} \quad s(t) = S - \frac{4S}{T}t + S_0$	$c_0 = S_0$ *Pour n impaires:* $\Rightarrow c_n = \frac{8 \cdot S}{n^2 \cdot \pi^2};\ \phi_n = 0$ *Pour n paires:* $\Rightarrow c_n = 0$	 s(t) $\frac{8 \cdot S}{\pi^2} \cdot \cos(\omega t)$ $C_n \cdot \cos(n \cdot \omega t + \phi_n)$		

Copyright © 2007 Dunod.

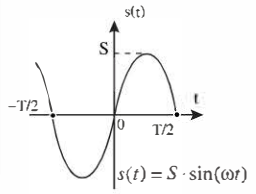
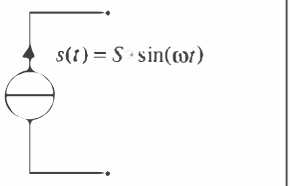
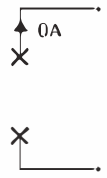
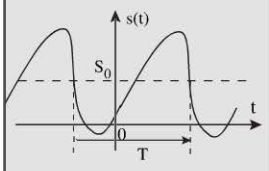
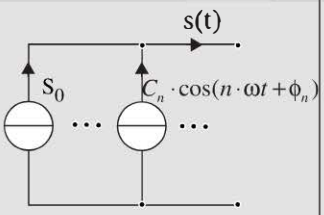
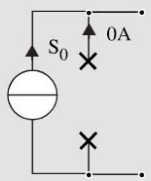
Tableau 6.2

Générateur périodique	Décomposition en S.F.	Modèle général	Modèle équivalent en RPCC	
Signal périodique  $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cdot\cos(n\cdot\omega t)\,dt$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cdot\sin(n\cdot\omega t)\,dt$	$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = S_0$ $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\phi_n = \text{atg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$			*Généralisation*

Les tableaux 6.1 et 6.2 ont été dressés à partir de sources de tension ; le tableau 6.3 est construit à partir de sources de courant. La différence réside dans la manière d'éteindre et d'associer les sources de courant (en parallèle plutôt qu'en série).

> ***Remarque*** : Lorsqu'un schéma électrique initial possède conjointement des générateurs continus et des générateurs périodiques, alors le schéma électrique équivalent en RPCC possède tous les générateurs continus et les générateurs constants issus des générateurs périodiques.

Tableau 6.3

Générateur périodique	Décomposition en S.F.	Modèle	Générateur équivalent en RPCC	
Signal sinusoïdal 	$c_0 = 0$ $c_1 = S;\quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ $c_2 \cdots c_n = 0$			*Exemple*
Signal périodique 	$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = S_0$			*Généralisation*

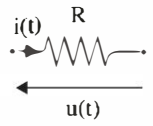
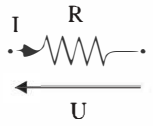
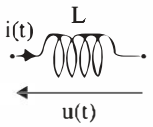
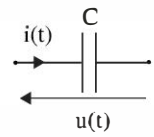
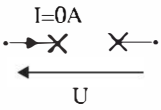
➤ *Modèles équivalents des dipôles passifs en RPCC*

Le paragraphe 6.1 a aussi montré qu'en RPCC les dipôles passifs L et C se transformaient soit en des circuits fermés, soit en des circuits ouverts.

Le tableau 6.4 présente les **modèles équivalents** des trois dipôles passifs R, L et C, en régime permanent continu.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 6.4

Dipôle passif	Expression temporelle	Expression en RPCC (U et I sont des constantes)	Dipôle équivalent en RPCC
Résistance 	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U = R \cdot I$	Une résistance 
Inductance 	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$U = 0V$ et ceci $\forall I$	Un circuit fermé 
Condensateur 	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$I = 0A$ et ceci $\forall U$	Un circuit ouvert 

Le schéma électrique équivalent en RPCC (voir exemple figure 6.6) est établi en utilisant les modèles en RPCC des dipôles passifs tirés du tableau 6.4.

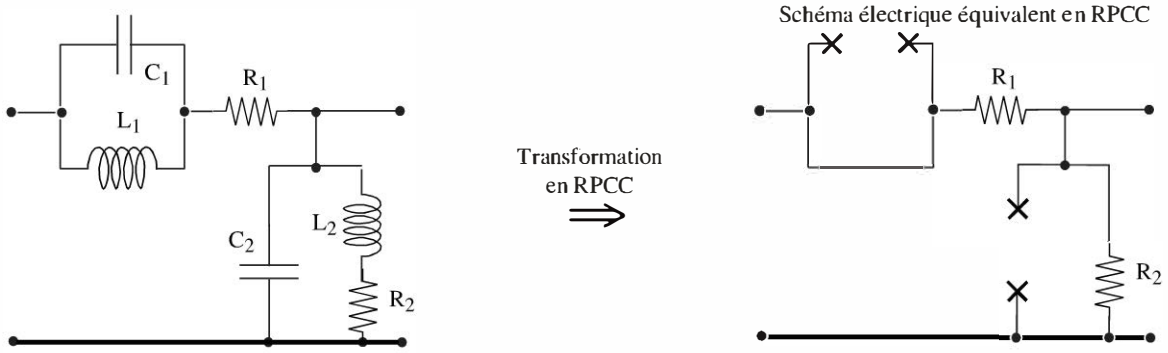


Figure 6.6

6.2.2 Méthodologie d'étude en RPCC

Pour étudier un circuit en RPCC, il convient tout d'abord de dresser le schéma électrique équivalent en utilisant les tableaux des modèles équivalents, puis de déterminer le système d'équations associées au schéma électrique et enfin, de résoudre les équations pour déterminer les courants et tensions inconnus.

Il faut remarquer qu'à partir des modèles équivalents en RPCC, les schémas électriques équivalents comportent alors :

– des générateurs uniquement continus, issus des générateurs continus, ou des générateurs périodiques ;

– des résistances. Il n'y a ni condensateur ni inductance, car leurs modèles se résument à de simples circuits ouverts ou fermés.

Copyright © 2007 Dunod.

Le système d'équations, associé au schéma électrique équivalent, ne comporte plus d'équations différentielles, car il ne contient ni inductance, ni condensateur.

La résolution des équations conduit à la détermination des courants de branches ; tous ces courants sont constants, ainsi que toutes les tensions dans le schéma électrique équivalent.

La procédure d'étude des circuits en régime permanent est résumée par l'organigramme de la figure 6.7.

La figure 6.8 propose un exemple de circuit électrique qui, pour son étude en régime permanent continu, suit les étapes de l'organigramme précédent.

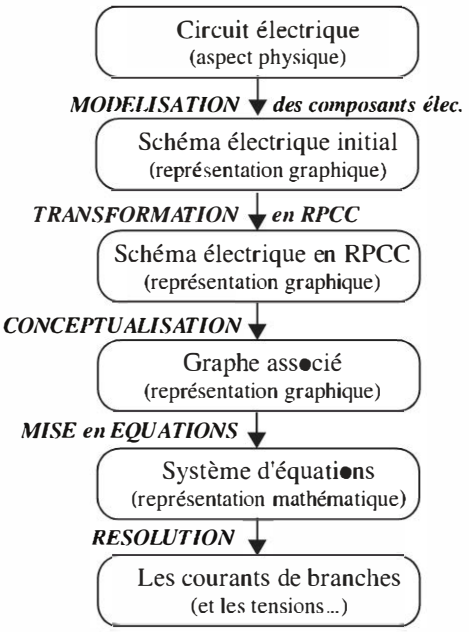


Figure 6.7

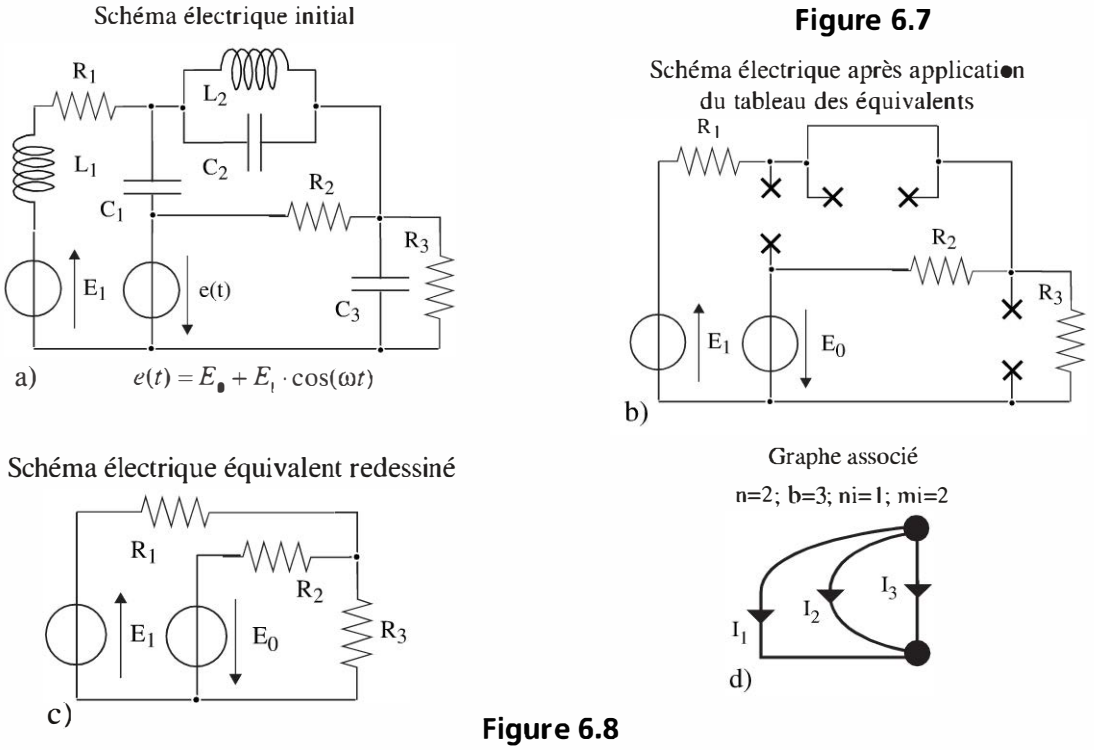


Figure 6.8

Le système d'équations (une équation de nœuds $ni = 1$ et deux équations de mailles $mi = 2$) est écrit à partir du graphe associé (figure 6.8d) :

$$\begin{cases} 0 = I_1 + I_2 + I_3 \\ E_1 + U_{R1} - U_{R3} = 0 \\ -E_0 + U_{R2} - U_{R3} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = -E_1 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_0 \end{cases}$$

Après résolution, les solutions sont alors :

$$I_1 = \frac{-(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \; ; \; I_2 = \frac{R_3 E_1 + (R_1 + R_3)E_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \; ; \; I_3 = \frac{R_2 E_1 - R_1 E_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Copyright © 2007 Dunod.

6.3 MISE EN ÉQUATION ET RÉSOLUTION

6.3.1 Représentation matricielle des équations

Le système d'équations algébriques, associé à un schéma électrique équivalent en RPCC à b branches, se met sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \ldots + a_{1b}I_b = b_{11}E_1 + \ldots + b_{1k}E_k + c_{11}J_1 + \ldots + c_{1p}J_p \\ a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \ldots + a_{2b}I_b = b_{21}E_1 + \ldots + b_{2k}E_k + c_{21}J_1 + \ldots + c_{2p}J_p \\ \quad \vdots \\ a_{b1}I_1 + a_{b2}I_2 + \ldots + a_{bb}I_b = b_{b1}E_1 + \ldots + b_{bk}E_k + c_{b1}J_1 + \ldots + c_{bp}J_p \end{cases}$$

où I_i sont les b courants inconnus, E_j les k sources de tension continue et J_l les p sources de courant continu.

Le système peut aussi s'écrire sous la forme matricielle[4] suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1b} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{b1} & \ldots & a_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \ldots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} b_{1i}E_i + \sum_{j=1}^{p} c_{1j}J_j \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{k} b_{bi}E_i + \sum_{j=1}^{p} c_{bj}J_j \end{bmatrix}$$

Cette écriture matricielle peut toujours se mettre sous la forme $[R][I] = [U]$, où les coefficients a_{ij} ont pour unité des ohms. La matrice $[R]$, carrée et de rang b, est alors appelée la **matrice résistance**.

Remarque : Signalons que le système d'équations algébriques, associé au circuit en régime permanent, n'est jamais un système homogène ($[R][I] \neq [0]$) car il existe toujours une source dans le circuit.

Déterminons par exemple la matrice des résistances du schéma électrique équivalent de la figure 6.9.

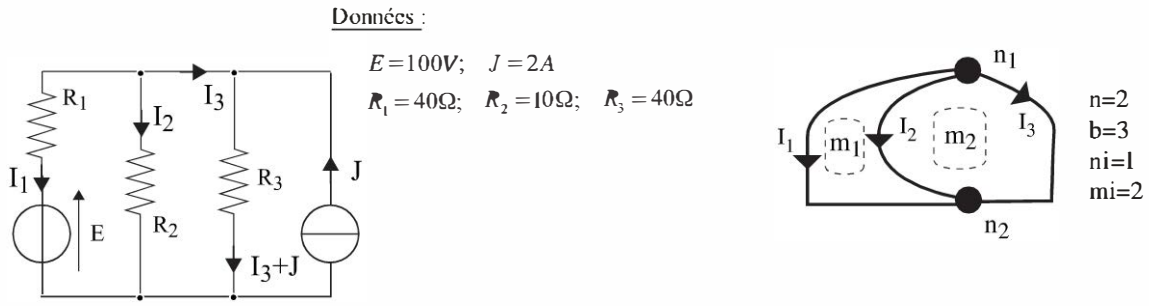


Figure 6.9

[4] Voir « Pour en savoir plus : Bases du calcul matriciel » en fin de chapitre.

Copyright © 2007 Dunod.

Le graphe associé comporte deux nœuds $n = 2$ et trois branches $b = 3$. Le système possède trois équations algébriques : $ni = 1$ et $mi = 2$.

$$n_1 : I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$m_1 : E + R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$
$$m_2 : R_2 I_2 - R_3(I_3 + J) = 0$$

L'écriture sous forme matricielle fait clairement apparaître la matrice résistance :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ R_2 I_2 - R_3(I_3 + J) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ R_3 \cdot J \end{bmatrix}$$

6.3.2 Résolution des équations

Le système d'équations est linéaire et toutes les équations sont indépendantes. La résolution des équations associées au circuit en régime permanent continu utilise les méthodes mathématiques traditionnelles, et nous invitons le lecteur à consulter des ouvrages spécialisés de mathématiques.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous limitons à exposer la méthode de substitution, et nous développons les méthodes de Cramer et de Gauss-Jordan dans « Pour en savoir plus » à la fin du chapitre.

➤ ***Méthode de substitution***

Pour analyser cette méthode, que tout étudiant a déjà utilisée, appuyons-nous sur l'exemple du schéma électrique équivalent de la figure 6.9. Le système d'équations associé, à trois équations et trois inconnus, s'écrit :

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ R_2 I_2 - R_3(I_3 + J) = 0 \end{array}} \end{cases} \Longleftarrow \text{Système d'ordre 3.}$$

Dans une première étape, exprimons I_3 en fonction de I_1 et I_2 à partir de la première équation et reportons cette expression dans les deux autres équations :

$$\begin{cases} I_3 = -(I_1 + I_2) \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ R_2 I_2 - R_3(I_3 + J) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_3 = -(I_1 + I_2) \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ R_2 I_2 - R_3(-(I_1 + I_2) + J) = 0 \end{cases}$$

Le système est formé de la fonction $I_3 = f(I_1, I_2)$, entièrement définie quand I_1 et I_2 seront connus, et d'un nouveau système à deux équations à deux inconnues (système d'ordre 2).

$$\begin{cases} I_3 = f(I_1, I_2) = -(I_1 + I_2) \\ \boxed{\begin{array}{l} R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ (R_2 + R_3) I_2 - R_3(-I_1 + J) = 0 \end{array}} \end{cases} \Longleftarrow \text{Nouveau système d'ordre 2.}$$

À l'étape suivante, on renouvelle la stratégie en exprimant I_2 en fonction de I_1, dans le nouveau système et en reportant l'expression dans la dernière équation.

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E \\ (R_2 + R_3) I_2 - R_3(-I_1 + J) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_2 = \dfrac{E + R_1 I_1}{R_2} \\ (R_2 + R_3) I_2 - R_3(-I_1 + J) = 0 \end{cases}.$$

Le système initial comporte maintenant deux fonctions et une équation.

$$\begin{cases} I_3 = f(I_1, I_2) = -(I_1 + I_2) \\ I_2 = g(I_1) = \dfrac{E + R_1 I_1}{R_2} \\ \boxed{(R_2 + R_3)\left(\dfrac{E + R_1 I_1}{R_2}\right) - R_3(-I_1 + J) = 0} \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à résoudre l'équation restante qui définit I_1.

$$I_1 = \frac{R_2 R_3 J - (R_2 + R_3) E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = -1{,}75 \text{ A}$$

En reportant I_1 dans $I_2 = f(I_1)$ on obtient I_2, puis en introduisant I_1 et I_2 dans $I_3 = f(I_1, I_2)$ on tire I_3.

$$I_2 = \frac{E + R_1 I_1}{R_2} = 3 \text{ A et } I_3 = -I_1 - I_2 = -1{,}25 \text{ A}$$

En résumé : la méthode est constituée d'étapes, qui ont pour but de réduire successivement l'ordre du système d'équations. La dernière étape aboutit à la détermination de la dernière inconnue. À partir des fonctions, on lève une à une les inconnues. Cette méthode revient à « triangulariser » la matrice $[R]$.

➤ ***Comparaison entre les méthodes de résolution***

Le tableau 6.5 donne les avantages et les inconvénients des méthodes de substitution, de Cramer et du pivot (Gauss-Jordan) sachant qu'une méthode ne prédomine pas sur les autres.

Tableau 6.5

Méthodes	*Propriétés principales*
Substitution	+ peu de calculs; – mal adaptée à des systèmes de plus de 4 inconnues; – ne se prête pas au calcul automatique par calculateur.
Cramer	+ adaptée à des systèmes de plus de 4 inconnues; + se prête au calcul automatique; – $b+1$ calculs de déterminants; – détermination lente.
Gauss-Jordan	+ adaptée à des systèmes de plus de 4 inconnues; + se prête au calcul automatique; + calculs simples; + détermination rapide; – erreurs de calcul s'ajoutent (Pb de conditionnement).

Copyright © 2007 Dunod.

6.4 RÈGLES ET THÉORÈME USUELS

Jusqu'ici, pour déterminer une grandeur quelconque (tension ou courant) dans un circuit électrique, il fallait établir un graphe, puis écrire les équations issues des lois de Kirchhoff.

Toutefois, on doit pouvoir compter, avec l'habitude, sur des automatismes qui rendent cette résolution plus rapide. Parmi les petits circuits que l'on rencontre fréquemment - qui font très souvent partie intégrante d'un circuit plus complexe –, on trouve : les **ponts diviseurs** de tension et de courant, ainsi que les **circuits à structure parallèle**. À ces circuits sont associées des règles pour un calcul rapide.

6.4.1 Règles des ponts diviseurs de tension et de courant

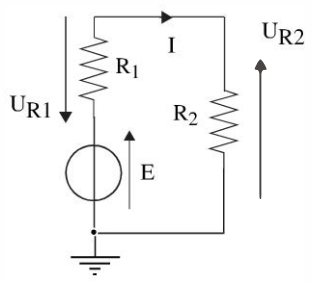


Figure 6.10

➤ ***Pont diviseur de tension***

La boucle de la figure 6.10 forme un **pont diviseur de tension**. U_{R2} est une tension inférieure à la source E, car elle n'est qu'une partie de la tension aux bornes des résistances en série ; U_{R2} est une division de E.

Le rapport de division entre U_{R2} et E est :

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} \Longrightarrow U_{R2} = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \Longrightarrow \boxed{U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$$

Remarque : Sur la figure 6.10, la règle du pont diviseur de tension appliquée à la tension U_{R1} entraîne : $U_{R1} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$.

Comme toute règle, il convient de l'utiliser dans son strict domaine de validité.

Ainsi, la règle n'est pas applicable au circuit de la figure 6.11a – où l'on retrouve pourtant une partie du circuit précédent – parce que la résistance R_3 dévie une partie du courant I ; les courants dans R_1 et R_2 ne sont plus identiques.

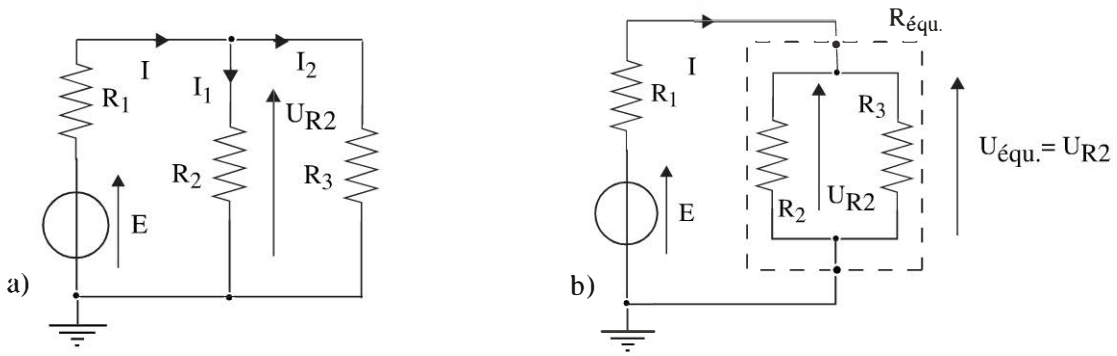


Figure 6.11

Copyright © 2007 Dunod.

Cependant, en remplaçant les résistances R_2 et R_3 par une résistance équivalente $R_{équ.}$ (figure 6.11b) la règle du pont diviseur de tension s'applique à nouveau, car les courants dans R_1 et $R_{équ.}$ sont identiques. La tension $U_{équ.}$ devient :

$$U_{équ} = \frac{R_{équ}}{R_1 + R_{équ}} E \text{ avec } R_{équ} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \text{ d'où } U_{équ} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E.$$

➤ ***Pont diviseur de courant***

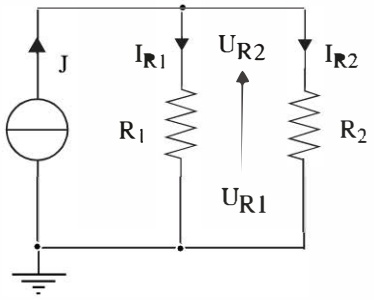


Figure 6.12

De même que le pont diviseur de tension divise une tension, le **pont diviseur de courant** divise un courant. Sur la figure 6.12, le courant de la source J est divisé entre deux résistances R_1 et R_2.

Le courant I_{R2} dans la résistance R_2 a pour expression :

$I_{R1} + I_{R2} = J$;

$R_1 I_{R1} = U_{R1} = U_{R2} = R_2 I_{R2}$ et donc, $R_1 I_{R1} = R_2 I_{R2}$;

d'où, $R_1 I_{R1} + R_2 I_{R1} = R_2 I_{R2} + R_2 I_{R1} \Longrightarrow I_{R1}(R_1 + R_2) = R_2(I_{R1} + I_{R2})$;

$$I_{R1}(R_1 + R_2) = R_2 J \Longrightarrow \boxed{I_{R1} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} J}$$

Attention, cette règle ne s'applique qu'au circuit de la figure 6.13. À la figure 6.11, il faut au préalable transformer le schéma en faisant apparaître une résistance équivalente $R_{équ.}$ pour utiliser la règle du pont diviseur.

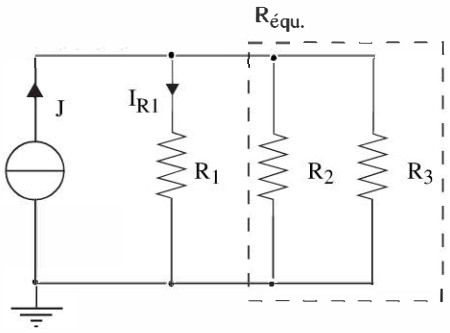


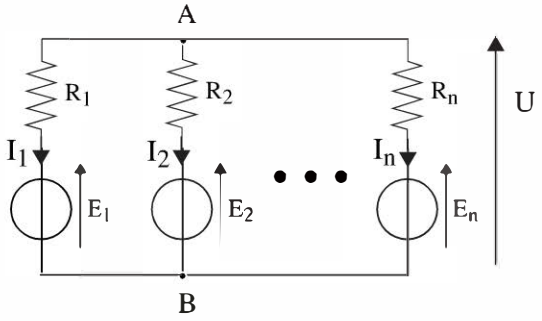
Figure 6.13

$$I_{R1} = \frac{R_{équ.}}{(R_1 + R_{équ.})} J \text{ et } R_{équ.} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\Longrightarrow I_{R1} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} J.$$

6.4.2 Règle de Millman

Cette règle, qui doit son nom à l'électronicien d'origine russe Jacob Millman, propose l'expression de la tension U aux bornes des deux nœuds d'un schéma électrique à structure parallèle.



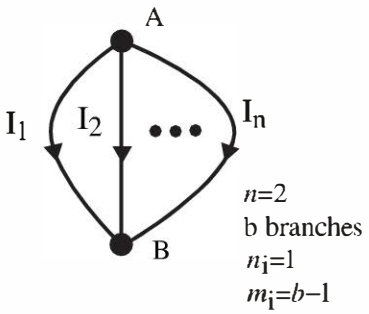


Figure 6.14

Copyright © 2007 Dunod.

La figure 6.14 présente le schéma électrique dont la structure est celle d'une association de dipôles de Thévenin en parallèle. Le graphe possède deux nœuds (A et B) et b branches.

En isolant (figure 6.15) le premier dipôle de Thévenin (E_1, R_1), on établit l'expression du courant de branche I_1 :

$$0 = -U + E_1 + R_1 I_1 \Longrightarrow I_1 = \frac{U - E_1}{R_1}$$

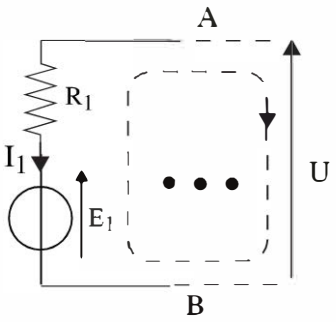


Figure 6.15

L'expression générale des courants de branches est :

$$0 = -U + E_n + R_n I_n \Longrightarrow I_n = \frac{U - E_n}{R_n}$$

En appliquant la loi des nœuds au nœud A, qui rassemble l'ensemble des courants de branches, on obtient :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} I_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} I_i = 0 = U \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i}$$

On aboutit alors à l'expression de la règle de Millman :

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}}$$

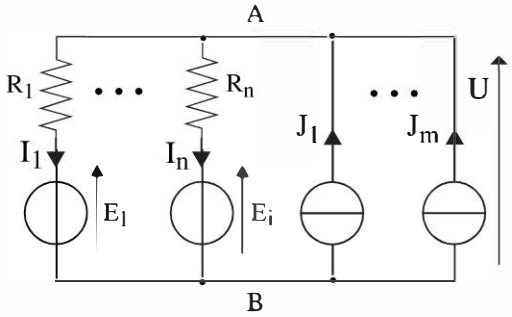


Figure 6.16

Il est possible d'étendre le théorème pour l'adapter au schéma de la figure 6.16 qui intègre des dipôles de Thévenin et des sources de courant, connectées entre les deux nœuds A et B. Le théorème conduit à l'expression généralisée de U :

$$I_i = \frac{U - E_i}{R_i}, \text{ et au nœud } A \ \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{j=1}^{m} J_j = 0 \text{ d'où } \boxed{U = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i} + \sum_{i=1}^{m} J_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}}$$

Dans l'exemple de la figure 6.17, l'expression de U est :

$$U = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-R_2 E_1 + R_1 R_2 J}{R_1 + R_2}$$

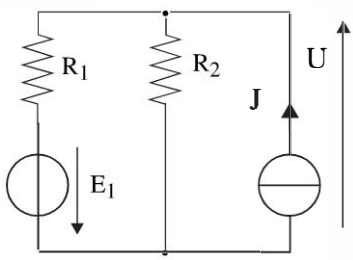


Figure 6.17

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : Pour utiliser cette formulation sans commettre d'erreur, il convient de faire particulièrement attention au sens des E_i et des J_k, par rapport à la tension U recherchée.

6.4.3 Théorème de superposition des sources

Ce théorème s'applique à des circuits linéaires, qui comportent un nombre important de sources indépendantes.

Le principe du théorème veut que le courant dans un dipôle soit la somme des effets de chacune des sources pris séparément.

Pour comprendre l'application du théorème, considérons le schéma électrique de la figure 6.18a, où l'on cherche à déterminer l'expression du courant I dans R_2. Le schéma comporte deux sources indépendantes E_1 et J_1.

Les deux sources conduisent à réaliser deux études séparées qui aboutissent aux calculs de deux courants partiels I_{p1} et I_{p2}.

Dans la première étude, J_1 est éteinte. L'étude donne lieu au schéma partiel de la figure 6.18b. Le courant partiel dans la résistance R_2, I_{p1} est égal à :

$$I_{p1} = \frac{E_1}{(R_1 + R_2)}$$

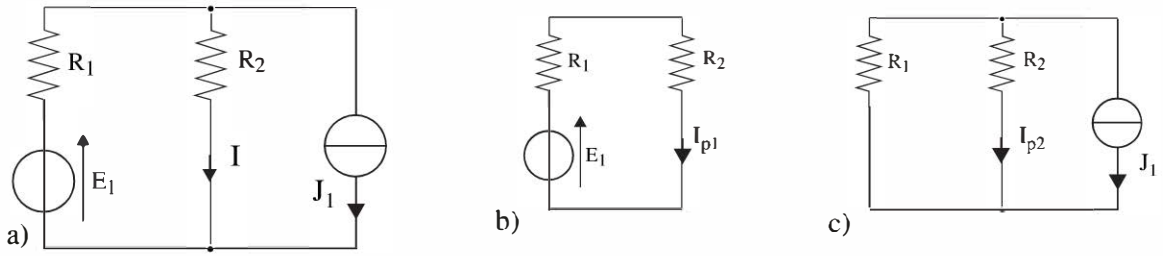


Figure 6.18

Dans la seconde étude E_1 est éteinte. Le schéma est celui de la figure 6.18c.

Le courant partiel I_{p2} dans la résistance R_2 devient (pont diviseur de courant) :

$$I_{p2} = \frac{-R_1}{(R_1 + R_2)} \cdot J_1$$

En final, le courant I dans la résistance R_2 est égal à la somme des courants partiels, soit :

$$I = \frac{E_1}{(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \cdot J_1 = \frac{E_1 - R_1 \cdot J_1}{(R_1 + R_2)}$$

Pour calculer le courant I d'une branche d'un circuit électrique linéaire (figure 6.19) constitué de n sources de tension indépendantes et m sources de courant indépendantes, il convient d'effectuer $n + m$ déterminations de courants partiels I_{pi} dans cette branche. Un schéma électrique différent est associé à chaque détermination (figure 6.20) dans lequel sont éteintes $n + m - 1$ sources. I est alors la somme des courants I_{pi} : $I = \sum_{i=1}^{n+m} I_{pi}$.

Copyright © 2007 Dunod.

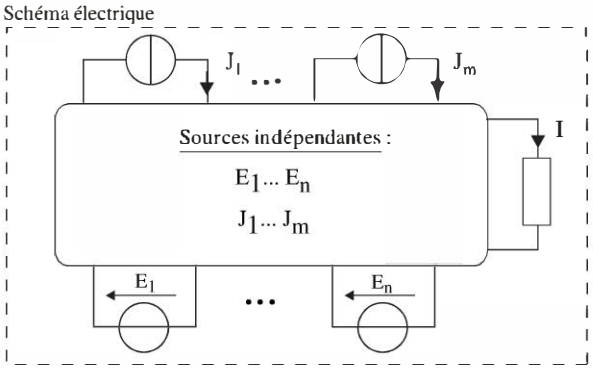


Figure 6.19

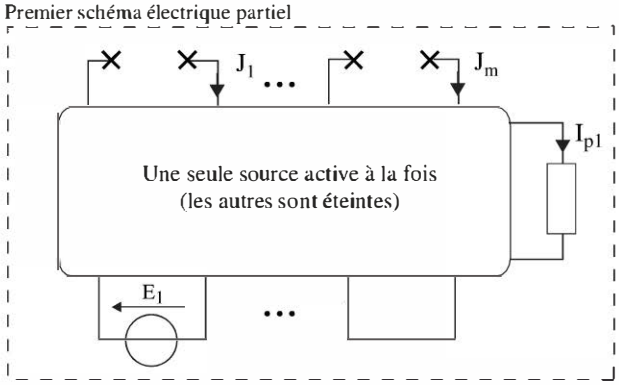


Figure 6.20

Remarque : Le théorème de superposition peut aussi être utilisé pour déterminer une tension U quelconque aux bornes d'un dipôle. La tension proviendra alors d'une somme de tensions partielles U_{pi}.

L'énoncé du théorème fait apparaître deux restrictions qui en limitent l'utilisation. La première concerne la condition de linéarité, qui est essentielle. La seconde envisage une détermination de la tension U ou du courant I, à condition que les sources soient indépendantes. Cette dernière condition peut être levée dans les cas particuliers où la liaison des sources s'effectue entre des sources de tension et de courant.

Prenons l'exemple du circuit de la figure 6.21, où le courant dans la source de courant $J_1 (J_1 = k.E_1)$ est lié à la valeur de la source de tension E_1. Lorsque $E_1 = 0$, $J_1 = 0$; pour cette raison, les trois sources vont conduire à seulement deux études partielles. Une première étude dans laquelle sont regroupées les sources liées E_1 et J_1 ; l'autre étude avec seulement J_2.

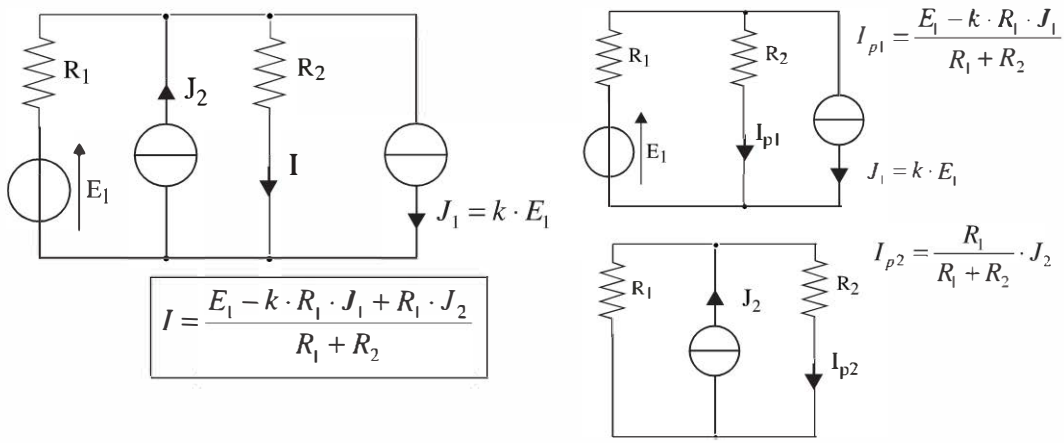


Figure 6.21

Copyright © 2007 Dunod.

6.5 RÉDUCTION DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Il est intéressant de réduire une partie d'un schéma lorsque celui-ci est couramment utilisé ; la mise en équation du schéma d'ensemble est alors simplifiée. Il est également fréquent d'utiliser cette méthode – à la place de la mise en équation suivant Kirchhoff – pour déterminer l'expression d'une grandeur.

La réduction du schéma électrique équivalent a pour but de remplacer une partie du schéma par un dipôle de Thévenin ou par un dipôle de Norton. Par exemple, la partie grisée (figure 6.22a) constituée de six dipôles, est remplacée à la figure 6.22b – après réduction suivant Thévenin – par un unique dipôle de Thévenin.

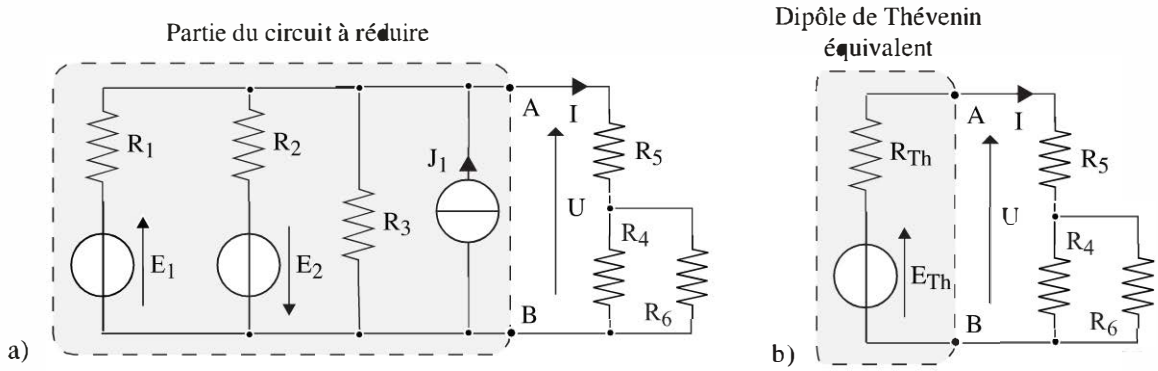


Figure 6.22

La figure 6.23 montre la préparation du schéma électrique avant sa réduction : deux fils de liaison électrique, repérés par les deux bornes *A* et *B*, isolent le **dipôle à réduire** du reste du schéma électrique. Après réduction et quelle que soit sa complexité, ce dipôle sera remplacé par une source et une résistance.

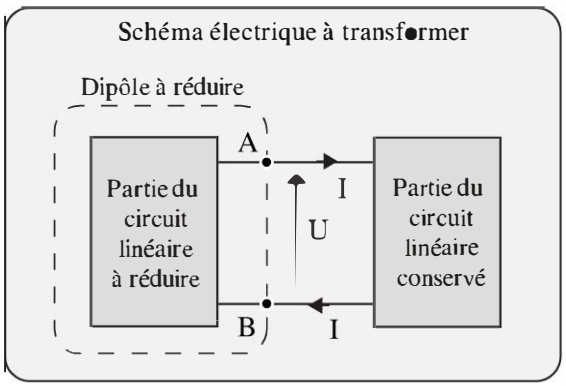


Figure 6.23

6.5.1 Caractéristique du dipôle linéaire à réduire

Comme l'a montré la première partie de l'ouvrage, tout dipôle linéaire peut être modélisé par une caractéristique affine $U = f(I)$, caractérisée en régime permanent continu par la relation : $U = U_0 - RI$.

En conséquence, le tracé du dipôle à réduire prend l'allure de la caractéristique affine tracée à la figure 6.24. Sur la figure, ce dipôle (fléché en convention générateur) est un vrai générateur lorsque la droite vérifie $UI > 0$; par opposition, le dipôle est un récepteur si $UI < 0$.

Copyright © 2007 Dunod.

Au point M, le dipôle n'échange aucun courant ($I = 0$) avec le reste du circuit ; la tension à vide aux bornes est alors la tension $U = U_0$.

Au point N, la tension est nulle ($U = 0$) et le courant de court-circuit I_{CC} est maximum :

$$I_{CC} = \frac{U_0}{R}$$

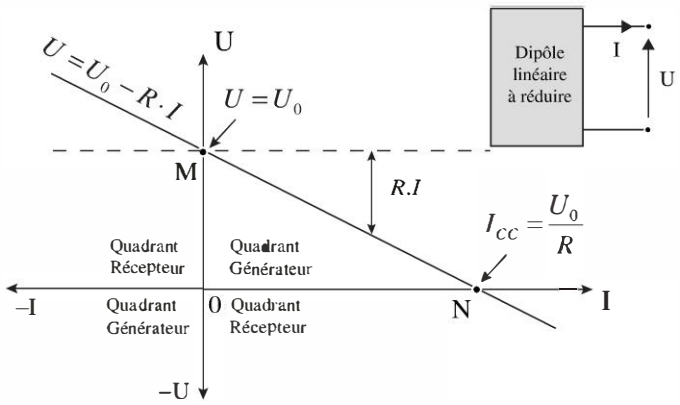


Figure 6.24

6.5.2 Méthode de réduction suivant Thévenin

Par cette méthode, le modèle qui se substitue au dipôle à réduire est un dipôle de Thévenin constitué par la source E_{TH} et par la résistance R_{TH}. Sa caractéristique, obtenue au chapitre 3, est reprise à la figure 6.25.

L'expression de sa caractéristique affine est :

$$U = E_{TH} - R_{TH} I$$

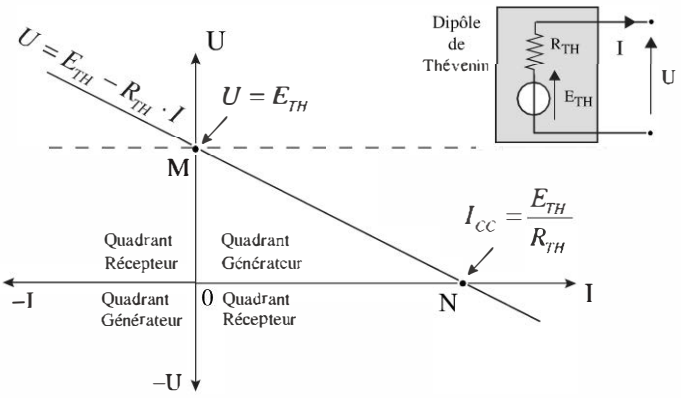


Figure 6.25

Au point M :

$$U = E_{TH}$$

Au point N :

$$I_{CC} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}$$

➤ *Détermination de E_{TH} et R_{TH} à partir d'un schéma électrique*

Pour déterminer les valeurs des deux éléments du dipôle de Thévenin E_{TH} et R_{TH}, à partir du schéma électrique du dipôle à réduire, on effectue deux étapes :

– en superposant les points M des deux tracés précédents, on aboutit à $E_{TH} = U_0$; E_{TH} est la tension à vide du dipôle à réduire. Il suffit donc de calculer la tension en sortie du dipôle à réduire, non connecté à l'extérieur ($I = 0$) pour déterminer E_{TH} ;

– si on éteint toutes les sources d'énergie du dipôle à réduire alors $U_0 = 0$; la caractéristique affine devient celle d'une résistance. Par identification, cette résistance est égale à R_{TH}. En calculant la résistance R_{AB} (aux bornes A et B du dipôle à réduire) lorsque toutes les sources sont éteintes, on obtient alors la résistance de Thévenin : $R_{TH} = R_{AB}$.

L'exemple de la figure 6.26, illustre la méthode. La partie du dipôle à réduire a été isolée du schéma électrique (figure 6.26a). On calcule la tension à vide E_{TH} (figure 6.26b) et après avoir éteint la source E, on calcule la résistance R_{TH} (figure 6.26c).

Copyright © 2007 Dunod.

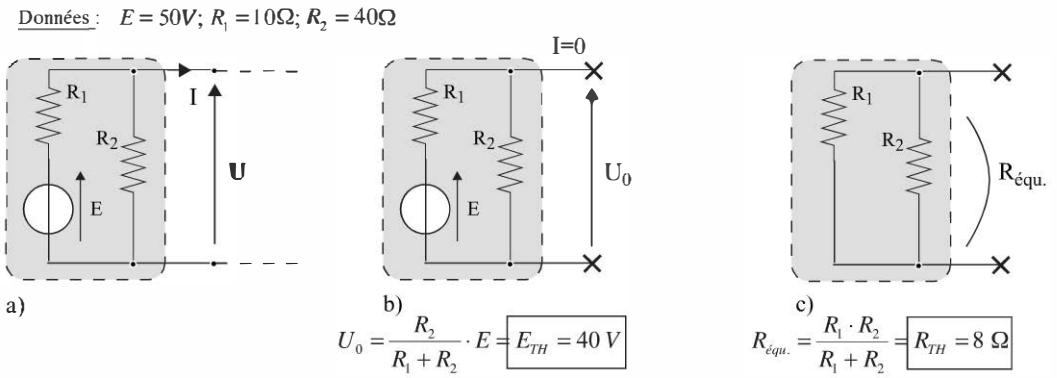


Figure 6.26

➤ *Détermination de E_{TH} et R_{TH} à partir d'une platine expérimentale*

On peut déterminer les deux éléments du dipôle équivalent de Thévenin à partir d'une expérimentation, en procédant comme suit (figure 6.27) :

– on mesure par un voltmètre (V) la tension à vide U_0 (figure 6.27a) en isolant le dipôle à réduire ($I = 0$). On obtient alors : $E_{TH} = U_0$;

– on place une résistance de charge connue R_{CH} en sortie du circuit à réduire (figure 6.27b). On mesure ensuite la tension en sortie du dipôle U_{CH} et on calcule R_{TH} :

$$R = \frac{U_0 - U_{CH}}{I} \text{ avec } U_{CH} I_{CH}, \text{ d'où } R_{TH} = \frac{R_{CH}(U_0 - U_{CH})}{U_{CH}}$$

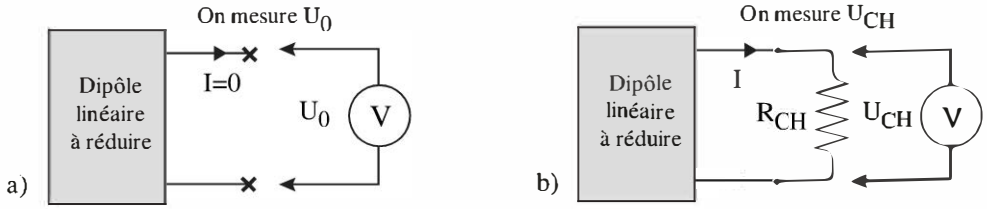


Figure 6.27

Remarque : La résistance R_{TH} sera choisie de telle manière que le courant I reste inférieur au courant maximal du dipôle.

➤ *Détermination de E_{TH} et R_{TH} à partir d'un tracé $U = f(I)$*

La figure 6.28a montre le tracé expérimental (en convention générateur) de la caractéristique affine du dipôle à réduire $U = f(I)$. Pour déterminer E_{TH} et R_{TH} il faut :

– prolonger par un trait en pointillé (figure 6.28b) la droite jusqu'au point $M(I = 0)$, où l'on obtient la tension à vide $E_{TH} = U_0$;

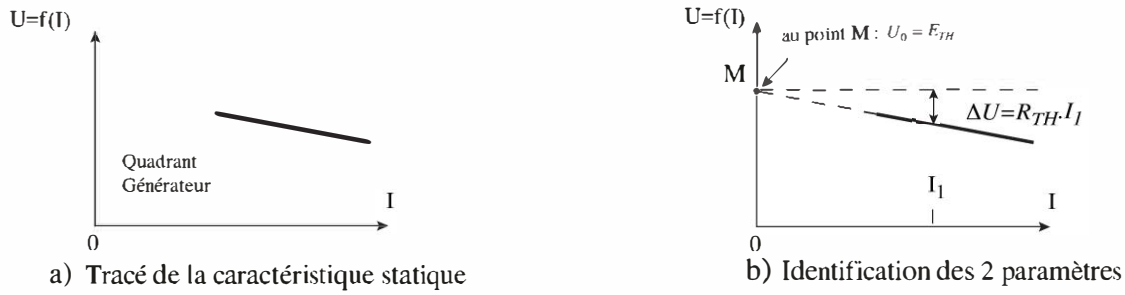


Figure 6.28

Copyright © 2007 Dunod.

– tracer une horizontale à partir du point A et mesurer la chute de tension ΔU avec la courbe.

On calcule ensuite la valeur de la résistance du dipôle de Thévenin à partir de l'expression : $R_{TH} = \dfrac{\Delta U}{I_1}$.

6.5.3 Méthode de réduction suivant Norton

La réduction d'une partie du circuit électrique peut se faire à partir du modèle de Norton, puisqu'il existe une relation biunivoque entre les modèles de Thévenin et Norton. Un dipôle de Norton se substitue alors au dipôle à réduire.

L'exemple de la figure 6.29 montre l'allure que prend le circuit après une réduction suivant la méthode de Norton.

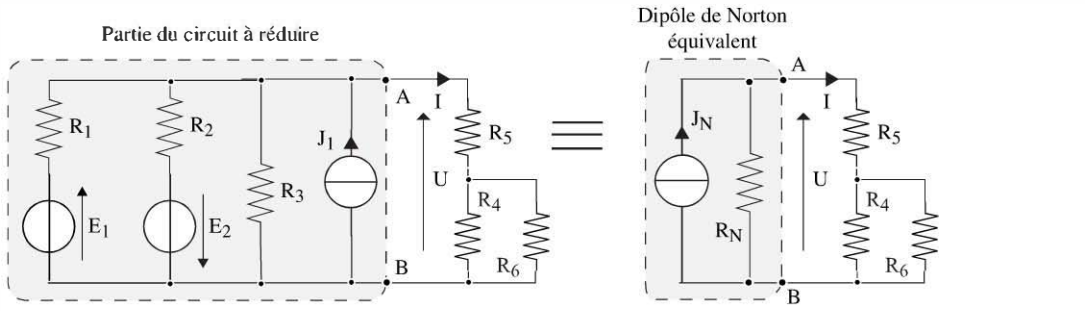


Figure 6.29

La figure 6.30 reprend la caractéristique d'un dipôle de Norton (en convention générateur) constituée par la source J_N et la résistance R_N.

Au point M, la tension à vide ($I = 0$) est égale à $U_0 = R_N J_N$ et au point N, le courant de court-circuit ($U = 0$) vaut $I_{CC} = J_N$.

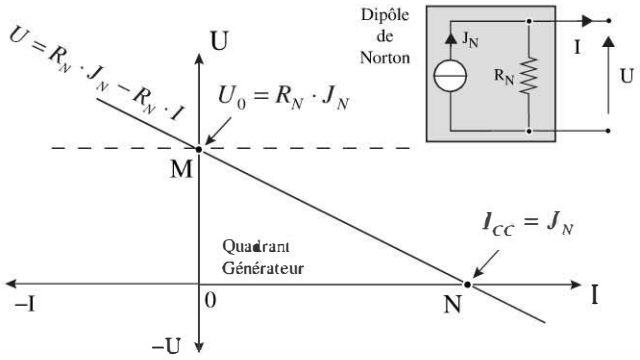
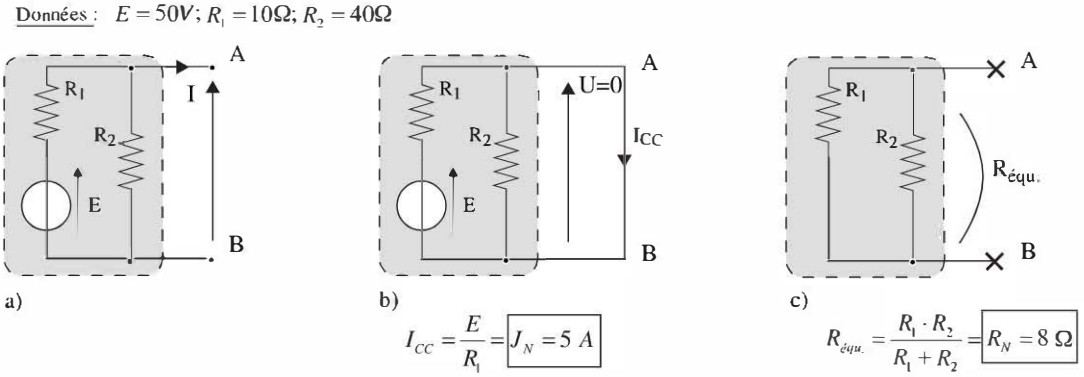


Figure 6.30

➤ ***Détermination de J_N et R_N à partir d'un schéma électrique***

Pour déterminer les valeurs des deux éléments du dipôle de Norton, à partir du schéma électrique, on réalise les opérations suivantes :



$$I_{CC} = \frac{E}{R_1} = \boxed{J_N = 5\ A} \qquad R_{équ.} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \boxed{R_N = 8\ \Omega}$$

Figure 6.31

Copyright © 2007 Dunod.

– On calcule le courant de court-circuit I_{CC} (point B de la figure 6.30) ; par identification avec le point B de la figure 6.30, on obtient : $J_N = I_{CC}$;

– On réalise la même opération que pour la détermination de la résistance de Thévenin : on éteint toutes les sources dans le circuit à réduire, puis on calcule la résistance équivalente $R_{équ.}$. Par identification avec Norton on détermine la résistance : $R_N = R_{équ.}$.

L'exemple de la figure 6.31a illustre la méthode de calcul. Un court-circuit entre les points A et B du dipôle permet la détermination du courant de Norton J_N (figure 6.31b) et la résistance R_N est calculée comme R_{TH} (figure 6.31c).

➤ *Détermination de J_N et R_N à partir d'une expérience*

Comme pour Thévenin, à partir d'un circuit en expérimentation, on peut déterminer les deux éléments du dipôle équivalent de Norton (figure 6.32) :

– On mesure par un ampèremètre (A sur la figure 6.32a), le courant I_{CC}, après avoir court-circuité les deux bornes du circuit isolé ($U = 0$). On obtient alors : $J_N = I_{CC}$;

– On place une résistance de charge connue R_{CH} en sortie du circuit à réduire (figure 6.32b). On mesure ensuite le courant I_{CH} dans R_{CH}. On obtient : $U_{CH} = R_{CH} I_{CH}$; $I_{CH} = \dfrac{R_N}{(R_{CH} + R_{R_N})} J_N$ (pont diviseur de courant) ; d'où : $R_N = \dfrac{R_{CH} I_{CH}}{J_N - I_{CH}}$.

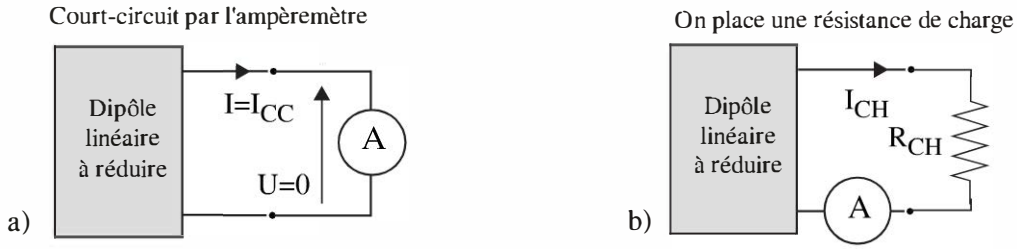


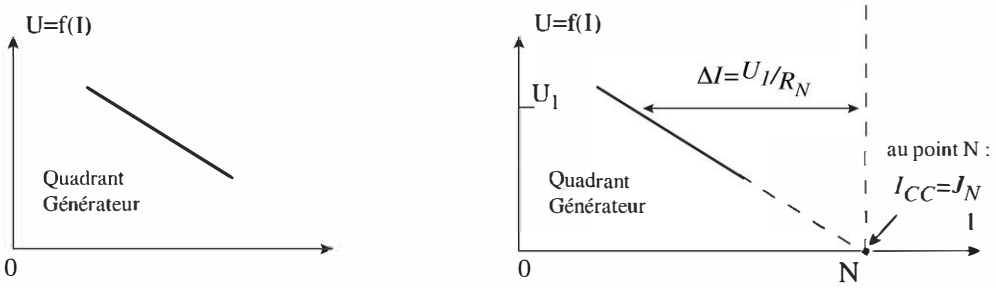
Figure 6.32

Remarque : Le court-circuit franc entre les deux bornes de sortie est généralement dangereux pour l'équipement. Pour pallier cette difficulté, on réduit l'amplitude des sources dans le circuit à réduire, pour que le courant I_{CC} ne dépasse pas une valeur acceptable pour l'équipement.

➤ *Détermination de E_N et R_N à partir d'un tracé $U = f(I)$*

La figure 6.33a représente le tracé $U = f(I)$ de la caractéristique du dipôle à réduire. En prolongeant par un trait en pointillé (figure 6.33b) la droite jusqu'au point N ($U = 0$), on obtient le courant de court-circuit $J_N = I_{CC}$. En traçant une droite verticale partant du point N et en mesurant la variation de tension ΔI avec la courbe, on détermine la valeur de la résistance R_N du dipôle de Norton : $R_N = \dfrac{U_1}{\Delta I}$

Copyright © 2007 Dunod.



a) Tracé de la caractéristique b) Identification des 2 paramètres

Figure 6.33

6.5.4 Règles de passage entre Thévenin et Norton

Les paragraphes 6.5.2 et 6.5.3 ont montré que le dipôle à réduire pouvait être remplacé indifféremment par les modèles de Thévenin ou de Norton. Il existe donc une relation entre ces deux modèles qui peuvent représenter le même dipôle.

Pour établir cette relation, réduisons un dipôle de Norton suivant le modèle de Thévenin (figure 6.34).

On trouve alors la tension de Thévenin :

$$U_0 = E_{TH} = R_N \cdot J_N$$

Et la résistance de Thévenin :

$$R_{TH} = R_N$$

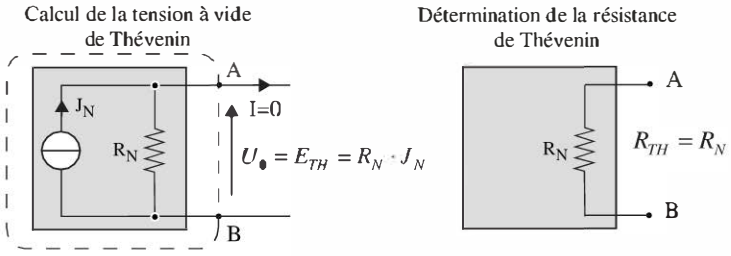


Figure 6.34

De manière identique, la réduction d'un dipôle de Thévenin suivant le modèle de Norton aboutit aux résultats : $J_N = \dfrac{E_{TH}}{R_{TH}}$ et $R_N = R_{TH}$.

La figure 6.35 présente un résumé des règles de passage d'un modèle à l'autre.

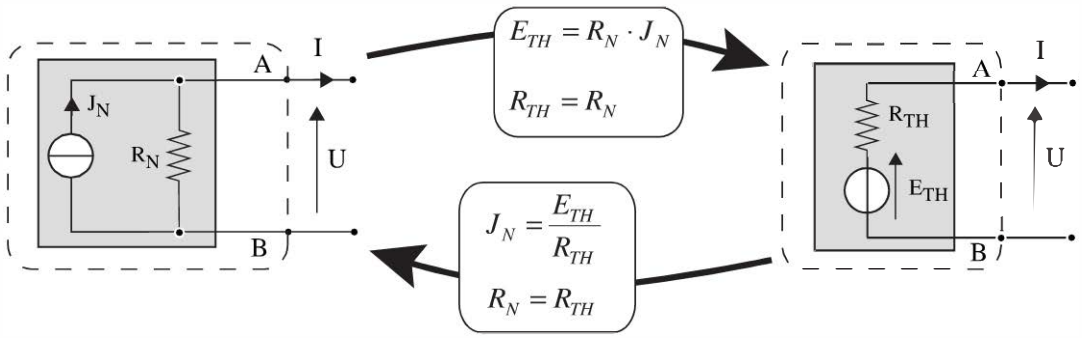


Figure 6.35

Pour susciter l'intérêt de l'apprentissage des règles de passage, prenons l'exemple du schéma de la figure 6.36 dans lequel on cherche l'expression de U.

Copyright © 2007 Dunod.

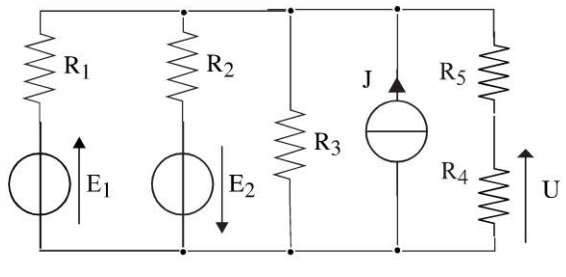


Figure 6.36

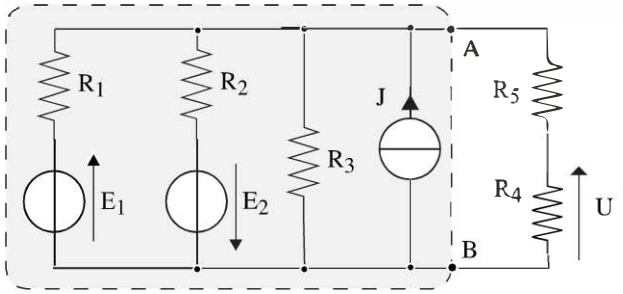


Figure 6.37

La stratégie consiste à réduire en un dipôle de Thévenin la partie du circuit à gauche des résistances R_4 et R_5 (figure 6.37) pour pouvoir finalement utiliser la règle du pont diviseur formé par les résistances R_4 et R_5. Pour réduire le circuit en un dipôle de Thévenin, nous utilisons successivement les règles de passage entre l'un et l'autre des modèles.

Pour cela, on transforme tout d'abord tous les dipôles de Thévenin du circuit en des dipôles équivalents de Norton (figure 6.38) en utilisant les règles de passage ; (E_1, R_1) se transforment ainsi en (J_1, R_1) et (E_2, R_2) en (J_2, R_2).

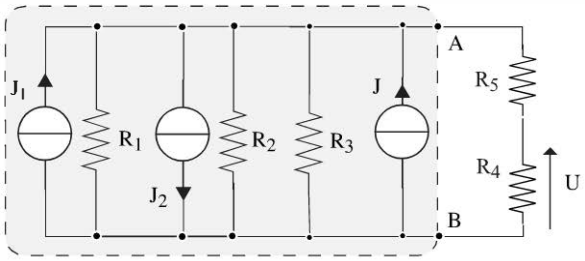


Figure 6.38

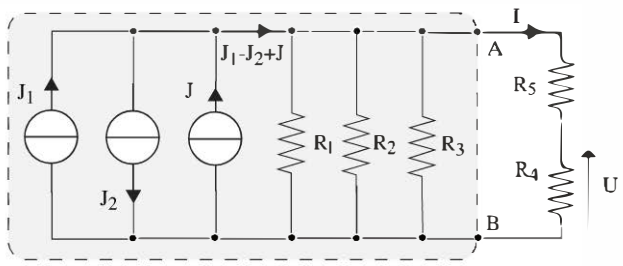


Figure 6.39

Avec (suivant les règles de passage) : $J_1 = \dfrac{E_1}{R_1}$ et $J_2 = \dfrac{E_2}{R_2}$.

Le chapitre 5 ayant montré que la permutation des branches dans un même nœud ne modifie pas la tension entre les noeuds, il devient possible de regrouper les sources et les résistances sans changer le courant de branche I (figure 6.39).

Le regroupement des sources en une seule source J_1' et le regroupement des résistances en parallèle en une seule résistance R_1', conduit à la réduction du circuit suivant Norton (figure 6.40).

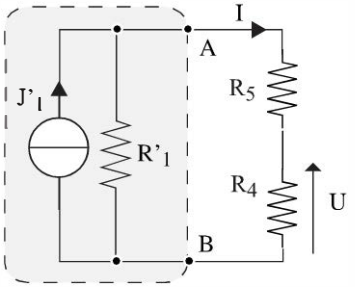


Figure 6.40

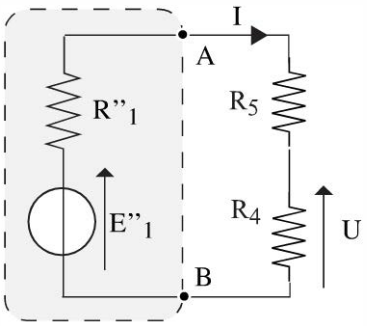


Figure 6.41

Copyright © 2007 Dunod.

Avec : $J_1' = J_1 - J_2 + J$ et $R_1' = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

En utilisant à nouveau la règle de passage, cette fois de Norton vers Thévenin, on obtient le schéma réduit de la figure 6.41, où s'applique la règle du diviseur de tension : $U = \frac{R_4}{R_4 + R_5 + R_1''} E_1''$.

Bien d'autres méthodes auraient permis de déterminer l'expression de U dans cet exemple – comme les lois de Kirchhoff ou l'application de la règle de Millman –, mais l'utilisation des règles de passage a l'avantage de progresser à petits pas d'un schéma équivalent à l'autre, sans avoir à écrire d'équations importantes.

6.6 PUISSANCE EN RPCC

6.6.1 Puissance continue dans un dipôle

Depuis la lecture de la première partie de l'ouvrage, on sait que la puissance moyenne en régime permanent continu, ou **puissance continue**, pour un dipôle du schéma électrique équivalent, est définie comme le produit de la tension continue par le courant continu $\boxed{P = UI}$.

On rappelle que la puissance continue absorbée par une résistance est aussi définie par les relations suivantes :

$U_R I_R = R I_R I_R$, d'où $\boxed{P_R = R I_R^2}$, et $U_R I_R = U_R \frac{U_R}{R}$, d'où $\boxed{P_R = \frac{U_R^2}{R}}$.

Suivant la convention utilisée pour flécher la tension aux bornes du dipôle et le courant qui le traverse, la signification du signe de la puissance est différente (voir chapitre 1). Il est nécessaire d'interpréter correctement la puissance. En effet, comme le fléchage du courant est arbitraire (voir chapitre 5), le signe n'est pas déterminé avant la fin des calculs.

6.6.2 Puissance dans un circuit en RPCC

La puissance traduit l'écoulement de l'énergie à travers les dipôles du circuit. Lorsque le schéma électrique équivalent est formé d'un seul générateur et de résistances, on sait identifier sans ambiguïté la source de puissance et les consommateurs. Par contre, lorsque le circuit comporte plusieurs générateurs et des résistances, alors il est nécessaire d'étudier chaque dipôle pour savoir comment s'écoule l'énergie.

➤ *Schéma électrique équivalent avec un seul générateur*

Dans un schéma électrique en régime permanent continu, qui ne possède qu'un générateur continu, le calcul de sa puissance continue en convention générateur est forcément positif, puisqu'il est le seul à fournir de l'énergie dans le schéma électrique.

Copyright © 2007 Dunod.

En convention récepteur, la puissance continue absorbée par chacune des résistances est forcément positive.

Dans l'exemple de la figure 6.42, la source E est en convention générateur et les résistances R_1 et R_2, en convention récepteur. On a alors :

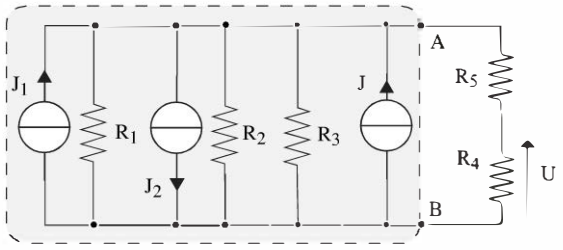


Figure 6.42

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} \; ; \; U_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \; ; \; U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E. \text{ D'où :}$$

$$P_E = EI = E\frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E^2}{R_1 + R_2} > 0, \text{ puissance fournie au circuit.}$$

$$P_{R1} = U_{R1} I = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}\frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2} > 0, \text{ puissance absorbée par } R_1.$$

$$P_{R2} = U_{R2} I = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}\frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 E^2}{(R_1 + R_2)^2} > 0, \text{ puissance absorbée par } R_2.$$

➤ ***Schéma électrique équivalent avec plusieurs générateurs***

Lorsque le schéma électrique équivalent en RPCC d'un circuit possède plusieurs générateurs, la puissance continue dans chacun des dipôles se calcule comme précédemment par le produit de la tension par le courant.

Toutefois, souvent le calcul fait apparaître des résultats qui étonnent, lorsque :

– la puissance continue devient négative dans un générateur fléché en convention générateur. Ce cas se produit lorsque le générateur est en phase d'absorption d'énergie, comme peut l'être par exemple une batterie d'accumulateurs, pendant sa recharge.

– la puissance continue est négative alors que le générateur délivre de l'énergie au circuit. Cela se produit lorsque le calcul de la puissance du générateur est réalisé en convention récepteur ; on traduit cet exemple sous la forme d'un récepteur qui absorbe une puissance négative.

– dans une résistance, la puissance continue devient négative. Il s'agit là aussi d'une convention inversée. En effet, en convention générateur, la puissance continue dans une résistance sera toujours négative – cela se traduit sous la forme d'un générateur qui délivre une puissance négative – alors qu'elle est positive en convention récepteur.

Comme exemple, considérons le schéma électrique équivalent de la figure 6.43, constitué de trois sources et de trois résistances. On note que la source E_2 est fléchée en convention générateur, ainsi que la source de courant J, tandis que la source de tension E_1 est fléchée en convention récepteur.

Après mise en équation et résolution, on obtient les valeurs numériques dans les solutions de la figure 6.43.

Les puissances dans les dipôles sont :

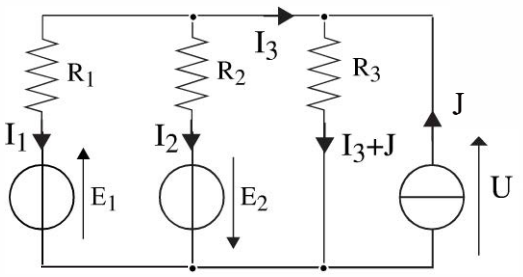
– pour la source E_1 : $P_{E1} = U_{E1} I_{E1} = E_1 I_1 = 90(-5) = -450$ W

– pour la source E_2 : $P_{E2} = U_{E2} I_{E2} = E_2 I_2 = 404 = 160$ W

– pour la source J : $P_J = U_J I_J = UJ = 40 \cdot 1 = 40$ W

Copyright © 2007 Dunod.

– pour la résistance R_1 : $P_{R1} = R_1 I_1^2 = 10 \cdot 5^2 = 250$ W
– pour la résistance R_2 : $P_{R2} = R_2 I_2^2 = 20 \cdot 4^2 = 320$ W
– pour la résistance R_3 : $P_{R3} = R_3 (I3 + J)^2 = 20 \cdot 2^2 = 80$ W



Données : $E_1 = 90$V; $R_1 = 10\ \Omega$
$E_2 = 40$V; $R_2 = 20\ \Omega$
$J = 1$A; $R_3 = 20\ \Omega$

Solutions : $I_1 = -5$A
$I_2 = 4$A
$I_3 = 1$A ; $U = R_3 \cdot (I_3 + J) = 40$V

Figure 6.43

Remarque : On doit noter que la source E_1 absorbe une puissance négative $P_{E1} = -450$ W. Un fléchage en convention générateur aurait produit une puissance fournie positive $P_{E1} = 450$ W.

6.6.3 Distribution des puissances dans un circuit

Pour que le circuit soit en équilibre, il faut que la somme des puissances fournies par les dipôles soit égale à la somme des puissances absorbées par les dipôles.

Pour illustrer ce résultat capital, reprenons le schéma de la figure 6.43.

La somme des puissances fournies par les dipôles en convention générateur, est égale à :

$$P_{fournie} = P_{E2} + P_J = 160 + 40 = 200 \text{ W}$$

et la somme des puissances absorbées, par les dipôles en convention récepteur, est :

$$P_{absorbée} = P_{E1} + P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = -450 + 250 + 320 + 80 = 200 \text{ W}$$

La puissance absorbée est bien égale à la puissance fournie :

$$\boxed{P_{fournie} = P_{absorbée}}$$

Le bilan en puissance peut être présenté sous la forme d'un tableau, plus lisible.

Par exemple, le tableau 6.6 reprend la distribution de toutes les puissances au sein du circuit en RPCC.

Dans ce tableau, les générateurs du circuit sont les dipôles fléchés en convention générateur et les récepteurs, les dipôles fléchés en convention récepteur.

Dans cet exemple E_1 est un récepteur qui absorbe une puissance continue négative, qui se traduit aussi comme un générateur à puissance positive ; il fournit alors de l'énergie.

Copyright © 2007 Dunod.

En prenant une convention générateur pour E_1, le bilan précédent s'écrit :

$$P_{fournie} = P_{E1} + P_{E2} + P_J = 650 \text{ W}$$

$$P_{absorbée} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 650 \text{ W}$$

Tableau 6.6

	Puissance **fournie** par les générateurs	Puissance **absorbée** par les récepteurs
E_1		– 450W
E_2	160W	
J	40W	
R_1		250W
R_2		320W
R_3		80W
	200W	200W

6.6.4 Mesure de la puissance continue dans un circuit

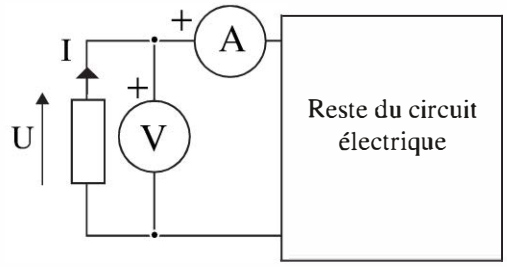
La méthode de mesure de la puissance continue fournie ou absorbée, s'effectue en plaçant un voltmètre continu aux bornes du dipôle pour mesurer la tension U et un ampèremètre continu en série avec le dipôle pour mesurer le courant I.

Le produit de la tension mesurée par le courant mesuré conduit à la valeur de la puissance mesurée P.

Pour respecter les conventions récepteur et générateur, on doit prendre la précaution de placer correctement (figure 6.44) les appareils de mesure (voltmètre et ampèremètre, continus).

Mesure de la puissance **fournie** par un dipôle

$P_{fournie} = U \cdot I > 0$



Mesure de la puissance **absorbée** par un dipôle

$P_{absorbée} = U \cdot I > 0$

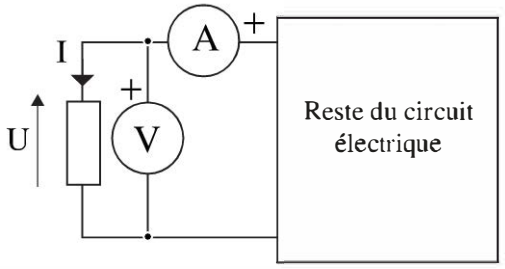


Figure 6.44

6.6.5 Les sources continues sont issues de sources périodiques

L'étude en régime permanent continu a été menée pour des circuits qui possèdent des sources d'énergie continues et/ou des sources périodiques à valeurs moyennes non nulles. Lorsque le schéma électrique équivalent a été établi à partir d'un circuit qui comporte des sources périodiques à valeurs moyennes non nulles, alors les méthodes de calcul et de mesures des puissances continues dans les dipôles sont identiques au cas de circuits formés par des sources purement continues.

Copyright © 2007 Dunod.

Avec ces sources, la puissance continue est en général seulement une des composantes de la puissance dans les dipôles. En effet, à cette puissance continue se rajoutent des composantes harmoniques [5], qui ne pourront être calculées qu'au terme du chapitre 7.

Pour en savoir plus...

BASES DU CALCUL MATRICIEL

Les matrices servent fréquemment à représenter les coefficients des systèmes d'équations linéaires ou plus généralement les applications linéaires. La matrice est une représentation, qui se met sous la forme d'un tableau de nombres ou de fonctions, à m lignes et n colonnes (dimension $m \times n$). Une matrice carrée a m lignes et m colonnes (figure 6.45).

Matrice à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice carrée m x m

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Matrice identité (m=4)

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transposée de A carrée (la ligne i devient la colonne i)

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Figure 6.45

Il existe des matrices particulières (figure 6.46) : matrice identité I, matrice triangulaire (supérieure et inférieure) matrice diagonale...

Matrice carrée (4 lignes et 4 colonnes)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (supérieure)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (inférieure)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Figure 6.46

Les matrices sont soumises à certaines règles de calcul dont l'addition, la multiplication scalaire et la multiplication matricielle (figure 6.47).

[1] Voir « Pour en savoir plus : Puissance spectrale » à la fin de chapitre 7.

Copyright © 2007 Dunod.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \\ 4 & 12 & 5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 12 & 6 \\ 3 & 9 & 11 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A+B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & \textcircled{14} \\ 10 & 17 & 20 \\ 14 & 23 & 17 \end{bmatrix} \quad a_{23} = 6+8 = 14$$

$$3.A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & \textcircled{18} \\ 21 & 24 & 27 \\ 30 & 33 & 36 \end{bmatrix} \quad a_{23} = 3 \cdot 6 = 18$$

$$A \,.\, B_2 = \begin{bmatrix} 14 & 41 & 52 & 34 & 48 \\ 32 & 92 & \textcircled{118} & 88 & 108 \\ 50 & 143 & 184 & 142 & 168 \\ 68 & 194 & 250 & 196 & 228 \end{bmatrix} \quad a_{23} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 = 118$$

Figure 6.47

• Addition matricielle

Deux matrices A et B de même dimension $m \times n$ s'ajoutent en respectant la relation : $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, où a_{ij} et b_{ij} sont les coefficients des matrices A et B.

• Multiplication scalaire

La matrice A multipliée par un scalaire k respecte la relation : $(k \cdot a)_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

• Multiplication matricielle

Une matrice A (dimension $m \times n$) et une matrice B (dimension $n \times p$) se multiplient entre elles en respectant la relation : $(a \times b)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}$.

• Inversion et déterminant d'une matrice

La matrice carrée A^{-1} inverse de la matrice carrée A, vérifie $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Sa détermination nécessite le calcul préalable de son déterminant, dét(A).

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1b} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a'_{2b}}{a'_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a'_{b2} & \cdots & a'_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ \frac{U'_2}{a'_{22}} \\ \vdots \\ U'_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & (a'_{1b} - \frac{a'_{2b}\, a'_{12}}{a'_{22}}) \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a'_{2b}}{a'_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a'_{bb} - \frac{a'_{2b}\, a'_{b2}}{a'_{22}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U'_1 - \frac{U'_2\, a'_{12}}{a'_{22}}) \\ \frac{U'_2}{a'_{22}} \\ \vdots \\ (U'_b - \frac{U'_2\, a'_{b2}}{a'_{22}}) \end{bmatrix}$$

Figure 6.48

dét(A) est un nombre constitué d'une somme de termes (figure 6.48) dont chacun est issu du produit d'un coefficient de la première ligne (a_{1j}) d'un signe ($(-1)^{1+j}$)) et du

Copyright © 2007 Dunod.

déterminant réduit associé au coefficient (Δ_{1j}). (Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit des termes de sa diagonale).

Une matrice A est inversible si $dét(A) \neq 0$. Le calcul de A^{-1} (figure 6.49) impose le calcul du dét(A), de m^2 déterminants Δ_{ij} et de la transposée $[\,]^T$.

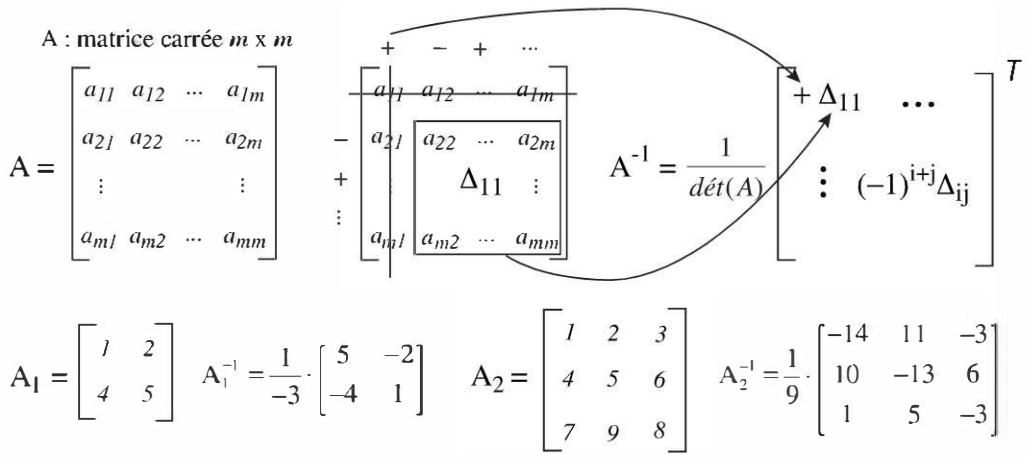


Figure 6.49

RÈGLE DE CRAMER ET MÉTHODE DU PIVOT

Règle de Cramer

Cette méthode matricielle s'appuie sur le calcul de déterminants de matrices. La détermination de chacun des courants I_i de l'équation matricielle $[R][I] = [U]$ est réalisée à partir de $\boxed{I_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}}$; Δ est le déterminant de la matrice résistance $[R]$ et Δ_i est le déterminant de la matrice $[R]$ dans laquelle la colonne i est remplacée par le vecteur $[U]$. Dans l'exemple de la figure 6.9, les matrices sont :

$$[U] = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 80 \end{bmatrix} \text{ et } [R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \text{ avec } \Delta = 2\,400.$$

Les déterminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont :

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -100 \\ 80 \end{matrix}} & 1 & 1 \\ & -10 & 0 \\ & 10 & -40 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Delta_1 = -4\,200 \Longrightarrow I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4\,200}{2\,400} = -1{,}75 \text{ A}$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ -40 & \boxed{-100} & 0 \\ 0 & \boxed{80} & -40 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Delta_2 = -7\,200 \Longrightarrow I_2 = \frac{7\,200}{2\,400} = 3 \text{ A}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} \\ -40 & -10 & \boxed{-100} \\ 0 & 10 & \boxed{80} \end{bmatrix} \Longrightarrow \Delta_3 = -3\,000 \Longrightarrow I_3 = \frac{-3\,000}{2\,400} = -1{,}25 \text{ A}$$

Méthode de Gauss-Jordan ou méthode du pivot

$[R]^{-1}[R][I] = \boxed{[I_d][I] = [R]^{-1}[U]}$ avec $[I_d]$ la matrice identité. L'objectif de la méthode est de calculer $[R]^{-1}[U]$. Pour dérouler la méthode, appuyons-nous sur un circuit à trois inconnues (la matrice est carrée de rang 3) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

La détermination de $[R]^{-1}[U]$ comporte des étapes successives dans lesquelles chaque ligne de la matrice est choisie successivement comme ligne pivot. Le pivot est le premier terme non nul, à gauche de la ligne pivot.

À la première étape (figure 6.50), on divise tous les termes de la ligne pivot par la valeur de son pivot a_{11} ; le pivot prend alors la valeur unité.

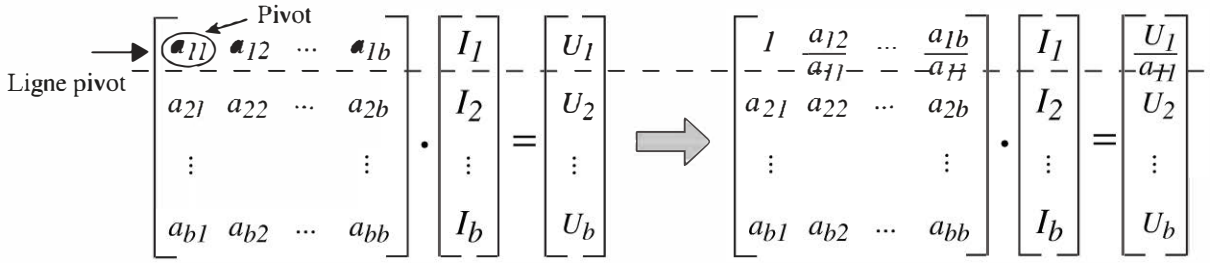


Figure 6.50

On annule ensuite (figure 6.51) tous les premiers termes de chacune des autres lignes, en leur retranchant la ligne pivot, préalablement multipliée par le premier terme de chaque ligne. Le but est de faire apparaître des zéros dans la colonne.

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1b}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{b1} & a_{b2} & \cdots & a_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{a_{11}} \\ U_2 \\ \vdots \\ U_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1b}}{a_{11}} \\ 0 & (a_{22} - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}}) & \cdots & (a_{2b} - \frac{a_{1b}\,a_{21}}{a_{11}}) \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (a_{b2} - \frac{a_{12}\,a_{b1}}{a_{11}}) & \cdots & (a_{bb} - \frac{a_{1b}\,a_{b1}}{a_{11}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{a_{11}} \\ (U_2 - \frac{U_1\,a_{21}}{a_{11}}) \\ \vdots \\ (U_b - \frac{U_1\,a_{b1}}{a_{11}}) \end{bmatrix}$$

Figure 6.51

À la deuxième étape, on réitère l'opération précédente en prenant la deuxième ligne comme ligne pivot. On divise alors la ligne par le pivot a'_{22} (figure 6.52). Les termes de la matrice résultante précédente ont été renommés pour simplifier les expressions (par exemple $a_{bb} - \frac{a_{1b} \cdot a_{b1}}{a_{11}} = a'_{bb}$).

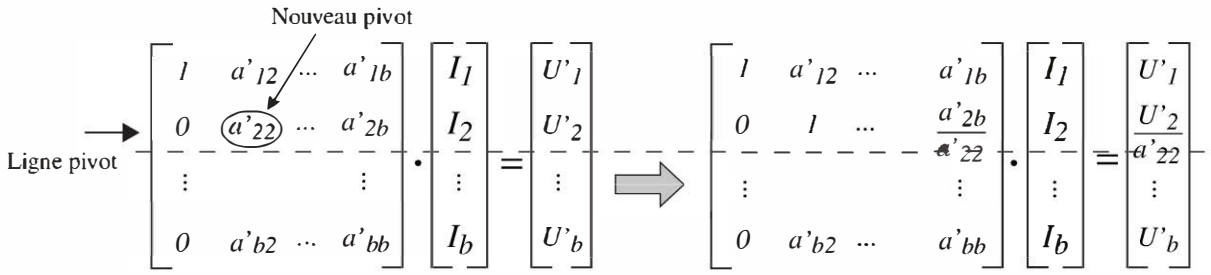


Figure 6.52

Comme pour la première étape, on obtient des zéros dans la colonne du pivot en retranchant à toutes les lignes la ligne pivot, préalablement multipliée par le premier terme de chaque ligne (figure 6.53).

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1b} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a'_{2b}}{a'_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a'_{b2} & \cdots & a'_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ \frac{U'_2}{a'_{22}} \\ \vdots \\ U'_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & (a'_{1b} - \frac{a'_{2b}\,a'_{12}}{a'_{22}}) \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a'_{2b}}{a'_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a'_{bb} - \frac{a'_{2b}\,a'_{b2}}{a'_{22}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U'_1 - \frac{U'_2\,a'_{12}}{a'_{22}}) \\ \frac{U'_2}{a'_{22}} \\ \vdots \\ (U'_b - \frac{U'_2\,a'_{b2}}{a'_{22}}) \end{bmatrix}$$

Figure 6.53

En enchaînant les étapes, la matrice initiale $[R]$ tend vers $[I_d]$ et le vecteur $[U]$ vers $[R]^{-1}[U]$. Les calculs qui suivent sont une application de la méthode au circuit figure 6.9.

$$[R][I] = [U] \Longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 40 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Copyright © 2007 Dunod.

Le pivot (1er terme de la 1re ligne) est déjà unitaire ; faisons apparaître les zéros :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40-(1\cdot 40) & -10-(1\cdot 40) & 0-(1\cdot 40) \\ 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100-(0\cdot 40) \\ 80 \end{bmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-50} & -40 \\ 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Le pivot suivant est égal à -50 ; d'où :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{-50}{-50} & \dfrac{-40}{-50} \\ 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-100}{-50} \\ 80 \end{bmatrix}$$

pour faire apparaître les zéros :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-(1\cdot 1) & 1-(0{,}8\cdot 1) \\ 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 10-10 & -40-(0{,}8\cdot 10) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(2\cdot 1) \\ 2 \\ 80-(2\cdot 10) \end{bmatrix} ; \text{ d'où :}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & \boxed{-48} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Le pivot suivant est égal à -48, d'où :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & \dfrac{-48}{-48} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ \dfrac{60}{-48} \end{bmatrix}$$

pour obtenir les zéros de la colonne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}2-(1\cdot 0{,}2) \\ 0 & 1 & 0{,}8-(1\cdot 0{,}8) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-(-1{,}25\cdot 0{,}2) \\ 2-(-1{,}25\cdot 0{,}8) \\ -1{,}25 \end{bmatrix}$$

et enfin :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}75 \\ 3 \\ -1{,}25 \end{bmatrix}$$

Copyright © 2007 Dunod.

qui implique :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}75 \\ 3 \\ -1{,}25 \end{bmatrix} \text{ (en ampère).}$$

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

6.1 Dans un schéma électrique équivalent en RPCC quels sont les seuls dipôles passifs et actifs qui subsistent ? Que sont devenus les autres dipôles ?

6.2 Quel dipôle équivalent remplace une source de tension de la forme : $u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t) + U_4 \cos(4\omega t)$?

6.3 Quel est l'intérêt de connaître des règles par rapport à l'application des lois de Kirchhoff ?

6.4 À quoi sert le théorème de Thévenin ou de Norton ?

6.5 Que représentent les puissances instantanées, moyenne et continue ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

6.6 Soit le schéma électrique de la figure 6.54 où $e(t)$ est un générateur de tension de forme carrée et de rapport cyclique α.

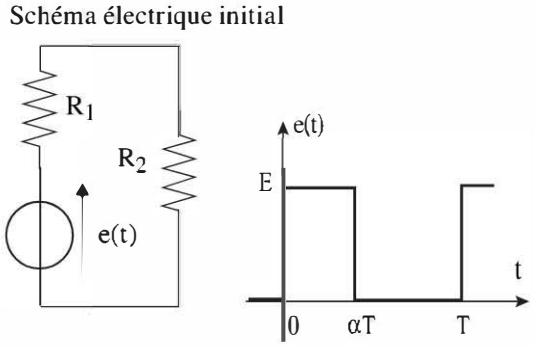


Figure 6.54

1) Déterminer la valeur moyenne E_0 de $e(t)$.

2) Dessiner le schéma équivalent en RPCC.

6.7 À partir du circuit électrique de la figure 6.55 (E_1 et E_2 deux sources continues) :

1) Dessiner le schéma électrique équivalent en RPCC.

2) Dessiner le graphe associé en précisant le nombre de nœuds n, et de branches b.

3) Préciser le nombre d'équations de nœuds ni et de mailles mi.

4) Redessiner le schéma en fléchant les courants dans les branches.

5) Écrire les ni équations de nœuds et les mi équations de mailles.

6) Déterminer par substitution les expressions des courants de branches inconnus, en fonction de données E_1, E_2, R_1, R_2, R_3 et R_4.

7) Déterminer l'expression de la tension U_{AB}, en fonction des données.

Copyright © 2007 Dunod.

8) Calculer U_{AB} à partir des valeurs numériques.

(*A.N.* : $E_1 = E = 150$ V ;
$E_2 = E/3 = 50$ V ;
$R_1 = R_2 = R = 100\,\Omega$; $R_4 = R_3 = R/2$)

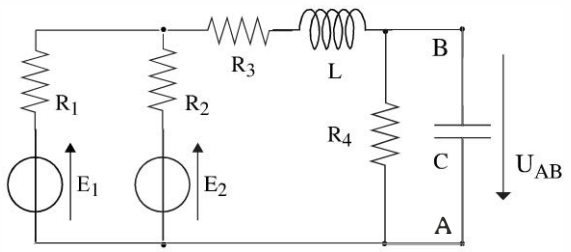


Figure 6.55

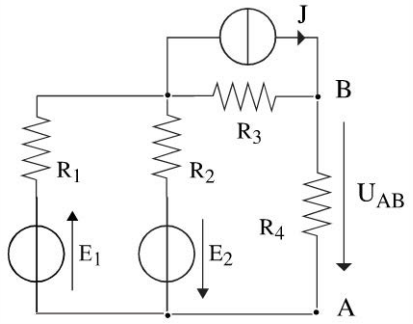


Figure 6.56

6.8 Reprendre les questions 2) à 6) de l'exercice 6.7, à partir du schéma figure 6.56 et avec $J = E/2R$.

6.9 À partir du schéma de la figure 6.55 et à partir des résultats des questions de 1) à 6) de l'exercice 6.7 :

1) Déterminer la matrice résistance $[R]$ à partir de : $[R][I] = [U]$

2) Déterminer l'expression des courants à partir de la méthode de Cramer.

3) Déterminer l'expression des courants à partir de la méthode du pivot.

6.10 À partir du schéma équivalent en RPCC (figure 6.57) :

1) Déterminer la tension U, par exemple avec les lois de Kirchhoff.

2) Déterminer tous les courants.

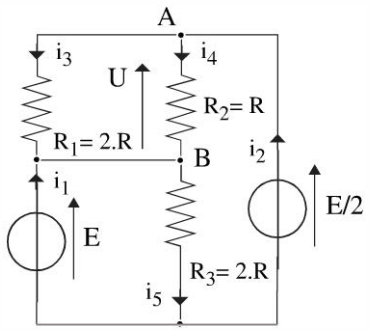


Figure 6.57

3) Calculer les puissances dans chacune des résistances.

4) Calculer les puissances dans les deux sources.

5) Établir le tableau de répartition des puissances et conclure.

6.11 Soit le circuit de la figure 6.58. Un générateur, de tension à vide Eg et de résistance interne R_g, délivre une puissance à la résistance de charge R_{CH}.

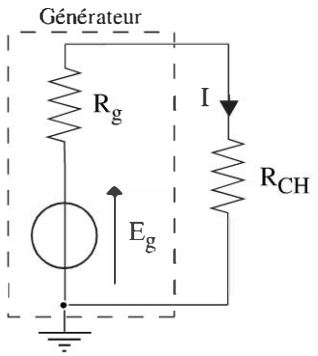


Figure 6.58

1) Déterminer la puissance P_g fournie par le générateur en fonction de E_g, R_g et R_{CH}.

2) Déterminer la puissance absorbée P_{CH} dans la résistance R_{CH}.

3) Calculer la différentielle totale dP_{CH} en fonction de E_g, R_g et R_{CH}.

4) Pour quelle valeur de R_{CH}, P_{CH} est maximale ? Que vaut alors P_g ?

6.12 À partir de la courbe (figure 6.59) déterminer le dipôle de Thévenin équivalent et préciser le domaine de validité du modèle obtenu.

Copyright © 2007 Dunod.

6.13 À partir du schéma du pont de mesure de la figure 6.60, déterminer le dipôle de Thévenin équivalent entre les points *A* et *B*.

6.14 À partir du schéma équivalent en RPCC (figure 6.61), déterminer *I* en utilisant le théorème de superposition des sources.

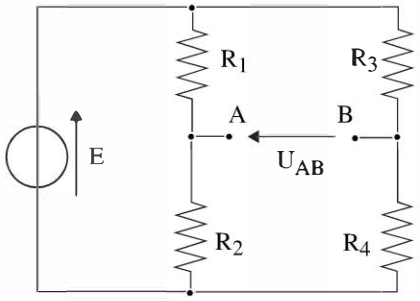


Figure 6.60

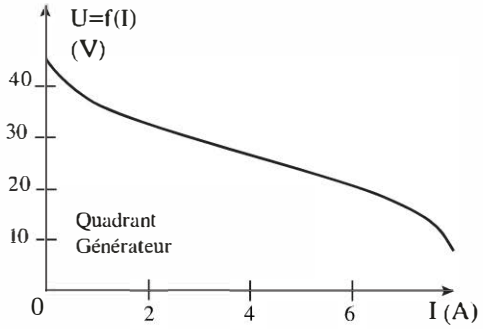


Figure 6.59

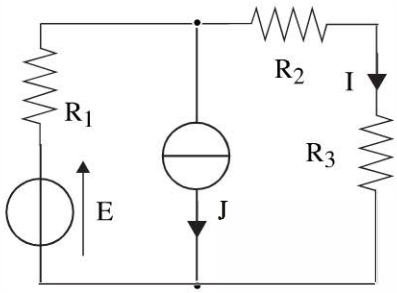


Figure 6.61

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 7

Étude en régime permanent alternatif sinusoïdal à fréquence fixe (RPCA)

Objectifs

- Présenter les conditions d'étude en régime permanent sinusoïdal (RPCA).
- Montrer quels types de circuits nécessitent une étude en RPCA.
- Étudier les circuits à partir de leur modélisation complexe.
- Étudier les circuits à partir de leur modélisation opérationnelle.
- Définir les méthodes de calcul et de mesure de la puissance en RPCA.

Vocabulaire

Régime permanent sinusoïdal RPCA
Schéma électrique équivalent en RPCA
Modélisation complexe, phaseur
Loi d'Ohm complexe
Impédance complexe
Transformation directe et inverse de Laplace
Schéma symbolique (opérationnel) équivalent
Impédance opérationnelle
Loi d'Ohm opérationnelle
Puissance instantanée et moyenne
Puissance active, réactive et apparente
Méthode de Boucherot

Ce chapitre, traite de l'étude des circuits électriques en régime permanent sinusoïdal à fréquence fixe, dans lesquels toutes les sources sont sinusoïdales de même fréquence. Deux modélisations sont proposées pour déterminer les courants et les tensions dans le circuit. La modélisation qui utilise les nombres complexes est historiquement très employée dans le domaine de l'électrotechnique (étude des machines électriques alternatives en régime permanent, production de puissance électrique) tandis que la modélisation basée sur la transformation de Laplace est plus générale et s'ouvre à d'autres domaines. Nous montrons que, quelle que soit la modélisation employée, les lois de Kirchhoff, les règles et les théorèmes définis dans le chapitre précédent se conservent moyennant quelques modifications d'écritures. Le calcul de la puissance électrique est largement développé, car de nouvelles difficultés apparaissent, liées au caractère fluctuant de cette puissance.

Copyright © 2007 Dunod.

7.1 CONDITIONS D'ÉTUDE EN RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

7.1.1 Amplitude, phase et déphasage de signaux sinusoïdaux

Nous rappelons (figure 7.1a), pour fixer les définitions, que le signal sinusoïdal a :

- pour expression temporelle : $s(t) = \hat{S}\cos(\omega t + \theta) = \sqrt{2}S\cos(\omega t + \theta)$,
  ou encore $s(t) = \hat{S}\cos(2\pi f t + \theta) = \hat{S}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right)$ où ω représente la **pulsation** (en radian/seconde), f la **fréquence** (en hertz) et T la **période** (en seconde) ;
- une **amplitude crête** $\hat{S}$, une **amplitude efficace** $S = \hat{S}/\sqrt{2}$;
- une **phase à l'origine** (en radian) θ.

En présence de deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$, **l'angle de déphasage** φ est la différence des phases à l'origine de $s_1(t)$ par rapport à $s_2(t)$: $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ (figure 7.1b) et est indépendant de l'origine des temps.

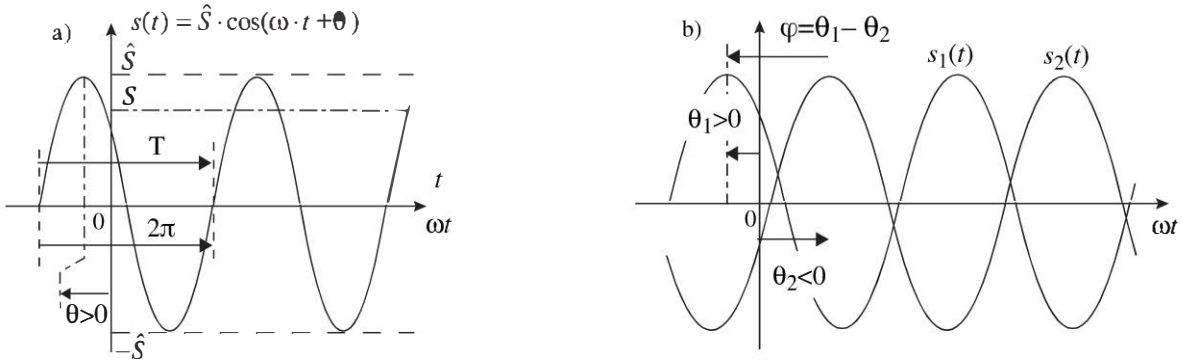


Figure 7.1

7.1.2 Régime permanent alternatif sinusoïdal à fréquence fixe

Depuis le chapitre 5, nous savons que les circuits électriques sont décrits par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dont les équations différentielles se mettent sous la forme générale :

$$A_n\frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1\frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f\left(e_1(t),\ldots,e_m(t),\frac{de_1(t)}{dt},\ldots,\frac{de_m(t)}{dt},\frac{d^2e_1(t)}{dt^2}\ldots\right)$$

Nous avons aussi vu dans ce chapitre, que le premier membre traduit la façon dont sont agencés les dipôles passifs, et que le second membre est constitué par une fonction des dipôles actifs du circuit.

La forme de la solution $i(t)$ de l'équation en régime permanent dépend principalement du contenu et de la forme du second membre.

Copyright © 2007 Dunod.

L'étude des circuits en **régime permanent alternatif sinusoïdal à fréquence fixe (RPCA)** a pour but de déterminer l'expression des courants et tensions dans le circuit lorsque le second membre est constitué par des termes sinusoïdaux à fréquence fixe.

7.1.3 Conditions d'émergence d'un second membre sinusoïdal

Les termes sinusoïdaux du second membre proviennent des sources présentes dans le circuit, qui peuvent être soit des sources sinusoïdales de tension ou de courant, soit des sources périodiques, dont la décomposition en série de Fourier[1] fait apparaître au moins une composante sinusoïdale.

À partir de ces sources, le second membre de l'équation différentielle $f\left(e_1(t),\ldots,e_m(t),\frac{de_1(t)}{dt},\ldots,\frac{de_m(t)}{dt},\frac{d^2e_1(t)}{dt^2}\ldots\right)$ devient égal à une somme de sinusoïdes, dont parfois les fréquences sont différentes.

➤ ***Sources sinusoïdales de même fréquence***

Nous savons depuis le chapitre 5 que si le second membre se limite à une sinusoïde, alors l'équation $A_n\frac{d^n i(t)}{dt^n}+\ldots+A_1\frac{di(t)}{dt}+A_0 i(t)=B\cos(\omega t+\phi)$ a pour solution une sinusoïde $i(t)$ de même pulsation que le second membre ($\omega = 2\pi f$) et a pour expression $i(t)=\hat{I}\cos(\omega t+\beta)$. De même, sachant que toute somme $\sum_i C_i\cos(\omega t+\phi_i)$ peut se réduire sous la forme $B\cos(\omega t+\phi)$, alors tout circuit qui comporte des sources de même fréquence admet aussi pour solution un courant de la forme $i(t)=\hat{I}\cos(\omega t+\beta)$.

Les courants et les tensions dans un circuit, dont toutes les sources sont sinusoïdales de même fréquence f, sont des sinusoïdes à la fréquence f, d'amplitudes et de phases à l'origine à déterminer par le calcul.

➤ ***Sources sinusoïdales de fréquences différentes***

Lorsque le second membre est constitué d'une somme de sinusoïdes de fréquences différentes, alors le principe de linéarité de la physique veut que la solution soit formée d'une somme de sinusoïdes, reprenant les fréquences du second membre.

$$A_n\frac{d^n i(t)}{dt^n}+\ldots+A_0 i(t)=\sum_i B_i\cos(\omega_i t+\phi_i)\Longrightarrow i(t)=\sum_i \hat{I}_i\cos(\omega_i t+\beta_i)$$

$i(t)$ est constitué d'une somme de solutions partielles sinusoïdales. Chaque solution partielle de pulsation $\omega_i = 2\pi f_i$ est la solution de l'équation différentielle dont le second membre ne comporte plus que les termes de même fréquence f_i.

[1] Voir « Pour en savoir plus : Décomposition en série de Fourier » du chapitre 5.

Copyright © 2007 Dunod.

Dans un circuit comportant des sinusoïdes de fréquences différentes, la solution est une somme de solutions partielles sinusoïdales dont chacune est solution d'un circuit partiel qui n'intègre que les sources de même fréquence.

Par exemple, le schéma de la figure 7.2 présente deux sources sinusoïdales $e(t)$ et $j(t)$ de pulsations différentes ω_1 et ω_2. Pour déterminer la solution $i(t)$, il faut réaliser deux études partielles (une à ω_1, l'autre à ω_2) qui définiront les deux solutions partielles $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Nous reverrons cette technique plus en détail dans le chapitre 8.

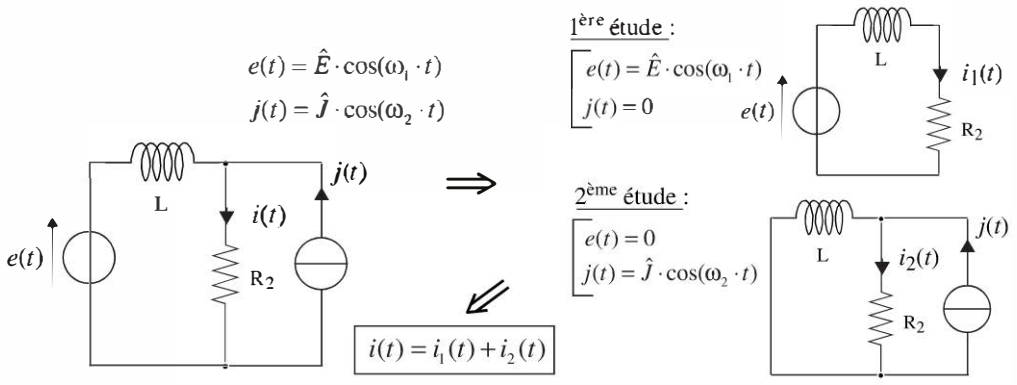


Figure 7.2

7.1.4 Comportement des dipôles passifs en RPAC

Contrairement au RPCC du chapitre 6, les tensions et courants respectifs des dipôles L et C ($u(t) = L\, di(t)/dt$ et $i(t) = C\, du(t)/dt$) ne s'annulent pas en RPAC.

Par exemple, une inductance parcourue par un courant $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t)$ produit une tension $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$ (figure 7.3a), avec :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d\hat{I}\cos(\omega t))}{dt} = L\omega\hat{I}\sin(\omega t) = L\omega\hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La tension $u(t)$ est maintenant caractérisée par :

- son amplitude $L\omega I$; le rapport $\hat{U}/\hat{I} = L\omega$ fait apparaître le terme constant $L\omega$;
- sa phase à l'origine $\alpha = \pi/2$; $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $i(t)$, le déphasage est de $\varphi = \pi/2$. Nous verrons ultérieurement l'importance majeure du déphasage.

De même, en alimentant la même inductance (figure 7.3b) par une tension $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t)$ alors le courant $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$, avec $i(t) = \frac{1}{2}\int \hat{U}\cos(\omega t)dt$, a sa partie alternative égale à $i(t) = \frac{\hat{U}}{L}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) = \frac{\hat{U}}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. On retrouve un rapport $\hat{U}/\hat{I} = L\omega$ et la tension $u(t)$ en avance de phase de $\pi/2$ par rapport à $i(t)$ (le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est toujours de $\varphi = \pi/2$).

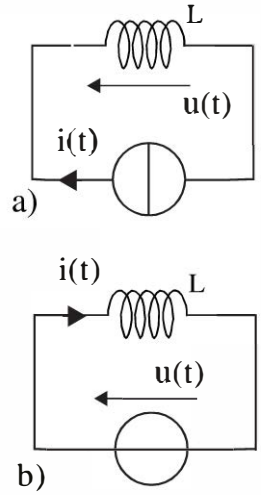


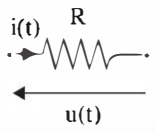
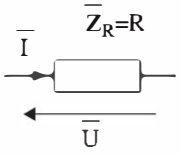
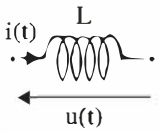
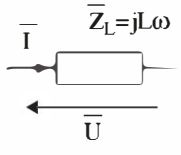
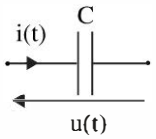
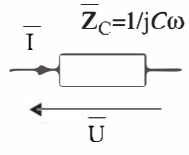
Figure 7.3

Copyright © 2007 Dunod.

Le tableau 7.1 regroupe ces résultats et intègre en complément les résultats de la même étude appliquée à la résistance R et au condensateur C.

Pour ces trois dipôles passifs, on constate qu'il existe une relation indépendante du temps entre les amplitudes de la tension $\hat{U}$ et du courant $\hat{I}$ (le rapport $\hat{U}/\hat{I} = R$ pour la résistance, $L\omega$ et $1/C\omega$ pour l'inductance et le condensateur) et un déphasage constant entre tension et courant (0 pour la résistance et $\pm\pi/2$ pour l'inductance et le condensateur).

Tableau 7.1

Dipôle passif	Expression temporelle	Loi d'Ohm complexe ($\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont des complexes)	Dipôle équivalent en RPCA
Résistance 	$u(t) = R\,i(t)$	$\underline{U} = R\,\underline{I}$	
Inductance 	$u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$\underline{U} = \mathrm{j}L\omega\,\underline{I}$	
Condensateur 	$i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$	$\underline{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,\underline{I}$	

7.2 MODÉLISATION DES CIRCUITS SOUS FORME COMPLEXE

La résolution des équations des circuits électriques nécessite la manipulation mathématique des signaux sinusoïdaux. Sous la forme $s(t) = \hat{S}\cos\phi(t)$, les signaux restent difficiles à manipuler. C'est pourquoi la **modélisation sous forme complexe**[2], constitue un outil de calcul qui facilite considérablement la résolution des équations.

7.2.1 Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Pour ses besoins dans l'étude de la lumière, le physicien français Augustin Fresnel (1788-1827) a adopté une représentation des grandeurs sinusoïdales, qui aujourd'hui encore est largement employée dans beaucoup de domaines de la physique. Cette représentation a

[2] Un nombre complexe N s'écrira sous forme cartésienne : $\underline{N} = a + \mathrm{j}b$ avec $\mathrm{j}^2 = -1$.

Copyright © 2007 Dunod.

l'avantage d'évaluer rapidement la somme de termes sinusoïdaux. Le principe est de représenter graphiquement la grandeur $s(t) = \hat{S}\cos\phi(t)$ par un vecteur $\overrightarrow{S}$ qui a les particularités suivantes (figure 7.4) :

– le module de $\overrightarrow{S}$ est l'équivalent de l'amplitude crête $\hat{S}$ de $s(t)$;

– l'angle polaire de $\overrightarrow{S}$ équivaut à la phase à l'origine $\phi(t)$ de $s(t)$.

La projection du vecteur $\overrightarrow{S}$ sur l'axe des abscisses permet de retrouver la grandeur réelle $s(t) = \hat{S}\cos\phi(t)$.

> ***Remarque :*** Lorsque $\phi(t) = \omega t + \theta$, alors la phase croît régulièrement en fonction du temps, produisant un vecteur associé qui tourne dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω.

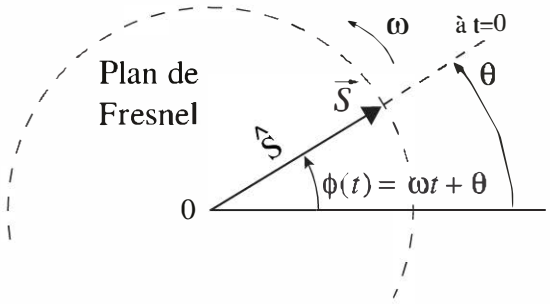


Figure 7.4

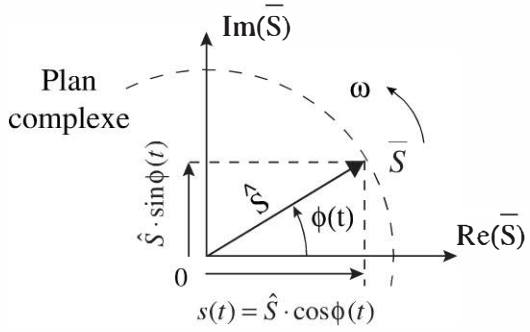


Figure 7.5

7.2.2 Représentation par un nombre complexe

Cependant, la représentation de Fresnel pose un sérieux problème quand il s'agit de réaliser des opérations entre les vecteurs. En effet, la multiplication – utile pour le calcul de la puissance – n'a pas de sens dans le plan de Fresnel. En effet, la multiplication scalaire de deux vecteurs produit toujours un scalaire qui ne se représente que sur un axe et la multiplication vectorielle génère un vecteur hors du plan. Dans les deux cas, le résultat obtenu diffère d'un vecteur dans le plan.

En transformant la représentation de Fresnel, où l'axe des abscisses devient l'axe réel des nombres complexes et où l'axe des ordonnées devient l'axe imaginaire (figure 7.5), un vecteur $\overrightarrow{S}$ se transforme dans le plan en un nombre complexe $\overline{S}$.

➤ ***Notations***

Le nombre complexe peut s'écrire soit sous **la forme cartésienne** $\overline{S} = \hat{S}\left(\cos\phi(t) + \mathrm{j}\sin\phi(t)\right)$, soit sous la forme polaire $\overline{S} = \hat{S}e^{\mathrm{j}\phi(t)}$.

On retrouve la grandeur réelle $s(t)$ en prenant la partie réelle du nombre $\overline{S}$ $s(t) = \mathrm{Re}(\overline{S}) = \hat{S}\cos\phi(t)$.

La modélisation sous forme complexe des courants et tensions électriques sinusoïdales consiste à associer à chacune des grandeurs un nombre complexe $\overline{S}$. Ainsi, à

Copyright © 2007 Dunod.

$s(t) = \hat{S}\cos(\omega t + \theta)$ est associé $\overline{S} = \hat{S}\big(\cos(\omega t + \theta) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \theta)\big)$ (ou indifféremment $\overline{S} = \hat{S}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$). On désigne souvent $\overline{S}$ comme le **phaseur** associé à $s(t)$ – traduction anglo-saxonne de **phasor–**.

Dans un circuit qui ne possède que des sources de même fréquence, on adopte en général une écriture différente pour les phaseurs. En effet, sachant que : $\overline{S} = \hat{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} = \sqrt{2}\,S\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)}$, on peut convenir d'associer à $s(t)$ le nombre complexe $S\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (écriture réduite à $t = 0$).

Si on associe le nombre complexe $\overline{S} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ à $s(t)$, que l'on désignera comme le **phaseur réduit**, alors la transformation complexe inverse s'écrit :

$$s(t) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)}\overline{S}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)}S\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}\,S\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}) = \hat{S}\cos(\omega t + \theta)$$

Cette nouvelle écriture – très utilisée chez les électrotechniciens – entraîne une simplification des écritures des équations.

Remarque : Le phaseur réduit $\overline{S} = S\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, où interviennent l'amplitude efficace S et la phase θ à l'origine des temps, devient indépendant du temps. Contrairement au phaseur $\overline{S} = \hat{S}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ dont le vecteur associé tourne à la pulsation ω, le vecteur associé au phaseur réduit $\overline{S}$ est fixe.

➤ *Propriétés*

L'addition de deux grandeurs réelles sinusoïdales est maintenant calculée sous forme d'une addition complexe $\boxed{s_1(t) + s_2(t) = \mathrm{Re}(\overline{S}_1 + \overline{S}_2)}$.

La multiplication par un scalaire devient $\boxed{ks_1(t) = \mathrm{Re}(k\overline{S}_1)}$.

La multiplication imaginaire remplace la multiplication de signaux temporels et produit un résultat dans le plan complexe ; si $s_1(t) = \hat{S}_1\cos(\omega_1 t + \theta_1)$ et $s_2(t) = \hat{S}_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$ alors :

$$\overline{S}_1\overline{S}_2 = (\hat{S}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t+\theta_1)})(\hat{S}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t+\theta_2)}) = \hat{S}_1\hat{S}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t+\theta_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t+\theta_2)} = \hat{S}_1\hat{S}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}((\omega_1+\omega_2)t+\theta_1+\theta_2)}$$

$$s_1(t)s_2(t) = \hat{S}_1\hat{S}_2\big(\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \theta_1 + \theta_2\big) \Rightarrow \boxed{s_1(t)s_2(t) = \mathrm{Re}(\overline{S}_1\overline{S}_2)}$$

La dérivation $s(t)$ d'une grandeur sinusoïdale $s_1(t) = \hat{S}_1\cos(\omega t + \theta_1)$ implique :

$$s(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{d\big(\hat{S}_1\cos(\omega t + \theta_1)\big)}{dt} = \hat{S}_1\omega\cos\left(\omega t + \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{S} = \omega\hat{S}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{2})} = \mathrm{j}\omega\hat{S}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_1)} = \mathrm{j}\omega\overline{S}_1 \Rightarrow \boxed{\frac{ds_1(t)}{dt} = \mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega\overline{S}_1)}$$

Copyright © 2007 Dunod.

L'intégration $s(t)$ d'une grandeur $s_1(t) = \hat{S}_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ conduit à :

$$s(t) = \int s_1(t)dt = \int \hat{S}_1 \cos(\omega t + \theta_1)dt = \frac{\hat{S}_1}{\omega} \cos\left(\omega t + \theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{S} = \frac{\hat{S}_1}{\omega} e^{j(\omega t+\theta_1)} e^{j(-\frac{\pi}{2})} = \frac{\hat{S}_1}{\omega e^{j(\frac{\pi}{2})}} e^{j(\omega t+\theta_1)} = \frac{\overline{S}_1}{j\omega} \Rightarrow \boxed{\int s_1(t)\, dt = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{S}_1}{j\omega}\right)}$$

7.2.3 Loi d'Ohm complexe – Notion d'impédance complexe

Un dipôle passif se caractérise par une relation courant-tension. La modélisation complexe des grandeurs électriques réalisée au paragraphe précédent nécessite une réécriture des trois relations relatives à la résistance, l'inductance et le condensateur.

La loi d'Ohm $u(t) = Ri(t)$ de la résistance R alimentée par un courant sinusoïdal $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$, induit une tension sinusoïdale $u(t) = R\hat{I}\cos(\omega t + \beta)$. En posant $\overline{I} = Ie^{j\beta}$ (phaseur réduit) associé à $i(t)$, le phaseur réduit $\overline{U}$ associé à $u(t)$ devient $\overline{U} = RIe^{j\beta} = R\overline{I}$, soit $\boxed{\overline{U} = R\overline{I}}$.

La tension aux bornes de l'inductance L alimentée par le courant $i(t)$ précédent, est $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = L\omega\hat{I}\cos(\omega t + \pi/2)$. La relation entre les phaseurs réduits $\overline{I}$ et $\overline{U}$ s'écrit : $\overline{U} = L\omega I e^{j(\beta+\frac{\pi}{2})} = L\omega I e^{j\beta}e^{j\frac{\pi}{2}} = L\omega\overline{I}j = jL\omega\overline{I}$, soit $\boxed{\overline{U} = jL\omega\overline{I}}$.

De même, pour le condensateur alimenté par le courant $i(t)$, la tension s'écrit :

$u(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = \dfrac{1}{C}\,\hat{I}\,\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t - \pi/2) = \dfrac{\hat{I}}{C\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$, qui entraîne la relation $\overline{U} = \dfrac{1}{C\omega}e^{j(\beta-\frac{\pi}{2})} = \dfrac{Ie^{j\beta}}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\overline{I}}{C\omega}(-j) = \dfrac{1}{jC\omega}\overline{I}$, soit $\boxed{\overline{U} = \dfrac{1}{jC\omega}\overline{I}}$.

Ces trois relations essentielles montrent, qu'à ω fixe, le rapport $\hat{U}/\hat{I}$ est un nombre constant, homogène à des ohms. Chacune des relations précédentes peut alors s'écrire sous la forme de la **loi d'Ohm complexe** $\boxed{\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I}}$, qui fait apparaître le nombre $\overline{Z}$, désignée comme **l'impédance complexe** du dipôle.

Les dipôles R, L et C sont alors remplacés par des dipôles complexes $\overline{Z}_R = R$, $\overline{Z}_L = jL\omega$ et $\overline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{-j}{C\omega}$ (figure 7.6).

7.2.4 Association d'impédances complexes

Les impédances complexes $\overline{Z}$ s'associent en série et en parallèle.

Copyright © 2007 Dunod.

Une seule impédance équivalente $\overline{Z}_s$ remplace $\overline{Z}_i$ impédances en série (figure 7.7) d'expression $\boxed{\overline{Z}_s = \sum_i \overline{Z}_i}$. De même, une impédance équivalente $\overline{Z}_p$ se substitue aisément à $\overline{Z}_i$ impédances en parallèle avec $\boxed{(\overline{Z}_p)^{-1} = \sum_i (\overline{Z}_i)^{-1}}$.

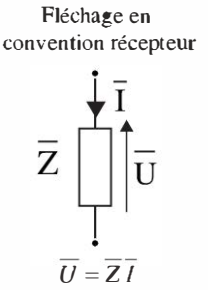


Figure 7.6

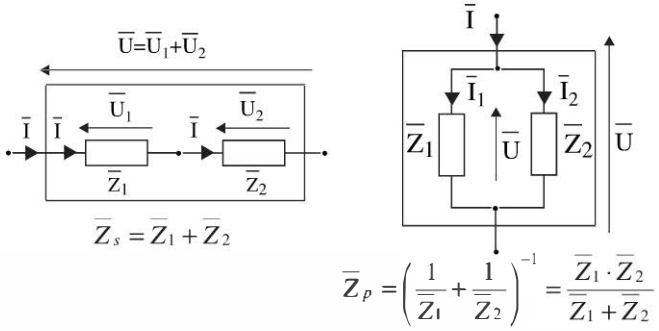


Figure 7.7

7.2.5 Modélisation complexe du circuit électrique en RPCA

Jusqu'alors, la modélisation complexe représente les sources sinusoïdales par des phaseurs (réduits ou non) et les dipôles passifs par des impédances complexes. Il convient maintenant de modéliser le circuit électrique.

➤ ***Modélisation complexe des dipôles actifs***

Le tableau 7.2 regroupe les résultats de la modélisation des sources sinusoïdales, mais aussi périodiques en utilisant la décomposition en série de Fourier.

Générateur périodique	Décomposition en S.F.	Modèle général		Générateur équivalent en RPCA		
		Sce de tension	Sce de courant	Sce de tension	Sce de courant	
Signal sinusoïdal $s(t) = \hat{S} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$	$c_0 = 0$ $\boxed{c_1 = \hat{S};\ \phi_1 = \theta}$ $c_2 \cdots c_n = 0$	s(t)	s(t)	$\overline{S}$	$\overline{S}$ $\overline{S} = \hat{S} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \theta)}$ ou $\overline{S} = S \cdot e^{j\theta}$	*Exemple*
Signal périodique $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t)\,dt$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t)\,dt$	$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = S_0$ $\boxed{c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ $\boxed{\phi_n = atan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)}$	s(t) S_0 $C_n \cdot \cos(n \cdot \omega t + \phi_n)$		$\overline{S}_n = C_n\, e^{j(n\omega t + \phi_n)}$ Une source pour chaque étude (sauf pour S_0)		*Généralisation*
		s(t) S_0 $C_n \cdot \cos(n \cdot \omega t + \phi_n)$		0A $\overline{S}_n = C_n\, e^{j(n\omega t + \phi_n)}$ Une source pour chaque étude (sauf pour S_0)		

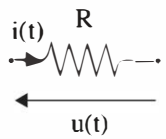
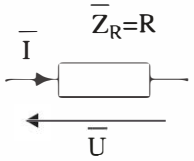
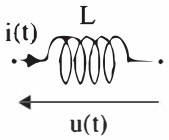
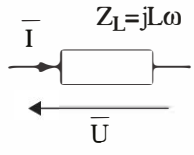
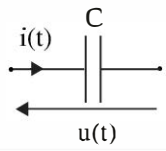
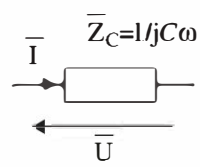
Tableau 7.2

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Modélisation complexe des dipôles passifs*

Le tableau 7.3 regroupe les résultats issus de la modélisation complexe des dipôles passifs.

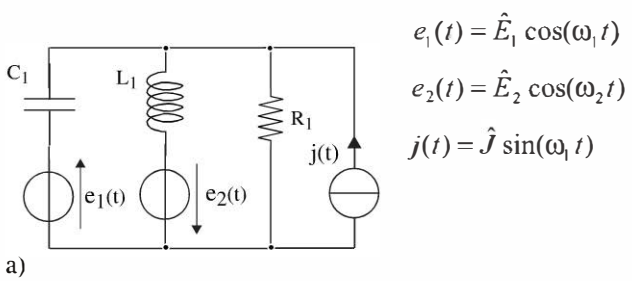
Tableau 7.3

Dipôle passif	Expression temporelle	Loi d'Ohm complexe ($\overline{U}$ et $\overline{I}$ sont des complexes)	Dipôle équivalent en RPCA
Résistance 	$u(t) = R\,i(t)$	$\overline{U} = R\,\overline{I}$	
Inductance 	$u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$\overline{U} = \mathrm{j}L\omega\,\overline{I}$	
Condensateur 	$i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$	$\overline{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,\overline{I}$	

➤ *Modélisation complexe d'un schéma électrique*

Les tableaux précédents (7.2 et 7/3) vont servir de base à l'établissement d'un schéma électrique complexe équivalent en RPCA.

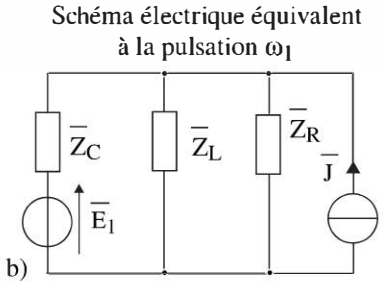
Par exemple, à partir du schéma électrique de la figure 7.8a et des tableaux, on établit pour la pulsation ω_1, un schéma électrique complexe (figure 7.8b).



$e_1(t) = \hat{E}_1 \cos(\omega_1 t)$

$e_2(t) = \hat{E}_2 \cos(\omega_2 t)$

$j(t) = \hat{J} \sin(\omega_1 t)$



$\overline{E}_1 = E\,e^{j(\omega_1 t)} \qquad \overline{J} = J\,e^{j(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})}$

Figure 7.8

> Le schéma équivalent en RPCA à fréquence fixe, associe une impédance $\overline{Z}$ à chaque dipôle passif et un phaseur ($\overline{E}$ ou $\overline{J}$) à chaque dipôle actif sinusoïdal.

Par cette modélisation, un schéma électrique complexe ne comporte plus que des phaseurs de même pulsation et des impédances (figure 7.8b).

Copyright © 2007 Dunod.

7.2.6 Mise en équation et résolution

➤ ***Écriture des équations à partir des lois de Kirchhoff***

La réalisation du graphe associé au schéma complexe utilise les mêmes règles qui ont permis de dessiner le graphe d'un circuit en RPCC. Les $ni + mi$ équations complexes du circuit en RPAC sont écrites en utilisant les résultats du graphe, les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm complexe $\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I}$ (figure 7.9).

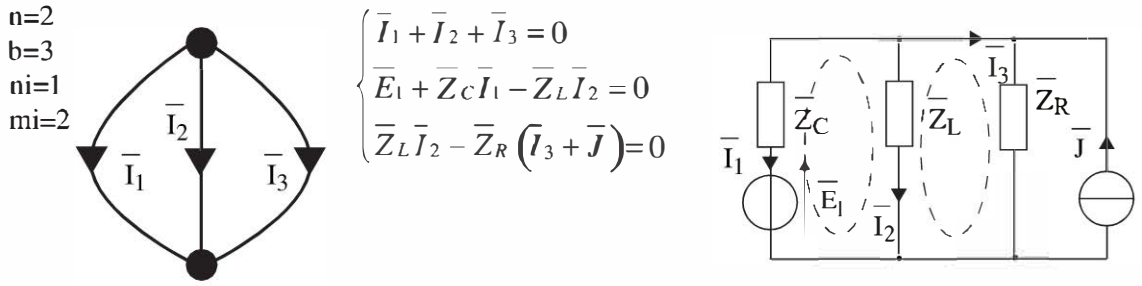


Figure 7.9

Les équations du schéma de la figure 7.9 peuvent être mises sous la forme matricielle suivante, où apparaît la matrice impédance $[\overline{Z}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{Z}_C & -\overline{Z}_L & 0 \\ 0 & \overline{Z}_L & -\overline{Z}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{E}_1 \\ \overline{Z}_R\overline{J} \end{bmatrix} \Rightarrow [\overline{Z}][\overline{I}] = [\overline{U}]$$

Les méthodes de résolution sont les mêmes que celles déjà vues en RPCC, mais où les grandeurs sont complexes.

➤ ***Écriture des règles et des théorèmes***

Toutes les règles et théorèmes établis en RPCC, sont utilisables en RPAC avec toutefois une adaptation nécessaire des expressions à la modélisation complexe pour y intégrer la notion de phaseur et d'impédance.

➤ ***Règles des ponts diviseurs et de Millman***

La figure 7.10 rassemble les résultats de ces trois règles.

➤ ***Théorèmes de Thévenin, de Norton et de superposition des sources***

Les schémas équivalents de Thévenin et de Norton, ainsi que les règles de passage entre dipôles sont précisés à la figure 7.11. Le théorème de superposition des sources est illustré à la figure 7.12.

Copyright © 2007 Dunod.

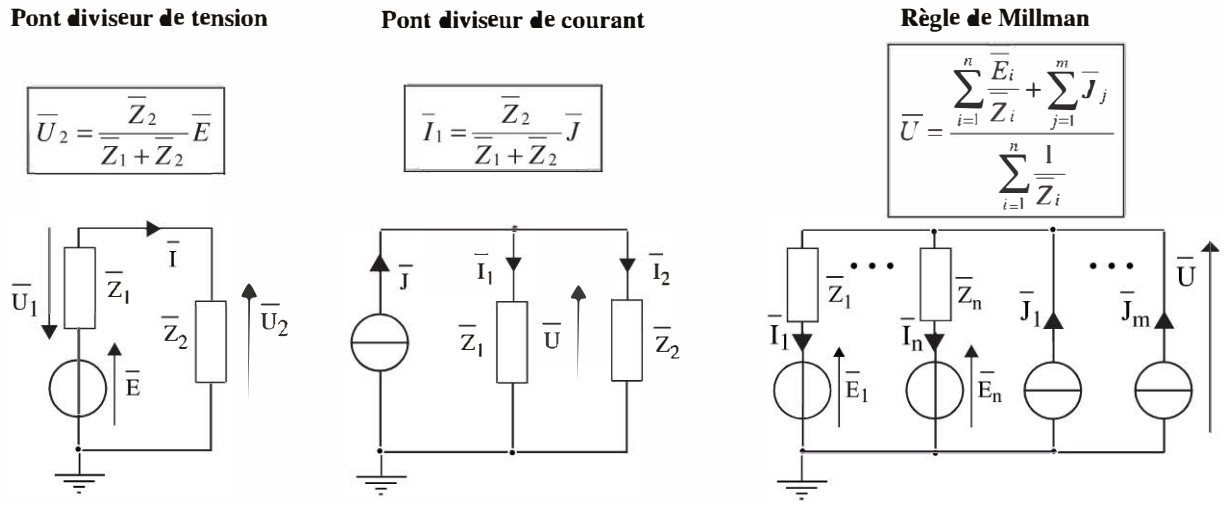


Figure 7.10

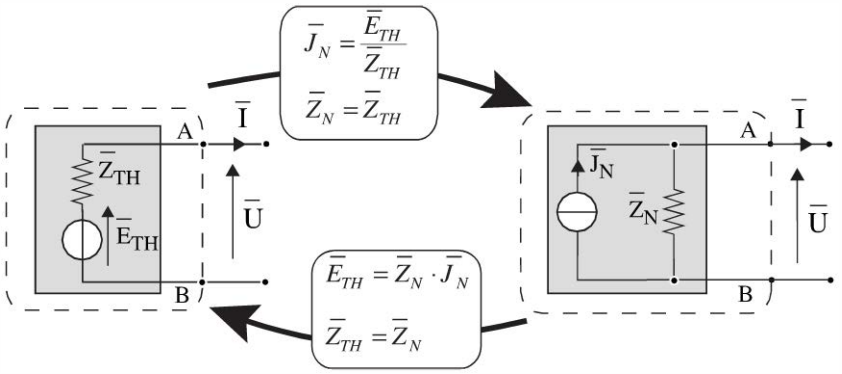


Figure 7.11

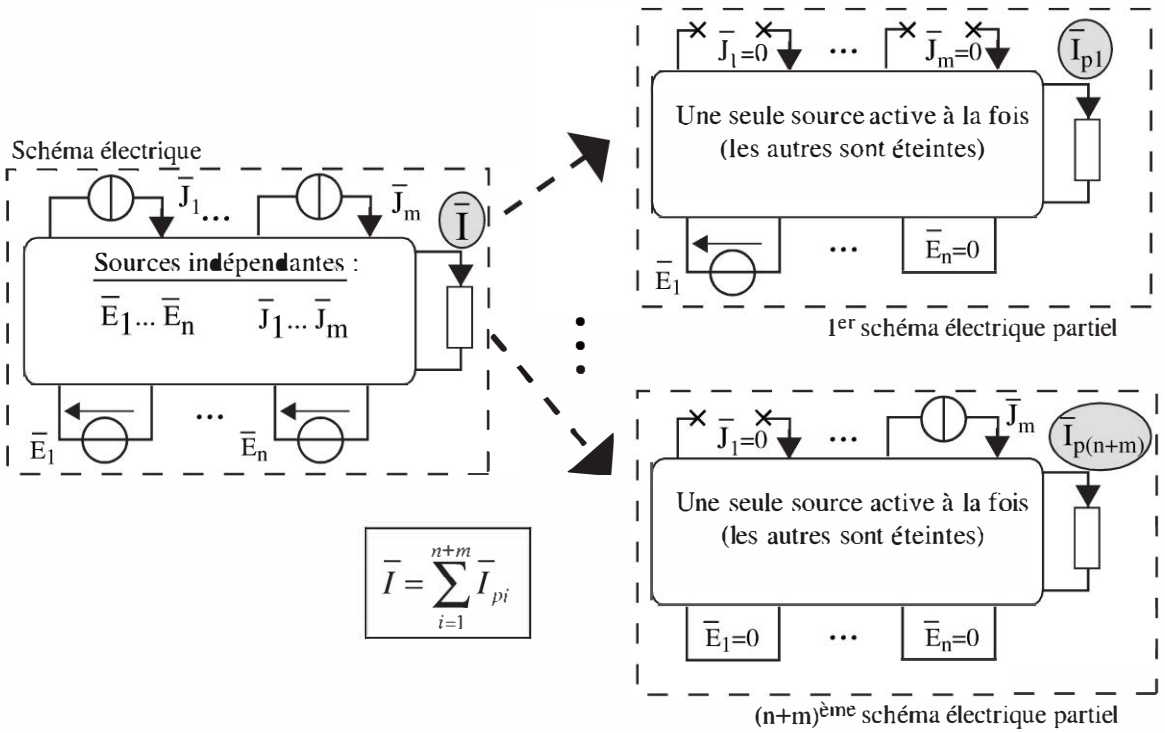


Figure 7.12

Copyright © 2007 Dunod.

7.2.7 Méthodologie d'étude à partir de la modélisation complexe

Avec la modélisation complexe, la méthodologie générale d'étude des circuits en RPCA, décrite par l'organigramme de la figure 7.13, nécessite tout d'abord d'établir un circuit électrique équivalent en RPCA.

De ce schéma électrique équivalent est tiré le graphe associé, qui permet de trouver et d'écrire les équations de nœuds et de mailles.

La résolution du système d'équations complexes détermine les phaseurs des courants de branches.

À partir de ces phaseurs, il devient possible de revenir à l'écriture des grandeurs réelles par la transformation complexe inverse.

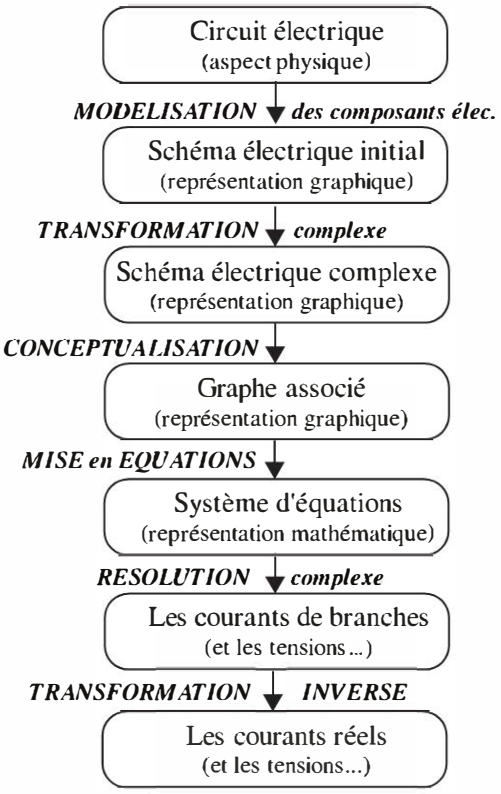


Figure 7.13

7.3 MODÉLISATION OPÉRATIONNELLE

La modélisation des circuits électriques par l'intermédiaire d'un opérateur – plus précisément l'opérateur de Laplace – est très utilisée, car non seulement l'opérateur permet l'étude des circuits en régime permanent, mais il traite aussi des circuits en régime transitoire (comme nous le verrons au chapitre 10).

7.3.1 Opérateur de Laplace

La série de Fourier rassemble les composantes sinusoïdales qui composent un signal $s(t)$ périodique et s'écrit sous forme polaire :

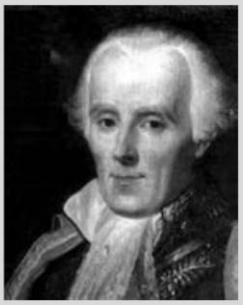
$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{-jn\omega t}, \text{ avec } C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot e^{-jn\omega t}dt.$$

Dans le cas où le signal $s(t)$ est apériodique (correspondant à une période infiniment grande), la **transformée de Fourier** remplace la série de Fourier. Sa formulation est obtenue en prolongeant l'expression de la série.

En posant $\Omega = n\omega$ et $\Delta\Omega = (n+1)\omega - n\omega = \omega$, puis $C_n = \frac{1}{T}G(\Omega) = \frac{\omega}{2\pi}G(\Omega)$ $= \frac{1}{2\pi}G(\Omega)\Delta\Omega$, il vient alors :

Copyright © 2007 Dunod.

Pierre SIMON DE LAPLACE (1749-1827)



Ce grand savant français, (mathématicien, physicien et astronome) est fils de cultivateurs normands. Sous le règne de Bonaparte, il crée en collaboration avec Monge l'école Polytechnique. Il est l'inventeur en mathématique du célèbre opérateur laplacien et de la *transformée de Laplace*. Il est l'auteur aussi du *démon de Laplace* qui peut déterminer selon lui en un instant la mesure des paramètres de toutes les particules de l'univers...

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\Omega=-\infty}^{+\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} \Delta\Omega$$

$$\text{et} \quad G(\Omega) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-j\Omega t} \, dt$$

Si $T \to \infty$ alors $\Delta\Omega \to d\Omega$ et les expressions deviennent :

$$\boxed{s(t) \to f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega}$$

$$\text{et} \quad \boxed{G(\Omega) \to F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt}$$

$F(\Omega)$ est ainsi définie comme la **transformée de Fourier** de $f(t)$.

Remarque : Compte tenu de l'analogie entre les écritures de $f(t)$ et $s(t)$, on considère que $f(t)$ est représenté par la superposition d'une infinité d'oscillations ayant toutes les fréquences. $F(\Omega)$ donne l'amplitude et la phase de chaque oscillation ; $F(\Omega)$ est donc garante du spectre fréquentiel de $f(t)$.

La transformée $F(\Omega)$ ne peut exister que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\Omega t} dt$ converge. Il faut en particulier que $f(t) = 0$ quand $t \to \pm\infty$. Cette seule condition est extrêmement restrictive, car de simples signaux (constants, périodiques) n'ont pas de transformée de Fourier ! Pour pallier cette difficulté, calculons plutôt la transformée du signal « $e^{-rt} f(t)$ » dans l'intervalle $[0, \infty[$ (avec r un réel) et qui est nul dans $]0, \infty[$. La transformée du signal est alors $\int_0^{\infty} (e^{-rt} f(t)) e^{-j\Omega t} dt$.

Remarque : Pour tous les signaux périodiques rencontrés en physique $e^{-rt} f(t) \to 0$, lorsque $t \to \infty$. La convergence de la transformée est alors assurée pour tous les signaux périodiques courants.

On définit la **transformée de Laplace** comme la transformée de Fourier du signal « $e^{-rt} f(t)$ » dans l'intervalle $[0, \infty[$. En posant $\boxed{p = r + j\Omega}$, la transformée de Laplace s'écrit :

$$\int_0^{\infty} (e^{-rt} f(t)) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(r+j\Omega)t} f(t) dt = \boxed{\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p)}.$$

La variable p est appelée l'**opérateur de Laplace**.

Copyright © 2007 Dunod.

La transformée inverse de Laplace est obtenue en remplaçant $f(t)$ par « $e^{-rt} f(t)$ » dans l'expression de la transformée inverse de Fourier ; on obtient :

$$f(t) = e^{rt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{pt} d\Omega, \text{ avec } d\Omega = \frac{dp}{j}.$$

L'original[3] devient $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} F(p) e^{pt} dp}$ avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Trouver une signification physique à $F(p)$ n'est pas notre objectif dans cet ouvrage. L'intérêt majeur de la transformée de Laplace réside dans sa puissance de calcul, comme le montrera la suite. La transformée $F(p)$ devient un outil intermédiaire qui permet la mise en équation d'un circuit et produit la solution, sans avoir à résoudre une seule équation différentielle.

7.3.2 Calcul opérationnel

Pour effectuer des calculs opérationnels, il faut connaître des méthodes, règles ou théorèmes. Ces résultats connus, largement diffusés dans des ouvrages spécialisés, ne seront pas démontrés ici. Des tables en fin de paragraphe rassemblent des résultats courants ; attention cependant à les utiliser dans leur domaine de validité.

➤ ***Méthodes de calcul des transformées de Laplace $f(t) \rightarrow F(p)$***

Pour déterminer la transformée de Laplace, il y a plusieurs méthodes :

- directement à partir de la formule $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$;
- en utilisant les **tables** ou **dictionnaire** (tableau 7.4) ;
- en utilisant les propriétés pour étendre les résultats du dictionnaire.

• Tables des transformées courantes

Le but des tables de Laplace est de trouver rapidement $F(p)$ à partir de $f(t)$.

• Propriétés de la transformation de Laplace

Le tableau 7.5 reprend les principales propriétés de la transformée de Laplace. Par exemple, pour calculer la transformée de $f(t) = \hat{E} \cos(\omega t + \alpha)$, on utilise la transformée de $f(t) = \cos(t)$ ainsi que les propriétés de $f(at)$ et de $f(t - \tau)$.

[3] L'original $f(t)$ est défini comme la fonction qui a $F(p)$ pour transformée de Laplace.

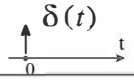
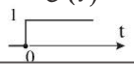
Copyright © 2007 Dunod.

$$\text{Avec } f(t) = \hat{E}\cos\left(\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)\right) = \hat{E}s(t) \Rightarrow F(p) = \hat{E}S(p)$$

en faisant le changement de variable $S(p) = \frac{1}{\omega} M\left(\frac{p}{\omega}\right)$, on obtient :

$$F(p) = \frac{\hat{E}}{\omega} e^{\frac{\alpha}{\omega}\frac{p}{\omega}} \frac{p/\omega}{(p/\omega)^2 + 1} = \hat{E}e^{\frac{\alpha p}{\omega^2}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Tableau 7.4

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ 
$\frac{1}{p}$	$\sigma(t)$ 
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p-\alpha\cdot\ln(a)}$	$a^{\alpha\cdot t}\ (a>0)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot e^{-at}$
$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$

$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\cdot\mathrm{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\mathrm{ch}(at)$
$\frac{p+b}{(p+a)^2}$	$\frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{b^2+\omega^2}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ (avec $tg(\varphi)=\frac{\omega}{b}$)
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\cdot(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}\left(1-\frac{b\cdot e^{-at}-a\cdot e^{-bt}}{b-a}\right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{b\cdot e^{-bt}-a\cdot e^{-at}}{b-a}$
$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}\left(1-(\omega t+1)\cdot e^{-\omega t}\right)$

➤ ***Calcul de la transformée inverse $f(t) \leftarrow F(p)$***

Il y a aussi plusieurs façons pour déterminer la transformée inverse :

- par le calcul à partir de la formule $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\omega}^{r+j\infty} F(p)e^{pt}dp$;
- en décomposant en fractions partielles puis en utilisant les tables ;
- à partir de l'intégrale de Mellin-Fourier (calcul de résidus).

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 7.5

Domaine temporel ⇌	Domaine de Laplace
$f(t)+g(t)$	$F(p)+G(p)$
$k\cdot f(t)$	$k\cdot F(p)$
$\dfrac{df(t)}{dt}$	$p\cdot F(p)-f(0^+)$ $f(0+)$ valeur initiale
$-t\cdot f(t)$	$\dfrac{dF(p)}{dp}$
$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$	$p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0^+)-\dfrac{df(0^+)}{dt}$
$\int_0^t f(t)\cdot dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$

Domaine temporel ⇌	Domaine de Laplace
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_0^{+\infty} F(p)\cdot dp$
$f(t-\tau)\cdot\sigma(t-\tau)$	$e^{-\tau p}\cdot F(p)$
$f(a\cdot t)$	$\dfrac{F(p/a)}{a}$
Théorème de la valeur initiale : $f(0^+)$	$p\cdot F(p)\big]_{p\to\infty}$
Théorème de la valeur finale : $f(\infty)$	$p\cdot F(p)\big]_{p\to 0}$

Ces méthodes font parti du programme de mathématiques et ne seront pas démontrées dans cet ouvrage. Toutefois, un « Pour en savoir plus : Fractions partielles et calculs de résidus » est proposé en fin du chapitre comme rappels.

• Pôles et décomposition en fractions partielles

En général, dans le domaine de l'électricité, la transformée peut se mettre sous la forme : $F(p)=\dfrac{P(p)}{Q(p)}$, où $P(p)$ et $Q(p)$ sont des polynômes à coefficients réels et où le numérateur est de degré inférieur ou égal au numérateur.

Par définition, les **pôles**[4] de $F(p)$ sont **les racines** de $Q(p)$. Ces pôles sont réels ou conjugués deux à deux. $Q(p)$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$Q(p)=(p+a)^{\alpha}(p+b)^{\beta}\ldots(p^2+xp+y)^{\mu}\ldots$$

La **décomposition en fractions partielles** de $F(p)$ est unique et s'appuie sur les pôles de $F(p)$:

$$F(p)=1)\ \left\{\left[\frac{A_0}{(p+a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(p+a)^{\alpha-1}}\ldots\right]+\left[\frac{B_0}{(p+b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(p+b)^{\beta-1}\ldots}\right]+\ldots\right.$$

$$2)\ +\left\{\left[\frac{M_0p+N_0}{(p^2+xp+y)^{\mu}}+\frac{M_1p+N_1}{(p^2+xp+y)^{\mu-1}}\ldots\right]+\ldots\right.$$

La partie 1) regroupe les pôles simples et multiples et la partie 2) les pôles complexes conjugués simples et multiples.

[4] Les pôles d'une fonction rationnelle sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Intégrale de Mellin-Fourier ou calcul des résidus***

Dans le cas où $e^{pt}F(p)$ est uniforme[5], le théorème de Cauchy appliqué à l'intégrale de Mellin-Fourier donne :

$$f(t) = \frac{1}{3\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} F(p)e^{pt}dp = \sum \text{résidus de } e^{pt}F(p).$$

La méthode de calcul des résidus est explicitée dans le « Pour en savoir plus » de ce chapitre.

7.3.3 Résolution des équations différentielles à coefficients constants à partir de la transformation de Laplace

La transformée des dérivations et des intégrations successives (voir tableau 7.5) permet la transformation des équations différentielles suivant Laplace.

$$s(t) \rightleftarrows S(p) \; ; \quad \frac{ds(t)}{dt} \rightleftarrows pS(p) - s(0^+) \; ; \quad \frac{d^2s(t)}{dt^2} \rightleftarrows p^2S(p) - ps(0^+) - \frac{ds(0^+)}{dt} \ldots$$

L'équation différentielle $A_n\dfrac{d^ns(t)}{dt^n} + \ldots + A_1\dfrac{ds(t)}{dt} + A_0s(t) = f(t)$ (avec les coefficients A_i constant) devient $\boxed{(A_pp^n + \ldots + A_1p + A_0)S(p) + G(p) = F(p)}$.

On appelle **équation caractéristique** $\Delta(p) = (A_np^n + \ldots + A_1p + A_0)$; les conditions initiales issues des dérivées sont regroupées dans $G(p)$; $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ qui renferme les sources. Par transformation inverse, la solution s'écrit :

$$\boxed{s(t) \rightleftarrows S(p) = \frac{F(p) - G(p)}{\Delta(p)}}$$

À ce stade, il est capital de remarquer que :

- le calcul de $s(t)$ devient un calcul algébrique ;
- les pôles de $S(p)$ sont les racines de **l'équation caractéristique** $\Delta(p)$ et les pôles de $F(p)$. Ces pôles jouent un rôle essentiel dans la solution ;
- les conditions initiales sont directement intégrées dans la solution $s(t)$; ce résultat sera largement utilisé dans le chapitre 10.

À titre d'exemple, recherchons la solution $s(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} - 2\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = 10\sin(t)$, avec $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 1$. La transformée s'écrit :

$$[p^2S(p) - ps(0^+) - s'(0^+)] - 2[pS(p) - s(0^+)] + S(p) = \frac{10}{p^2+1}$$

[5] Pour tout p, il existe une valeur de $F(p)$.

Copyright © 2007 Dunod.

d'où :

$$S(p) = \frac{p^2 + 11}{(p^2 - 2p + 1)(p^2 + 1)} = \frac{p^2 + 11}{(p^2 - 1)^2(p^2 + 1)}$$

En décomposant en fractions $S(p) = \frac{6}{(p-1)^2} - \frac{5}{(p-1)} + \frac{5p}{(p^2+1)}$ et en utilisant les tables, on obtient l'original $s(t) = (6t - 5)e^{-t} + 5\cos(t)$, qui contient un terme transitoire et un terme permanent.

7.3.4 Application aux circuits électriques en RPCA

La transformée de Laplace peut être utilisée comme le moyen pour résoudre les équations différentielles (voir § 7.3.3) établies à partir du schéma électrique.

Toutefois, on peut aussi modéliser directement le circuit électrique par un schéma symbolique équivalent tiré de la transformée de Laplace, qui permet ensuite d'écrire directement les équations opérationnelles à résoudre, en évitant ainsi l'établissement intermédiaire des équations différentielles.

Ces deux méthodes sont autant utilisées l'une que l'autre.

➤ ***Résolution des équations différentielles en RPCA***

La transformation des équations différentielles fait apparaître une écriture qui intègre les C. I. des grandeurs du circuit (voir § 7.3.3). Ces C. I. n'ont qu'un caractère anecdotique en régime permanent, car on suppose que le circuit est alimenté depuis suffisamment longtemps pour que ce régime transitoire ait disparu.

$I(p) = -\frac{G(p)}{A_n p^n + \ldots + A_1 p + A_0} + \frac{F(p)}{A_n p^n + \ldots + A_1 p + A_0}$, où $G(p)$ est constitué des C. I et où $F(p)$ est une fonction des transformées des sources sinusoïdales.

La solution temporelle $i(t)$ est alors calculée à partir de la transformation inverse de $I(p)$. Le premier terme représente l'évolution en régime libre (transitoire) de $i(t)$. Le second terme conditionne l'évolution de $i(t)$ en régime forcé, qui contient des termes transitoires et des termes de régime permanent qui forment la solution recherchée en RPCA ; dans ce régime les C. I. seront annulées ($G(p) = 0$).

Sur l'exemple de la boucle de la figure 7.14, l'équation différentielle s'écrit :

$$-e(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \Longrightarrow \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

L'annulation de la C.I. $i(0) = 0$ supprime les termes du régime libre.

La transformée de $e(t)$ est $E(p) = \frac{\hat{E}p}{p^2 + \omega^2}$.

L'équation se transforme par Laplace sous la forme $\frac{L}{R}pI(p) + I(p) = \frac{E(p)}{R}$.

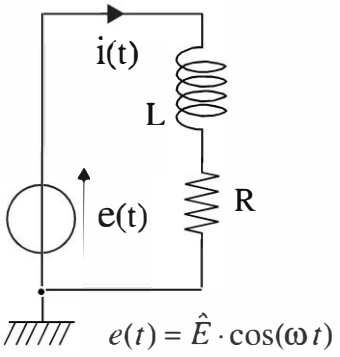


Figure 7.14

Copyright © 2007 Dunod.

D'où $I(p) = \dfrac{1}{L}\dfrac{\hat{E}p}{(p+R/L)(p^2+\omega^2)}$ qui fait apparaître un pôle simple et deux pôles complexes conjugués. Après calcul des résidus, la solution se met sous la forme :

$$I(p) = \frac{\hat{E}}{L}\frac{1}{(R/L)^2+\omega^2}\left(\frac{-R/L}{(p+R/L)} + \frac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)} + \frac{R/L\ p}{(p^2+\omega^2)}\right)$$

La solution temporelle $i(t)$ est alors constituée par :

– le terme $\dfrac{\omega^2 + R/L\ p}{(p^2+\omega^2)} \rightleftharpoons \omega\sin(\omega t) + \dfrac{R}{L}\cos(\omega t)$ de régime permanent ;

– le terme $\dfrac{-R/L}{(p+R/L)} \rightleftharpoons -\dfrac{R}{L}\,e^{-(R/L)t}$ qui est transitoire (nul quand $t \to \infty$).

En posant $\tan(\theta) = L\omega/R$, la solution en RPCA devient :

$$i(t) = \frac{\hat{E}}{L}\frac{1}{((R/L)^2+\omega^2)}\left(\omega\sin(\omega t) + \frac{R}{L}\cos(\omega t)\right) = \frac{\hat{E}}{\sqrt{(R)^2+(L\omega)^2}}\cos(\omega t - \theta)$$

➤ ***Établissement d'un schéma électrique symbolique***

• Notion d'impédance opérationnelle

La transformation des équations différentielles pour chacun des trois dipôles passifs, conduit aux formulations suivantes :

$$u(t) = Ri(t) \rightleftharpoons U(p) = RI(p)$$
$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightleftharpoons U(p) = L(pI(p) - i(0^+)) = LpI(p) - Li(0^+)$$
$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \rightleftharpoons I(p) = C(pU(p) - v(0^+)) \Rightarrow U(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{v(0^+)}{C}$$

Les tensions $U(p)$ ont un terme proportionnel à la transformée du courant $I(p)$, qui peut aussi s'écrire sous la forme $Z(p)I(p)$ et un second terme qui prend en compte la C.I. On rappelle que les C.I. apportent des termes transitoires dans l'expression des courants. En RPCA, ce deuxième terme disparaît par nature.

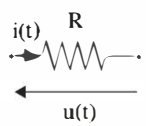
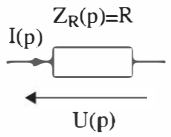
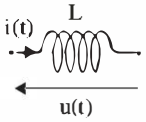
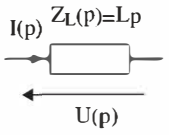
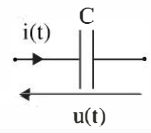
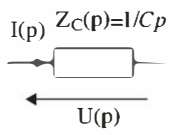
Dans la modélisation opérationnelle en RPCA, on annule toutes les C.I.

Le terme $\boldsymbol{Z(p)}$ est défini comme l'**impédance opérationnelle**, qui en dehors de toute C.I. s'écrit $\boxed{Z(p) = \dfrac{U(p)}{I(p)}}$ (l'unité est l'ohm et définit ainsi la **loi d'Ohm opérationnelle** $\boxed{U(p) = Z(p)I(p)}$.

Les modèles des trois dipôles passifs en RPCA sont rassemblés dans le tableau 7.6, où apparaissent uniquement les impédances opérationnelles.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 7.6

Dipôle passif	Expression temporelle	Loi d'Ohm opérationnelle U(p) et I(p) les transformées	Impédance opérationnelle
Résistance 	$u(t) = R \cdot i(t)$	$\frac{U(p)}{I(p)} = Z_R(p) = R$	
Inductance 	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$Z_L(p) = Lp$	
Condensateur 	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$	

Remarque : Les impédances opérationnelles s'associent en série et en parallèle suivant les lois $\boxed{Z_S(p) = \sum Z_i(p)}$ et $\boxed{(Z_p(p))^{-1} = \sum (Z_i(p))^{-1}}$.

• Schéma symbolique (ou opérationnel) équivalent

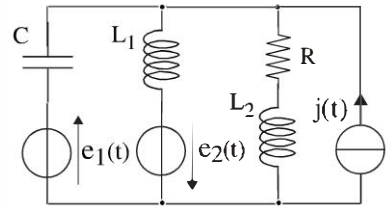
Le **schéma symbolique** est bâti en respectant les règles suivantes :

– tout dipôle passif est remplacé par son impédance opérationnelle ;

– toute source sinusoïdale (de courant $j(t)$ ou de tension $e(t)$) reste de même nature et sa valeur est sa transformée de Laplace ($J(p)$ et $E(p)$).

Le schéma électrique de la figure 7.15a a pour schéma symbolique associé le schéma de la figure 7.15b.

La mise en équation à partir du schéma symbolique utilise les lois de Kirchhoff adaptées à la transformation de Laplace. Les règles et théorèmes établis en RPCC participent aussi à l'établissement des équations, après quelques transformations.

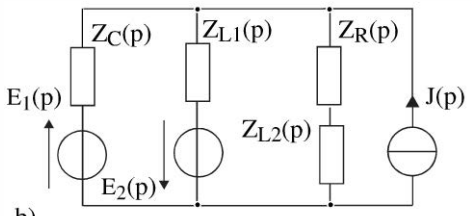


a) $e_1(t) = \hat{E}_1 \cos(\omega_1 t)$

$e_1(t) = \hat{E}_2 \cos(\omega_2 t + \theta)$

$j(t) = \hat{J} \cos(\omega_1 t)$

Schéma électrique opérationnel équivalent



b)

$$E_1(p) = \frac{\hat{E}_1 p}{p^2 + \omega_1^2} \qquad J(p) = \frac{\hat{J} p}{p^2 + \omega_1^2}$$

$$E_2(p) = \frac{\hat{E}_2 p}{p^2 + \omega_1^2} e^{j\omega_1 \theta p}$$

Figure 7.15

Copyright © 2007 Dunod.

7.3.5 Lois de Kirchhoff, règles et théorèmes

➤ ***Graphe et lois de Kirchhoff***

Le schéma symbolique forme un réseau. Les graphes des schémas initiaux et symboliques sont les mêmes : même nombre de nœuds et de branches.

À partir de la propriété de linéarité des transformées, la loi des nœuds s'écrit par transformation :

$$\sum i_i(t) = 0 \rightleftarrows \sum I_i(p) = 0$$

De même, la loi des mailles devient :

$$\sum u_i(t) = 0 \rightleftarrows \sum U_i(p) = 0$$

En d'autres termes, le schéma symbolique respecte les lois de Kirchhoff.

Un système d'équations opérationnelles peut alors être associé à chaque circuit électrique, sachant que les écritures des équations (maintenant algébriques) proviennent des transformées des lois d'Ohm et de Kirchhoff.

La résolution du système entraîne la détermination des transformées des courants et tensions dans le circuit, qu'il conviendra de ramener dans l'espace temporel en calculant l'original de chaque grandeur.

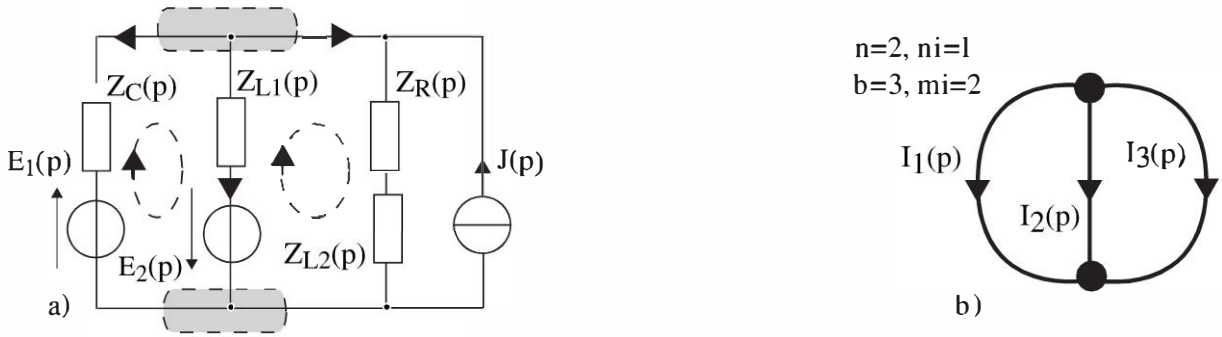


Figure 7.16

Par exemple, le graphe (figure 7.16b) du schéma symbolique de la figure 7.16a entraîne l'écriture du système à trois équations opérationnelles suivantes :

$$\begin{cases} I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0 \\ E_1(p) + Z_C(p)I_1(p) - Z_{L1}(p)I_2(p) = 0 \\ -E_2(p) + Z_{L1}(p)I_2(p) - (Z_R(p) + Z_{L2}(p))(I_3(p) + J(p)) = 0 \end{cases}$$

Toutes les méthodes de résolution des équations algébriques, étudiées en RPCC, sont utilisables. Le système précédent écrit sous forme matricielle fait apparaître la **matrice impédance opérationnelle** :

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/Cp & -L_1 p & 0 \\ 0 & L_1 p & R + L_2 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ I_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E_1(p) \\ E_2(p) + (R + L_2 p) J(p) \end{bmatrix}$$

À partir de cette écriture, on peut déterminer l'ensemble des courants de branches par la méthode de Cramer ou la méthode du pivot.

➤ ***Règles et théorèmes***

Comme les lois de Kirchhoff, les règles et théorèmes sont utilisables après transformation des écritures. Le tableau 7.7 présentent les règles après transformations des écritures et le tableau 7.8 rassemble l'écriture des théorèmes.

Tableau 7.7

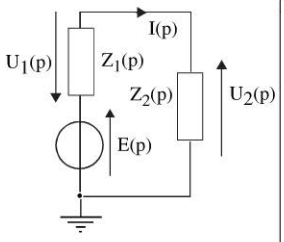
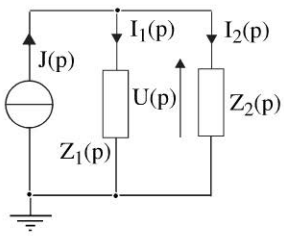
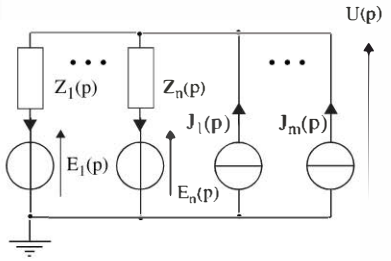
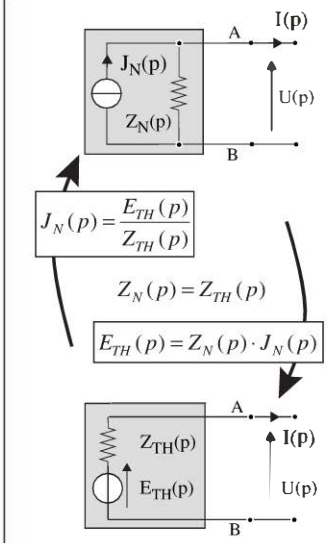
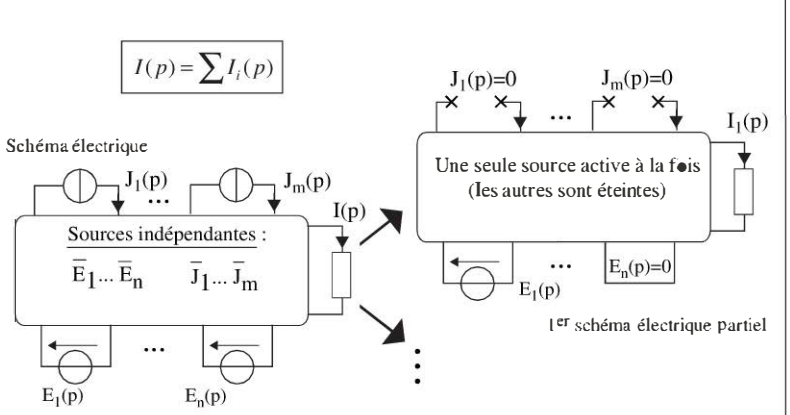
Pont diviseur de tension	Pont diviseur de courant	Règle de Millman
		
$U(p) = \frac{Z_2(p)}{(Z_1(p) + Z_2(p))} \cdot E(p)$	$I_2(p) = \frac{Z_1(p)}{(Z_1(p) + Z_2(p))} \cdot J(p)$	$U(p) = \frac{\sum \frac{E_i(p)}{Z_i(p)} + \sum J_j(p)}{\left(\sum \frac{1}{Z_i(p)}\right)}$

Tableau 7.8

Dipôles de Norton et Thévenin	Théorème de superposition
	

Copyright © 2007 Dunod.

7.3.6 Méthodologies d'étude à partir de la transformée Laplace

Deux méthodologies d'étude ont été mises en évidence à partir de la transformée de Laplace : soit en transformant les équations différentielles, soit en établissant un schéma symbolique qui permet d'écrire directement les équations opérationnelles.

➤ ***À partir des équations différentielles (figure 7.17a)***

Les équations différentielles sont établies à partir du schéma électrique et des lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Puis ces équations différentielles sont transformées en équations opérationnelles pour simplifier la résolution ; on annule toutes les C.I. en RPCA.

En final, la transformation inverse (après décomposition en fractions partielles ou calcul de résidus) permet d'établir les expressions des courants et tensions réels.

➤ ***Avec un schéma symbolique (figure 7.17b)***

À partir du schéma électrique symbolique et du graphe associé, on détermine les équations du système en utilisant les règles et théorèmes ou les lois de Kirchhoff.

La résolution du système d'équations algébriques de la variable p détermine d'abord les transformées des courants de branches, puis les tensions dans le schéma équivalent.

Les expressions temporelles des grandeurs électriques sont obtenues en réalisant la transformée inverse, soit en décomposant en fractions partielles, soit à partir du calcul des résidus.

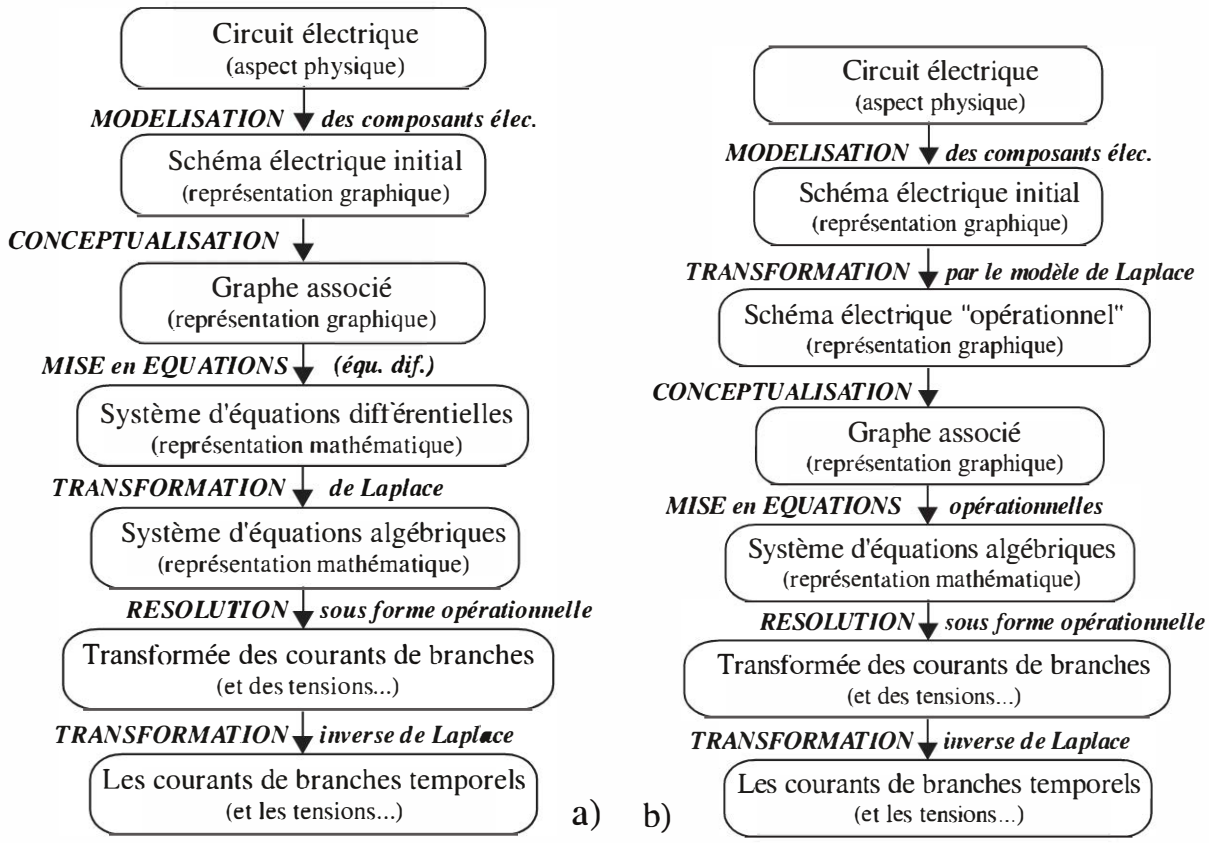


Figure 7.17

Copyright © 2007 Dunod.

7.4 CALCUL DE LA PUISSANCE EN RPCA

7.4.1 Puissance instantanée, constante et fluctuante

➤ ***Définitions***

La puissance $p(t) = u(t)i(t)$ est appelée **puissance instantanée**.

En RPCA, les tensions et courants sont sinusoïdaux de même fréquence :

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha), \quad i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

d'où :

$$p(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)\hat{I}\cos(\omega t + \beta) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\big)$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}\big(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\big) = UI\big(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\big)$$

$$\boxed{p(t) = UI\cos(\varphi) + UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P + p_f(t)}$$

La puissance instantanée $p(t)$ comporte un terme constant $P = UI\cos(\varphi)$ avec $\varphi = \alpha - \beta$ l'angle de déphasage et un terme variable en fonction du temps $p_f(t) = UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$.

$\boxed{P = UI\cos(\varphi)}$ est aussi la **puissance moyenne** ($\langle p(t)\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)dt = P$).

$\boxed{p_f(t) = UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)}$ est la **puissance fluctuante** (oscillant autour de P).

Sur la figure 7.18, on observe :

$$i(t) = \sqrt{2}\cos\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u(t) = 2\cos\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}22\ \text{W}$$

$$p_f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{2}\cos\left(628t + \frac{5\pi}{6}\right),$$

qui oscille autour de P (constante).

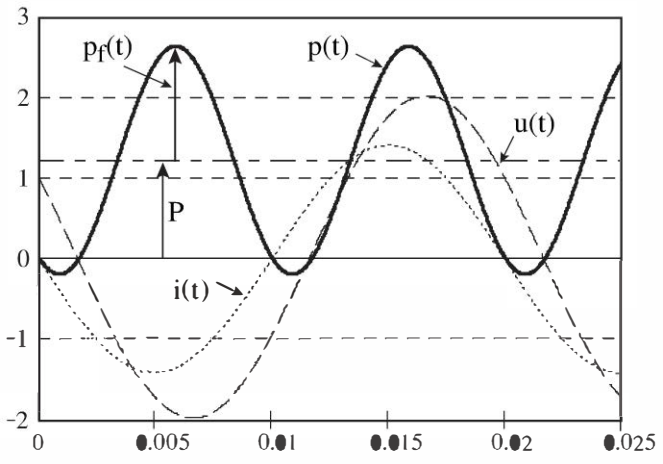


Figure 7.18

Par analogie à la puissance calculée en régime permanent continu égale à UI, on définit $\boxed{S = UI}$ comme la **puissance apparente** dans le circuit.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Représentation dans Fresnel de P et de P_f***

Dans Fresnel, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{I}$ déphasés de φ (figure 7.19a) tournent à la pulsation ω. La puissance instantanée $p(t)$ est la projection sur les abscisses du vecteur $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{p}_f(t)$; $\overrightarrow{P} = UI(\cos\varphi\ \overrightarrow{u}_1 + \sin\varphi\ \overrightarrow{u}_2)$ est un vecteur fixe qui dépend de φ (le déphasage) ; $\overrightarrow{p}_f(t) = UI\big(\cos(2\omega t + \alpha + \beta)\overrightarrow{u}_1 + \sin(2\omega t + \alpha + \beta)\overrightarrow{u}_2\big)$ est un vecteur qui tourne à la pulsation 2ω. À $t = 0$ (figure 7.19b) on a $p(t) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{p}_f(t) = 0$; pour $t \neq 0$ (figure 7.19c) $p(t)$ est tantôt positif, tantôt négatif.

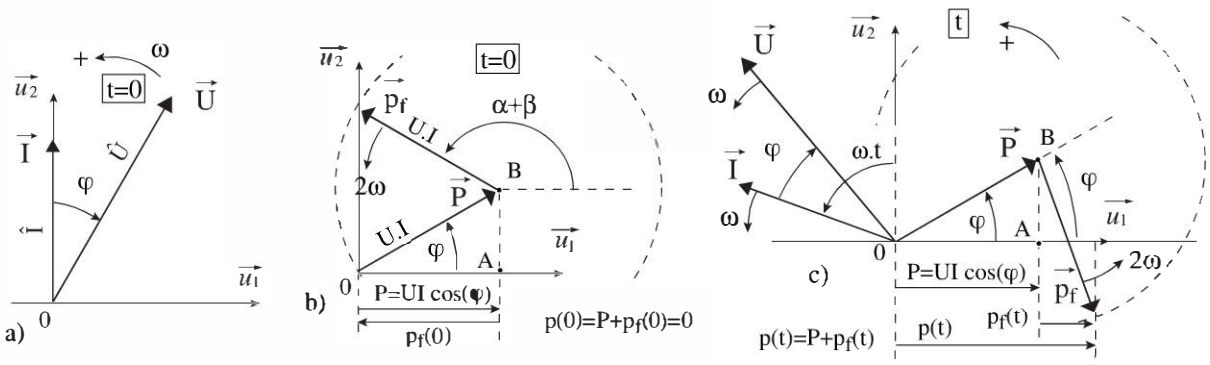


Figure 7.19

La puissance moyenne $P = UI\cos(\varphi)$ traduit l'écoulement régulier de l'énergie transformée dans le circuit. C'est cette puissance qui produit en physique le mouvement mécanique (actionneurs électromécaniques...) ou la chaleur par effet Joule.

Lorsque $\varphi = \pm\pi/2$, la puissance moyenne P est nulle et pourtant la puissance fluctuante $p_f(t)$ existe toujours. Cette remarque traduit que même sans puissance P, un courant circule dans les dipôles. Dans ce contexte, l'énergie est pendant un quart de période consommée ($p_f(t) > 0$) et pendant le quart de période suivant, restituée ($p_f(t) < 0$) ; il y a donc un « aller-retour » de l'énergie entre la source et la charge, à une pulsation 2ω. Le circuit ne transforme pas l'énergie qui transite, car le bilan est nul ($P = 0 \Rightarrow$ ni mouvement, ni chaleur).

La puissance apparente $S = UI$, ne traduit en aucun cas une consommation d'énergie dans le circuit électrique.

7.4.2 Puissances à partir de la modélisation complexe

➤ ***Puissances complexe, active, réactive et apparente dans un dipôle***

Dans le plan complexe, la tension $u(t)$ a pour transformée le phaseur $\overline{U} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$ tandis que $\overline{I} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$ est le phaseur associé au courant $i(t)$.

Copyright © 2007 Dunod.

Le produit des phaseurs donne $\overline{U}\,\overline{I} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}\hat{I}e^{j(\omega t+\beta)} = \hat{U}\hat{I}e^{j(2\omega t+\alpha+\beta)}$

et $\mathrm{Re}(\hat{U}\hat{I}e^{j(2\omega t+\alpha+\beta)}) = \hat{U}\hat{I}\cos(2\omega t+\alpha+\beta) = \boxed{2p_f(t)}$.

De même, on a $\overline{U}\,\overline{I}^{*} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}\hat{I}e^{-j(\omega t+\beta)} = \hat{U}\hat{I}e^{j(\alpha-\beta)} = \hat{U}\hat{I}(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

et $\mathrm{Re}(\overline{U}\,\overline{I}^{*}) = \mathrm{Re}(\hat{U}\hat{I}e^{j(\alpha-\beta)}) = \hat{U}\hat{I}\cos(\varphi) = \boxed{2P}$.

En résumé : $p(t) = P + p_f(t) = \mathrm{Re}(\overline{U}\,\overline{I}^{*}/2) + \mathrm{Re}(\overline{U}\,\overline{I}/2)$

Dans le plan complexe (figure 7.20) la projection de $\overline{I}$ sur $\overline{U}$ produit $I_a = I\cos(\varphi)$. Une multiplication de I_a par le facteur d'échelle U entraîne $UI\cos(\varphi) = P$; l'axe porté par $\overline{U}$ est donc aussi l'axe des puissances actives P.

On définit l'axe des ordonnées, comme l'axe des **puissances réactives** Q : $I_r = I\sin(\varphi)$ et $I_r U = UI\sin(\varphi) = Q$. L'introduction de Q permet de représenter mathématiquement le triangle 0AB, puisque $\boxed{\overline{S} = P + jQ}$.

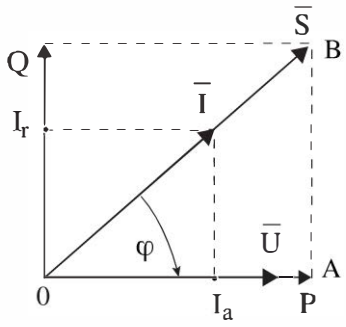


Figure 7.20

On définit :

– la puissance complexe : $\boxed{\overline{S} = P + jQ}$ en voltampère (VA) ;

– la puissance active : $\boxed{P = UI\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(\overline{S})}$ en watt (W) ;

– la puissance réactive : $\boxed{Q = UI\sin(\varphi) = \mathrm{Im}(\overline{S})}$ en voltampère réactif (VAR) ;

– la puissance apparente : $\boxed{S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\overline{S}| > 0}$ en voltampère (VA).

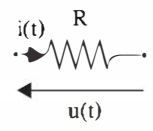
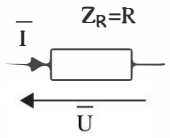
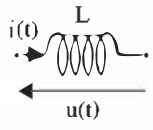
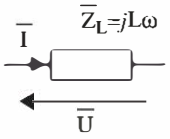
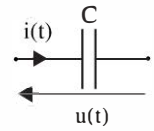
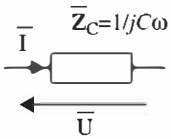
Remarque : De par sa formule, la puissance active $P = UI\cos(\varphi)$ est inférieure ou égale à la puissance apparente $S = UI$. Le rapport entre ces deux grandeurs est appelé le **facteur de puissance** : $\boxed{F_p = \dfrac{P}{S} = \cos(\varphi)}$.

➤ *Puissances consommées dans les dipôles RLC*

Le tableau 7.9 présente le calcul des puissances P, Q et S dans les trois dipôles passifs, en fonction de la tension ou du courant efficace.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 7.9

Dipôle passif	Dipôle équivalent en RPCA	Loi d'Ohm complexe	Puissances P (W), Q (VAR), S (VA)
Résistance 		$\boxed{\overline{U} = R \cdot \overline{I}}$ $\left\|\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right\| = \frac{U}{I} = R$ $\arg\left(\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right) = \arg\left(\frac{R\overline{I}}{\overline{I}}\right) = \arg(R) = 0$	$P = U\,I\cos(0) = \boxed{R\,I^2 = \frac{U^2}{R}}$ $Q = U\,I\sin(0) = 0$ $S = U\,I = P$
Inductance 		$\boxed{\overline{U} = jL\omega \cdot \overline{I}}$ $\left\|\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right\| = \frac{U}{I} = L\omega$ $\arg\left(\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right) = \arg\left(\frac{jL\omega\overline{I}}{\overline{I}}\right) = \arg(jL\omega) = \frac{\pi}{2}$	$P = U\,I\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $Q = U\,I\sin(\frac{\pi}{2}) = \boxed{L\omega\,I^2 = \frac{U^2}{L\omega} > 0}$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U\,I = Q$
Condensateur 		$\boxed{\overline{U} = \frac{1}{jC\omega} \cdot \overline{I}}$ $\left\|\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right\| = \frac{U}{I} = \frac{1}{C\omega}$ $\arg\left(\frac{\overline{U}}{\overline{I}}\right) = \arg\left(\frac{\overline{I}}{jL\omega\overline{I}}\right) = \arg(\frac{1}{jC\omega}) = -\frac{\pi}{2}$	$P = U\,I\cos(\frac{-\pi}{2}) = 0$ $Q = U\,I\sin(\frac{-\pi}{2}) = -\frac{I}{C\omega}I$ $\boxed{-\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega\,U^2 < 0}$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U\,I = -Q$

7.4.3 Répartition des puissances dans un circuit électrique

➤ ***Théorème de Boucherot***

Comme le chapitre 6 l'a déjà montré, toutes les puissances consommées sont forcément fournies. Le théorème de Boucherot repose sur ce principe et s'étend en RPCA aux puissances actives et réactives :

$\sum \overline{S}_{\text{fournies}} = \sum \overline{S}_{\text{absorbées}}$ et puisque $\overline{S} = P + \mathrm{j}Q$ alors les puissances actives et réactives se conservent : $\boxed{\sum P_{\text{fournies}} = \sum P_{\text{absorbées}}}$ et $\boxed{\sum Q_{\text{fournies}} = \sum Q_{\text{absorbées}}}$.

ATTENTION : $\sum S_{\text{fournies}} \neq \sum S_{\text{absorbée}}$ car $\overline{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 = (P_1 + P_2) + \mathrm{j}(Q_1 + Q_2)$ $\Rightarrow S = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}$, alors que :

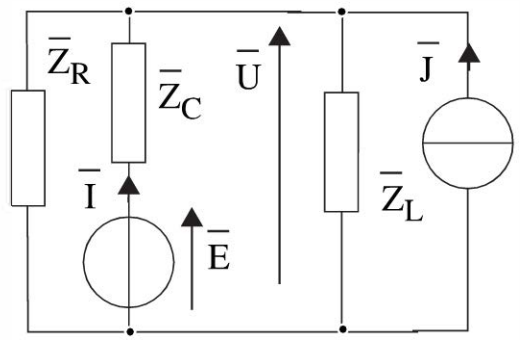
$$S_1 + S_2 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} \neq |\overline{S}|$$

➤ ***Application du théorème de Boucherot***

Prenons pour exemple le circuit de la figure 7.21. En utilisant la règle de Millman, on obtient :

$$\overline{U} = \frac{(\overline{E} + \overline{Z}_C\overline{J})\overline{Z}_R\overline{Z}_L}{\overline{Z}_R\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\overline{Z}_L} = \frac{\mathrm{j}LR\omega(\mathrm{j}C\omega\overline{E} + \overline{J})}{R(1 - LC\omega^2) + \mathrm{j}L\omega}$$

Copyright © 2007 Dunod.



C=5 µF; L=100 mH; R=20 Ω; ω=500 rad/s

$\overline{E} = 100\, e^{j\frac{\pi}{4}}$ V $\quad \overline{J} = 2\, e^{-j\frac{\pi}{3}}$ A

Figure 7.21

Tableau 7.10

	Puissance active consommée	Puissance réactive consommée
E	8,3 W	24,6 VAR
J	– 63,4 W	– 19,6 VAR
$\overline{Z}_R$	55,1 W	
$\overline{Z}_L$		22 VAR
$\overline{Z}_C$		– 27 VAR
	0 W	0 VAR

Après résolution : $\overline{U} = 33{,}2\, e^{-j42{,}8°}$ V et $\overline{I} = jC\omega(\overline{U} - \overline{E}) = 0{,}26\, e^{j153{,}6°}$ A.

On peut alors dresser le tableau de répartition des puissances (tableau 7.10) sachant que les deux sources sont en convention générateur.

$\overline{S}_E = \overline{E}\,\overline{I}^* = 26\, e^{-j108{,}6°} = -8{,}3 - j24{,}6$ VA (puissances P et Q fournies par la source E)

$\overline{S}_J = \overline{U}\,\overline{J}^* = 66{,}4 e^{j17{,}2°} = 63{,}4 + j19{,}6$ VA (puissances P et Q fournies par la source J)

$$P_R = \frac{U^2}{R} = \frac{33{,}2^2}{20} = 55{,}1 \text{ VAR (absorbées)}$$

$$Q_L = \frac{U^2}{L\omega} = \frac{33{,}2^2}{20} = 55{,}1 \text{ VAR (absorbées)}$$

$$Q_L = -\frac{I^2}{C\omega} = -\frac{0{,}26^2}{25 \cdot 10^{-4}} = -27 \text{ VAR (absorbées ou + 27 VAR fournies)}$$

Le bilan des puissances actives et des puissances réactives est bien nul !

7.4.5 Mesure des puissances

➤ ***Signification des puissances P, Q et S***

Le régime permanent sinusoïdal offre un éventail de puissances qu'il convient de clarifier.

La puissance active ***P***, qui est également la puissance moyenne $< p(t) >$, est la puissance qui produit un travail ou de la chaleur ; c'est donc **une puissance qui entraîne une consommation d'énergie**. Sur le réseau national, cette énergie consommée est mesurée par un compteur électrique, puis est facturée à l'abonné.

La puissance apparente ***S*** est liée à la **puissance électrique installée**. C'est une information qui intéresse directement les installateurs de matériels électriques. En effet, sous une tension monophasée U, une puissance apparente S conduit à un courant $I = S/U$, quel que soit F_p. À partir de U et I, les électriciens choisissent les câbles électriques, les appareils de coupure et de protection à installer.

La puissance réactive ***Q*** est la conséquence du déphasage parasite φ entre U et I ($Q \neq 0 \Rightarrow P < S$). Cette **puissance ne produit aucun travail ou chaleur**, mais augmente

Copyright © 2007 Dunod.

le courant I pour une puissance P identique ; il s'agit d'une puissance virtuelle. Toutefois, les fournisseurs d'électricité facturent aux gros consommateurs d'électricité leur puissance réactive (l'augmentation de $S \Rightarrow$ coûts d'infrastructures supérieurs) mesurée par un compteur spécial. Les consommateurs sont alors amenés à améliorer leur facteur de puissance Fp en réalisant une **compensation**.

➤ ***Mesure des puissances***

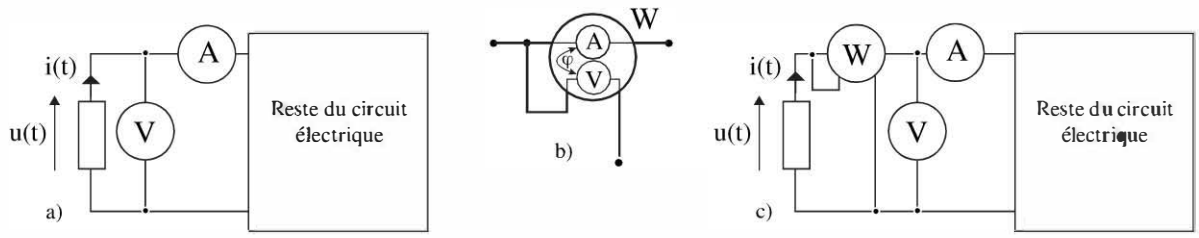


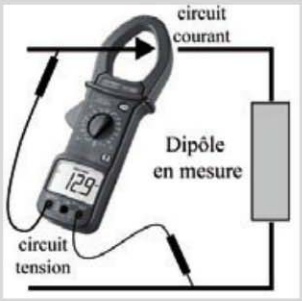
Figure 7.22

La mesure de la puissance active $P = UI\cos(\varphi)$ nécessite trois instruments : un voltmètre alternatif, un ampèremètre alternatif et un phasemètre pour mesurer φ.

À partir des seules mesures de la tension et du courant efficaces (figure 7.22a) on ne peut calculer que la puissance apparente $S = UI$. On doit ajouter un appareil spécial, un wattmètre (figure 7.22b) qui, en plus de la tension et du courant, calcule le déphasage. Cet appareil comporte un circuit courant, placé en série avec le dipôle pour capturer l'intensité I et un circuit tension, placé en parallèle du dipôle pour capturer U.

Le schéma de mesure des puissances P, Q et S (figure 7.22c) comporte le wattmètre, un voltmètre (V) et un ampèremètre (A) qui mesurent U et I ; la puissance P est mesurée directement par le wattmètre ; la puissance apparente est calculée $S = U \cdot I$, ainsi que $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$, $Fp = \dfrac{P}{S}$ et $\tan(\varphi) = \dfrac{Q}{P}$.

Wattmètre numérique



Les pinces wattmétriques, sont des wattmètres numériques portables. Ces pinces permettent de mesurer P, Q et F_p sans débrancher le circuit ; elles mesurent aussi indépendamment la tension et le courant. Suivant le type de pinces, les mesures peuvent s'effectuer en continu ou en alternatif de quelques hertz jusqu'à 100 kHz.

Copyright © 2007 Dunod.

Pour en savoir plus...

DE LA MODÉLISATION OPÉRATIONNELLE VERS LA MODÉLISATION COMPLEXE

La modélisation opérationnelle est d'une portée plus large que la modélisation complexe. Toutefois cette dernière, de par sa simplicité est un outil indispensable. Il est parfois intéressant, à partir d'un modèle opérationnel, d'effectuer un passage au modèle complexe équivalent.

On rappelle la formulation opérationnelle générale :

$S(p) = \dfrac{F(p) - G(p)}{A_n P^n + \ldots + A_1 p + A_0}$, où $F(p)$ est une fonction qui rassemble les transformées des sources sinusoïdales du circuit et où $G(p)$ englobe les C.I. sur $s(t)$ et ses dérivées successives.

Le passage de cette équation à l'équation complexe équivalente nécessite d'annuler les C.I. ($G(p) = 0$), car elles sont uniquement porteuses du régime libre.

$S(p)$ s'écrit sous forme matricielle $\boxed{S(p) = [B(p)] \cdot [U(p)]}$ où $U(p)$ devient le vecteur des sources du circuit et $B(p)$ la matrice qui engendre les expressions de la sortie $S(p)$.

On obtient alors l'expression complexe $\overline{S}(j\omega)$, en remplaçant la variable de Laplace p par l'opérateur $j\omega$ dans la matrice $[B(p)]$, et en remplaçant le vecteur $[U(p)]$ par le vecteur des phaseurs. On obtient alors : $\boxed{\overline{S}(j\omega) = \left[\overline{B}(j\omega)\right] \cdot [\overline{U}]}$.

Dans l'exemple de la figure 7.13, le courant $I_3(p)$ avait pour expression :

$$I_3(p) = \frac{E_1(p)L_1Cp^2 + E_2(p)(1 + CL_1p^2) + (1 + CL_1p^2)(R + L_2p)J(p)}{(1 + CL_1p^2)(R + L_2p) - L_1p}, \quad \text{s'écrivant}$$

$$I_3(p) = \frac{1}{(1 + CL_1p^2)(R + L_2p) - L_1p}\begin{bmatrix} L_1Cp^2 & 1 + CL_1p^2 & (1 + CL_1p^2)(R + L_2p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(p) \\ E_2(p) \\ J(p) \end{bmatrix}$$

et devient en modélisation complexe :

$$I_3(p) = \frac{1}{(1 - CL_1\omega^2)(R - jL_2\omega) - jL_1\omega}\begin{bmatrix} -CL_1\omega^2 & 1 - CL_1\omega^2 & (1 - CL_1\omega^2)(R - jL_2\omega) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{J} \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où : } \overline{I}_3 = \frac{-L_1C\omega^2\hat{E}_1 + (1 - CL_1\omega^2)\hat{E}_2e^{j\theta} + (1 - CL_1\omega^2)(R + L_2j\omega)\hat{J}}{(1 - CL_1\omega^2)(R - jL_2\omega) - jL_1\omega}$$

Copyright © 2007 Dunod.

FRACTIONS PARTIELLES ET CALCUL DE RÉSIDUS

Après calcul, on obtient le plus souvent une transformée de Laplace d'une grandeur électrique, qu'il convient de ramener dans l'espace temporel en calculant l'original de la grandeur. Pour ceci, deux méthodes sont très souvent utilisées : on développe sous forme de fraction partielle, puis on utilise les tables de Laplace, ou on calcule directement les expressions temporelles à partir d'un calcul de résidus.

➤ Calcul des coefficients des fractions partielles

On fractionne la transformée de Laplace sous la forme (§ 7.3.2) :

$$F(p) = \left\{\left[\frac{A_0}{(p+a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(p+a)^{\alpha-1}} \cdots\right] + \left[\frac{B_0}{(p+b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(p+b)^{\beta-1}} \cdots\right] + \cdots\right.$$
$$\left. + \left\{\left[\frac{M_0 \cdot p + N_0}{(p^2 + x \cdot p + y)^{\mu}} + \frac{M_1 \cdot p + N_1}{(p^2 + x \cdot p + y)^{\mu-1}} \cdots\right] + \cdots\right.$$

• Réduction au même dénominateur

Pour déterminer les coefficients A_0, A_1 ... M_0, N_0, on peut réduire les fractions au même dénominateur et identifier le résultat à l'expression de $F(p)$. Par exemple, pour $F(p) = \dfrac{p+2}{p(p+1)} = \dfrac{A_0}{p} + \dfrac{B_0}{(p+1)}$ la réduction au même dénominateur implique que $p + 2 = (p+1)A_0 + pB_0 \Rightarrow A_0 = 2$, $A_0 + B_0 = 1 \Rightarrow A_0 = 2$ et $B_0 = -1$.

• Méthode des tests

Les coefficients peuvent aussi être trouvés par la méthode des tests, qui consiste à éliminer une partie de la décomposition en faisant tendre la variable de Laplace p vers la valeur du pôle dont on cherche le coefficient. Pour ceci, on suivra les exemples suivants :

- pour un pôle simple $p = -a$, on obtient le facteur en calculant l'expression $(p+a)F(p)\Big]_{p\to -a}$; pour $p = -1$ de l'exemple précédent,

  on a $\left(\dfrac{p+2}{p(p+1)}\right)(p+1) = (p+1)\left(\dfrac{A_0}{p} + \dfrac{B_0}{(p+1)}\right)\Big]_{p\to -1} \Rightarrow B_0 = -1$;

- pour un pôle multiple, on calcule d'abord $(p+a)^n \cdot F(p)\Big]_{p\to -a}$ qui donne A_0, puis $\dfrac{d^{n-1}(p+a)^n F(p)}{dp^{n-1}}\Big]_{p\to -a}$ pour obtenir A_1, etc. ;

- pour les pôles complexes conjugués, on réalise les mêmes calculs que précédemment, en considérant le dénominateur comme un produit de deux nombres conjugués. Soit à calculer $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$, décomposé en $F(p) = \dfrac{A_0}{p^2} + \dfrac{A_1}{p} + \dfrac{M_0 p + N_0}{(p^2+1)}$, avec

Copyright © 2007 Dunod.

$(p^2+1)=(p-\mathrm{j})(p+\mathrm{j})$. On obtient M_0 et N_0 en calculant l'expression

$$(p+\mathrm{j})F(p)\Big]_{p\to-\mathrm{j}}=\frac{1}{p^2(p-\mathrm{j})}\Big]_{p\to-\mathrm{j}}=\frac{-\mathrm{j}}{2}$$

$$\text{et } (p+\mathrm{j})\left(\frac{M_0p+N_0}{(p^2+1)}\right)\Big]_{p\to-\mathrm{j}}=\frac{M_0+\mathrm{j}N_0}{2}\Rightarrow M_0=0,\ N_0=-1\ ;$$

$$\text{on obtient aussi } A_0=p^2F(p)\Big]_{p\to0}=1 \text{ et } A_1=\frac{d(p^2F(p))}{dp}\Big]_{p\to0}=\frac{-2p}{p^2+1}=0,$$

$$\text{d'où : } F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(p^2+1)}\Rightarrow f(t)=t-\sin(t)\,.$$

➤ Calcul des résidus

Par cette méthode, le calcul de l'original $f(t)$ à partir de la transformée $F(p)$ est :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{r-\mathrm{j}\infty}^{r+\mathrm{j}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}dp=\sum \text{ résidus de } e^{pt}F(p)$$

; où le calcul du résidu $R(b)$ associé au pôle $p=b$, multiple d'ordre m est :

$$R(b)=\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{d\left[(p-b)^m\mathrm{e}^{pt}F(p)\right]}{dp^{m-1}}\Big]_{p\to b}.$$

Par exemple, la transformée inverse du polynôme $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+a)}$, qui comporte un pôle double $p=0$ et un pôle simple $p=a$, donne :

$$R(0)=\frac{1}{1!}\ \frac{d\left[p^2\mathrm{e}^{pt}\ \dfrac{1}{p^2(p+a)}\right]}{dp}=\frac{\mathrm{e}^{pt}\left(t(p+a)-1\right)}{(p+a)^2}=\frac{at-1}{a^2}$$

$$R(-a)=\frac{1}{1!}(p+a)\ \frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+a)}=\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2}=\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a^2}$$

La transformée inverse est alors :

$$f(t)=\frac{at-1}{a^2}+\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a^2}=\frac{\mathrm{e}^{-at}+at-1}{a^2}$$

Copyright © 2007 Dunod.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

7.1 Quelle est la forme des courants et des tensions dans le circuit en RPCA ? Quels sont les deux paramètres inconnus dans l'expression des courants de branches ?

7.2 Dans la représentation de Fresnel, quelles différences existe-t-il entre les vecteurs associés au phaseur $\overline{U} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$ et au phaseur réduit $\overline{U}_1 = Ue^{j\alpha}$, et quelle est la relation qui les lie ?

7.3 Par quoi remplace-t-on les dipôles en modélisation complexe et que reste-t-il dans un schéma équivalent complexe ?

7.4 Quelles sont les méthodes qui permettent de déterminer la transformée de Laplace $F(p)$ à partir de $f(t)$? Même question pour la transformée inverse.

7.5 Que reste-t-il comme éléments dans le schéma symbolique de Laplace ? Que deviennent les conditions initiales ?

7.6 Une fois le système d'équations opérationnelles établi et résolu, est-ce que la solution ne contient que le terme de régime permanent ?

7.7 Énumérer les puissances que vous connaissez et indiquer leurs différences. Que traduit un mauvais facteur de puissance ? Comment y remédier ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

7.8 À partir des signaux suivants : ,
$s_1(t) = 230\sqrt{2}\cos(628t - 60°)$,
$s_2(t) = 230\cos(314t)$
et $s_3(t) = 141\sin\left(2\pi 50t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1) Établir pour chacun, les deux écritures des phaseurs associés ;

2) Déterminer le déphasage entre $\overline{S}_2$ et $\overline{S}_3$ et entre $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_3$.

7.9 À partir de la figure 7.23 :

1) Calculer l'impédance complexe $\overline{Z}_{AB}$ et mettre sous la forme $\overline{Z}_{AB} = A + jB$ (A et B étant des réels).

2) Pour quelle pulsation de résonance ω_R, $B = 0$?

3) Quelles sont alors les puissances consommées P et Q dans l'impédance ?

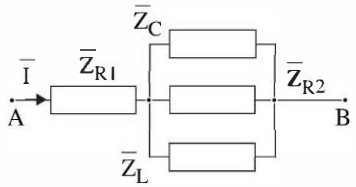


Figure 7.23

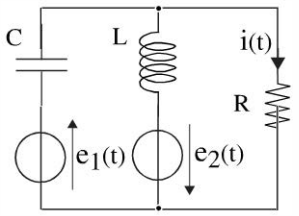
7.10 À partir du circuit électrique de la figure 7.24 :

1) Dessiner le schéma électrique équivalent en RPCA ;

2) Déterminer les phaseurs $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$, ainsi que les impédances $\overline{Z}_R$, $\overline{Z}_L$ et $\overline{Z}_C$;

3) Dessiner le graphe associé et déterminer n, b, ni et mi ;

Copyright © 2007 Dunod.



a) $e_1(t) = \hat{E}_1 \cos(\omega_1 t)$
$e_2(t) = \hat{E}_2 \cos(\omega_1 t + \theta)$

Figure 7.24

4) Écrire les b équations complexes ;

5) Déterminer l'expression du phaseur $\overline{I}$, puis calculer $\overline{I}$ et en déduire $i(t)$;

6) Dresser le tableau des puissances consommées P et Q ;

7) Reprendre la question 5) et retrouver $\overline{I}$ en utilisant la règle de Millman.

(*A.N.* : $E_1 = 100$ V ; $E_2 = 50$ V ; $\omega_1 = 10^3$ rad/s ; $\theta = 45°$; $C = 50$ µF ; $L = 50$ mH ; $R = 500\ \Omega$)

7.11 Soit le circuit de la figure 7.25.

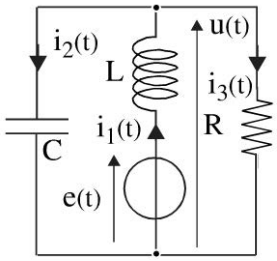


Figure 7.25

1) Établir l'équation différentielle ayant pour variable $i(t)$;

2) Transformer cette équation suivant Laplace ;

3) Mettre l'équation sous la forme :
$\Delta(p) \cdot I(p) + G(p) = F(p)$ et déterminer les racines de l'équation caractéristique $\Delta(p)$,

4) Mettre l'expression de $I(p)$ sous forme de fractions partielles, avec $R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et avec toutes les conditions initiales nulles ;

5) Faire l'application et rechercher la solution. Indiquer la solution en RPCA.

(*A.N.* : $\hat{E} = 100$ V ; $\omega_1 = 10^3$ rad/s ; $C = 50$ µF ; $L = 50$ mH ; $R = 10\ \Omega$)

7.12 Soit le circuit électrique de la figure 7.26.

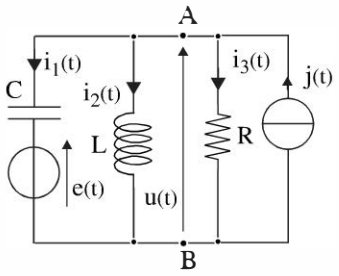


Figure 7.26

1) Dessiner le schéma électrique symbolique équivalent ;

2) À partir de la règle de Millman, établir l'équation différentielle de $U(p)$;

3) À partir du schéma symbolique, trouver le dipôle de Norton équivalent à la partie gauche des points A et B ;

4) Déterminer à partir de la question 3) l'équation ayant pour variable $U(p)$.

7.13 On considère le schéma électrique de la figure 7.27, avec
$e(t) = \hat{E}\cos(\omega t)$, $j(t) = \hat{J}\cos(\omega t + \beta)$
et $2L\omega = 1/C\omega = R$.

1) Dresser le schéma équivalent en RPCA ;

2) On note $\overline{E}_{TH}$ et $\overline{Z}_{TH}$ les deux éléments du générateur de Thévenin modélisant la partie à gauche des points A et B ; Exprimer $\overline{E}_{TH}$ et $\overline{Z}_{TH}$ en fonction de $\overline{E}$, $\overline{J}$, R ;

3) Déterminer l'expression de $\overline{I}$, le phaseur associé à $i(t)$.

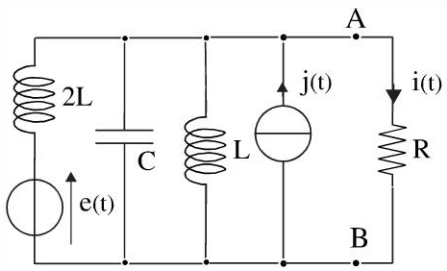


Figure 7.27

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 8

Superposition des régimes permanents

Objectifs

- Présenter le théorème de superposition des régimes.
- Appliquer le théorème aux circuits qui intègrent des sources périodiques.
- Présenter la transformation de Laplace des signaux périodiques .
- Appliquer la modélisation opérationnelle aux circuits incluant des sources périodiques ou de fréquences différentes.
- Calculer la puissance harmonique dans les circuits en présence de sources de fréquences différentes..

Vocabulaire

Sources périodiques
Théorème de superposition des régimes
Puissance fluctuante
Puissance harmonique

Les chapitres précédents ont proposé des méthodes spécifiques pour déterminer les tensions et les courants dans les circuits électriques qui possèdent soit des sources continues, soit des sources sinusoïdales de même fréquence. Pour les circuits qui intègrent à la fois des sources continues et des sources sinusoïdales de fréquences différentes, comme c'est souvent le cas en électronique, aucune des méthodes précédentes n'est adaptée pour déterminer les grandeurs électriques du circuit. De même, on reste démuni lorsque les dipôles actifs du circuit fournissent des signaux périodiques quelconques autres que des sinusoïdes. Ce chapitre permet de résoudre ces difficultés de deux manières, soit en utilisant le théorème de superposition des régimes, soit en utilisant la modélisation opérationnelle. Le calcul de la puissance, pour des sources périodiques quelconques, est une autre difficulté qui est traitée à la fin du chapitre. Ce chapitre constitue une synthèse pour l'étude des circuits en régime permanent.

Copyright © 2007 Dunod.

8.1 CONDITIONS D'ÉTUDE

8.1.1 Des sources continues et sinusoïdales dans un même circuit

Dans les applications qui utilisent des circuits électriques, nous voyons très souvent cohabiter des sources de natures différentes, mais aussi de régimes différents (RPCC et RPCA).

Par exemple dans les circuits électroniques, coexistent la partie du circuit chargée de polariser ou d'alimenter les composants électroniques (régime RPCC) et la partie linéaire qui traite un signal alternatif (analysé en régime RPCA).

C'est le cas, dans le schéma de l'oscillateur de la figure 8.1, où la source continue E est chargée de polariser en inverse la diode varicap, et où la source $j(t)$ génère l'énergie à l'origine du signal sinusoïdal.

Des méthodes d'étude doivent être mises en place pour déterminer les grandeurs électriques du circuit qui intègre ces différents régimes.

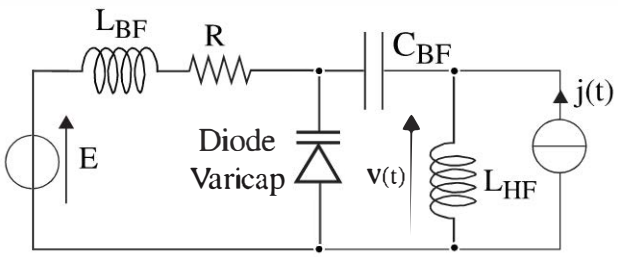


Figure 8.1

Le **théorème de superposition** des régimes, issu du principe de linéarité de la physique, va permettre de réutiliser les méthodes d'étude des chapitres précédents pour établir le régime permanent imposé par des sources de régimes différents.

8.1.2 Cas des sources périodiques

Nous avons considéré dans les chapitres précédents des sources qui pouvaient être continues, sinusoïdales ou comme le paragraphe l'a montré une combinaison des deux. Toutefois, il existe une autre catégorie importante de sources, très répandues qui génèrent, elles aussi, un régime permanent : il s'agit des **sources périodiques**.

Une source périodique est une source dont la forme de l'amplitude (le motif) se répète à chaque période.

Une source sinusoïdale est un exemple simple de sources périodiques. On trouve aussi des sources avec des motifs plus ou moins complexes, avec ou sans discontinuité comme : des sources triangulaires, en créneau...

La figure 8.2 représente une source périodique obtenue par la modulation d'amplitude d'une source sinusoïdale de haute fréquence (la porteuse) ; c'est le signal qui est reçu par l'antenne d'un poste radio sur la gamme d'onde PO (petites ondes) ou GO (grandes ondes).

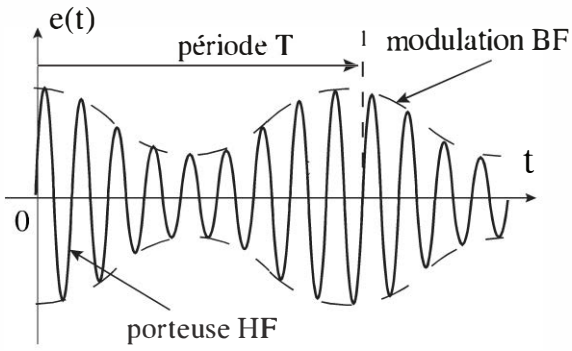


Figure 8.2

L'expression mathématique temporelle d'un signal périodique n'est pas toujours simple ; c'est pourquoi on lui préfère une représentation fréquentielle – qui offre l'avantage

Copyright © 2007 Dunod.

d'une représentation graphique claire. Elle est obtenue en décomposant le signal périodique en série de Fourier[1].

On rappelle que la décomposition en série de Fourier permet de représenter tout signal périodique[2] de période T par la somme d'une constante et d'un ensemble de sinusoïdes de pulsations différentes : l'ensemble des termes de la somme forme le **spectre fréquentiel** du signal.

Par exemple, le spectre fréquentiel d'amplitude du signal $e(t)$ de la figure 8.2 est représenté sur la figure 8.3.

Le spectre fréquentiel modélise le signal périodique sous la forme de raies dont chacune symbolise une source sinusoïdale indépendante de fréquence unique.

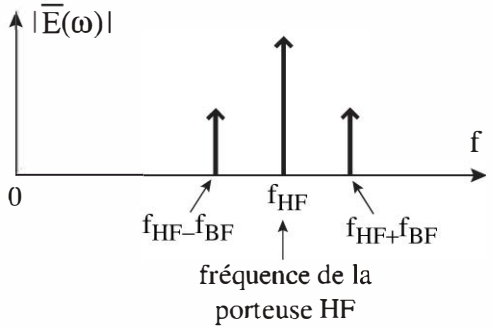


Figure 8.3

Le circuit électrique devient alors équivalent à un circuit dans lequel la source périodique est remplacée par l'ensemble des sources indépendantes de son spectre fréquentiel. Pour étudier le régime permanent, on est ramené au cas précédent d'un circuit avec des sources de régimes différents.

8.2 MODÉLISATION PAR LA SÉRIE DE FOURIER

La décomposition en série de Fourier des sources périodiques du circuit électrique entraîne leurs remplacements par un ensemble de sources ; en général, l'une est continue et les autres sont sinusoïdales de fréquences différentes.

L'utilisation du principe de linéarité de la physique (voir chapitre 5) permet alors la détermination aisée des grandeurs électriques dans le circuit linéaire. Ce principe adapté à notre problématique induit autant d'études particulières qu'il y a de sources de fréquences différentes (ou de régimes différents).

Ce principe adapté aux circuits électriques possédant des sources de fréquences différentes forme ce que nous appellerons le **théorème de superposition des régimes**.

8.2.1 Modélisation des sources périodiques

La série de Fourier du signal $s(t)$ produit la somme trigonométrique :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \Rightarrow \boxed{s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \varphi_n)},$$

formée d'un terme continu et de sinusoïdes de pulsations différentes et multiples de la pulsation fondamentale ω.

[1] Voir « Pour en savoir plus : Décomposition en série de Fourier » du chapitre 5.

[2] Il doit respecter les conditions de Dirichlet : discontinuités, maxima et minima en nombre limité dans la période. Ces conditions sont pratiquement toujours respectées..

Copyright © 2007 Dunod.

Suivant la nature de la source périodique décomposée, la modélisation à partir de la décomposition de Fourier prend une allure différente :

– une source de tension produit une somme de tensions, se modélisant par des sources de tension en série d'après la définition de la loi des mailles (Figure 8.4) ;

– une source de courant se représente, en respect avec la loi des nœuds, par des sources de courant en parallèle (figure 8.5).

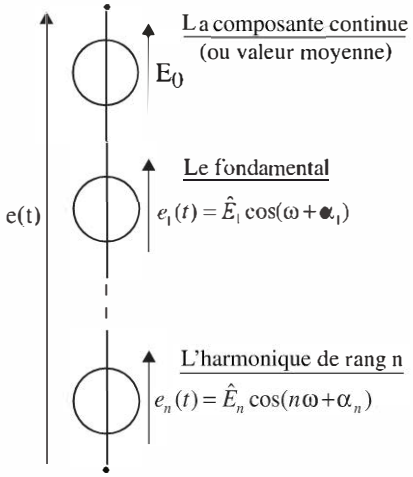


Figure 8.4

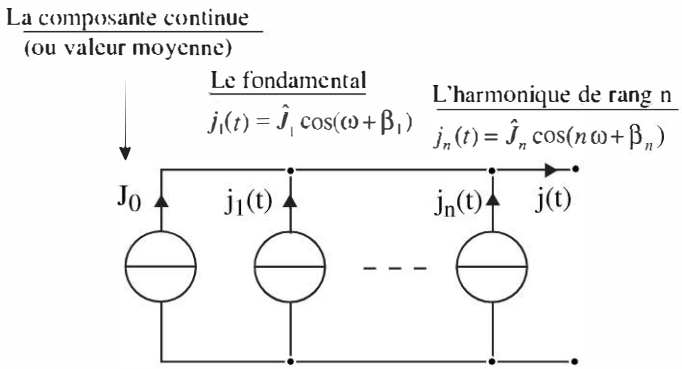


Figure 8.5

Le circuit électrique comprenant une source périodique se transforme en un circuit possédant des sources de même nature, mais de fréquences différentes.

Par exemple, le schéma électrique de la figure 8.6a se transforme, après décomposition de la source périodique $e(t)$, pour établir le schéma de la figure 8.6b, qui contient des sources de tension en série, dont une est continue E_0 et les autres sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation fondamentale $\omega = 2\pi/T$.

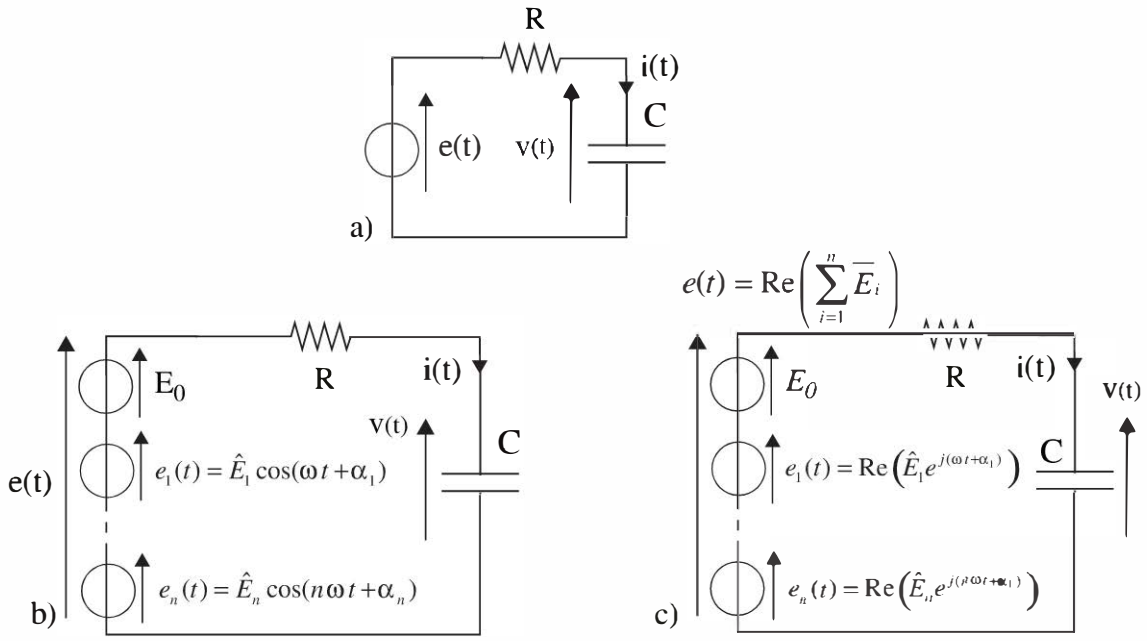


Figure 8.6

Copyright © 2007 Dunod.

La figure 8.6c complète le schéma électrique en faisant apparaître les phaseurs associés à chaque source sinusoïdale (voir chapitre 7).

> ***Remarque :*** L'utilisation du « phaseur réduit « est inadaptée à la modélisation des sources périodiques, car la fréquence étant variable, elle doit intervenir dans les expressions.

8.2.2 Utilisation du théorème de superposition des régimes

Le théorème de superposition des régimes, est basé sur le théorème de superposition des sources que nous avons déjà vu au chapitre 6 (§ 6.4).

On rappelle que le théorème de superposition des sources s'applique aux circuits linéaires, qui ont plusieurs sources soit continues soit de même fréquence. Ce théorème stipule que l'étude des grandeurs électriques peut être réalisée en effectuant une suite d'études partielles, auxquelles sont associés des circuits électriques à une seule source (voir chapitre 6).

Le **théorème de superposition des régimes** va s'appliquer aux circuits linéaires qui ont des sources, de régimes différents (continu ou sinusoïdal) ou des sources qui sont de fréquences différentes. Ce théorème permet donc d'étudier les circuits électriques qui intègrent en particulier des sources périodiques, car une fois décomposé en série de Fourier, le schéma équivalent contient une source continue et des sources sinusoïdales de fréquences multiples.

L'étude des grandeurs électriques entraîne la réalisation d'une suite d'études partielles, auxquelles sont associés des circuits électriques différents.

Par exemple, le schéma électrique de la figure 8.7 possède une source périodique décomposée en une source continue et n sources sinusoïdales de fréquences différentes. La détermination du courant $i(t)$ nécessite alors $n + 1$ études partielles et schémas électriques associés.

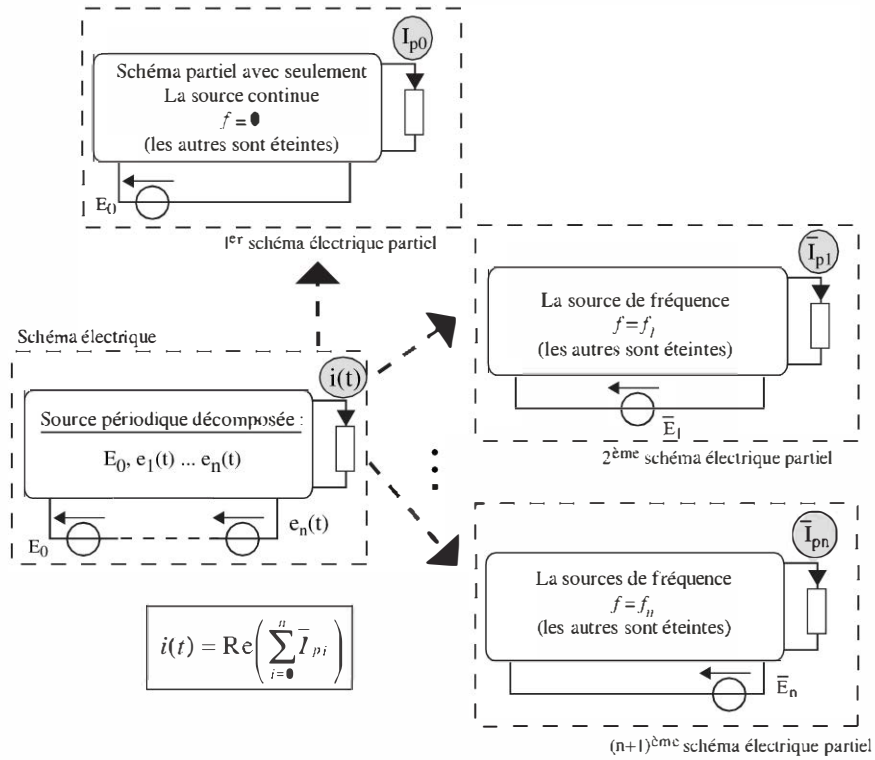


Figure 8.7

Copyright © 2007 Dunod.

Il y a autant d'études partielles et de schémas électriques partiels qu'il y a de sources dans la décomposition de la source périodique.

Pour l'étude partielle du terme continu, le schéma électrique est transformé en un schéma électrique équivalent en RPCC (voir chapitre 6) ; la grandeur continue recherchée dans le schéma représente la valeur moyenne du courant $i(t)$ recherché.

Pour l'étude partielle associée à la source de fréquence f_i, le schéma électrique d'étude est un schéma équivalent en RPCA de fréquence f_i. (Cette étude partielle est alors menée en utilisant la notion de phaseur). Le résultat de l'étude est un courant partiel sinusoïdal $i_{pi}(t)$.

L'ensemble des études partielles mène à la construction du spectre du signal recherché.

La grandeur $i(t)$ est, à l'issue de toutes les études partielles réalisées en RPCC et en RPCA, la somme temporelle $i(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{i=0}^{n} \overline{I}_{pi}\right)$.

Par exemple, le circuit de la figure 8.8a possède une source périodique qui contient deux termes dans sa décomposition : un terme continu E_0 et le terme fondamental $\hat{E}\cos(\omega t + \alpha)$.

Pour déterminer les grandeurs $v(t)$ et $i(t)$, il faut réaliser deux études partielles.

Le schéma associé à l'étude partielle en RPCC (Figure 8.8b), permet d'établir l'expression des composantes continues V_0 de $v(t)$ et I_0 de $i(t)$.

$$V_0 = \frac{R}{R+R}E_0 = \frac{E_0}{2} \text{ et } I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{E_0}{2R}.$$

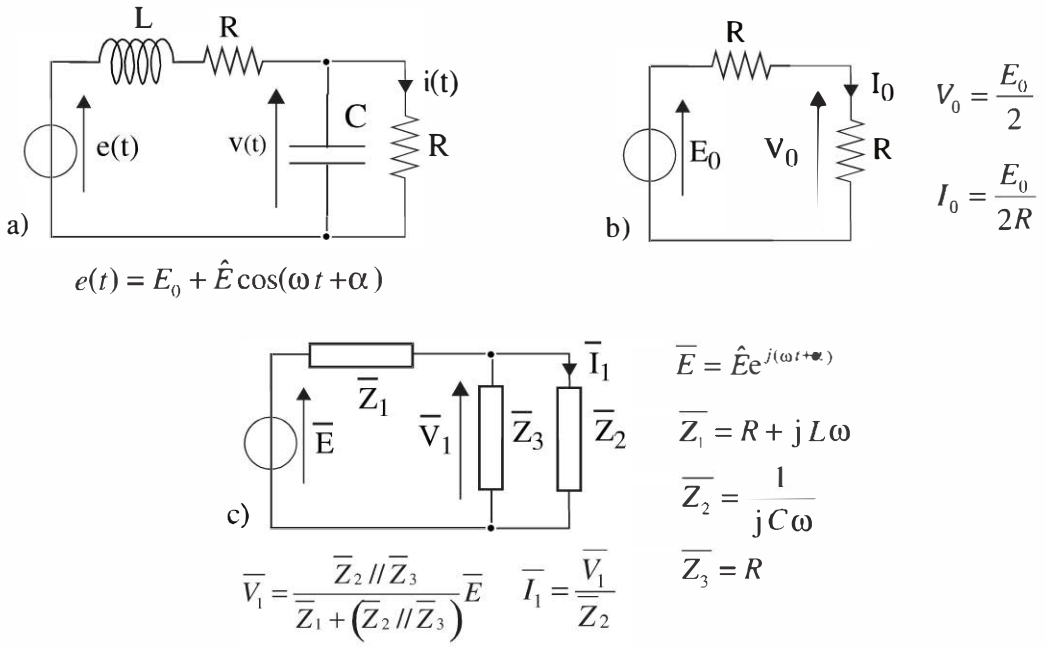


Figure 8.8

Dans l'étude partielle en RPCA (figure 8.8c) le schéma électrique équivalent comporte des impédances complexes et le phaseur associé au terme fondamental de la source. La mise en équation et la résolution entraînent les expressions des phaseurs $\overline{V}_1$ et $\overline{I}_1$:

Copyright © 2007 Dunod.

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{Z}_2 // \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + (\overline{Z}_2 // \overline{Z}_3)} \overline{E} \text{ (en utilisant la règle du pont diviseur de tension)}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\hat{E} e^{j(\omega t + \alpha)}}{2 - LC\omega^2 + j\omega\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)} = \frac{\hat{E}}{\sqrt{(2 - LC\omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)^2}} e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}$$

$$\text{avec } \tan(\theta) = \frac{\omega\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)}{2 - LC\omega^2}$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{V}_1}{R} \text{ (en écrivant la loi d'Ohm complexe).}$$

On déduit les valeurs fondamentales $v_1(t)$ et $i_1(t)$ de $v(t)$ et $i(t)$:

$$v_1(t) = \text{Re}(\overline{V}_1) = \frac{\hat{E}}{\sqrt{(2 - LC\omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \theta) \text{ et}$$

$$i_1(t) = \text{Re}(\overline{I}_1) = \frac{\hat{E}}{R\sqrt{(2 - LC\omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

Les expressions temporelles de la tension et du courant ($v(t)$ et $i(t)$) sont alors la somme de leur composante continue et de leur fondamental.

$$v(t) = V_0 + \text{Re}(\overline{V}_1) = \frac{E_0}{2} + \frac{\hat{E}}{\sqrt{(2 - LC\omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \theta) \text{ et}$$

$$i(t) = I_0 + \text{Re}(\overline{I}_1) = \frac{E_0}{R2} + \frac{\hat{E}}{R\sqrt{(2 - LC\omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{L}{R} + RC\omega\right)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

Remarque : On s'aperçoit que si la source périodique $e(t)$ avait eu plusieurs harmoniques, le schéma équivalent en RPCA aurait eu un schéma équivalent avec les mêmes dipôles et le même graphe ; d'où des phaseurs d'expressions identiques à la valeur près de la pulsation.

Le théorème de superposition des régimes a l'avantage d'utiliser des méthodes de modélisation simples, déjà vues dans les chapitres précédents.

Copyright © 2007 Dunod.

Toutefois, l'efficience de cette méthode impose d'avoir peu de termes dans la décomposition de Fourier, car sinon le nombre d'études partielles à réaliser devient rapidement trop important.

8.2.3 Extension du théorème de superposition des régimes

Nous avons utilisé le théorème de superposition des régimes pour des circuits linéaires contenant une source périodique décomposée en plusieurs sources de même nature.

Le principe de linéarité en physique permet d'étendre l'utilisation du théorème, pour les circuits :

– possédant plusieurs sources périodiques décomposées : il y a alors autant d'études partielles qu'il y a de raies différentes dans le spectre des sources ;

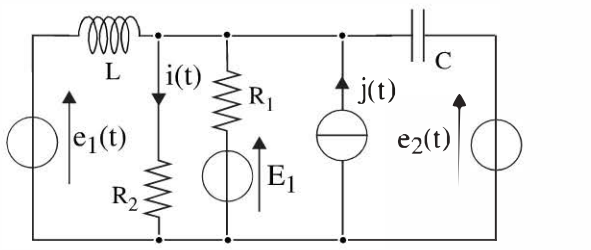
– possédant des sources indépendantes, continues et sinusoïdales de mêmes fréquences ou de fréquences différentes ;

– regroupant les sources des deux cas précédents.

Pour limiter le nombre d'études partielles à réaliser, on regroupe dans une même étude partielle toutes les sources du schéma électrique qui ont même fréquence.

Par exemple, le circuit de la figure 8.9 fait apparaître quatre sources : une source continue E_1, une source périodique $e_1(t)$ et deux sources sinusoïdales de fréquences différentes $j(t)$ et $e_2(t)$. Après décomposition de la source périodique, on remarque que le schéma (figure 8.10) possède alors deux sources continues (E_{10}, E_1) deux sources sinusoïdales de mêmes pulsations ($3\omega_1$) et deux sources sinusoïdales isolées de pulsations différentes (ω_1 et ω_2).

Quatre études partielles sont nécessaires pour établir l'expression de $i(t)$: une étude en RPCC et trois études en RPCA avec trois fréquences différentes.



$e_1(t) = E_{10} + \hat{E}_{11}\cos(\omega_1 t + \alpha_{11}) + \hat{E}_{13}\cos(3\omega_1 t + \alpha_{13})$

$e_2(t) = \hat{E}_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$ $\quad j(t) = \hat{J}\cos(3\omega_1 t + \beta)$

Figure 8.9

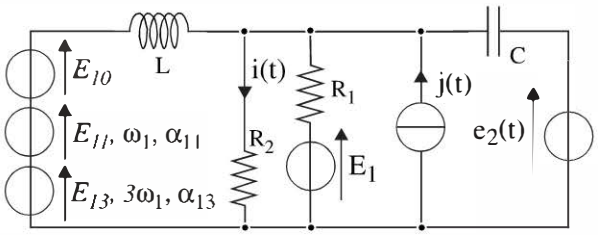


Figure 8.10

On utilise quatre schémas équivalents comme support aux quatre études partielles. Le premier en RPCC (figure 8.11a) et les trois autres en RPCA (figure 8.11b, c, d) se différenciant par la nature des sources et les pulsations (ω_1, $3\omega_1$ et ω_2).

Au final, l'expression du courant $i(t)$ est :

$i(t) = \mathrm{Re}(I_0 + \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)$

$i(t) = I_0 + \hat{I}_1\cos(\omega_1 t + \theta_{11}) + \hat{I}_3\cos(3\omega_1 t + \theta_3) + \hat{I}_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$

Copyright © 2007 Dunod.

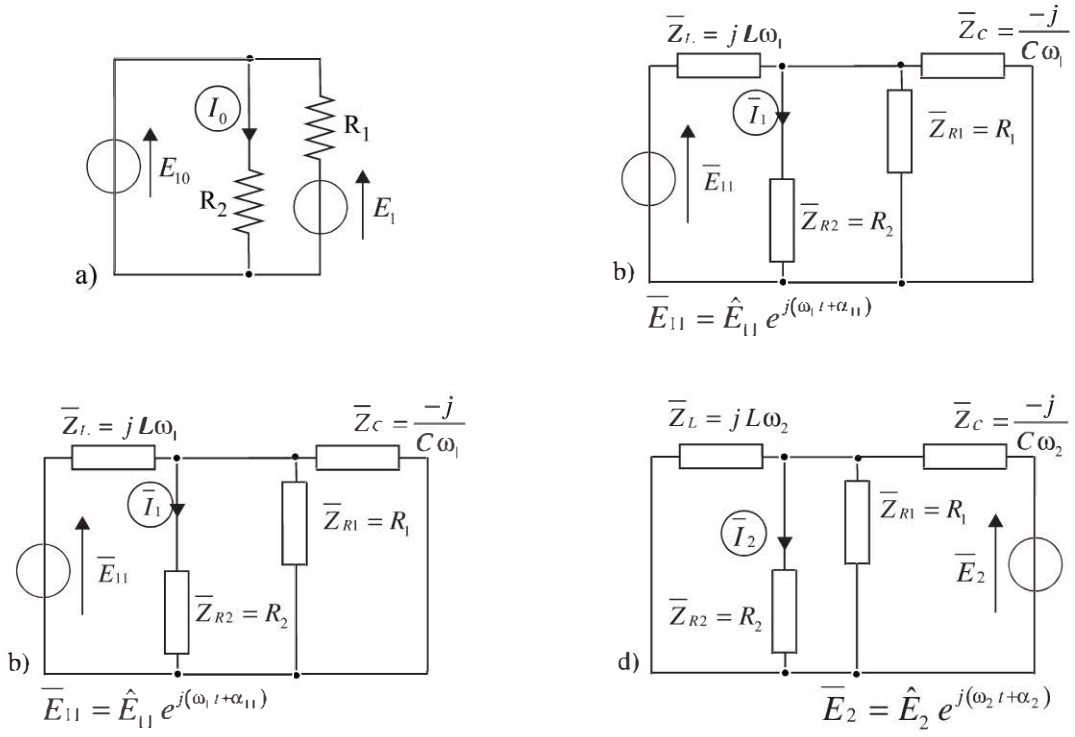


Figure 8.11

8.2.4 Méthodologie d'étude

Lorsqu'un circuit comporte des sources périodiques décomposables sous forme de séries de Fourier ou des sources de fréquences différentes alors on peut rechercher la solution en utilisant le théorème de superposition des régimes.

La méthodologie pratique est résumée par l'algorithme de la figure 8.12. Chaque fréquence différente fait l'objet d'une étude partielle et l'expression de la solution est la somme des solutions partielles.

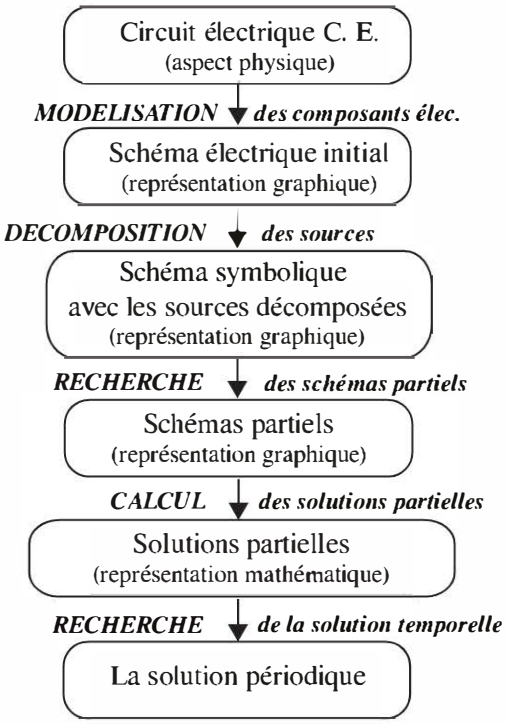


Figure 8.12

8.3 MODÉLISATION OPÉRATIONNELLE

Déjà dans le chapitre 7, nous avons effectué la transformation du schéma électrique en un schéma opérationnel équivalent. Cependant, les dipôles actifs du schéma étaient uniquement de forme sinusoïdale et de même fréquence. Il convient d'apporter à cette précédente modélisation, la transformation de Laplace des sources périodiques.

Copyright © 2007 Dunod.

8.3.1 Modélisation opérationnelle des sources périodiques

Il est parfois difficile d'obtenir l'expression mathématique d'un signal périodique, d'où la difficulté ensuite d'effectuer des calculs.

La transformée de Laplace permet d'exprimer parfois assez simplement ces signaux périodiques complexes.

Pour illustrer l'application de la transformée de Laplace aux sources périodiques, prenons pour premier exemple (**l'impulsion de Dirac** $\delta(t)$, unitaire à l'instant $t = 0$ et partout ailleurs de valeur nulle (figure 8.13a) ; sa transformée est $\delta(t) \rightleftharpoons 1$.

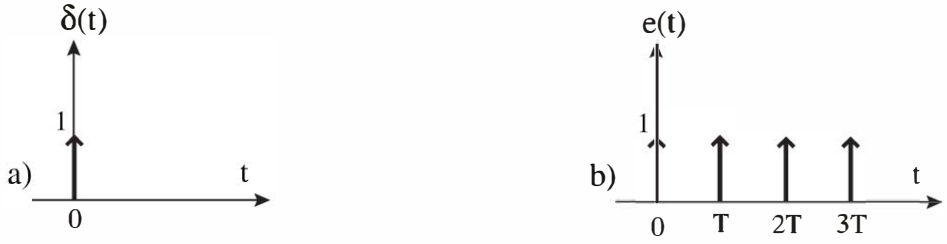


Figure 8.13

L'expression mathématique de la source périodique $e(t)$ (figure 8.13b) formée par une somme d'impulsions de Dirac, chacune étant décalée de T, est $e(t) = \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) \ldots$ D'après la propriété du retard $s(t - a) \rightleftharpoons e^{-ap} S(p)$, la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$ devient la suite :

$$E(p) = 1 + e^{-pt} + e^{-2pt} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-pt}}$$

Ce résultat est facilement généralisable. En effet, une source périodique $e_T(t)$ de période T, issue de la répétition temporelle d'un signal $e(t)$ (de transformée $E(p)$) défini dans l'intervalle $[0, T]$, a pour transformée de Laplace :

$$E_T(p) = E(p) + E(p - T) + \cdots$$

qui se factorise :

$$E_T(p) = E(p)(1 + e^{-pT} + \cdots) = \frac{E(p)}{1 - e^{-pT}}$$

La transformée de Laplace $E_T(p)$ d'un signal périodique de période T dont le motif dans l'intervalle $[0, T]$ a pour transformée $E(p)$ est $\boxed{E_T(p) = \dfrac{E(p)}{1 - e^{-pT}}}$.

Il devient alors aisé d'exprimer la transformée de Laplace de signaux courants (tableau 8-1) telle qu'un signal :

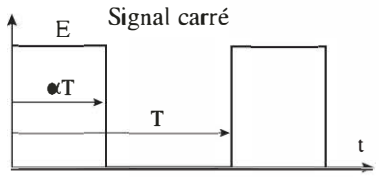
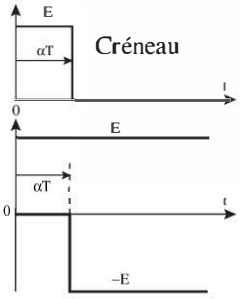
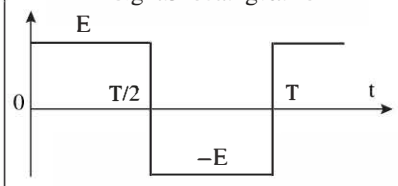
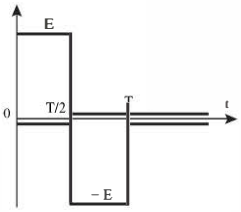
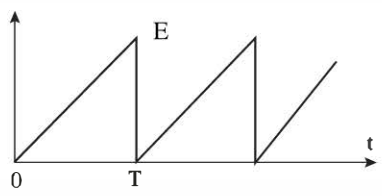
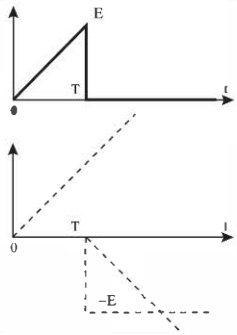
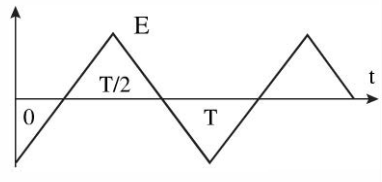
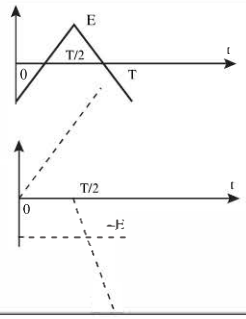
– carré, vu sous l'angle de la somme d'échelons décalés ;

– rectangulaire, comme la somme de deux créneaux décalés ;

Copyright © 2007 Dunod.

– en dent de scie, comme la somme de deux droites et d'un échelon retardé ;
– triangulaire, comme la somme de deux droites et d'un échelon ;
– ...

Tableau 8.1

Signal périodique	Motif de base	Transformée
Signal carré 		Pour le motif de base : $E(p)=E\left(\frac{1}{p}-e^{-\alpha T p}\frac{1}{p}\right)=\frac{E}{p}\left(1-e^{-\alpha T p}\right)$ Pour le signal carré : $E_T(p)=E\left(\frac{1}{p}-e^{-\alpha T p}\frac{1}{p}\right)=\frac{E}{p}\left(\frac{1-e^{-\alpha T p}}{1-e^{-T p}}\right)$
Signal rectangulaire 		Pour le motif de base : $E(p)=\frac{E}{p}\left(1-e^{-\frac{T}{2}p}\right)-\frac{E}{p}\left(1-e^{-\frac{T}{2}p}\right)e^{-\frac{T}{2}p}=\frac{E}{p}\left(1-e^{-\frac{T}{2}p}\right)^2$ Pour le signal rectangulaire : $E(p)=\frac{E}{p}\frac{(1-e^{-\frac{T}{2}p})^2}{1-e^{-Tp}}$
Signal en dent de scie 		Pour le motif de base : $E(p)=E\left(\frac{1}{p^2}-e^{-Tp}\frac{1}{p^2}-e^{-Tp}\frac{1}{p}\right)=\frac{E}{p^2}\left(1-e^{-Tp}(1+p)\right)$ Pour le signal en dent de scie : $E_T(p)=\frac{E}{p^2}\left(\frac{1-e^{-Tp}(1+p)}{1-e^{-Tp}}\right)$
Signal triangulaire 		Pour le motif de base : $E(p)=E\left(\frac{1}{p^2}-e^{-Tp}\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}\right)=\frac{E}{p^2}\left(1-2e^{-Tp}-p\right)$ Pour le signal triangulaire : $E_T(p)=\frac{E}{p^2}\left(\frac{1-2e^{-Tp}-p}{1-e^{-Tp}}\right)$

8.3.2 Exemple d'application

Pour appliquer les résultats de paragraphe précédents considérons le circuit de la figure 8.14, dans lequel la source de tension $e(t)$ délivre un signal carré (figure 8.15). $v(t)$ est la tension aux bornes du condensateur recherchée.

Copyright © 2007 Dunod.

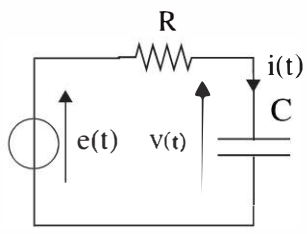


Figure 8.14

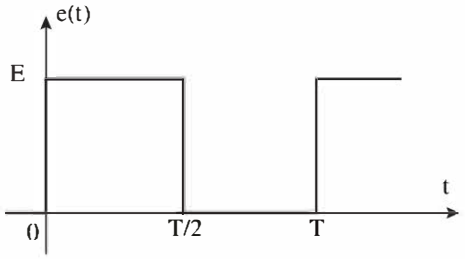


Figure 8.15

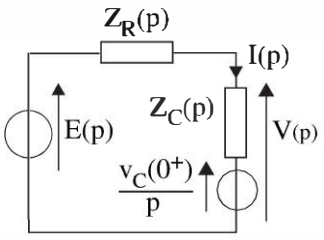


Figure 8.16

La transformée du signal $e(t)$ a pour expression (voir tableau 8-1) :

$$E(p) = \frac{E}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{T}{2}p}\right) \text{ et sur une période } E_T(p) = \frac{E}{p}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}\right).$$

La loi de la maille appliquée sur le schéma opérationnel équivalent, s'écrit (figure 8.16) :

$$V(p) = \left(E(p) - \frac{v_C(0^+)}{p}\right)\frac{Z_C(p)}{Z_C(p) + Z_R(p)} + \frac{v_C(0^+)}{p}$$

avec $$\frac{Z_C(p)}{Z_C(p) + Z_R(p)} = \frac{1}{RC(\frac{1}{RC} + p)}$$

En posant la constante de temps $\tau = RC$, on obtient :

$$V(p) = \frac{E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right) - v_C(0^+)}{\tau p(\frac{1}{\tau} + p)} + \frac{v_C(0^+)}{p}$$

$$V(p) = \frac{E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right) - v_C(0^+)\left(\tau(\frac{1}{\tau} + p) - 1\right)}{\tau p(\frac{1}{\tau} + p)} = \frac{E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right) - v_C(0^+)\tau p}{\tau p(\frac{1}{\tau} + p)}$$

$$V(p) = \frac{E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right)}{\tau p(\frac{1}{\tau} + p)} + \frac{v_C(0^+)}{\left(\frac{1}{\tau} + p\right)}$$

Connaissant la transformée (voir tableau 7.4) $\frac{K}{(p+a)(p+b)} \rightleftharpoons \frac{K}{b-a}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$, alors le motif de base $v(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$ a pour expression :

$$x(t) = \left(E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_c(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Gamma(t) - E\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{(t-\frac{T}{2})}{\tau}}\right)\Gamma(t - T/2)$$

Copyright © 2007 Dunod.

$\Gamma(t)$ est la fonction d'Heaviside : $\Gamma(t) = 1$ pour $t > 0$ et pour $t < 0$).

À partir de la C.I. $v_C(0^+) = 0$, la représentation du motif $x(t)$ (figure 8.17) montre que $x(0) \neq x(T)$, qui indique l'existence d'un régime transitoire.

L'élimination de ce régime transitoire passe par la détermination d'une nouvelle valeur de la C.I. $v_C(0^+)$.

La recherche du régime permanent ajoute une équation supplémentaire $x(0) = x(T)$; cela revient indirectement à trouver la valeur de $v_C(0^+)$ qui annule le régime transitoire.

La recherche de la C.I. pour éliminer le régime transitoire implique une équation supplémentaire, qui formalise l'égalité entre la valeur de la grandeur électrique en début de période $x(0)$ et celle de la fin de période $x(T)$.

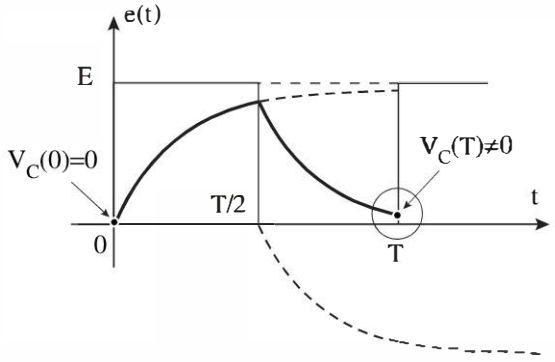


Figure 8.17

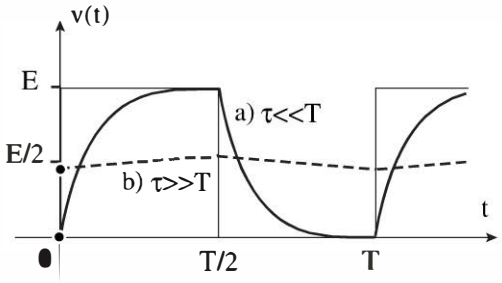


Figure 8.18

En posant $x(0) = x(T) = v_C(0^+)$, et avec $\Gamma(t - T/2) = 1$ pour $t > T/2$, on obtient :

$$x(T) = E\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) + v_C(0^+)e^{-\frac{T}{\tau}} - E\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}\right) = v_C(0^+)$$

$$\Rightarrow v_C(0^+) = \frac{Ee^{-\frac{T}{2\tau}}\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}\right)}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \Rightarrow \boxed{v_C(0^+) = \frac{Ee^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}}.$$

La figure 8.18 montre qu'a partir du calcul de $v_C(0^+)$, le régime transitoire disparaît totalement au profit du régime permanent.

Suivant le rapport T/τ on obtient des valeurs de $v_C(0^+)$ différentes :

– pour $\tau \ll T \Longrightarrow T/\tau \longrightarrow \infty$ alors $v_C(0^+) \longrightarrow 0$ (Figure 8.18a) ;

– pour $\tau \gg T \Longrightarrow T/\tau \longrightarrow 0$ alors $v_C(0^+) \dashrightarrow E/2$ (Figure 8.18a) ;

Dans l'intervalle $[0,T]$, le signal $x(t)$ a alors pour expression :

$$x(t) = -Ee^{\frac{T}{2\tau}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Gamma(t) + E\left(1 - e^{-\frac{(t-\frac{T}{2})}{\tau}}\right)\Gamma(t - T/2)$$

$$+E\left(1 - e^{\frac{T}{2\tau}}\right)\left(1 - \Gamma(t - T)\right)$$

Copyright © 2007 Dunod.

À partir de $x(t)$, on peut exprimer la tension périodique $v(t)$, dont l'amplitude recopie $x(t)$ à chaque période :

$$v(t) = x(t)(\Gamma(t) - \Gamma(t-T) + x(t-T)(\Gamma(T) - \Gamma(t-2T)\ldots$$

Toutes les grandeurs électriques $s(t)$ du schéma électrique en régime permanent n'obéissent pas à la condition $s(0) = s(T)$, qui traduit une continuité temporelle du signal. D'ailleurs par définition, seuls les courants dans les inductances et les tensions des condensateurs respectent cette condition, car nous savons (voir la partie 1) que ces grandeurs sont dépourvues de discontinuité.

Ces mêmes courants et tensions, qui revêtent un caractère particulier dans le circuit électrique, forment ce qui sera appelé dans le chapitre 10 les **variables d'état** du circuit.

8.3.3 Méthodologie d'étude

La méthodologie (figure 8.19) opérationnelle, qui permet de déterminer les grandeurs électriques d'un circuit électrique incluant des sources de fréquences différentes, est basée sur l'établissement d'un schéma symbolique qui intègre les C.I. et qui transforme les sources périodiques.

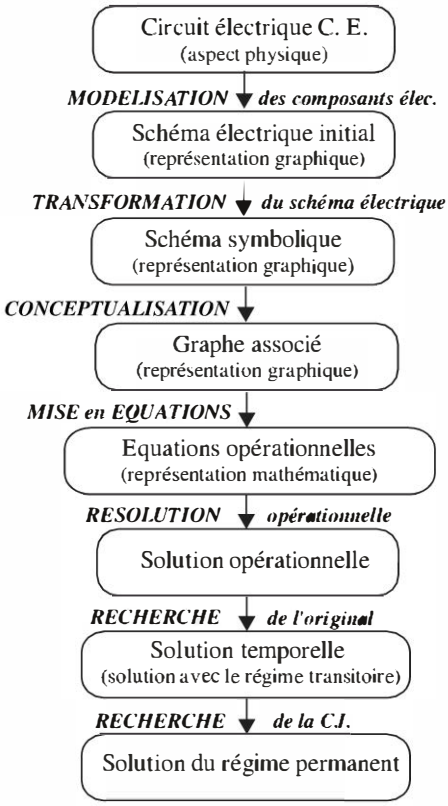


Figure 8.19

8.4 PUISSANCE CONTINUE ET PUISSANCE HARMONIQUE

Une tension périodiques $u(t)$ aux bornes d'un dipôle traversé par un courant $i(t)$, produit une puissance instantanée $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. En décomposant en série de Fourier ces deux signaux, on obtient :

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \qquad i(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{I}_m \cos(m\omega' t + \beta_m)$$

$$\text{d'où : } p(t) = \left(U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos(n\omega t + \alpha_n)\right)\left(I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{I}_m \cos(m\omega t + \beta_m)\right)$$

Copyright © 2007 Dunod.

La puissance instantanée est fluctuante – elle varie en fonction du temps – et se développe en une somme qui fait apparaître :

– un terme continu $U_0 \cdot I_0$ (produit des composantes continues) ;

– les produits $U_0 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{I}_i \cos(i\,\omega\, t + \beta_i)$ et $I_0 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{U}_i \cos(i\,\omega\, t + \alpha_i)$ qui sont des sinusoïdes ;

– $\hat{U}_n \hat{I}_n \cos(n\omega t + \alpha_n)\cos(n\omega t + \beta_n)$ qui développé devient
$\hat{U}_n \hat{I}_n(\cos(\alpha_n - \beta_n) + \cos(2n\omega t + \alpha_n + \beta_n))/2$; d'où la constante
$\hat{U}_n \hat{I}_n \cos(\alpha_n - \beta_n)/2$ et la sinusoïde $\hat{U}_n \hat{I}_n \cos(2n\omega t + \alpha_n + \beta_n)/2$;

– $\hat{U}_n \hat{I}_m \cos(n\omega t + \alpha_n)\cos(m\omega t + \beta_m)$ qui produit, une fois développé
$\hat{U}_n \hat{I}_m(\cos((n-m)\omega t + \alpha_n - \beta_n) + \cos((n+m)\omega t + \alpha_n + \beta_n))/2$, deux termes sinusoïdaux.

En résumé, la puissance instantanée $p(t)$ est composée de termes constants et de termes sinusoïdaux.

Sachant que le débit moyen de l'énergie est donné par la valeur moyenne de la puissance $P =< p(t) >$, alors seuls les termes constants dans la somme $p(t)$ génèrent de la **puissance active**, se transformant en chaleur dans les circuits.

La puissance P est alors constituée par :

– la **puissance continue** égale au produit des amplitudes continues du courant et de la tension : $U_0 \cdot I_0$;

– la **puissance harmonique** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{U}_n \hat{I}_n}{2} \cos(\alpha_n - \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_n)$ où $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ est le déphasage entre les harmoniques de rang n.

> ***Remarque :*** Tous les termes croisés, produits d'un rang n par un rang m, disparaissent dans l'expression de la puissance moyenne P. Par contre, ils produisent la fluctuation de $p(t)$ autour de sa valeur moyenne P.

Par exemple, la décomposition (figure 8.20a, b) de la tension et du courant d'un dipôle passif absorbe une puissance égale à :

– pour la raie continue ($\omega = 0$), $P_0 = 50 \cdot 5 = 250\,\text{W}$;

– pour la raie fondamentale ω_f, $P_1 = 100 \cdot 2{,}5 \cdot \cos(20 - (-40)) = 125\,\text{W}$;

– pour la raie du 2e harmonique ω_{2f}, $P_2 = 0\,\text{W}$;

– pour la raie du 3e harmonique ω_{3f}, $P_3 = 0\,\text{W}$.

La puissance active (figure 8.20c) est $P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 375\,\text{W}$.

La puissance moyenne entraînant la transformation de l'énergie électrique, est produite par les termes de même rang dans les spectres de la tension et du courant dans les dipôles.

Copyright © 2007 Dunod.

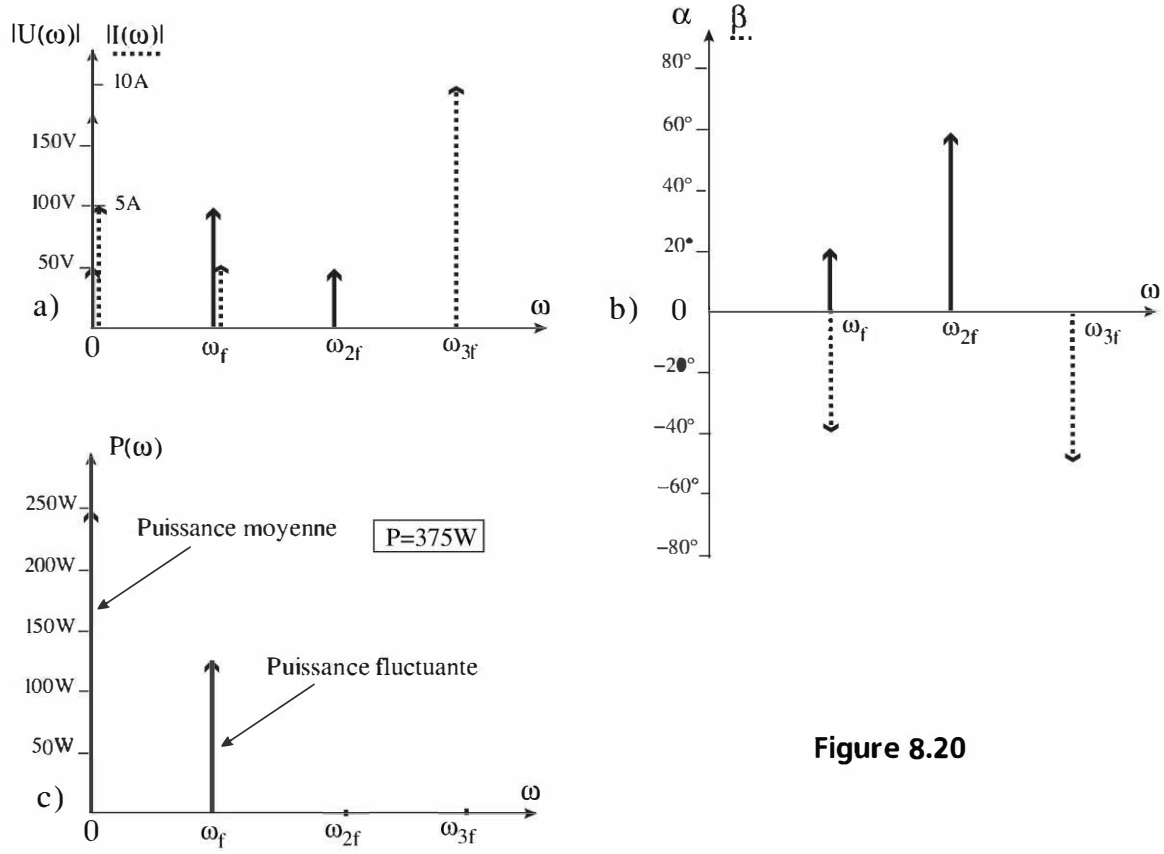


Figure 8.20

Cahier d'évaluation

Révisions

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

8.1 Quelles différences existe-t-il entre le théorème de superposition des sources et le théorème de superposition des régimes ?

8.2 Que peut-on dire des dipôles actifs des circuits concernés par la méthode d'étude de superposition des régimes ?

8.3 Pourquoi la série de Fourier d'une source ne doit-elle pas contenir une infinité de termes pour être étudiée dans le cadre de la superposition des régimes ?

8.4 Quel est l'intérêt d'étudier par la transformée de Laplace les circuits avec des sources périodiques ?

8.5 Est-ce qu'un dipôle passif dont le courant et la tension sont de fréquences différentes, absorbe de la puissance active ?

8.6 Que doivent avoir en commun les spectres en tension et en courant dans un dipôle passif pour absorber de la puissance active ?

Copyright © 2007 Dunod.

Exercices

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

8.7 Soit la source de tension de la figure 8.21.

1) Calculer par la formule la valeur moyenne E_{10} de $e(t)$;

2) Calculer aussi directement la valeur efficace E de $e(t)$;

3) Décomposer $e(t)$ en série de Fourier ;

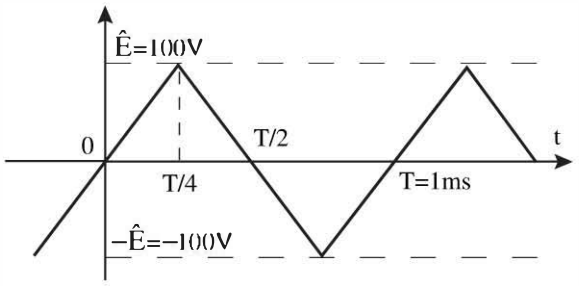


Figure 8.21

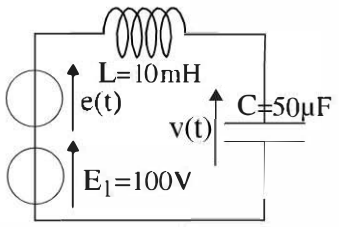


Figure 8.22

8.8 Soit le circuit de la figure 8.22, où $e(t)$ est le signal de la question 8.7.

1) Dessiner le schéma équivalent en RPCC ;

2) Déterminer la composante continue V_0 de la tension $v(t)$;

3) Dessiner le schéma en RPCA, à la pulsation ω ;

4) Déterminer la tension fondamentale $v_1(t)$ de $v(t)$;

5) Déterminer $v(t)$.

8.9 À partir du signal en courant $j(t)$ de la figure 8.23 :

1) Calculer la valeur moyenne J_0

2) Calculer la valeur efficace J_e ;

3) Calculer les termes de la décomposition en série de Fourier sous la forme :

$$j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{J}_n \cos(n\omega t + \varphi_n) .$$

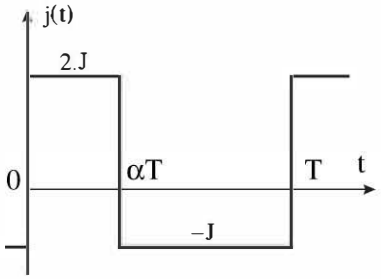


Figure 8.23

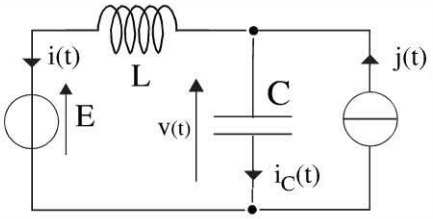


Figure 8.24

8.10 Soit le circuit de la figure 8.24 où la source de courant $j(t)$ est celle de la question 8.9 (figure 8.23) et E une source de tension continue. On cherche à déterminer L et C pour réduire les harmoniques du courant $i(t)$ dans la source E.

1) Dessiner le schéma équivalent en RPCC ;

2) En déduire la valeur de la tension moyenne V_0 aux bornes de la source de courant et la valeur du courant moyen I_0 circulant dans la source E ;

3) Dessiner le schéma équivalent en RPAC pour la pulsation fondamentale ω ;

4) Déterminer l'expression de l'inductance L, pour que le courant fondamental qui la traverse I_1 soit d'amplitude égale à 10 % de la valeur fondamentale du courant dans la source J_1, et que le fondamental de la tension V_1 soit de 5 % de V_0, quand $\alpha = 0{,}5$;

5) Déterminer l'expression de la valeur de la capacité C ;

6) À partir des valeurs de L et C précédentes, déterminer l'amplitude du 2e et du 3e harmonique du courant $i(t)$. Conclure en comparant I_1 et I_3.

Copyright © 2007 Dunod.

8.11 Le circuit de la figure 8.25 possède 2 sources de tension : une source continue E et une source sinusoïdale $e(t)$. Pour déterminer l'expression de la tension $v(t)$:

1) Dessiner le schéma équivalent en RPCC, puis établir l'expression de la tension V_0 ;

2) Dessiner le schéma équivalent en RPCA, puis établir l'expression du phaseur $\overline{V}_1$;

3) Calculer le tension $v(t)$ à partir des valeurs numériques.

($A.N.$: $\hat{E} = 10\text{V}, \varphi = 0, \omega = 314\text{rd/s}$, $E = 10\text{V}$, $R = 1\,\Omega$, $L\,\omega = 1\,\Omega$ et $1/C\,\omega = 1\,\Omega$).

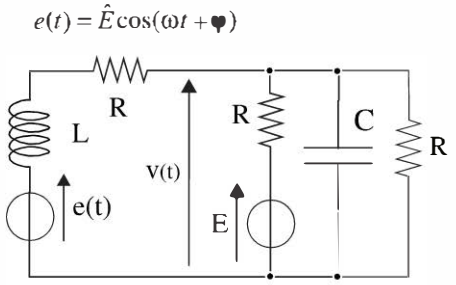


Figure 8.25

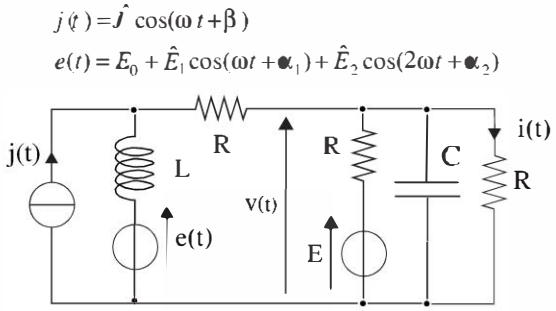


Figure 8.26

8.12 On souhaite déterminer le courant $i(t)$ dans le circuit de la Figure 8.26, par la méthode de superposition des régimes.

1) Quel est le nombre d'études à réaliser pour obtenir $i(t)$? Et quelles sont-elles ?

2) Réaliser chaque étude en précisant le schéma d'étude ;

3) Calculer la tension $i(t)$ à partir des valeurs numériques.

($A.N.$: $E_0 = -10\text{ V}$, $\hat{E}_1 = 5\text{ V}$, $\varphi_1 = 0°$, $\hat{E}_2 = 5\text{ V}$, $\varphi_2 = 45°$, $E = 5\text{V}$, $\hat{j} = 1\ A$, $\beta = -45°$, $\omega = 628\text{rd/s}°$, $R = 1\,\Omega$, $L\omega = 1\,\Omega$ et $1/C\omega = 1\,\Omega$).

8.13 L'expression de la source de la figure 8.27 est : $e(t) = |\hat{E}\sin(\omega t)|$.

1) Déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ du motif de base compris dans $[0, T/2]$;

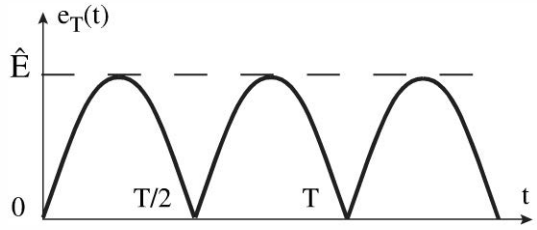


Figure 8.27

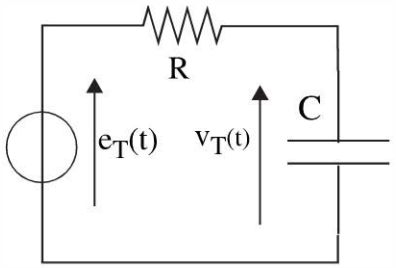


Figure 8.28

2) Déterminer l'expression de la transformée de Laplace $E_T(p)$ du signal $e_T(t)$.

8.14 À partir du circuit de la figure 8.28 et du signal $e_T(t)$ de la question 8.13 :

1) Dessiner le schéma électrique symbolique équivalent sur une période T ;

2) Déterminer l'expression de la transformée de Laplace $V(p)$ du motif de base de $v(t)$ sous forme de fractions partielles ;

3) En déduire l'expression temporelle du motif $v(t)$;

4) Déterminer la C.I. $v_T(0^+)$ pour éliminer le régime transitoire ;

8.15 Soit le circuit de la figure 8.29a, dans lequel toutes les grandeurs ont été déterminées et sont représentées par leurs spectres (figure 8.29b, c, d).

($A.N.$: $E_1 = 50\text{ V}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $E_{20} = -20\text{ V}$).

1) À partir des spectres connus, déterminer le spectre de $i_2(t)$ et $i_C(t)$;

Copyright © 2007 Dunod.

2) Déterminer les puissances actives absorbées par les cinq dipôles passifs ;

3) Déterminer la puissance active fournie par E_1 ;

4) En déduire la puissance fournie par $e_2(t)$. S'agit-il d'une puissance continue ?

5) Peut-on reconstituer le spectre de $e_2(t)$ à partir de la puissance ?

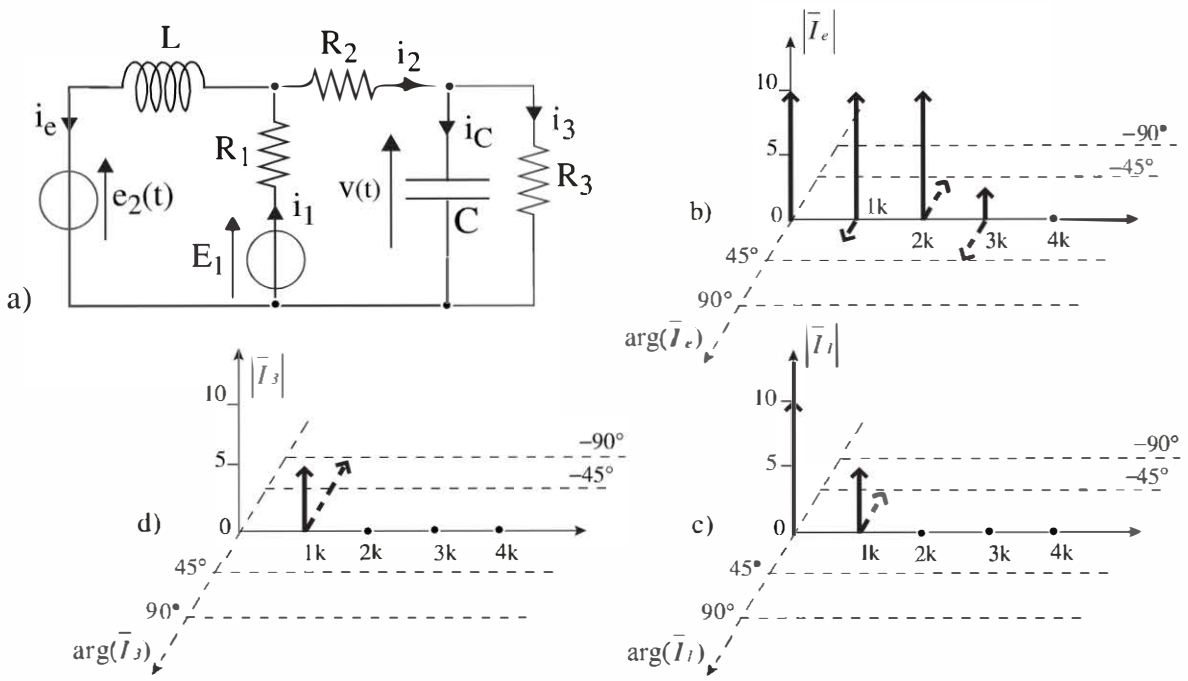


Figure 8.29

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 9

Régime permanent à fréquence variable

Objectifs

- Présenter les conditions d'étude en régime variable.
- Étudier les dipôles à fréquence variable.
- Étudier les quadripôles à fréquence variable.
- Présenter les différentes représentations graphiques d'une étude fréquentielle.
- Présenter le lieu des pôles et des zéros.

Vocabulaire

Impédance variable
Résonance série et parallèle
Transmittances
Gain et déphasage
Représentations de Bode et de Nyquist
Pôles et zéros
Modes amortis et non amortis
Lieu d'Evans

L'étude en RPCA du chapitre 7 a permis la modélisation des circuits électriques sous la forme de schémas électriques équivalents, qui ont servi à déterminer les tensions et les courants sinusoïdaux. Toutefois, cette étude ne concerne que les circuits dont la fréquence des sources est fixe. On retrouve ces dipôles principalement dans des applications proches de l'électrotechnique, où la notion importante de « réseau distribué » impose des sources stables en amplitude et en fréquence, et où le circuit modélise souvent des appareillages électriques de puissance. En dehors de l'électrotechnique, il est très rare de n'avoir que des sources à fréquence fixe. Notamment en électronique, les circuits comportent des sources dont on ne connaît pas précisément la fréquence ; elles sont plutôt caractérisées par une bande de fréquences probables. Le circuit électrique modélise alors un ensemble de composants électriques qui ont pour fonction d'apporter des modifications (amplification, filtrage, modulation…) à un signal issu d'une source d'entrée. Dans ce chapitre, traitant des circuits en présence de sources à fréquences variables, il est opportun d'exploiter la notion de quadripôles (présentée dans le chapitre 4) qui réalise ces transformations sur la source dite d'entrée. Ce chapitre aboutit à des représentations graphiques qui illustrent le comportement fréquentiel des circuits. En fin de chapitre, la modélisation opérationnelle apporte une synthèse des circuits à fréquence variable.

Copyright © 2007 Dunod.

9.1 MODÉLISATION DES CIRCUITS À FRÉQUENCE VARIABLE

Dans le chapitre 7 puis dans le chapitre 8, les sources contenues dans le circuit électrique étudié délivraient des signaux sinusoïdaux ou plus largement périodiques. Toutefois, bien que la fréquence des sources aient pu différer, en aucun cas elle n'était amenée à varier. Pourtant, dans la majorité des fonctions relevant de l'électronique ou de l'automatique, le comportement des circuits est étudié en envisageant un balayage en fréquence : les sources jouent alors le rôle de générateur à fréquence variable.

On trouve principalement deux catégories de circuits très distinctes, qui nécessitent une étude à fréquence variable : les dipôles passifs à impédances variables et les quadripôles.

9.1.1 Dipôles passifs à impédance variable

Le quartz (un cristal taillé) est un composant électrique très employé (à l'origine de bon nombre d'oscillateurs harmoniques) qui se modélise sous la forme d'un dipôle passif (figure 9.1).

Son modèle électrique fait apparaître un condensateur principal C_0 en parallèle avec un circuit série LC_1 traduisant l'effet piézoélectrique et une résistance R qui reflète les pertes d'énergie très faible dans le cristal. Ce schéma simple est toutefois trop complexe pour envisager son application sans une étude fine au préalable.

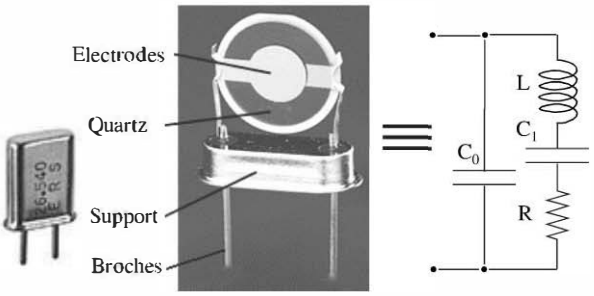


Figure 9.1

Pour comprendre l'intérêt que l'on peut tirer de ce composant, il est nécessaire de l'alimenter par une source extérieure (figure 9.2) sinusoïdale. Aucune grandeur interne n'est accessible à la mesure par l'utilisateur, car il s'agit du schéma électrique équivalent d'un cristal. Les seules grandeurs mesurables sont la tension $v(t)$ aux bornes et le courant $i(t)$ qui le traverse.

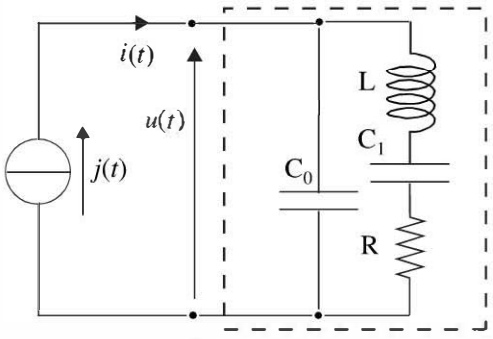


Figure 9.2

Pour un courant d'alimentation $i(t)$ imposé en amplitude et en fréquence par une source $j(t)$, le composant y oppose sa tension $v(t)$ unique. L'impédance, qui est le rapport entre les phaseurs associés à la tension $v(t)$ et au courant $i(t)$, devient la grandeur variable accessible.

L'étude de ce composant passe donc par une évaluation de son impédance $\overline{Z}(j\,\omega)$ qui se décompose en deux termes : son module $|\overline{Z}(j\,\omega)|$ et son argument $\varphi(\omega)$ (le déphasage) $\varphi(\omega)$

La représentation graphique de l'évolution de $\overline{Z}(j\,\omega)$ en fonction de la pulsation (ou fréquence) définit la notion d'**analyse fréquentielle** de l'impédance du composant électrique.

> Une analyse fréquentielle est très souvent utilisée pour déterminer le fonctionnement d'un dipôle passif.

Copyright © 2007 Dunod.

Ce chapitre va permettre de définir les rouages d'une analyse harmonique à partir d'une grandeur issue d'un schéma électrique, par exemple l'impédance électrique.

9.1.2 Quadripôles à fonction de transfert variable

Ce macrocomposant[1] comporte un dipôle d'entrée qui reçoit un générateur d'alimentation $(e_g(t), Z_g)$ et possède deux bornes de sortie censées délivrer un signal qui alimente une charge Z_{ch} (figure 9.3).

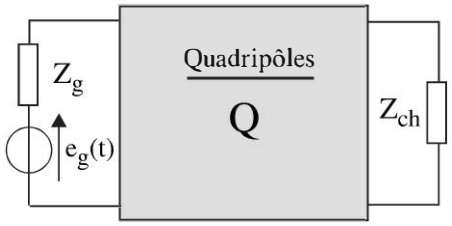


Figure 9.3

Dans le principe, le signal délivré *via* les bornes de sortie est une fonction (ou transformation) linéaire du signal d'entrée présent sur les bornes d'entrée.

Une façon de comprendre le rôle du quadripôle est d'analyser la fonction linéaire par le biais du rapport entre le signal d'entrée et le signal de sortie. D'une manière générale, on dénomme ce rapport « la **transmittance** » du quadripôle ou encore « sa fonction de transfert ».

La transmittance $\overline{T}(j\omega)$ se caractérise par un module (le gain) et un argument (le déphasage).

L'analyse fréquentielle sous-tend la description fonctionnelle des quadripôles en apportant une représentation graphique de la transmittance $\overline{T}(j\omega)$ associée au macrocomposant.

Suivant que le quadripôle nécessite ou pas un apport d'énergie pour la réalisation de sa fonction, il devient un quadripôle actif ou passif (figure 9.4). En réalité, le symbole de la source représentant l'apport d'énergie n'est jamais représenté ; il n'y a donc pas de distinction entre la nature des quadripôles, au niveau de leur schéma électrique.

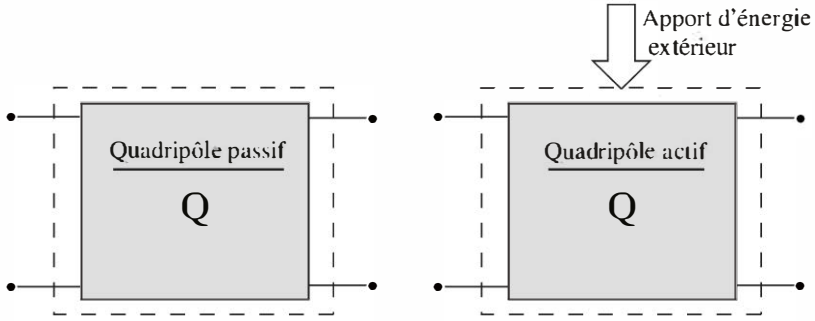


Figure 9.4

9.2 DIPÔLES PASSIFS À FRÉQUENCE VARIABLE

Dans ce paragraphe, la variation de fréquence est envisagée comme un moyen de faire varier l'impédance des dipôles passifs.

[1] On utilise cette dénomination, car généralement un quadripôle regroupe plusieurs composants électriques pour sa réalisation.

Copyright © 2007 Dunod.

À partir de la modélisation complexe, parfaitement adaptée à cette étude (le régime est permanent et sinusoïdal) on utilise la représentation de Fresnel pour étudier le comportement des dipôles passifs.

Dans l'étude des dipôles passifs à fréquence variable, les associations des dipôles en série ou en parallèle (voir chapitre 7) sont particulièrement intéressantes et génèrent le comportement singulier de la résonance.

9.2.1 Association d'impédances en série

On rappelle que dans une association d'impédances en série un même courant $i(t)$ (de phaseur associé $\overline{I} = \hat{I}\,e^{j(\omega t+\beta)}$) traverse chacune des impédances (figure 9.5). Les tensions aux bornes de chaque impédance $v_i(t)$ (de phaseur $\overline{V} = \hat{V}_i\,e^{j(\omega t+\alpha_i)}$) s'ajoutent pour produire la tension $v(t)$ ($\overline{V} = \hat{V}\,e^{j(\omega t+\alpha)}$) aux bornes de l'ensemble.

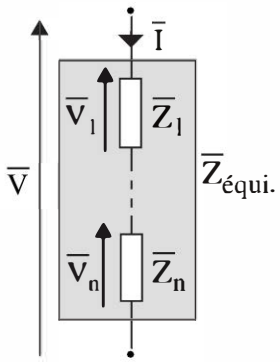


Figure 9.5

On a alors $v(t) = \sum_i \pm v_i(t)$ qui entraîne pour les phaseurs $\overline{V} = \sum_i \pm \overline{V}_i$.

Dans le cas où la tension $e(t)$ est imposée aux bornes de l'ensemble des dipôles en série (par un dipôle actif extérieur) alors le courant $i(t)$ traversant l'ensemble varie en fonction de la fréquence de $e(t)$ (figure 9.6a).

Dans le cas contraire, où c'est le courant $i(t)$ traversant les dipôles qui est imposé par l'extérieur (par exemple une source de courant $j(t)$) alors la tension $v(t)$ résultant de l'association varie en fonction de la fréquence de $j(t)$ (figure 9.6b).

➤ ***Impédance équivalente et représentation dans le diagramme de Fresnel***

Le chapitre 7, a montré que i impédances en série $\overline{Z}_i$ sont équivalentes à une seule impédance $\overline{Z}_{équ.}$ telle que $\boxed{\overline{Z}_{équ.} = \sum_i \overline{Z}_i}$.

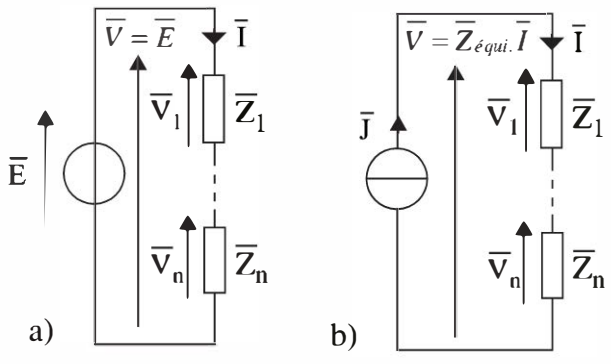


Figure 9.6

Copyright © 2007 Dunod.

L'impédance équivalente $\overline{Z}_{équ.}$ d'une association d'impédances en série fait apparaître en général une partie réelle (la partie résistive ou **résistance**) notée $R(\omega)$ et une partie imaginaire (la partie réactive ou **réactance**) notée $X(\omega)$: $\boxed{\overline{Z}_{équ.} = R(\omega) + \mathrm{j}\, X(\omega)}$.

La relation caractéristique est toujours $\boxed{\overline{V} = \overline{Z}_{équ.}\overline{I}}$.

La représentation de $\overline{Z}_{équ.}$ dans le diagramme de Fresnel (figure 9.7) fait apparaître la résistance $R(\omega) \geqslant 0$ sur l'axe réel et la réactance $X(\omega)$ sur l'axe imaginaire. Suivant le signe de la réactance, l'angle $\varphi(\omega)$ de $\overline{Z}_{équ.}$ – qui est aussi l'angle de déphasage entre la tension et le courant $\varphi(\omega) = \arg(\overline{Z}_{équ.}) = \arg\left(\dfrac{\overline{V}}{\overline{I}}\right)$ – est positif ou négatif.

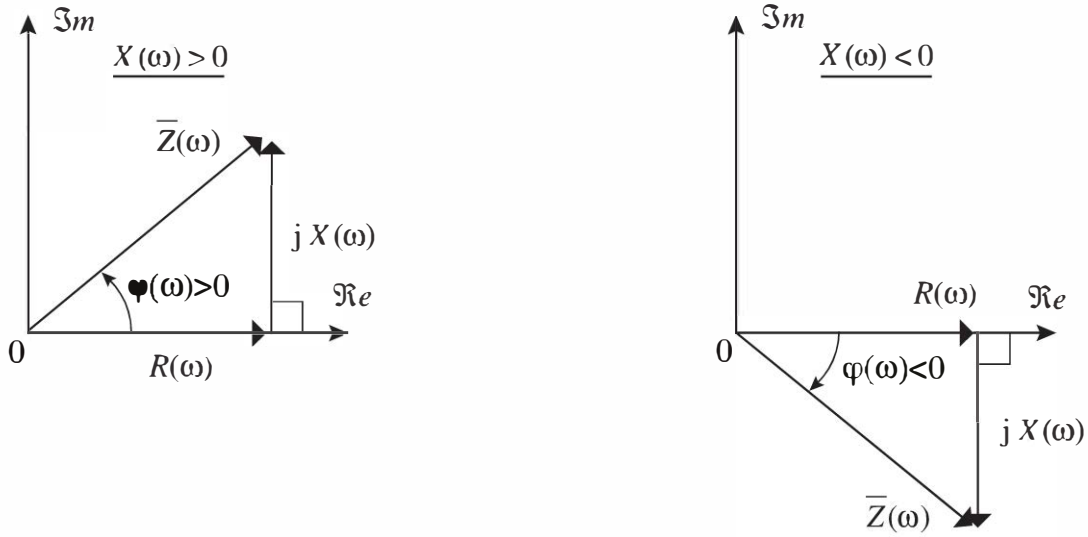


Figure 9.7

Dans l'exemple du circuit de la figure 9.8a, le courant $i(t)$ traverse trois dipôles passifs R, L et C. La tension aux bornes de l'ensemble est imposée par la source de tension $e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$.

Le schéma complexe équivalent au circuit (figure 9.8b) fait apparaître trois impédances en série dans la boucle traversée par le courant $\overline{I}$.

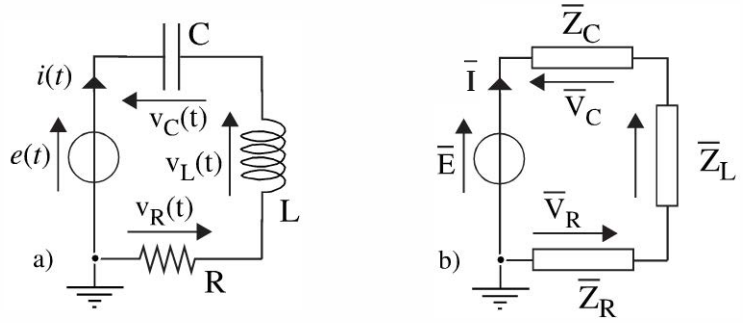


Figure 9.8

Copyright © 2007 Dunod.

Les équations complexes issues du schéma complexe équivalent sont :
– l'équation de la boucle (la seule maille) : $\overline{E} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C$;
– les relations caractéristiques des dipôles (loi d'Ohm complexe) :

$$\overline{V}_C = \overline{Z}_C\overline{I} = \frac{\overline{I}}{\mathrm{j}C\omega},\ \overline{V}_L = \overline{Z}_L\overline{I} = \mathrm{j}\,L\omega\overline{I},\ \overline{V}_R = \overline{Z}_R\overline{I} = R\overline{I}.$$

D'où l'équation : $\overline{E} = \overline{Z}_{équ.}\overline{I}$ avec $\overline{Z}_{équ.} = R + \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

Le diagramme de Fresnel de la figure 9.9 est tracé à partir de l'équation de la maille et en prenant comme abscisse la direction arbitraire du courant inconnu $\overline{I}$. Les deux tracés réalisés à deux pulsations différentes avec ($\omega_2 > \omega_1$) entraînent à un changement de signe de la réactance $X(\omega)$ et à un changement de signe du déphasage φ entre la tension $\overline{E}$ et le courant $\overline{I}$.

> ***Remarque :*** En prenant le courant $\overline{I}$ comme direction des abscisses, on perd la notion de phase à l'origine. Le diagramme de Fresnel ne permet alors de représenter plus que le déphasage φ entre les grandeurs électriques.

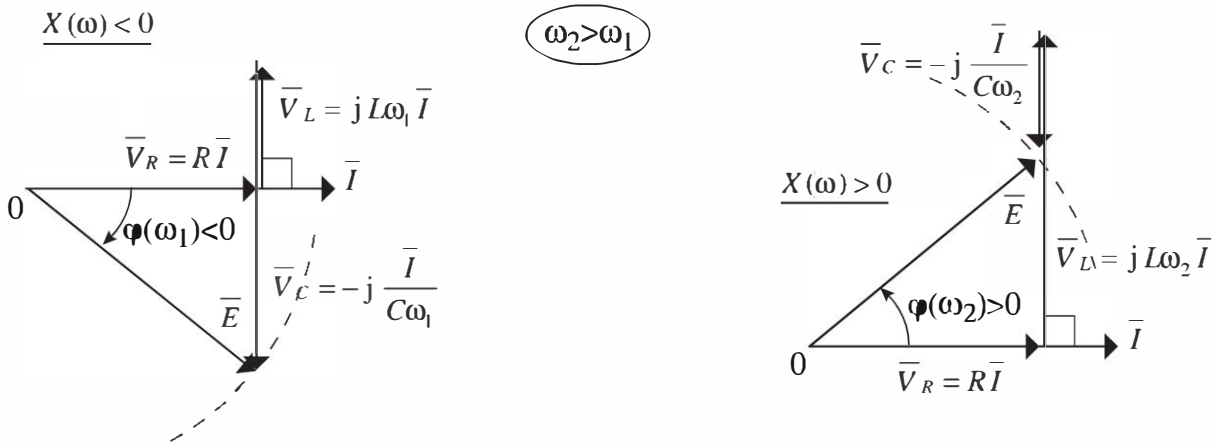


Figure 9.9

Sachant que le module de la tension $\overline{E}$ est imposé, l'extrémité de ce vecteur circule le long d'un cercle de rayon égal à son module et dans le demi-plan droit.

À une pulsation ω_1 donnée, les impédances R, $\mathrm{j}L\omega_1$ et $\frac{-\mathrm{j}}{C\omega_1}$ sont connues. Le tracé (figure 9.10a) détermine alors la direction et le module de l'impédance équivalente $\overline{Z}_{équ.}$. Sachant que $|\overline{Z}_{équ.}\overline{I}| = |\overline{E}|$, graphiquement on allonge le vecteur $\overline{Z}_{équ.}$ jusqu'à avoir son extrémité qui coïncide avec le cercle de rayon $|\overline{E}|$ (figure 9.10b). On déduit alors aisément la valeur du courant $\overline{I}$.

➤ *Phénomène de résonance série*

Lorsqu'il existe une pulsation particulière ω_R pour laquelle la réactance de l'impédance équivalente est nulle $X(\omega_R) = 0$ alors l'impédance admet une **résonance série**. À la résonance, l'impédance équivalente se résume à la résistance $R(\omega)$.

Copyright © 2007 Dunod.

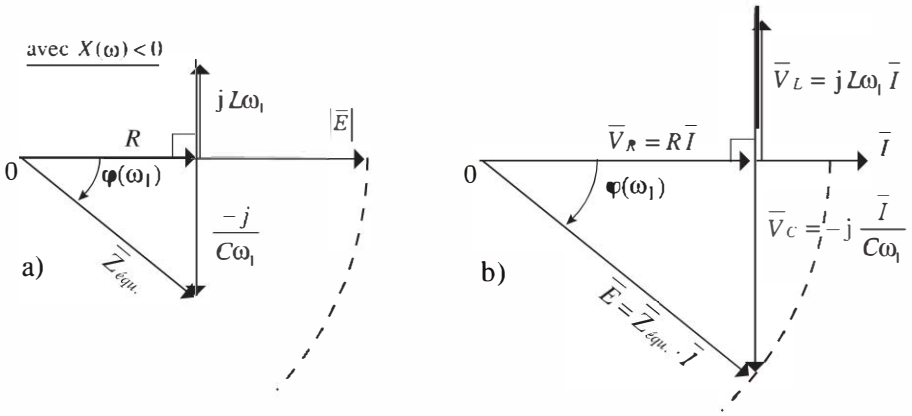


Figure 9.10

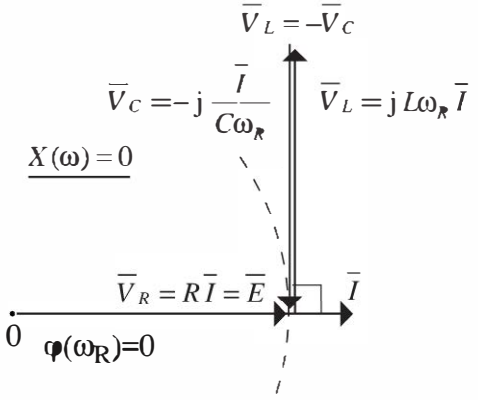


Figure 9.11

Dans l'exemple précédent (circuit figure 9.8) le tracé du diagramme de Fresnel à la pulsation de résonance prend l'allure de la figure 9.11. Les modules des tensions $\overline{V}_C$ et $\overline{V}_L$ sont alors égaux.

$$|j L\omega_R| = \left|\frac{j}{C\omega_R}\right| \Longrightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Quand la pulsation de résonance série ω_R existe, l'impédance équivalente se résume à la résistance $R(\omega)$: $\boxed{X(\omega_R) = 0}$ d'où $\boxed{\overline{Z}_{équ.} = R(\omega_R)}$.

Si à la pulsation ω_R $X(\omega_R) = 0$, alors pour des pulsations supérieures ou inférieures à ω_R, $X(\omega)$ changent de signe.

9.2.2 Association d'impédances en parallèle

On rappelle que contrairement à l'association précédente, dans une association en parallèle c'est la tension $\overline{V}$ qui est commune à l'ensemble des i impédances en parallèle. Le courant $\overline{I}_i$ dans chacune des impédances est différent. La loi des nœuds impose que la somme algébrique des courants soit nulle $\sum_i \pm \overline{I}_i = 0$ (figure 9.12a).

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Impédance équivalente et représentation dans le diagramme de Fresnel***

Comme pour l'association série, le chapitre 7 a montré qu'une impédance équivalente $\overline{Z}_{équ.}$ peut remplacer l'ensemble des i impédances en parallèle.

La relation à partir des impédances est $\boxed{\frac{1}{\overline{Z}_{équ.}} = \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}}$ et la relation à partir des **admittances**[2] est $\boxed{\overline{Y}_{équ.} = \sum_i \overline{Y}_i}$ (figure 9.12b).

En général, on préfère raisonner sur les admittances pour les associations parallèles.

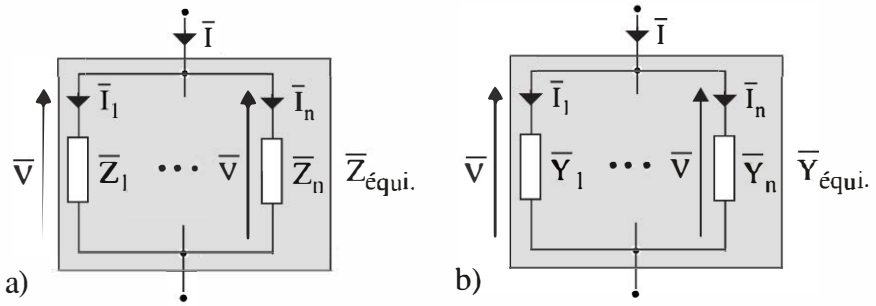


Figure 9.12

On peut toujours exprimer l'admittance équivalente comme la somme d'une **conductance** $G(\omega) \geqslant 0$ et d'une **susceptance** $B(\omega)$ avec $\boxed{\overline{Y}_{équ.} = G(\omega) + jB(\omega)}$. La relation caractéristique associée est alors $\boxed{\overline{I} = \overline{Y}_{équ.}\overline{V}}$.

L'application de la notion d'admittance étant moins courante que celle d'impédance, on rappelle à la figure 9.13 les expressions principales pour les dipôles RLC.

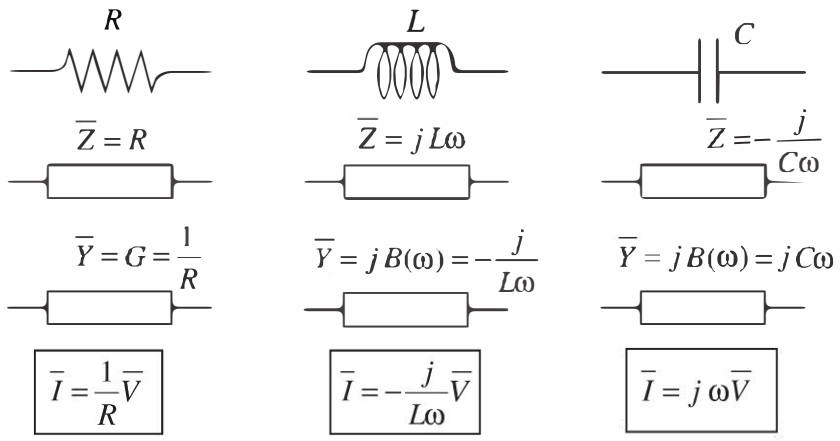


Figure 9.13

[2] On rappelle la relation entre admittance et impédance : $\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}}$.

Copyright © 2007 Dunod.

La représentation graphique de la loi d'Ohm à la pulsation ω, en prenant $\overline{V}$ comme abscisse est réalisée à la figure 9.14. Le signe de $B(\omega)$ définit le signe de $\varphi(\omega)$.

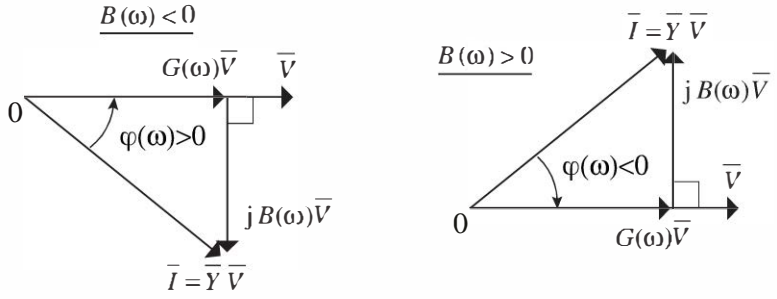


Figure 9.14

Pour illustrer la notion d'admittance variable avec la fréquence, on a choisi le circuit de la figure 9.15a, où apparaît une source de courant qui alimente trois dipôles passifs RLC en parallèle. Le schéma équivalent complexe (figure 9.15b) affiche le phaseur associé à la source et trois admittances en parallèle.

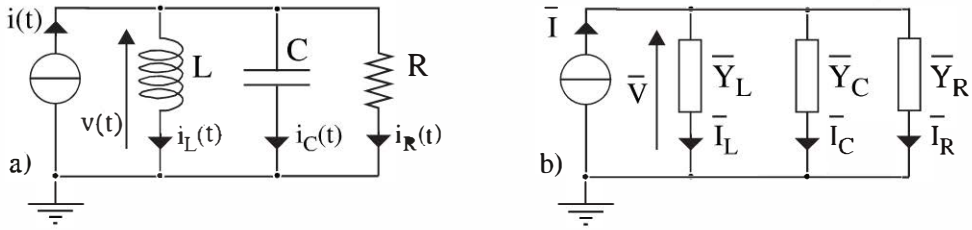


Figure 9.15

Les équations issues du schéma équivalent sont :

– l'équation du nœud : $\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C$;

– la loi d'Ohm complexe pour les admittances : $\overline{I}_C = \mathrm{j}C\omega\overline{V}$, $\overline{I}_L = \dfrac{\overline{V}}{\mathrm{j}L\omega} = -\mathrm{j}\dfrac{\overline{V}}{L\omega}$, $\overline{I}_R = \dfrac{\overline{V}}{R}$.

On obtient alors $\overline{I} = \overline{Y}_{équ.}\overline{V}$ avec $\overline{Y}_{équ.} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right) = G + \mathrm{j}B(\omega)$.

La représentation de Fresnel issue des équations (figure 9.16) à partir de deux pulsations différentes ω_1 et ω_2 (avec $\omega_2 > \omega_1$), montre clairement le changement du signe de $B(\omega)$.

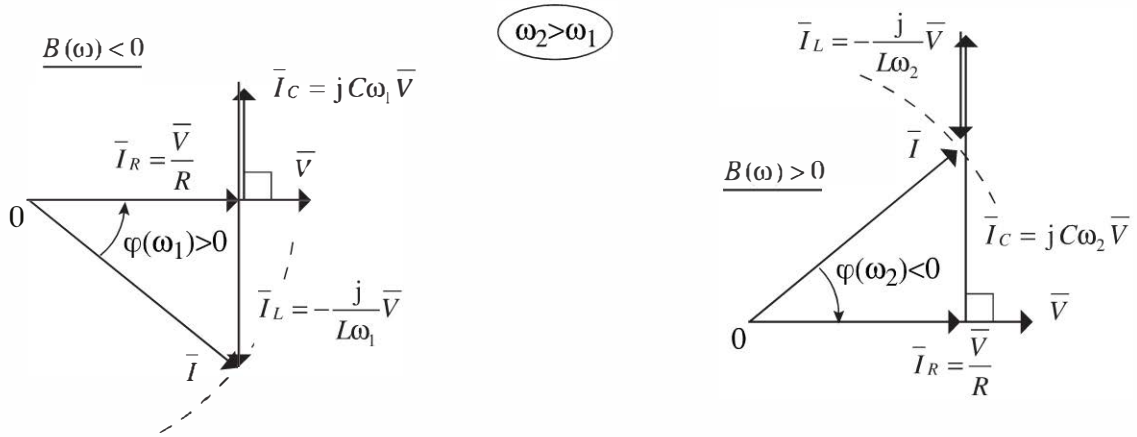


Figure 9.16

Copyright © 2007 Dunod.

Dans cet exemple, le module de $\overline{I}$ est constant (imposé par la source). La représentation de Fresnel montre que la tension $\overline{V}$ tourne autour du courant en fonction de la valeur de $B(\omega)$. Le déphasage $\varphi(\omega)$ de la tension $\overline{V}$ par rapport au courant $\overline{I}$ fluctue dans l'intervalle $[-90°, 90°]$.

➤ ***Phénomène de résonance parallèle***

Lorsqu'il existe une pulsation de **résonance** ω_R alors $B(\omega_R) = 0$. L'admittance équivalente se limite à $\overline{Y}_{équ.} = G(\omega_R)$; la loi d'Ohm devient $\overline{I} = G(\omega_R)\overline{V}$.

Dans l'exemple précédent, le condensateur C et l'inductance L en parallèle résonnent à la pulsation ω_R telle $B(\omega_R) = 0 \Longrightarrow |jC\omega_R| = \left|\dfrac{-j}{L\omega_R}\right| \Longrightarrow \omega_R = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

On a alors $\overline{I}_L = -\overline{I}_C$ et $\overline{I} = \overline{I}_R = \dfrac{\overline{V}}{R}$ (figure 9.17).

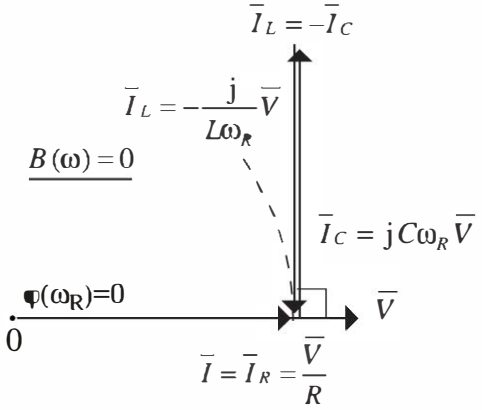


Figure 9.17

9.3 ÉTUDE DES QUADRIPÔLES À FRÉQUENCE VARIABLE

Les quadripôles constituent une famille très importante de circuits que l'on trouve principalement dans les disciplines de l'électronique et de l'automatique. Cette famille se particularise par sa représentation en faisant apparaître la notion d'entrée et de sortie (voir chapitre 3), mais aussi par sa constitution qui inclut spécifiquement des sources liées (voir chapitre 4).

De même que dans le paragraphe précédent, l'étude des quadripôles est menée à partir de signaux permanents sinusoïdaux à fréquence variable, où la modélisation complexe est de rigueur.

9.3.1 Représentation mathématique des quadripôles

Par définition, un quadripôle comporte quatre bornes : deux **bornes d'entrée** et deux **bornes de sortie** (figure 9.18a). Le quadripôle peut être schématisé par deux dipôles actifs (figure 9.18b). Ces deux dipôles actifs sont toutefois particuliers, car s'échangeant mutuellement de l'énergie, ils ne sont plus indépendants. La relation caractéristique de l'un inclut les paramètres de l'autre.

Copyright © 2007 Dunod.

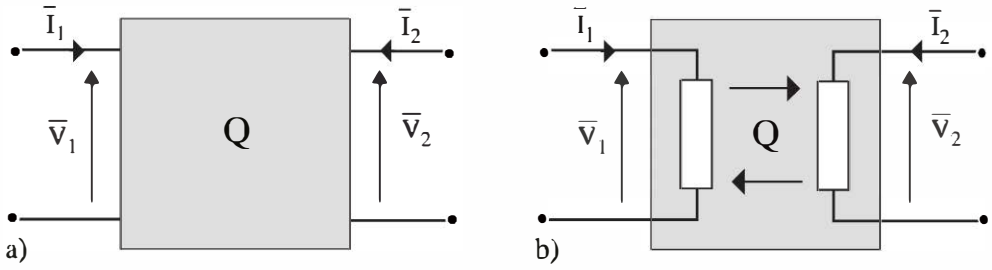


Figure 9.18

➤ ***Représentation matricielle des quadripôles***

Il existe plusieurs manières conventionnelles de traduire mathématiquement la liaison qui existe entre les deux dipôles :

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = z_1(\overline{I}_1, \overline{I}_2) \\ \overline{V}_2 = z_2(\overline{I}_1, \overline{I}_2) \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} \overline{I}_1 = g_1(\overline{V}_1, \overline{V}_2) \\ \overline{I}_2 = g_2(\overline{V}_1, \overline{V}_2) \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} \overline{V}_1 = h_1(\overline{I}_1, \overline{V}_2) \\ \overline{I}_2 = h_2(\overline{I}_1, \overline{V}_2) \end{cases},$$

avec : z_1, z_2, g_1, g_2, h_1 et h_2 des fonctions linéaires.

Ce système d'équations s'écrit aussi sous forme matricielle, à partir des matrices impédance $\overline{Z}$, admittance $\overline{Y}$ et hybride $\overline{H}$.

➤ ***Matrice impédance***

On définit une première forme d'écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I}$$

Tous les termes $\overline{Z}_{ij}$ de la matrice $\overline{Z}$ ont la dimension d'une impédance (l'unité est l'ohm). La matrice $\overline{Z}$ devient la **matrice des impédances**. $\overline{V}$ et $\overline{I}$ sont les vecteurs tensions et courants.

Chacun des termes de la matrice revêt une signification :

– $\overline{Z}_{11} = \left.\dfrac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0}$ est l'impédance d'entrée à vide ($\overline{I}_2 = 0$) du quadripôle ;

– $\overline{Z}_{22} = \left.\dfrac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0}$ représente l'impédance de sortie à vide ($\overline{I}_1 = 0$) du quadripôle ;

– $\overline{Z}_{21} = \left.\dfrac{\overline{V}_2}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0}$ et $\overline{Z}_{12} = \left.\dfrac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0}$ sont les impédances de transfert direct et inverse du quadripôle.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Matrice admittance***

On définit la forme d'écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{I} = \overline{Y}\,\overline{V}$$

Tous les termes $\overline{Y}_{ij}$ de la matrice $\overline{Y}$ sont des admittances (l'unité est le siemens ou l'ohm^{-1}). La matrice $\overline{Y}$ est la **matrice des admittances**.

Les matrices admittance et impédances sont inverses[3] l'une de l'autre, $\overline{I} = \overline{Y}\,\overline{V} \Longrightarrow \overline{Y}^{-1}\overline{I} = \overline{Y}^{-1}\overline{Y}\,\overline{V} \Longrightarrow \overline{Y}^{-1}\overline{I} = \overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I}$ d'où $\boxed{\overline{Z} = \overline{Y}^{-1}}$.

Les termes de la matrice sont :

- $\overline{Y}_{11} = \left.\dfrac{\overline{I}_1}{\overline{V}_1}\right|_{\overline{V}_2=0}$ l'admittance d'entrée en court-circuit ($\overline{V}_2 = 0$) du quadripôle ;
- $\overline{Y}_{22} = \left.\dfrac{\overline{I}_2}{\overline{V}_2}\right|_{\overline{V}_1=0}$ l'admittance de sortie en court-circuit ($\overline{V}_1 = 0$) du quadripôle ;
- $\overline{Y}_{21} = \left.\dfrac{\overline{I}_2}{\overline{V}_1}\right|_{\overline{V}_2=0}$ et $\overline{Y}_{12} = \left.\dfrac{\overline{I}_1}{\overline{V}_2}\right|_{\overline{V}_1=0}$ les admittances de transfert direct et inverse du quadripôle.

➤ ***Matrice hybride***

On définit une forme croisée d'écriture matricielle, très utile pour l'étude des transistors électroniques, qui est la matrice hybride :

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \\ \overline{H}_{21} & \overline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{V}_2 \end{bmatrix}$$

Les termes $\overline{H}_{ij}$ de la matrice $\overline{H}$ ne sont pas de même dimension. En effet, $\overline{H}_{11} = \overline{Z}_{11}$ est une impédance, $\overline{H}_{22} = \overline{Z}_{22}$ est une conductance, $\overline{H}_{21}$ et $\overline{H}_{12}$ sont sans unité. Pour ces raisons, la matrice $\overline{H}$ est appelée la **matrice hybride**.

Les termes de la matrice sont :

- $\overline{H}_{12} = \left.\dfrac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2}\right|_{\overline{I}_1=0}$ le gain inverse en tension du quadripôle ;
- $\overline{H}_{21} = \left.\dfrac{\overline{I}_2}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{V}_2=0}$ le gain en courant de transfert du quadripôle.

[3] Sous la condition de matrices inversibles.

Copyright © 2007 Dunod.

Prenons pour exemple le circuit de la figure 9.19a, qui est constitué de trois dipôles passifs, d'une source $e(t)$ connectée à l'entrée et munie de sa résistance en série R_g, et d'une résistance de charge R_{ch}.

On détermine la matrice impédance $\overline{Z}$ en commençant par mettre le circuit sous la forme d'un quadripôle passif (figure 9.19b) puis on écrit et transforme les équations pour arriver à la forme d'écriture des équations du système : $\overline{V}_1 = z_{11}(R,L,C)\overline{I}_1 + z_{12}(R,L,C)\overline{I}_2$ et $\overline{V}_2 = z_{21}(R,L,C)\overline{I}_1 + z_{22}(R,L,C)\overline{I}_2$. Par identification, on détermine les quatre paramètres de la matrice .

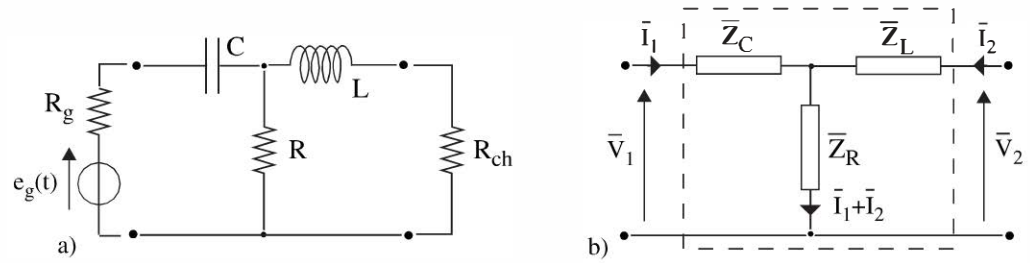


Figure 9.19

$$\overline{V}_1 = \overline{Z}_C\overline{I}_1 + \overline{Z}_R(\overline{I}_1 + \overline{I}_2) = (\overline{Z}_C + \overline{Z}_R)\overline{I}_1 + \overline{Z}_R\overline{I}_2 \ ;$$

$$\Longrightarrow \overline{Z}_{11} = \overline{Z}_C + \overline{Z}_R = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R = \frac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}C\omega} \text{ et } \overline{Z}_{12} = \overline{Z}_R = R$$

$$\overline{V}_2 = \overline{Z}_L\overline{I}_2 + \overline{Z}_R(\overline{I}_1 + \overline{I}_2) = \overline{Z}_R\,\overline{I}_1 + (\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{I}_2$$

$$\Longrightarrow \overline{Z}_{21} = \overline{Z}_R = R \text{ et } \overline{Z}_{22} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L = R + \mathrm{j}C\omega$$

La matrice impédances $\overline{Z}$ s'écrit alors :

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}C\omega} & R \\ R & R + \mathrm{j}L\omega \end{bmatrix}$$

La détermination de la matrice admittance $\overline{Y}$ passe par exemple, par la transformation des équations précédentes.

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = (\overline{Z}_C + \overline{Z}_R)\overline{I}_1 + \overline{Z}_R\overline{I}_2 \\ \overline{V}_2 = \overline{Z}_R\,\overline{I}_1 + (\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{I}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{V}_1 - \overline{Z}_R\,\overline{V}_2}{\overline{Z}_L\,\overline{Z}_R + \overline{Z}_R\,\overline{Z}_C + \overline{Z}_L\,\overline{Z}_C} \\ \overline{I}_2 = \dfrac{-\overline{Z}_R\,\overline{V}_1 + (\overline{Z}_C + \overline{Z}_R)(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{V}_2}{\overline{Z}_L\,\overline{Z}_R + \overline{Z}_R\,\overline{Z}_C + \overline{Z}_L\,\overline{Z}_C} \end{cases}$$

D'où : $\overline{Y} = \dfrac{1}{R(1 - LC\omega^2) + \mathrm{j}L\omega} = \begin{bmatrix} (R + \mathrm{j}L\omega)\mathrm{j}C\omega & -\mathrm{j}RC\omega \\ -\mathrm{j}RC\omega & 1 + \mathrm{j}RC\omega \end{bmatrix}$

Copyright © 2007 Dunod.

On aurait tout aussi bien déterminé la matrice $\overline{Y}$ en inversant $\overline{Z}$, car $\overline{Z} = \overline{Y}^{-1}$:

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+jRC\omega}{jC\omega} & R \\ R & R+jL\omega \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{Z}^{-1} = \frac{1}{\det \overline{Z}} \begin{bmatrix} R+jL\omega & -R \\ -R & \dfrac{1+jRC\omega}{jC\omega} \end{bmatrix}$$

avec : $\det \overline{Z} = \dfrac{(R+jL\omega)(1+jRC\omega) - jR^2C\omega}{jC\omega} = \dfrac{R(1-LC\omega^2)+jL\omega}{jC\omega}$ $(\det \overline{Z} \neq 0)$

On obtient la matrice $\overline{H}$, en transformant le système d'équations précédentes. On obtient alors la matrice :

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{R(1-LC\omega^2)+jL\omega}{1+jRC\omega} & \dfrac{-R}{R+jL\omega} \\ \dfrac{-R}{R+jL\omega} & \dfrac{1}{R+jL\omega} \end{bmatrix}$$

➤ ***Passage entre formes matricielles***

Il existe des règles de passage d'une forme matricielle à une autre. Nous avons déjà vu que $\overline{Z} = \overline{Y}^{-1}$ ou $\overline{Y} = \overline{Z}^{-1}$, qui implique que :

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\overline{Z})} \begin{bmatrix} \overline{Z}_{22} & -\overline{Z}_{12} \\ -\overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\overline{Z}_{11}\overline{Z}_{22} - \overline{Z}_{21}\overline{Z}_{12})} \begin{bmatrix} \overline{Z}_{22} & -\overline{Z}_{12} \\ -\overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{11} \end{bmatrix}$$

D'où par exemple : $\overline{Y}_{11} = \dfrac{\overline{Z}_{22}}{(\overline{Z}_{11}\overline{Z}_{22} - \overline{Z}_{21}\overline{Z}_{12})}$

Le tableau 9.1 donne directement toutes les relations entre les formes matricielles $\overline{Z}$, $\overline{Y}$ et $\overline{H}$ ($\Delta\overline{Z}$, $\Delta\overline{Y}$ et $\Delta\overline{H}$ représentent les déterminants des matrices $\overline{Z}$, $\overline{Y}$ et $\overline{H}$).

Tableau 9.1

	$\overline{\mathrm{Z}}$	$\overline{\mathrm{Y}}$	$\overline{\mathrm{H}}$
$\overline{\mathrm{Z}}$	$\begin{bmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{Y}_{22}/\Delta\overline{Y} & -\overline{Y}_{12}/\Delta\overline{Y} \\ -\overline{Y}_{21}/\Delta\overline{Y} & \overline{Y}_{11}/\Delta\overline{Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta\overline{H}/\overline{H}_{22} & \overline{H}_{12}/\overline{H}_{22} \\ -\overline{H}_{21}/\overline{H}_{22} & 1/\overline{H}_{22} \end{bmatrix}$
$\overline{\mathrm{Y}}$	$\begin{bmatrix} \overline{Z}_{22}/\Delta\overline{Z} & -\overline{Z}_{12}/\Delta\overline{Z} \\ -\overline{Z}_{21}/\Delta\overline{Z} & \overline{Z}_{11}/\Delta\overline{Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\overline{H}_{11} & -\overline{H}_{12}/\overline{H}_{11} \\ \overline{H}_{21}/\overline{H}_{11} & \Delta\overline{H}/\overline{H}_{11} \end{bmatrix}$
$\overline{\mathrm{H}}$	$\begin{bmatrix} \Delta\overline{Z}/\overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12}/\overline{Z}_{22} \\ -\overline{Z}_{21}/\overline{Z}_{22} & 1/\overline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\overline{Y}_{11} & -\overline{Y}_{12}/\overline{Y}_{11} \\ \overline{Y}_{21}/\overline{Y}_{11} & \Delta\overline{Y}/\overline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \\ \overline{H}_{21} & \overline{H}_{22} \end{bmatrix}$

Copyright © 2007 Dunod.

9.3.2 Schémas équivalents

Dans l'exemple précédent, nous avons déterminé les matrices à partir du schéma électrique équivalent. À l'inverse, lorsque le schéma électrique du quadripôle n'est pas donné, mais que l'on dispose des paramètres d'une matrice, alors il est possible d'établir un schéma équivalent au circuit.

Dans le chapitre 4, des schémas équivalents ont été établis en utilisant les dipôles connus de Thévenin et Norton, qui seront utilisés pour établir le schéma électrique équivalent. La construction du schéma dépend bien entendu de la matrice de départ.

➤ ***Schéma équivalent tiré de la matrice impédance $\overline{Z}$***

Pour cela, décomposons la première équation du système linéaire définissant la tension d'entrée $\overline{V}_1 = \overline{Z}_{11}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{12}\overline{I}_2$, qui comporte une somme de deux termes (deux tensions). Le premier terme représente une impédance $\overline{Z}_{11}$ parcourue par le courant $\overline{I}_1$ (courant du circuit d'entrée du quadripôle). Le second terme représente une tension égale au produit de l'impédance $\overline{Z}_{12}$ par le courant $\overline{I}_2$ (courant du circuit de sortie).

Le schéma équivalent, vu du côté de l'entrée du quadripôle, devient celui de la figure 9.20a, où la source de tension $\overline{Z}_{12}\overline{I}_2$ représente l'action de la sortie sur l'entrée (une variable de la sortie est incluse dans le schéma équivalent de l'autre).

De même, en décomposant l'équation $\overline{V}_2 = \overline{Z}_{21}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{22}\overline{I}_2$, on établit le schéma équivalent de la sortie du quadripôle (figure 9.20b). Cette fois, c'est le terme $\overline{Z}_{21}\overline{I}_1$ qui apporte un couplage entre la sortie et l'entrée.

En résumé, le schéma équivalent complet (figure 9.21) utilise deux dipôles de Thévenin pour modéliser le quadripôle à partir de la connaissance des paramètres de la matrice impédance $\overline{Z}$.

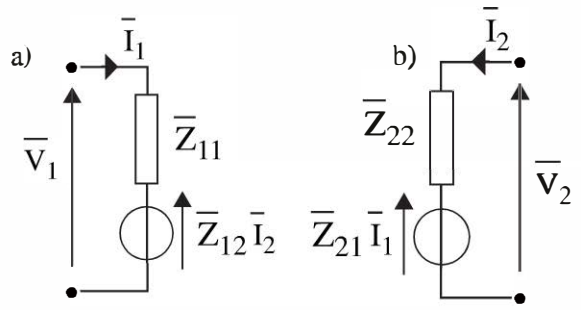


Figure 9.20

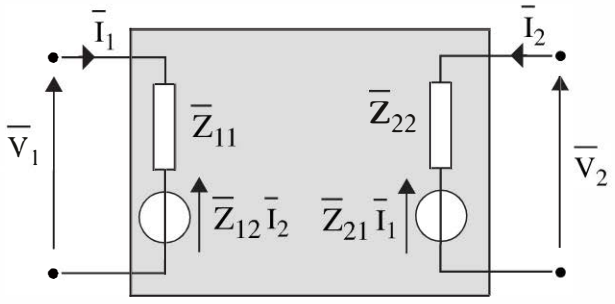


Figure 9.21

➤ ***Schéma équivalent tiré de la matrice admittance $\overline{Y}$***

La décomposition des termes du courant d'entrée $\overline{I}_1 = \overline{Y}_{11}\overline{V}_1 + \overline{Y}_{22}\overline{V}_2$ fait apparaître deux courants : $\overline{Y}_{11}\overline{V}_1$ est proportionnel à la tension d'entrée et $\overline{Y}_{12}\overline{V}_2$ à la tension de sortie. Le schéma équivalent vis-à-vis de l'entrée du quadripôle (figure 9.22) comporte alors une admittance et une source de courant en parallèle.

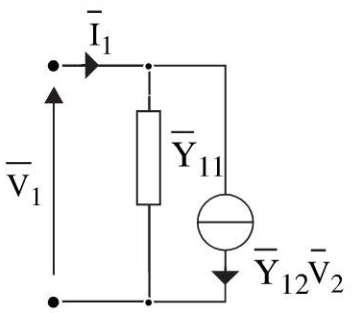


Figure 9.22

Copyright © 2007 Dunod.

Le schéma complet utilise deux dipôles de Norton pour représenter le quadripôle caractérisé par sa matrice $\overline{Y}$ (figure 9.23).

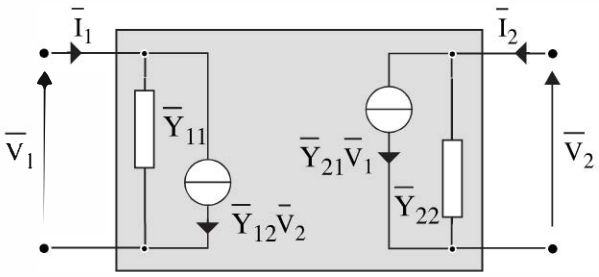


Figure 9.23

➤ ***Schéma équivalent issu des paramètres de la matrice hybride $\overline{H}$***

En reprenant les équations linéaires de la matrice hybride, on obtient :

- un dipôle de Thévenin après décomposition de $\overline{V}_1 = \overline{H}_{11}\overline{I}_1 + \overline{H}_{12}\overline{V}_2$, où $\overline{H}_{11}$ est une impédance en série avec la source de tension $\overline{H}_{12}\overline{V}_2$;
- un dipôle de Norton, par décomposition de $\overline{I}_2 = \overline{H}_{21}\overline{I}_1 + \overline{H}_{22}\overline{V}_2$, dont $\overline{H}_{22}$ constitue l'admittance et $\overline{H}_{21}\overline{I}_1$ la source de courant.

Le schéma équivalent hybride est celui présenté à la figure 9.24.

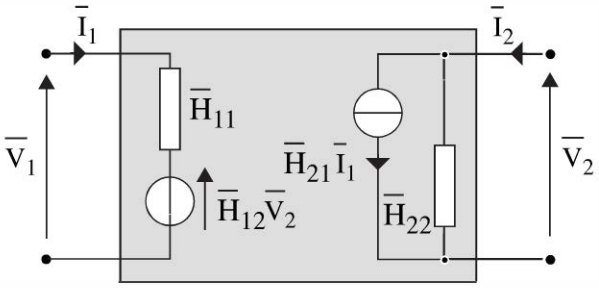


Figure 9.24

9.3.3 Propriétés et caractéristiques des quadripôles

➤ ***Quadripôles passifs et quadripôles actifs***

Un **quadripôle passif** est constitué uniquement de termes RLC. Il n'y a aucun apport d'énergie autre que la source qui se connecte sur les bornes d'entrée.

Dans un **quadripôle actif**, il y a forcément des dipôles actifs qui apportent l'énergie qui s'ajoute à l'énergie de la source connectée sur l'entrée.

Lorsqu'un dipôle est passif, il existe une symétrie dans les équations et on observe que les termes de la 2e diagonale des matrices $\overline{Z}$ et $\overline{Y}$ sont égaux :

$$\boxed{\overline{Z}_{21} = \overline{Z}_{12}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{Y}_{21} = \overline{Y}_{12}}$$

Dans le circuit de la figure 9.19, on vérifie bien que la matrice impédance du quadripôle passif est bien caractérisée par $\overline{Z}_{21} = \overline{Z}_{12} = R$.

Remarque : La proposition s'inverse : si les termes de la 2e diagonale sont égaux alors le quadripôle est passif.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Impédances d'entrée et de sortie***

Impédance d'entrée

Lorsque le quadripôle est connecté à sa charge de sortie $\overline{Z}_{ch}$ (figure 9.25a) alors, vis-à-vis de l'entrée, le quadripôle se modélise par une **impédance d'entrée** $\overline{Z}_e = \dfrac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1}$ (figure 9.25b).

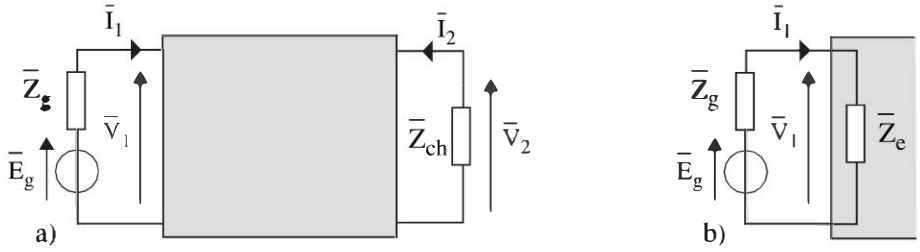


Figure 9.25

Les équations sont : $\begin{bmatrix}\overline{V}_1\\ \overline{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12}\\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{I}_1\\ \overline{I}_2\end{bmatrix}$ avec $\overline{V}_2 = \overline{Z}_{ch}\overline{I}_2$; d'où :

$$\boxed{\overline{Z}_e = \frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1} = \overline{Z}_{11} - \frac{\overline{Z}_{12}\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{ch} + \overline{Z}_{22}}}$$

Connaître l'impédance d'entrée, c'est la possibilité de déterminer la consommation absorbée à l'entrée du quadripôle, que doit délivrer la source d'entrée $\overline{E}_g$.

Impédance de sortie

Lorsque la source d'entrée $\overline{E}_g$ est éteinte (figure 9.26a) le quadripôle se résume à une **impédance de sortie** (figure 9.26b) : $\overline{Z}_s = \left.\dfrac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right]_{\overline{E}_g=0}$.

$$\begin{bmatrix}\overline{V}_1\\ \overline{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12}\\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{I}_1\\ \overline{I}_2\end{bmatrix} \text{ avec } \overline{V}_1 = -\overline{Z}_g\overline{I}_1$$

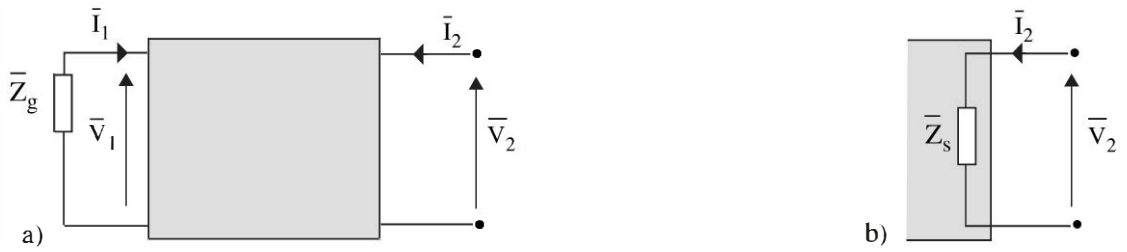


Figure 9.26

Copyright © 2007 Dunod.

d'où :

$$\boxed{\overline{Z}_s = \frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2} = \overline{Z}_{22} - \frac{\overline{Z}_{12}\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{ch} + \overline{Z}_{11}}}$$

La connaissance de cette impédance de sortie est importante pour connaître la puissance maximale délivrée par le quadripôle. En effet, on démontre que la puissance est maximale lorsque $\overline{Z}_{ch} = \overline{Z}_s^*$.

➤ *Transmittances, gain et déphasage*

On caractérise la fonction électrique (électronique ou électrotechnique) réalisée par un quadripôle sous la forme mathématique de sa **transmittance**.

Cette représentation mathématique se caractérise par le rapport entre le signal obtenu sur la sortie et le signal appliqué sur son entrée.

Définition des transmittances

On définit principalement trois rapports entre la sortie et l'entrée qui sont :

– la **transmittance en tension** $\overline{T}_v(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\overline{V}_2}{\overline{V}_1}$;

– la **transmittance en courant** $\overline{T}_i(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\overline{I}_2}{\overline{I}_1}$;

– la **transmittance en puissance** $\overline{T}_p(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1}\dfrac{\overline{V}_2\overline{I}_2^*}{\overline{V}_1\overline{I}_1^*}$.

Définition du gain et du déphasage

Le **gain** est l'image du module de la transmittance. On définit trois gains : le gain en tension $G_v(\omega)$, le gain en courant $G_i(\omega)$ et le gain en puissance $G_p(\omega)$.

Toutefois, la valeur des gains est très souvent énorme pour des quadripôles actifs (une valeur de 10^6 est courante). Une représentation plus judicieuse utilise une échelle logarithmique qui contracte les fortes valeurs. La définition des gains devient (l'unité est le décibel « dB ») :

$$\boxed{G_v(\omega) = 20\log_{10}\left|\overline{T}_u(\mathrm{j}\omega)\right|}, \boxed{G_i(\omega) = 20\log_{10}\left|\overline{T}_i(\mathrm{j}\omega)\right|}, \boxed{G_p(\omega) = 10\log_{10}\left|\overline{T}_p(\mathrm{j}\omega)\right|}.$$

(Le module d'une transmittance en tension de 10^6 engendre un gain en tension de $20\log_{10}(10^6) = 120$ dB).

> ***Remarque :*** L'origine du décibel provient de la définition du gain en puissance. Comme la puissance est liée (dans une résistance) au carré de la tension ou du courant, alors le gain en tension et en courant fait apparaître un facteur 20, plutôt que $((10\log_{10}(x)^2 = 20\log_{10}(x))$.

Le **déphasage** $\varphi(\omega)$ est l'argument de la transmittance ; on a $\boxed{\varphi(\omega) = \arg(\overline{T}(\mathrm{j}\omega))}$.

Copyright © 2007 Dunod.

9.4 REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES

Les dipôles comme les quadripôles ont des caractéristiques (impédances, transmittances…) qui varient fortement avec la fréquence.

Ces variations sont soit recherchées – elles deviennent alors une fonction à part entière, par exemple de « filtrage fréquentiel » –, soit sont parasites – elles restreignent alors la fonction électrique à un domaine de fréquence.

Il est impératif de définir une représentation fréquentielle commune, pour caractériser les fonctions électriques. Nous proposons dans ce paragraphe deux représentations graphiques complémentaires et importantes pour l'étude des fonctions linéaires complexes $\underline{H}(j\omega)$: le **diagramme de Bode** qui sépare la représentation graphique du module et du déphasage de $\underline{H}(j\omega)$ et le **diagramme de Nyquist** qui propose un dessin représentant conjointement le module et le déphasage.

9.4.1 Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** est très certainement le diagramme le plus utilisé, car il est facile à réaliser et surtout très facile à interpréter. Il comporte deux dessins indépendants : la courbe de gain $G(\omega)$ et la courbe de déphasage $\varphi(\omega)$.

➤ ***Tracé de la courbe de gain***

Définition du gain et du gain maximum

On reprend l'expression déjà définie pour les quadripôles pour exprimer le **gain** (en décibel : dB) $\boxed{G(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right)}$.

Le dessin de la courbe du gain a pour abscisse $\log_{10}(\omega)$, ce qui permet une contraction de l'échelle des abscisses et qui, en général, transforme le tracé des courbes en des portions de droite.

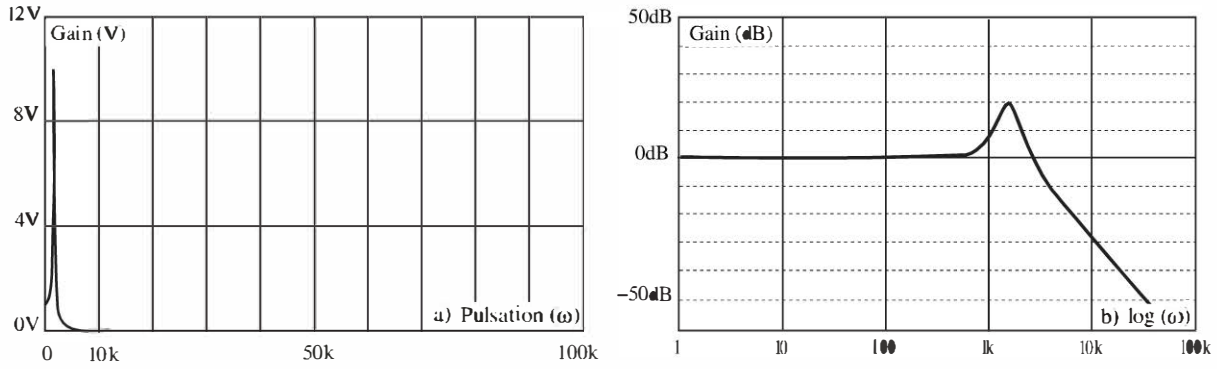


Figure 9.27

Par exemple, sur la figure 9.27a, la courbe du **gain linéaire** tracé en fonction de la pulsation ω manque cruellement de précision par rapport au tracé de la figure 9.27b.

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : Le tracé du gain en dB s'effectue sur une feuille particulière appelée papier semilog où l'échelle des abscisses est logarithmique ($\log_{10} f$ ou $\log_{10}\omega$) et où l'échelle des ordonnées est linéaire pour tracer le gain en dB.

Le **gain maximum** G_{max} (figure 9.28) est la valeur maximale atteinte par le gain $G(\omega)$. (À la pulsation produisant G_{max}, correspond aussi un maximum pour la fonction H_{max}).

Remarque : La détermination de G_{max} est obtenue à partir d'une tangente à la courbe nulle.

Tracé asymptotique et pulsations de cassures

Le **tracé asymptotique** correspond à une simplification du tracé réel de la courbe de gain (en pointillés sur la figure 9.28). Ce dessin correspond à des approximations de l'expression du gain dans des plages de pulsations (lorsque $\omega \longrightarrow 0$ ou lorsque $\omega \longrightarrow \infty$ ou pour $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$).

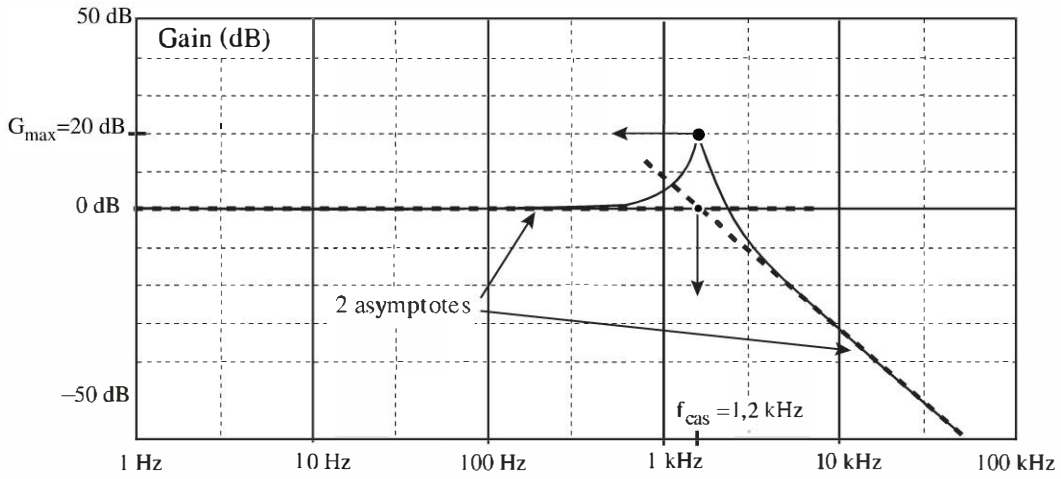


Figure 9.28

Les approximations transforment la courbe réelle en une succession de droites qui représentent un comportement asymptotique.

Chaque intersection entre deux asymptotes consécutives définit une **pulsation de cassure** ω_{cas} sur la figure 9.28 $\omega_{cas} = 2\pi f_{cas}$.

Pulsations de coupure à – 3 dB

Une **pulsation de coupure** ω_C à – 3 dB correspond à la pulsation dont le gain $G(\omega_C)$ est trois décibels en dessous du gain maximum G_{max}. Lorsque la courbe admet un plateau, et que G_{max} est obtenu pour une pulsation unique, alors ω_C est déterminée 3 dB en dessous du plateau (figure 9.72).

On a alors la relation $\boxed{G(\omega_C) = G_{max} - 3}$ qui correspond[4] aussi à $\boxed{\dfrac{|\overline{H}(j\omega)|}{H_{max}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

[4] $G(\omega_C) = G_{max} - 3 \Rightarrow 20\log_{10}|\overline{H}(j\omega)| = 20\log_{10} H_{max} - 3 \Rightarrow 20\log_{10}\left(\dfrac{|\overline{H}(j\omega)|}{H_{max}}\right) = -3 \Rightarrow \dfrac{|\overline{H}(j\omega)|}{H_{max}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Copyright © 2007 Dunod.

Bande passante

Lorsque la courbe possède deux pulsations de coupure à – 3 dB (ω_{C1} et ω_{C2}, avec $\omega_{C2} > \omega_{C1} \geqslant 0$) alors la **bande passante** « BP » est la différence entre les deux fréquences de coupure f_{C1} et f_{C2} (figure 9.29) :

$$BP = f_{C2} - f_{C1} = \frac{(\omega_{C2} - \omega_{C1})}{2\pi}$$

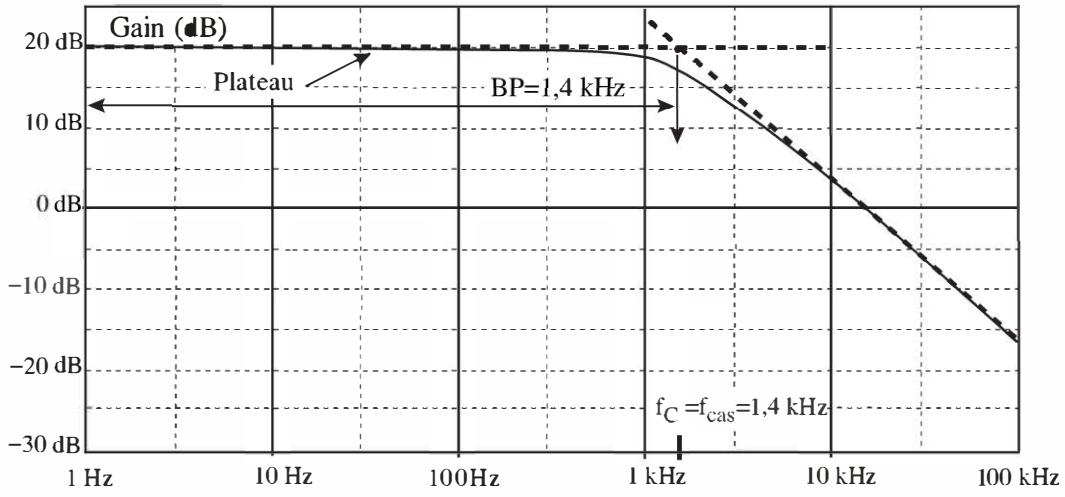


Figure 9.29

➤ Tracé de la courbe de déphasage

Définition du déphasage

Le **déphasage** $\varphi(\omega)$ est défini comme l'argument de la fonction complexe $\overline{H}(j\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\overline{H}(j\omega)\right)$$

La courbe est tracée sur une échelle semilog. L'unité utilisée pour le tracé des ordonnées est couramment le degré.

Tracé asymptotique

De manière identique au gain, le tracé asymptotique (figure 9.30) correspond à une simplification du tracé réel de la courbe de déphasage. Le dessin est une approximation de l'expression mathématique du déphasage dans une plage de pulsations (lorsque $\omega \longrightarrow 0$ ou lorsque $\omega \longrightarrow \infty$...).

➤ *Exemples d'application*

Deux fonctions complexes présentent un intérêt majeur : les fonctions du 1er et du 2e ordre.

Copyright © 2007 Dunod.

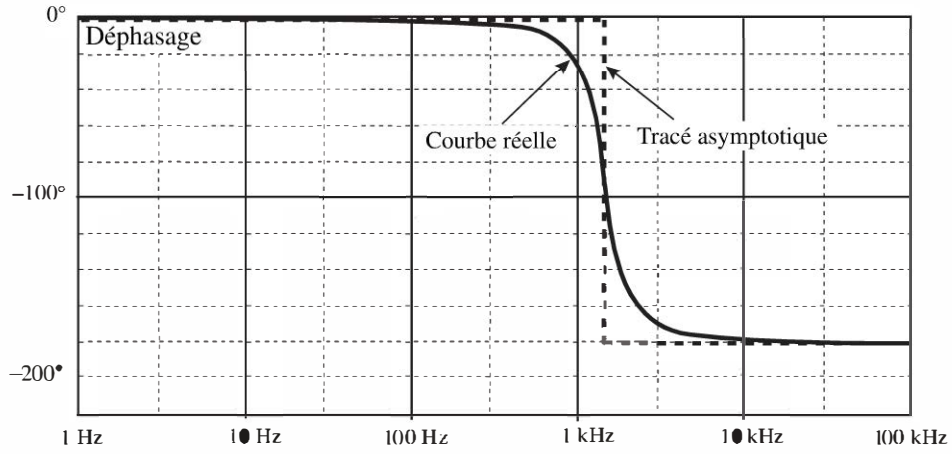


Figure 9.30

• **Circuit du 1er ordre**

Soit la fonction $\overline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ avec ω_0 une constante positive.

• Les expressions du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$ sont :

$$G(\omega) = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -10\log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\right) = -\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

• Le gain maximum est obtenu par la recherche des extrémums $\dfrac{dG(\omega)}{d\omega} = 0$:

$$\frac{d\left(\log_{10}\left(1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right)}{d\omega} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\frac{d\left(1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{d\omega} = \frac{2\dfrac{\omega}{\omega_0^2}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 0$$

$\Longrightarrow \omega = 0$ d'où $G_{max} = G(0) = -20\log_{10}(1) = 0$ dB

• La pulsation de coupure à – 3 dB :

$$G(\omega_C) = G_{max} - 3 \Longrightarrow -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2}\right) = -20\log_{10}\sqrt{2},$$

d'où :

$$\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2}\right) = \log_{10}\sqrt{2} \Longrightarrow \left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \omega_C = \omega_0$$

Copyright © 2007 Dunod.

• Recherche d'une asymptote quand $\omega \ll \omega_0$:

$$G(\omega) = 0 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0°$$

• Recherche d'une asymptote quand $\omega \gg \omega_0$:

$$G(\omega) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20\log_{10}(\omega_0) - 20\log_{10}(\omega)$$

L'expression peut aussi s'écrire $20\log_{10}(\omega_0 K) - 20\log_{10}(\omega) = A - 20X$, avec la constante $A = 20\log_{10}(\omega_0)$ et la variable des abscisses $X = \log_{10}\omega$.

L'équation $G(\omega) = A - 20X$ est l'équation d'une droite passant par le point de coordonnées (0 dB, $X = A/20$) ; $X = \dfrac{A}{20} \Longrightarrow \log_{10}\omega = \log_{10}(\omega_0)$ d'où $\omega = \omega_0$.

On remarque qu'en passant de ω à $10 \cdot \omega$ (une décade[5]) X augmente d'une unité $(X + 1)$ et la valeur du gain décroît de 20 dB :

$G(10\,\omega) = A - 20(X + 1) = A - 20X - 20 = G(\omega) - 20$. La pente de la droite est donc de – 20 dB/décade.

$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = -90°$: expression qui correspond à une droite horizontale (qui traduit l'indépendance vis-à-vis de ω).

• Fréquence de cassure : de l'étude précédente, il ressort deux asymptotes ; il existe donc une pulsation de cassure. La pulsation de cassure ω_{cas} est la pulsation qui vérifie les deux équations des asymptotes, d'où :

$$\begin{cases} G(\omega \gg \omega_0) = 20\log_{10}(\omega_0) - 20\log_{10}\omega_{cas} \\ G(\omega \ll \omega_0) = 0\,\text{db} \end{cases}$$

L'égalité se produit lorsque : $\log_{10}\dfrac{\omega_{cas}}{\omega_0} = 0 \Longrightarrow \omega_{cas} = \omega_0$

• Tableau de valeurs et courbes : pour tracer les courbes réelles (figure 9.31) de gain et de déphasage, on détermine quelques points autour de la fréquence de coupure $\omega_c = \omega_0$ (tableau 9.2). Par exemple, pour une pulsation $\omega = 2\omega_0$, on a :

$$G(2\omega_0) = -10\log_{10}\left(1 + (2\omega_0/\omega_0)^2\right) = -7 \text{ dB et } \varphi(2\omega_0) = -\arctan(2) = -63{,}4°$$

Copyright © 2007 Dunod.

[5] On parle d'une décade, car en musique une multiplication par 10 correspond à une augmentation d'une décade, une multiplication par 2 de la fréquence correspond à une octave (écart entre huit notes).

Tableau 9.2

	G(ω) (dB)	φ(ω)
$\omega_0/5$	–0,17	–11,3°
$\omega_0/3$	–0,46	–18,4°
$\omega_0/2$	–1	–26,6°
$\omega_C=\omega_0$	–3	–45°
$2\omega_0$	–7	–63,4°
$3\omega_0$	–10	–71,6°
$5\omega_0$	–14,1	–78,7°

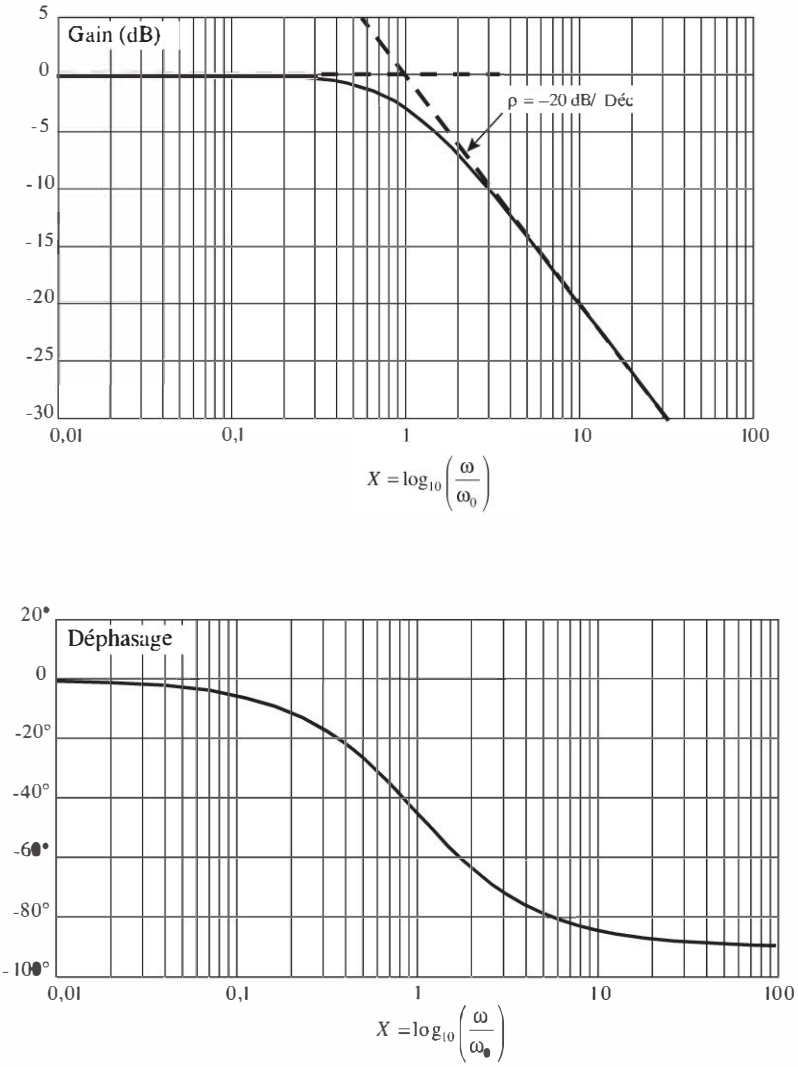


Figure 9.31

Circuit du 2e ordre

Soit la fonction $\overline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2mj\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec m et ω_0 deux constantes positives.

• Le gain $G(\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$:

$$G(\omega) = 20\log_{10}\left|\overline{H}(j\omega)\right| = -20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

• Le gain maximum à partir de la recherche des extrémums :

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega} = 0 \Longrightarrow \frac{d\left(-20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)\right)}{d\omega} = 0$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$\Longrightarrow \frac{d\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{d\omega}\Big/\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{d\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{d\omega} = 0$$

(Quelle que soit ω, $\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ ne s'annule jamais).

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-4\omega}{\omega_0^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)+8m^2\frac{\omega}{\omega_0}\right)=0$$

$$\Longrightarrow -\omega\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)+2m^2\omega=0 \Longrightarrow \omega=0 \text{ ou } \omega=\omega_0\sqrt{(1-2m^2)} \text{ avec } m<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il existe donc :

– un maximum en $\omega = 0$, lorsque $m \geqslant 1/\sqrt{2}$: $G(0) = 20\log_{10}(1) = 0$ dB ;

– un maximum lorsque $m < 1/\sqrt{2}$:

$$G(\omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega_0\sqrt{1-2m^2}}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$= -20\log_{10}\left(2m\sqrt{1-2m^2}\right) > G(0) \quad (= 0 \text{ dB})$$

• La fréquence de coupure à -3 dB : le gain maximum est celui qui est inconditionnel ; il forme alors un plateau, de valeur $G_{max} = 0$ dB ou $H_{max} = 1$.

Par définition : $G(\omega_C) = G_{max} - 3$ ou $\frac{|\overline{H}(j\omega)|}{H_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2m\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2}=\sqrt{2} \Longrightarrow \left(\frac{\omega_0^2-\omega_C^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4m^2}{\omega_0^2}\omega_C^2=2$$

$$\Longrightarrow \omega_C^4+(4m^2\omega_0^2-2\omega_0^2)\omega_C^2+\omega_0^4=2\omega_0^4=2$$

En posant $Y = \omega_C^2 \geqslant 0$, l'équation devient : $Y^2 + 2(2m^2 - 1)\omega_0^2 Y - \omega_0^4 = 0$

$$\Longrightarrow Y_{1,2} = -(2m^2-1)\omega_0^2 \pm \sqrt{(2m^2-1)^2\omega_0^4+\omega_0^4}$$

$$\Longrightarrow Y_{1,2} = (1-2m^2)\omega_0^2 \pm \omega_0^2\sqrt{2(2m^4-2m^2+1)}$$

$$\Longrightarrow \omega_C^2 = \omega_0^2\left(1-2m^2+\sqrt{(2m^4-2m^2+1)2}\right) \geqslant 0$$

Copyright © 2007 Dunod.

• Asymptote quand $\omega \ll \omega_0$:

$$G(\omega) = -20\log_{10}(\sqrt{1}) = 0 \text{ dB} \; ; \; \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) = 0°$$

• Asymptote quand $\omega \gg \omega_0$:

$$G(\omega) = -10\log_{10}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right) = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 40\log_{10}(\omega_0) - 40\log_{10}(\omega)$$

$$\Longrightarrow G(\omega) = A - 40X \quad \text{avec} \quad X = \log_{10}(\omega)$$

C'est l'équation d'une droite de pente -40 dB/décade qui passe par le point (0 dB, $\omega = \omega_0$).

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{-(\omega/\omega_0)^2}\right) = -180°$$

• Fréquence de cassure ω_{cas} :

$$G(\omega \gg \omega_0) = A - 40X = G(\omega \ll \omega_0) \Longrightarrow X = A/40 = \log_{10}(\omega_0)$$

$$\Longrightarrow \omega_{cas} = \omega_0$$

• Abaques : les courbes (figure 9.32) sont paramétrées par la variable m. On a utilisé la grandeur $X = \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ pour graduer les abscisses relatives (par rapport à ω_0).

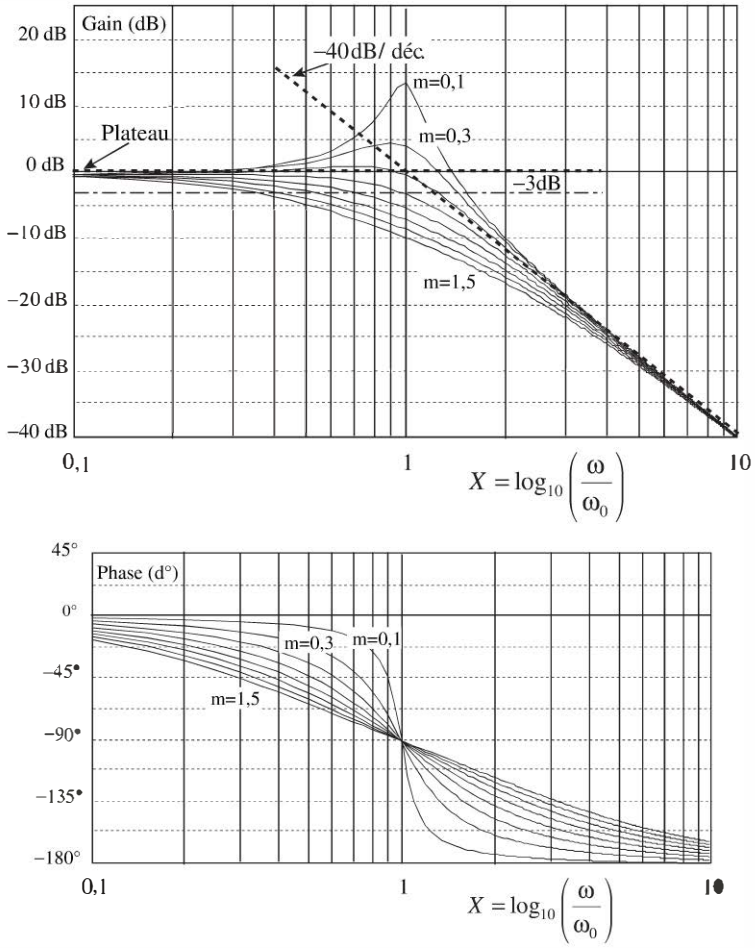


Figure 9.32

Copyright © 2007 Dunod.

Pour des valeurs faibles de m, le gain maximum H_{max} augmente rapidement

Pour $m \geqslant 1/\sqrt{2}$, il n'y a plus de maximum proche de ω_0.

Le maximum est alors celui pour $\omega = 0$, égal à 0 dB.

La figure 9.33 est la représentation du gain d'une fonction avec pour paramètre $m = 0{,}4$.

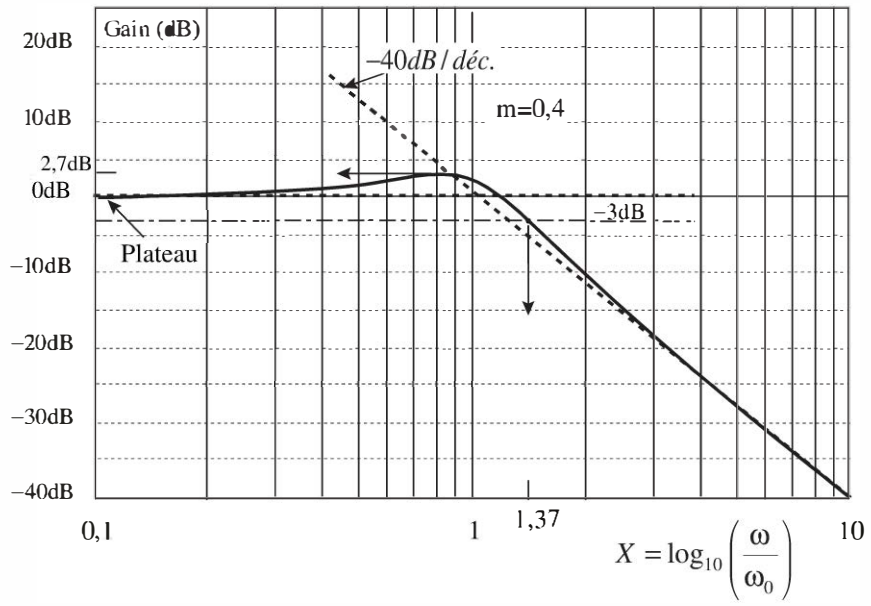


Figure 9.33

9.4.2 Diagramme de Nyquist

Le **diagramme de Nyquist**[6] est le premier diagramme qui a permis de traduire graphiquement les oscillations produites par un système bouclé (domaine de l'automatique).

Sa richesse est contenue dans le tracé conjoint du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$.

➤ ***Tracé dans le diagramme de Nyquist***

Le tracé de $\overline{H}(j\omega)$ s'effectue dans le plan complexe (figure 9.34).

Le tracé se fait en pointant le module et le déphasage de $\overline{H}(j\omega)$ dans le plan. La courbe est graduée en valeurs de pulsations ω et des flèches indiquent le sens de parcours du diagramme (en valeurs de pulsations ω croissantes).

En un point M du tracé, le gain $G(\omega)$ correspond au module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ exprimé en décibel, et le déphasage $\varphi(\omega)$ est donné par l'angle de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe des réels.

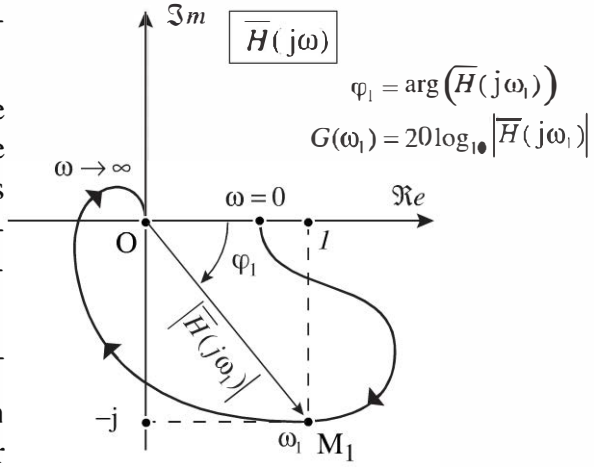


Figure 9.34

[6] Harry Nyquist, physicien suédois (1889, 1976) immigré aux USA, a travaillé pour le « Bell Labs » sur le bruit thermique et la stabilité des amplificateurs bouclés.

Copyright © 2007 Dunod.

Par exemple, au point M_1 (figure 9.34) de pulsation ω_1, le gain et le déphasage sont :

$$\overline{H}(j\omega_1) = 1 - j \Longrightarrow G(\omega_1) = 20\log_{10}(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1) = \varphi_1 = -45°$$

➤ ***Propriété du diagramme de Nyquist***

• Gains extrêmes

Le maximum H_{max} de la fonction $\overline{H}(j\omega)$ est le point de tangence avec le cercle concentrique au point O, de plus grand rayon (point M_{max} de pulsation ω_{max} sur la figure 9.35). Ce maximum correspond aussi au maximum du gain (G_{max}).

Le minimum de $\overline{H}(j\omega)$ a son point de pulsation de plus courte distance avec le point O. Sur la figure 9.35, le minimum de $|\overline{H}(j\omega)|$ tend vers 0 ($G_{min} \longrightarrow -\infty$ dB).

• Déphasages

Le déphasage maximum φ_{max} est le point qui forme le plus grand angle : sur la figure 9.36 (en pointillés) $\varphi_{max} = -\dfrac{3\pi}{2}$ pour une pulsation qui tend vers l'infini.

Le déphasage minimum φ_{min} est celui qui a l'angle minimal (figure 9.36 : $\varphi_{min} = 0$, pour $\omega = 0$).

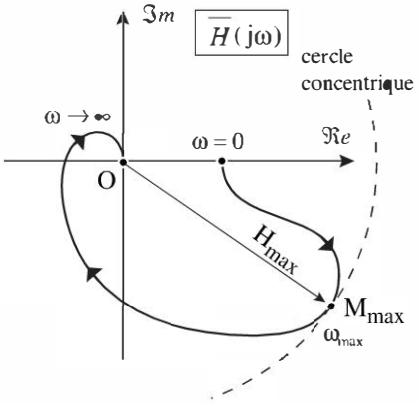


Figure 9.35

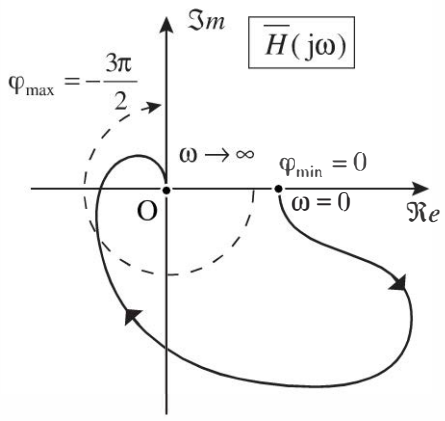


Figure 9.36

• Pulsation à – 3 dB

Il suffit de tracer un cercle de rayon inférieur de $\sqrt{2}$ par rapport au rayon du cercle correspondant à H_{max} (figure 9.37) et de trouver le point d'intersection (ω_C) avec la courbe.

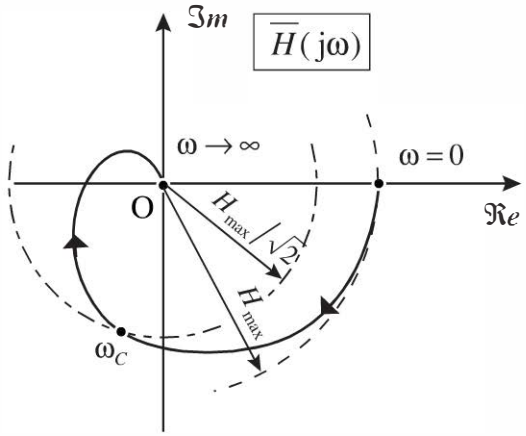


Figure 9.37

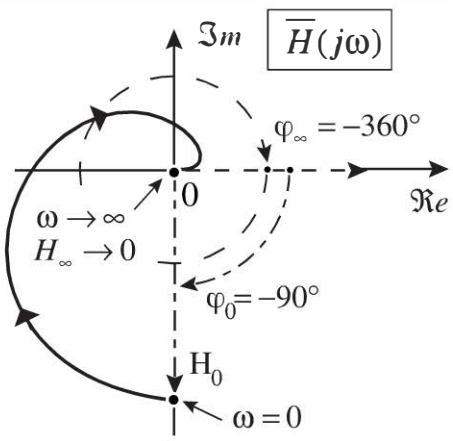


Figure 9.38

Copyright © 2007 Dunod.

• Tracés asymptotiques

En faisant tendre ω vers des valeurs extrêmes, on aboutit à des tracés de droites inclinées (droites en pointillés à la figure 9.38) dont l'inclinaison traduit le déphasage asymptotique.

➤ ***Exemples d'application***

Reprenons les deux fonctions complexes du 1er et du 2e ordre du paragraphe précédent.

• Circuit du 1er ordre

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ avec ω_0 une constante positive.

De l'étude du paragraphe précédent, on aboutit à un tracé (figure 9.39) dont le gain maximum de 0 dB ($H_{max} = 1$) est donné pour ω_0.

Le tableau 9.2 permet de placer quelques points de la courbe. On retrouve sur la figure le cercle (en pointillés) qui permet de définir la pulsation de coupure ω_C à – 3 dB.

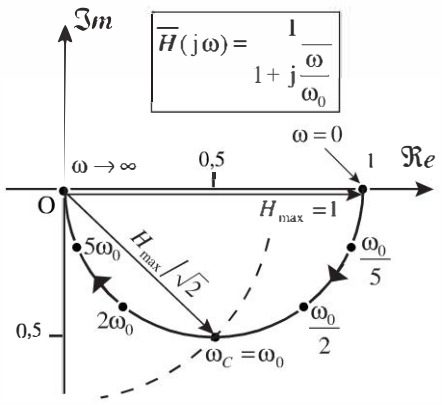


Figure 9.39

Le tracé fait apparaître deux asymptotes ($\omega = 0$, $G(0) = 0$ dB, $\varphi(0) = 0°$) et ($\omega \longrightarrow \infty$, $G(\infty) \longrightarrow -\infty$ dB, $\varphi(\infty) = -90°$).

• Circuit du 2e ordre

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2mj\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec m et ω_0 deux constantes positives.

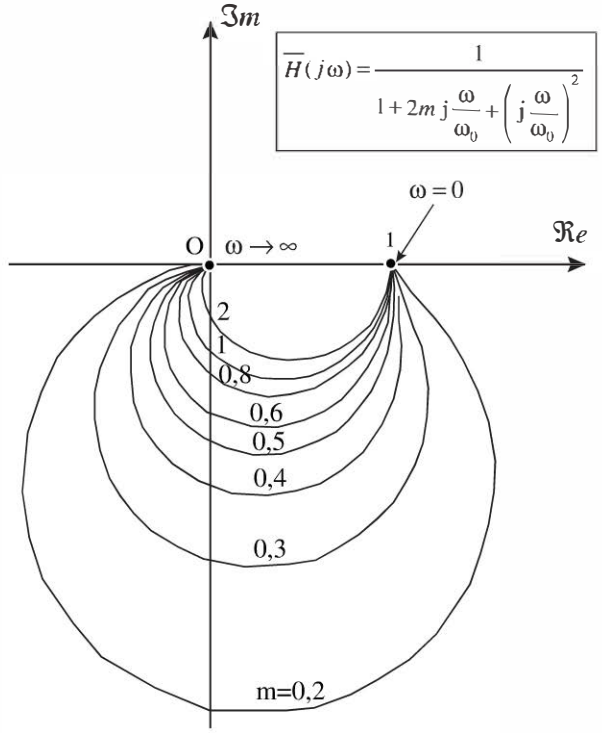


Figure 9.40

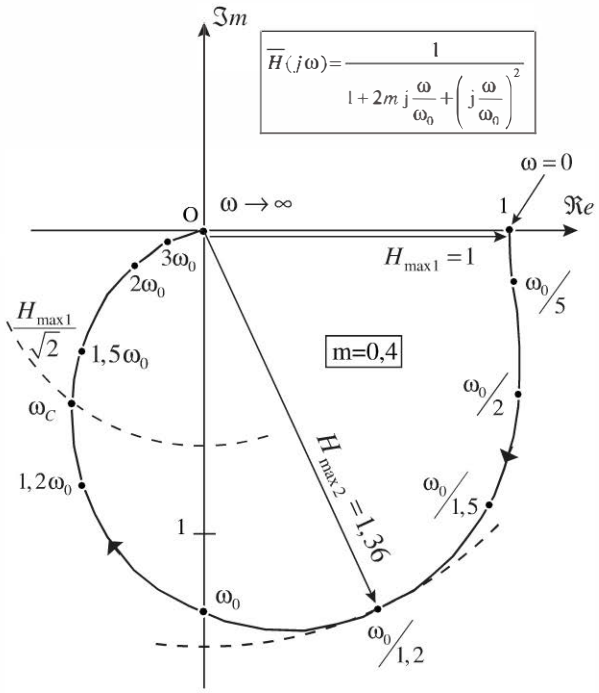


Figure 9.41

Copyright © 2007 Dunod.

Le tracé fait apparaître une famille de courbes paramétrées par la variable m (figure 9.40).

Une étude détaillée avec $m = 0{,}4$ (figure 9.41) montre l'existence du plateau en $\omega = 0$ ($H_{\max 1} = 1$)et du maximum en $\omega = \omega_0/1{,}2$ ($H_{\max 2} = 1{,}36$). La fréquence de coupure apparaît en $\omega_C = 1{,}3$. Il y a deux asymptotes : une asymptote horizontale qui correspond au plateau ($\omega = 0$, $H = 1$, $G \longrightarrow 0$ dB) et une autre qui apparaît lorsque la pulsation $\omega \gg \omega_0$ tend vers l'infini ($H(\omega) \longrightarrow 0$, $G(\omega) \longrightarrow -\infty$, $\varphi \longrightarrow -180°$).

9.5 MODÉLISATION OPÉRATIONNELLE

Les paragraphes précédents ont fait ressortir une modélisation mathématique du circuit sous la forme d'une fonction de la variable « jω ».

La transformée de Laplace (déjà présentée au chapitre 7) permet une généralisation des fonctions complexes, à partir de la variable $p = \alpha + j\omega$.

En posant $p = \alpha + j\omega$, on retrouve la partie imaginaire jω des fonctions complexes $\overline{H}(j\omega)$ du paragraphe précédent, à laquelle se rajoute une partie réelle α qui apporte un comportement transitoire, qui sera développé dans le chapitre 10 et qui sert dans ce chapitre à exploiter la notion de pôles et de zéros.

9.5.1 Notion de pôles et de zéros

La fonction linéaire $H(p)$ se fractionne en un numérateur $N(p)$ et un dénominateur $D(p)$ $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$. $N(p)$ et $D(p)$ deviennent des polynômes de la variable p.

Écrite sous cette forme, la fonction $H(p)$ est singulière dès qu'une valeur de p annule le dénominateur $D(p) = 0$. De même, $H(p)$ est particulière lorsque $N(p) = 0$, qui traduit, par exemple dans le cas des quadripôles, une relation interrompue entre les grandeurs d'entrée et de sortie.

> Les **zéros** sont les valeurs de p qui annulent $N(p)$. Les **pôles** sont les valeurs de p qui annulent $D(p)$. Les n zéros (z_i) comme les d pôles (p_j) sont des valeurs complexes. Dans un circuit réel, on a toujours $d \geqslant n$: il y a plus de pôles que de zéros.

À partir des zéros ($z_1 \ldots z_n$) et des pôles ($p_1 \ldots p_n$) qui sont réels ou complexes, la fonction $H(p)$ se factorise sous la forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p - z_1)(p - z_2)\ldots(p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_d)}$$

Les pôles et les zéros sont représentatifs du circuit en étude, car ils dépendent à la fois des paramètres caractéristiques de ses dipôles, et à la fois de leur agencement dans le circuit – on rappelle que c'est le graphe qui permet d'écrire les équations qui aboutissent à $H(p)$ –.

> $D(p)$ représente **l'équation caractéristique** associée au circuit. Les pôles du circuit revêtent une importance cruciale dans le comportement dynamique du circuit (voir chapitre 10).

Copyright © 2007 Dunod.

Un pôle réel ou une paire de pôles complexes conjugués constitue un **mode** du circuit. On définit des **modes non oscillatoires**[7] lorsque les pôles sont purement réels et des **modes oscillatoires** lorsque les pôles sont complexes.

Par exemple, le graphe associé au schéma électrique de la figure 9.42, comporte deux nœuds et quatre branches, dont sur une boucle.

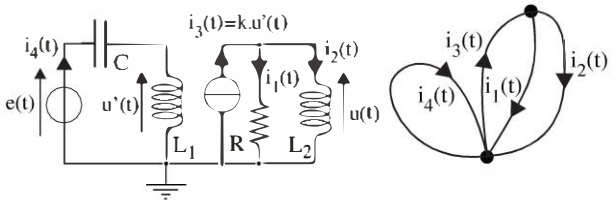


Figure 9.42

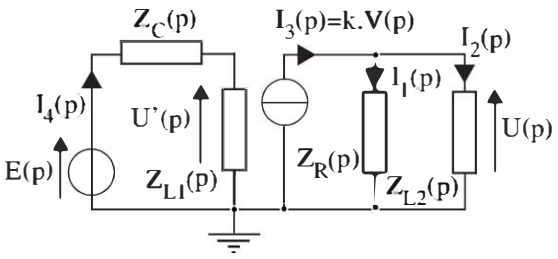


Figure 9.43

Son schéma opérationnel associé est donné figure 9.43.

Les équations déterminent la fonction :

$$H(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{kRL_1L_2Cp^3}{(R + L_2p)(1 + L_1Cp^2)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On recherche les zéros de la fonction $H(p)$ en posant :

$$N(p) = 0 \Longrightarrow kRL_1L_2Cp^3 = 0 \Longrightarrow p = 0 \quad \text{(zéro triple)}.$$

On recherche les pôles en posant :

$$D(p) = 0 \Longrightarrow (R + L_2p)(1 + L_1Cp^2) = 0 \Longrightarrow p_1 = -\frac{R}{L_2} \text{ et } p_{20,21} = \pm j\sqrt{\frac{1}{L_1C}}$$

On obtient alors un zéro ($z = 0$) et trois pôles (p_1, p_{20} et p_{21}). La fonction $H(p)$ se factorise alors sous la forme :

$$H(p) = Rk\frac{p^3}{\left(p + \frac{R}{L_2}\right)\left(p - \frac{j}{\sqrt{L_1C}}\right)\left(p + \frac{j}{\sqrt{L_1C}}\right)}$$

que l'on écrira aussi :

$$H(p) = Rk\frac{p^3}{\left(p + \frac{R}{L_2}\right)\left(p - \frac{j}{\sqrt{L_1C}}\right)\left(p + \frac{j}{\sqrt{L_1C}}\right)}$$

[7] La distinction entre les modes oscillatoires et non oscillatoires sera développée dans le chapitre 10.

Copyright © 2007 Dunod.

9.5.2 Définition du lieu d'Evans

Le **lieu d'Evans** est un plan complexe, où sont placés les pôles matérialisés par des croix et les zéros matérialisés par des cercles (figure 9.44). C'est pourquoi ce lieu est aussi dénommé le **lieu des pôles et des zéros**. En chaque point p du plan, $H(p)$ prend une valeur complexe.

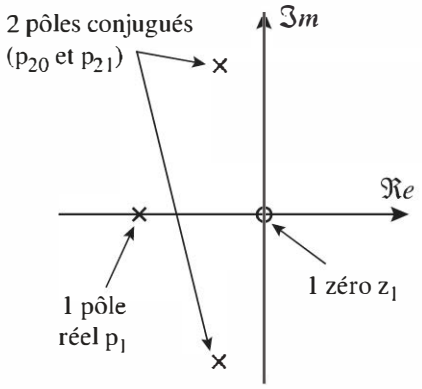


Figure 9.44

Un système du 1er ordre est caractérisé par une représentation (figure 9.45a) avec seulement un pôle réel (mode non oscillant, système amorti[8] ou divergent…). Lorsqu'un système du 2e ordre est non oscillatoire, alors ses deux pôles sont purement réels (figure 9.45b), tandis que s'il est oscillatoire (amorti ou divergent) les deux pôles sont complexes (figure 9.45c).

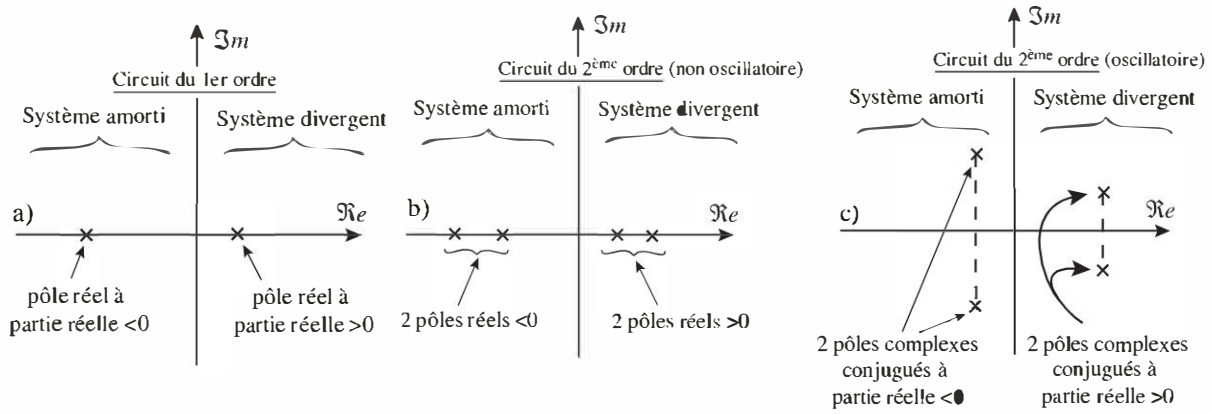


Figure 9.45

9.5.3 Interprétation géométrique du lieu d'Evans

➤ ***À partir d'une fonction H(p) du 2e degré***

La fonction complexe du circuit du 2e ordre du paragraphe précédent $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2m\dfrac{j\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$, devient en substituant l'opérateur p à $j\omega$:

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{(p - p_{10})(p - p_{11})} ;$$

sachant que pour $p_{10,11} = \alpha \pm j\beta$, alors $m = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$ et $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$

[8] Un système amorti conduit à un régime permanent linéaire, tandis qu'un système divergent entraîne forcément une fonction en régime non linéaire qui est hors de propos.

Copyright © 2007 Dunod.

Sa représentation dans le lieu d'Evans fait apparaître deux points particuliers P_{10} et P_{11} d'affixes[9] p_{10} et p_{11}. Les deux pôles de $H(p)$ peuvent être :

– deux pôles réels si $(m^2 - 1) \geqslant 0$ (figure 9.46a), avec

$$p_{10,11} = -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \ ;$$

– deux pôles complexes conjugués si $(m^2 - 1) < 0$ (figure 9.46b), avec

$$p_{10,11} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \text{ et } \tan\Psi = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

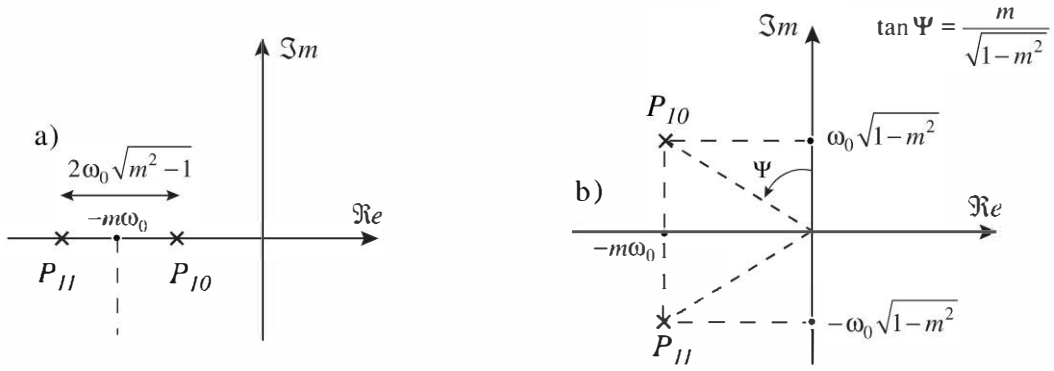


Figure 9.46

À partir des deux points du plan complexe P_{10} et P_{11} (d'affixes respectifs p_{10} et p_{11}), la valeur de la fonction $H(p)$ au point M quelconque du plan d'affixe $p = \alpha + j\omega$ devient :

$$|H(p)| = \left|\frac{K}{(p - p_{10})(p - p_{11})}\right| = \frac{K}{|\overrightarrow{P_{10}M}| \cdot |\overrightarrow{P_{11}M}|} \ ;$$

d'où : $\boxed{|H(p)| = \dfrac{K}{x_1 x_2}}$ (figure 9.47) avec x_1 et x_2, les modules des vecteurs $\overrightarrow{P_{10}M}$ et $\overrightarrow{P_{11}M}$. D'autre part,

$$\arg(H(p)) = -\arg\overrightarrow{P_{10}M} - \arg\overrightarrow{P_{11}M}$$

d'où : $\boxed{\arg(H(p)) = -\alpha_1 - \alpha_2}$, à $2n\pi$ près (n entier).

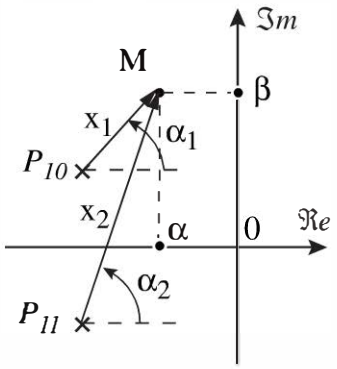


Figure 9.47

À partir des deux vecteurs $\overrightarrow{P_{10}M}$ et $\overrightarrow{P_{11}M}$, on détermine graphiquement la valeur de la fonction $H(p)$ prise au point M en utilisant les relations :

$$|H(p)| = \frac{1}{|\overrightarrow{P_{10}M}| \cdot |\overrightarrow{P_{11}M}|} \quad \text{et} \quad \arg(H(p)) = -\arg\overrightarrow{P_{10}M} - \arg\overrightarrow{P_{11}M}$$

[9] L'affixe d'un point $M(a,b)$ est le nombre complexe associé $\overline{z} = a + jb$.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***À partir d'une fonction H(p) quelconque***

Pour généraliser l'interprétation géométrique à une fonction quelconque d'expression $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)} = K\dfrac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_d)}$, on affecte un point Z_i d'affixe z_i à chaque zéro et un point P_j d'affixe p_j à chaque pôle (figure 9.48).

La valeur de $H(p)$ au point M, devient :

$$|H(p)| = K\frac{\left|\overrightarrow{Z_1M}\right|\left|\overrightarrow{Z_2M}\right|\ldots\left|\overrightarrow{Z_nM}\right|}{\left|\overrightarrow{P_1M}\right|\left|\overrightarrow{P_2M}\right|\ldots\left|\overrightarrow{P_dM}\right|} \quad \text{et} \quad \arg(H(p)) = \sum_{i=1}^{n}\arg\overrightarrow{Z_iM} - \sum_{j=1}^{d}\arg\overrightarrow{P_jM}$$

d'où : $\boxed{|H(p)| = K\dfrac{\prod_i y_i}{\prod_j x_j}}$ et $\boxed{\arg(H(p)) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i - \sum_{j=1}^{d}\alpha_j}$

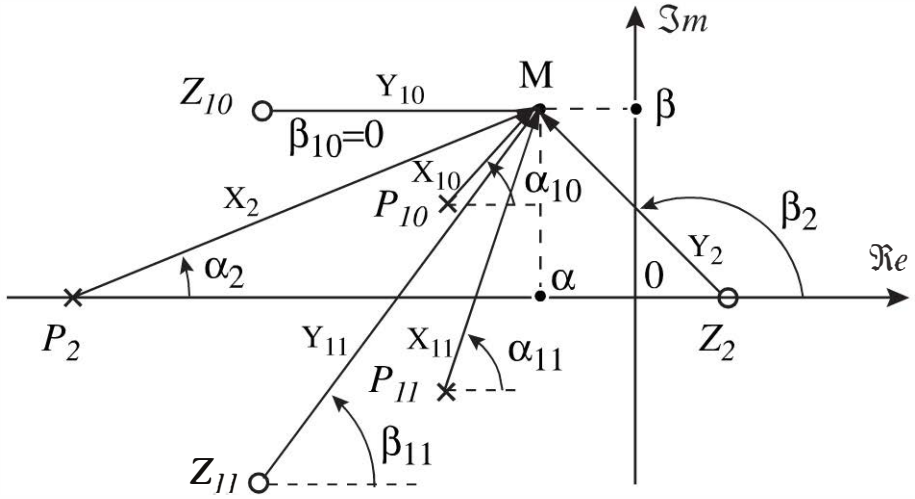


Figure 9.48

9.5.4 Application aux circuits électriques à fréquence variable

Pour les circuits à fréquence variable, l'opérateur de Laplace prend la valeur $p = j\omega$. Le point M d'affixe p se déplace ainsi sur l'axe imaginaire (figure 9.49).

Pour déterminer la valeur de la fonction $H(p = j\omega)$, on reprend la construction définie dans le paragraphe précédent.

Copyright © 2007 Dunod.

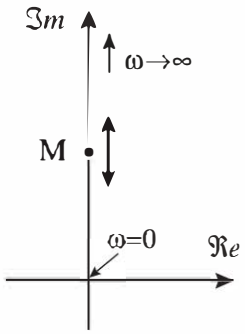


Figure 9.49

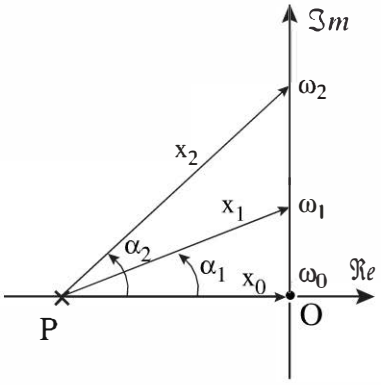


Figure 9.50

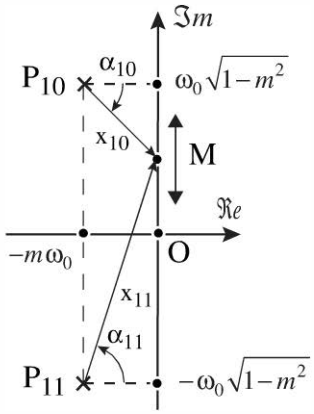


Figure 9.51

➤ ***Cas d'un pôle réel***

La variation de fréquence entraîne l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{PM}$ sur l'axe imaginaire (figure 9.50) produisant une augmentation monotone de l'amplitude x (qui tend vers l'infini) et une augmentation de la phase α (qui tend vers 90°). x_i est minimum pour $\omega = 0$.

La fonction $H(p)$ a des courbes monotones, dont l'amplitude décroît avec la fréquence et dont le déphasage tend vers – 90°, car on rappelle que le module est lié à $|H(p)| \approx 1/x$ et le déphasage $\arg(H(p)) = -\alpha$.

➤ ***Cas d'une paire de pôles complexes conjugués***

La représentation du circuit du 2e ordre comportant deux pôles complexes conjugués est illustrée à la figure 9.51.

L'étude fréquentielle fait glisser le point M sur le demi-axe imaginaire positif ($\omega > 0$), du point d'origine O où $\omega = 0$ (figure 9.52a) jusqu'au point sur l'axe imaginaire d'affixe infini (figure 9.52c).

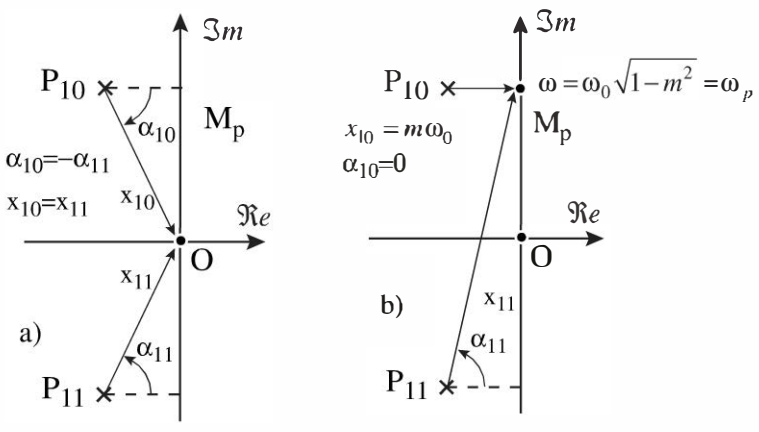


Figure 9.52

Entre le point O et l'infini, il existe un point particulier M_p où le point M (d'affixe $p = j\omega$) se situe au plus près du point P_{10} (figure 9.52b). La pulsation ω prend alors pour valeur $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ qui est la définition de la pulsation propre, et le module de $H(p)$ devient alors maximal $H(j\omega_p)| = \dfrac{K}{x_{10}} = \dfrac{K}{m\omega_0}$.

Copyright © 2007 Dunod.

Lorsque la pulsation tend vers l'infini (figure 9.52c), on retrouve visuellement un déphasage de $H(p)$ qui tend vers $-180°$ (avec $\arg(H(j\omega_p)) = -\alpha_{10} - \alpha_{11} \cong -2\alpha_{10} \longrightarrow -180°$) tandis que le module de $H(p)$ tend alors vers 0 ($|H(p)| \approx K/x$ avec $x \longrightarrow \infty$).

On remarque que si les pôles sont proches de l'axe imaginaire (figure 9.53a) une petite variation de la pulsation ω produit des variations très importantes de l'amplitude x_{10} et de l'angle α_{10} ($\Delta\alpha_{10}$ importante) alors que x_{11} et α_{10} restent pratiquement constants ($\Delta\alpha_{11}$ faible). La fonction $H(p)$ est donc très réactive pour cette bande de pulsation.

En revanche, quand les pôles sont plutôt proches de l'axe réel (figure 9.53b) alors la représentation fréquentielle de $H(p)$ devient monotone, sans brusque variation d'amplitude et de déphasage.

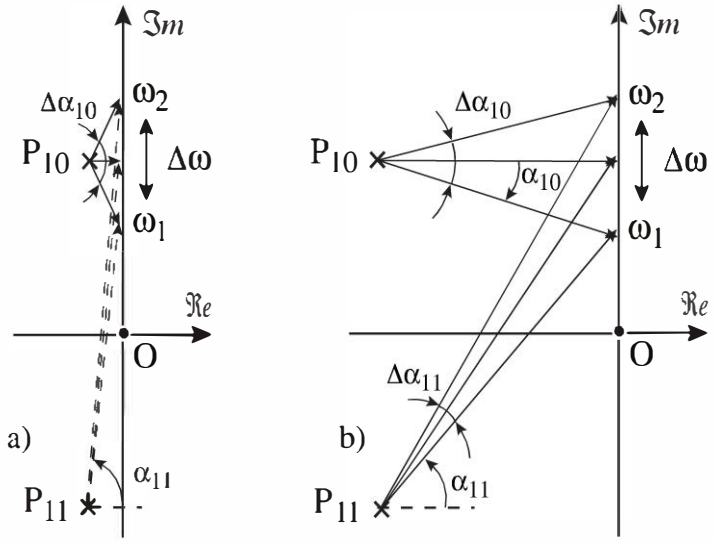


Figure 9.53

➤ *Étude qualitative de H(p)*

La représentation dans le lieu d'Evans (figure 9.54) de la fonction $H(p)$ associée au circuit de la figure 9.43, fait apparaître quatre points P_{10}, P_{11}, P_2 et Z. On observe alors :

- pour $\omega = 0$ (figure 9.54a), les deux pôles en P_{10} et en P_{11} ont des phases qui se compensent ; le zéro triple en Z n'a pas d'influence ($y = 0$) ; le module de l'affixe p_2 a sa plus faible valeur et sa phase est nulle ;
- pour $\omega = \omega_p$ (figure 9.54b), le pôle en P_{10} voit son déphasage changer de signe. De plus, les deux pôles sont proches de l'axe imaginaire : c'est une zone où il faut s'attendre à une variation importante du module et du déphasage de $H(p)$; le module y de l'affixe z croît progressivement ;
- pour $\omega \longrightarrow \infty$ (figure 9.54c) tous les affixes tendent vers $j\omega$ et tous les angles tendent vers 90°. Le zéro Z et le pôle P_2 se compensent. Le comportement de $H(p)$ ressemble à une fonction qui a les deux pôles complexes conjugués P_1 et P_2.

> ***Remarque :*** la phase β et le module y de l'affixe z associé au point Z, doit être compté triple, car le zéro est triple.

La modélisation opérationnelle permet le tracé du lieu des pôles et des zéros, qui apporte une expertise qualitative sur le circuit.

Copyright © 2007 Dunod.

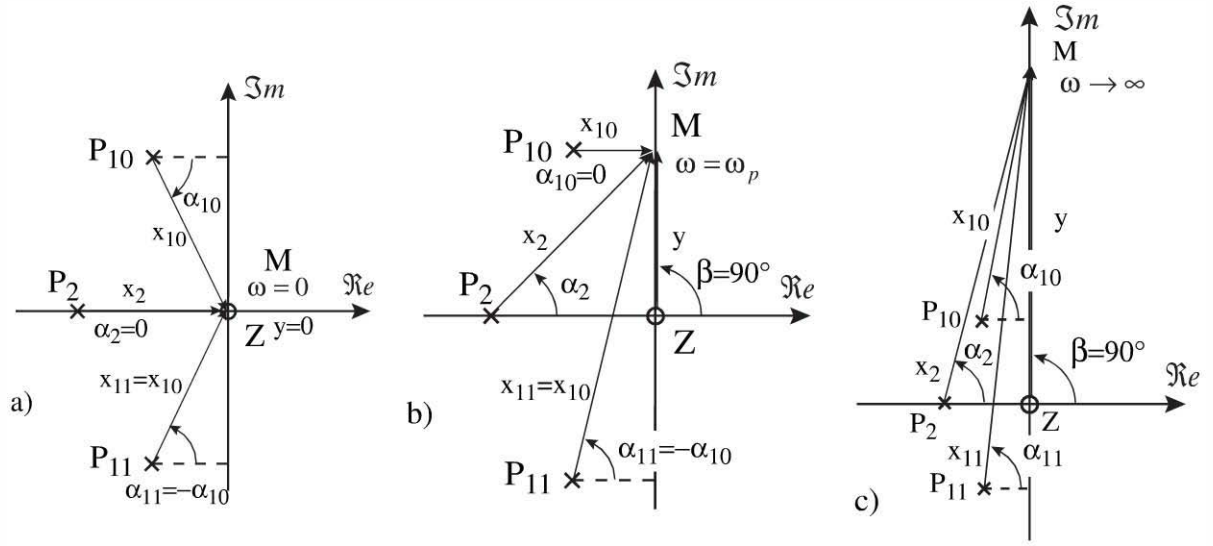


Figure 9.54

Pour en savoir plus...

TRACÉ ASYMPTOTIQUE À PARTIR DE $\overline{H}(j\omega)$ QUELCONQUE

Le tracé asymptotique du gain et du déphasage, associé à une fonction $\overline{H}(j\omega)$ où $H(p = j\omega)$ permet de définir l'enveloppe de la courbe réelle. La courbe suit d'autant mieux les asymptotes, que les fréquences de cassure s'éloignent les unes des autres (au moins une décade).

Décomposition de $H(p)$ en fonction du 1er et du 2e ordre

La fonction $H(p)$ possède en général un numérateur et un dénominateur en puissance de $j\omega$. Lorsque le degré d de $H(p)$ est élevé, on cherche à décomposer la fonction en faisant apparaître ses pôles p_i et ses zéros z_j, qui sont toujours soit des réels soit des complexes conjugués (voir § 9.5).

> ***Remarque :*** Dans le cadre d'une étude en régime permanent, tous les pôles et tous les zéros ont leur partie réelle négative (ils se positionnent dans le demi-plan gauche du plan d'Evans) pour que le système soit amorti.

Toute fonction peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$H(p) = A\frac{(p - z_1)(p - z_2)\ldots(p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_d)}$$

Copyright © 2007 Dunod.

ou encore en regroupant deux à deux les zéros complexes conjugués et les pôles complexes conjugués[10] :

$$H(p) = B\frac{\prod_i (p - z_i)\prod_j (y_j p^2 + x_j p + 1)}{\prod_l (p - p_l)\prod_m (y_m p^2 + x_m p + 1)}$$

Cette dernière expression fait mieux apparaître la décomposition en pôles et zéros comme des réels ou des complexes conjugués. Cette forme, traduite sous forme complexe que l'on normalise par des pulsations intermédiaires, devient :

$$H(p = \mathrm{j}\omega) = C\frac{\prod_i \left(1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)\right)\prod_k \left(1 + 2m_k\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_k}\right) + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)}{\prod_l \left(1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_l}\right)\right)\prod_q \left(1 + 2m_q\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_q}\right) + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_q}\right)^2\right)}.$$

Détermination du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$

À partir de cette décomposition, l'expression du gain de $\overline{H}(\mathrm{j}\omega)$ est :

$$G(\omega) = D + \sum_i 20\log_{10}\left(1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)\right) + \sum_k 20\log_{10}\left(1 + 2m_k\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_k}\right) + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)$$
$$- \sum_l 20\log_{10}\left(1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_l}\right)\right) - \sum_q 20\log_{10}\left(1 + 2m_q\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_q}\right) + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_q}\right)^2\right)$$

Le gain $G(\omega)$ est donc constitué par une somme de gain de fonctions du 1er et du 2e ordre :

$$G(\omega) = G_0 + \sum_i G_i(\omega) + \sum_k G_k(\omega) - \sum_l G_l(\omega) - \sum_q G_q(\omega)$$

Comme on sait parfaitement tracer le diagramme asymptotique de chacune des fonctions élémentaires du 1er et du 2e ordre de $G(\omega)$, le diagramme asymptotique complet du gain $G(\omega)$ devient évident !

La même conclusion s'applique au tracé asymptotique du déphasage, car $\arg(\overline{H}(\mathrm{j}\omega)) = \varphi(\omega) = \sum_i \arg\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) - \sum_l \arg\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) + \sum_k \arg\left(\frac{2m_k\omega\omega_k}{\omega_k^2 - \omega^2}\right) - \sum_q \arg\left(\frac{2m_q\omega\omega_q}{\omega_q^2 - \omega^2}\right)$ se met aussi sous la forme d'une somme de déphasages de fonctions élémentaires du 1er et du 2e ordre : $\varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega) + \sum_k \varphi_k(\omega) - \sum_l \varphi_l(\omega) - \sum_q \varphi_q(\omega)$.

[10] $(p - p_1)(p - p_2) = (p - (\alpha + \mathrm{j}\beta))(p - (\alpha - \mathrm{j}\beta)) = p^2 - 2\alpha p + \beta^2 = \beta^2\left(\frac{p^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha}{\beta^2}p + 1\right) = b(yp^2 - xp + 1)$.

Copyright © 2007 Dunod.

Le diagramme asymptotique de la fonction $\overline{H}(j\omega)$ se déduit aisément des tracés asymptotiques de chacune des fonctions élémentaires du 1er et du 2e ordre qui composent $\overline{H}(j\omega)$.

Les résultats suivants sont donc essentiels :

– une fonction du 1er ordre du type $j\frac{\omega}{\omega_0}$ ou $1+j\frac{\omega}{\omega_1}$ possède une pente de +20 dB/déc. et produit une variation de déphasage de +90° ;

– une fonction du 2e ordre $1+2m\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2$ a une pente de +40 dB/déc. et un déphasage de +180° ;

– une fonction $\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-1}$, $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{-1}$ et $\left(1+2m\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right)^{-1}$, inverses des fonctions précédentes, produisent des pentes et des déphasages de signes opposés.

Application

Par exemple, la réalisation du tracé asymptotique du gain et du déphasage de la fonction :

$$\overline{H}(j\omega)=\frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+2m\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right)}$$

produit une sommation de quatre fonctions élémentaires qui sont :

– la fonction $j\frac{\omega}{\omega_0}$;

– la fonction $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)$;

– la fonction $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{-1}$;

– la fonction $\left(1+2m\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right)^{-1}$.

La rapidité avec laquelle sont tracées les asymptotes du gain (figure 9.55) et du déphasage (figure 9.56) montre tout l'intérêt de la décomposition.

Copyright © 2007 Dunod.

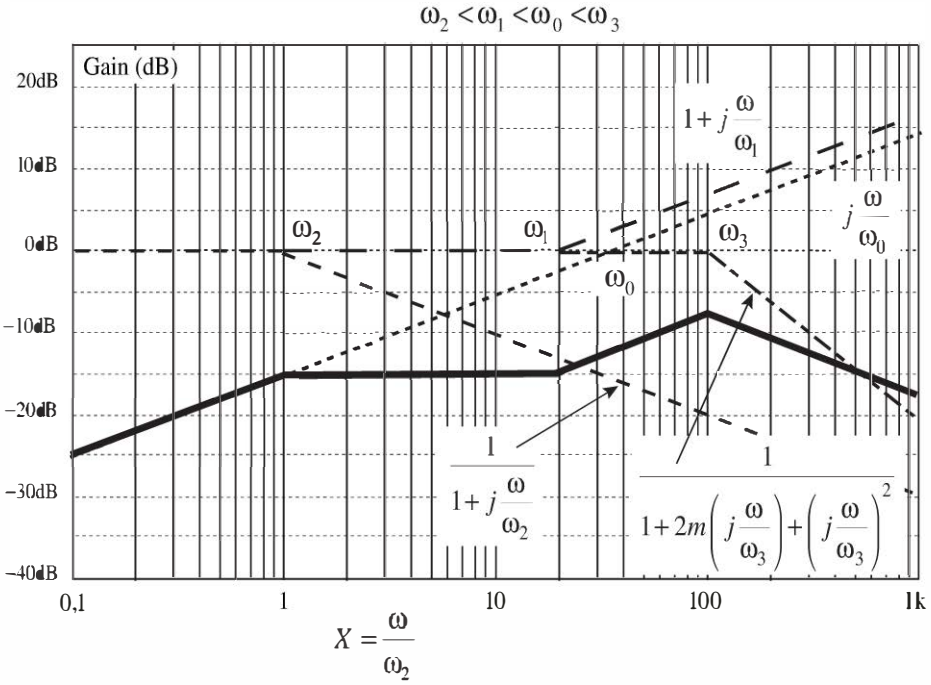


Figure 9.55

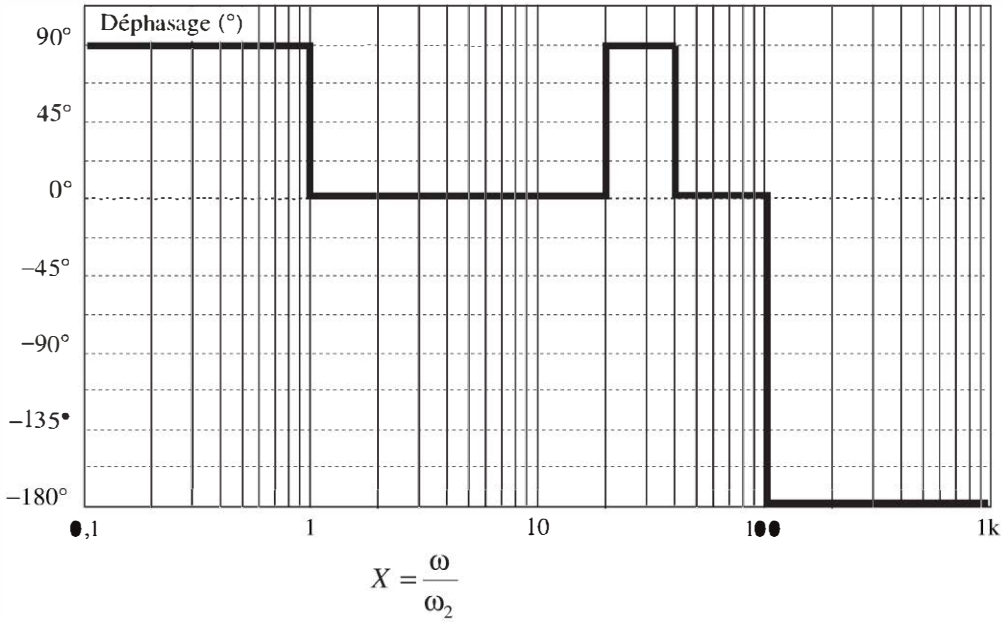


Figure 9.56

Copyright © 2007 Dunod.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

9.1 Quelle grandeur varie dans un dipôle passif lorsque la fréquence varie ?

9.2 Que signifie l'affirmation : « le dipôle passif est capacitif » ?

9.3 En général, peut-on modéliser un quadripôle par deux dipôles indépendants ? Pourquoi ?

9.4 Pourquoi l'étude de la variation de fréquence, dans les dipôles et les quadripôles, s'effectue par la modélisation complexe ?

9.5 Quelle est la différence principale entre les diagrammes de Bode et de Nyquist ?

9.6 Quelles sont les expressions du gain et du déphasage ?

9.7 Quelle est la différence entre la pulsation de coupure à – 3 dB et la pulsation de cassure ?

9.8 Que montre le lieu d'Evans ?

9.9 Est-on capable de tracer la fonction $\overline{H}(j\omega)$ à partir du lieu d'Evans ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

9.10 Soit le dipôle passif de la figure 9.57.
1. Dessiner le schéma électrique symbolique équivalent ;
2. Déterminer la valeur de l'impédance $\overline{Z}_X$ imaginaire à la pulsation $\omega = 314$ rad/s, pour obtenir un déphasage φ de l'impédance équivalente $\overline{Z}_{équi.}$ égale à – 30° ;
3. Déterminer le modèle série associé à $\overline{Z}_X$ et les valeurs des éléments du modèle ;
4. Pour quelle valeur de pulsation ω_R l'impédance $\overline{Z}_{équi.}$ est à la résonance ?
5. En imposant une tension sinusoïdale aux bornes de $\overline{Z}_{équi.}$, de $U = 230$ V, à la pulsation de résonance ω_R :
a) Dessiner le diagramme de Fresnel associé à ces conditions ;
b) Calculer la valeur du courant I qui traverse l'impédance ;
c) Déterminer les puissances P, Q et S.

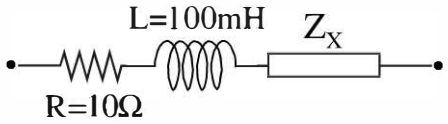


Figure 9.57

9.11 Soit le schéma équivalent d'un quartz (figure 9.58) alimenté par une source de courant $j(t)$. C_0 est la capacité électrique, C_1 sa capacité motionnelle relative à l'élasticité du matériau, L est l'inductance motionnelle et R la résistance électrique.
1. Déterminer l'expression de l'admittance équivalente $\overline{Y}_{équi.}$;
2. Mettre l'impédance $\overline{Y}_{équi.}$ sous la forme $\overline{Y}_{équi.} = G(\omega) + jB(\omega)$;

Dans le reste du problème, on néglige la très faible résistance série R.

3. Déterminer l'expression de la pulsation de résonance série ω_s où $\overline{Y}_{équi.}$ est de plus forte valeur ;
4. Déterminer l'expression de la pulsation de résonance série ω_p où $\overline{Y}_{équi.}$ est de plus faible valeur ;

Copyright © 2007 Dunod.

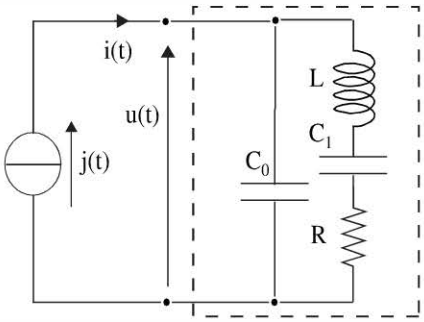


Figure 9.58

5. Mettre $\overline{Y}_{équi.}$ sous la forme $\overline{Y}(j\omega) = jK\omega \dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_s}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$ en déterminant K ; Préciser qui de ces deux pulsations est la plus forte ;
6. Déterminer la limite à gauche et à droite de $\overline{Y}_{équi.}$ autour de ω_p ; idem autour de la pulsation ω_s ; tracer approximativement la courbe $\overline{Y}_{équi.}(\omega)$.

9.12 À partir du quadripôle de la figure 9.59, formé de trois résistances R et d'une source de tension liée (avec k, un réel positif) :
1. Donner l'expression de la matrice admittance $\overline{Y}$;
2. Déterminer l'expression de la matrice admittance $\overline{Z}$ à partir de $\overline{Y}$.

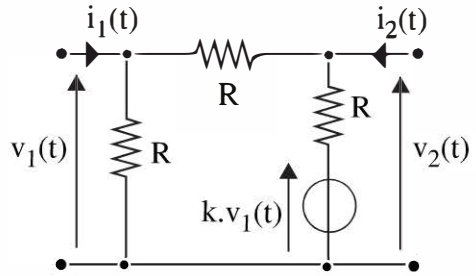


Figure 9.59

9.13 Soit le quadripôle de la figure 9.60.
1. Déterminer la matrice impédance $\overline{Z}$;
2. Déterminer les matrices admittance $\overline{Y}$ et hybride $\overline{H}$ à partir de la matrice $\overline{Z}$;
3. Dessiner les schémas électriques équivalents à partir des trois matrices ;

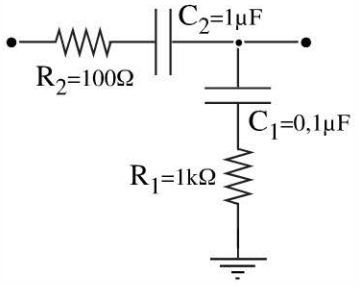


Figure 9.60

9.14 Le circuit de la figure 9.61 est un quadripôle passif RLC.
1. Déterminer $\overline{T}_v(j\omega)$ du quadripôle, sans impédance de charge ($\overline{Z}_{ch} \longrightarrow \infty$) ;
2. Déterminer les deux réels m et ω_0 pour $\overline{T}_v(j\omega) = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$;
3. Déterminer les expressions du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$;
4. Déterminer le diagramme asymptotique $(G(\omega), \varphi(\omega))$ et la pulsation de cassure ω_{cas} ;
5. Déterminer les pulsations ω_{max} pour lesquelles le gain est maximal.

9.15 En reprenant le quadripôle de la figure 9.61 :
1. Déterminer la transmittance en tension sous la forme $\overline{T}_v(j\omega) = K\dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$?
2. Déterminer le gain G_0 et le déphasage φ_0, ainsi que le diagramme et la pulsation de cassure $\omega_{cas\,0}$ de la fonction $\overline{T}_0(j\omega) = 1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}$;

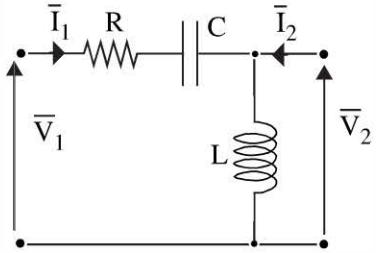


Figure 9.61

Copyright © 2007 Dunod.

3. Déterminer le diagramme asymptotique du gain et du déphasage de la fonction $\overline{T}_1(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ et la pulsation de cassure $\omega_{cas\,1}$;

4. Avec $\omega_1 > \omega_0$ et sachant que $\overline{T}_v(j\omega) = K \cdot T_0(j\omega) \cdot T_1(j\omega)$, déduire le tracé asymptotique du gain et du déphasage de $\overline{T}_v(j\omega)$.

9.16 Soit le quadripôle de la figure 9.62 :

1. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $H(p) = \dfrac{V_2(p)}{V_1(p)}$;

2. Déterminer m et ω_0 lorsque $H(p)$ est sous la forme $H(p) = A\dfrac{p}{1 + \dfrac{2m}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$;

3. On pose $m < 1$. Mettre $H(p)$ sous la forme $H(p) = K\dfrac{(p + z_0)}{(p + p_{10})(p + p_{11})}$ avec z_0 un zéro et p_{10}, p_{11} deux pôles complexes conjugués fonction de m et ω_0 ;

4. Représenter dans le plan d'Evans la fonction $H(p)$;

5. Déterminer la valeur du gain pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$ avec $K = 10$, $m = 0{,}5$ et $\omega_0 = 1$.

9.17 Soit le quadripôle de la figure 9.63, qui comporte deux sources liées ($B = 1$, $A = 1$, $R = 1\,\Omega$, $C = 1$ F et $L = 1$ H) :

1. Reprendre les questions de 1) à 3) de l'exercice 9.16 ;

2. Faire l'application numérique, puis tracer dans le lieu d'Evans la fonction $H(p)$;

3. Faire varier A dans l'intervalle]0,2].

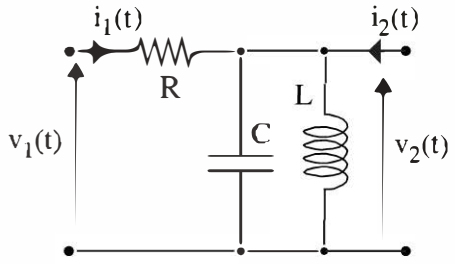


Figure 9.62

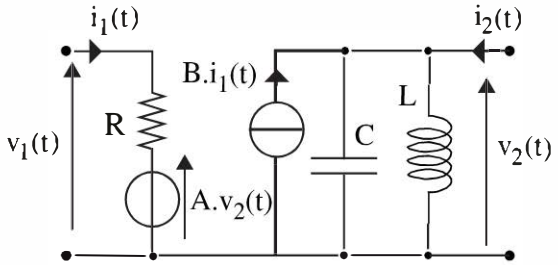


Figure 9.63

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 10

Étude en régime transitoire (RT)

Objectifs

- Présenter les conditions d'étude en régime transitoire (RT).
- Étudier les circuits du 1er et du 2e ordre en RT.
- Généraliser l'étude en RT des circuits du n-ième ordre.
- Modéliser les circuits sous la forme des systèmes d'état.
- Intégrer les conditions initiales (C.I.) dans la modélisation opérationnelle.

Vocabulaire

Régime libre – régime forcé
Régime transitoire – régime permanent
Solution homogène
Solution particulière
Solution de l'équation différentielle
Les états dans un circuit électrique
Modélisation sous forme d'état
Schéma opérationnel ou symbolique

Dans les chapitres précédents, les circuits électriques ont été étudiés en régime permanent. Ces régimes renferment l'idée d'une répétition à l'infini du motif des grandeurs électriques (continue, sinusoïdale ou périodique). Le régime transitoire tranche avec la notion de périodicité, car les grandeurs électriques ont alors une évolution éphémère entre un régime permanent initial et le nouveau régime permanent vers lequel elles tendent. On est en présence d'un RT lorsqu'il existe dans le circuit des composants qui modifient le graphe (par exemple des interrupteurs) ou encore, lorsqu'il existe une discontinuité dans le signal délivré par un générateur (par exemple des générateurs d'impulsions) : le RT est subordonné aux perturbations engendrées dans le circuit. D'une manière générale, les circuits électriques linéaires sont des **systèmes causals**, car les grandeurs électriques qu'ils renferment n'évoluent qu'à la suite des perturbations. Cependant, ils sont rarement identifiables à des **systèmes instantanés**, car ils intègrent généralement des inerties L et C, qui impliquent que le passé ($t < t_0$) a son importance dans l'évolution à venir. Pour toutes ces raisons, la modélisation mathématique des circuits en RT s'appuie sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Outre la mise en équation des circuits et leur résolution (directe ou par l'intermédiaire de la transformée de Laplace) ce chapitre propose une approche d'analyse des circuits sous l'angle des **systèmes d'état**.

Copyright © 2007 Dunod.

10.1 CONDITIONS D'ÉTUDE DES CIRCUITS EN RÉGIME TRANSITOIRE

Les chapitres précédents, traitant des régimes permanents, ont permis de définir des méthodologies d'études qui établissent les expressions des grandeurs électriques. Dans ces régimes permanents, les amplitudes ont des formes qui se reproduisent à l'infini.

Toutefois, ces méthodologies ne permettent en aucun cas de déterminer les grandeurs électriques lors de changements brusques dans le circuit.

Ces derniers apparaissent principalement lors :

– de changements dans l'agencement des dipôles : par exemple, par la fermeture ou l'ouverture d'interrupteurs, modifiant le graphe associé au circuit (nœuds et branches différents) ;

– de changements brusques de valeurs délivrées par les dipôles actifs du circuit : par exemple, à partir de **sources impulsionnelles**.

Ces modifications entraînent des **perturbations** dans le fonctionnement du circuit, qui sont généralement de courte durée, et qui relient le régime permanent initial précédant la perturbation, à un régime permanent final, qui suit la perturbation.

Pour étudier la conséquence de ces perturbations dans les circuits, il convient de résoudre les équations différentielles qui les représentent mathématiquement.

Cette résolution fait appel soit aux méthodes mathématiques de résolution directe des équations différentielles, soit à la transformation de Laplace (voir chapitre 7).

10.1.1 Changements brusques dans un circuit

➤ ***Perturbations issues d'interrupteurs***

Un interrupteur parfait est un composant électrique dans lequel, en position fermée aucune tension n'apparaît à ses bornes et dans lequel, en position ouverte le courant est nul (voir la caractéristique graphique d'un interrupteur figure 10.1a).

La fermeture ou l'ouverture de l'interrupteur d'un circuit produit une modification brusque du graphe associé (figure 10.1b) :

– quand l'interrupteur s'ouvre, il rompt un courant dans un fil ; le graphe associé se transforme alors en supprimant toutes les branches en série avec ce fil ;

– quand l'interrupteur se ferme, il crée un nouveau chemin dans le graphe, dans lequel un courant circulera librement.

Sachant que le système d'équations résulte d'une mise en équation à partir du graphe, chaque commutation d'interrupteur conduit à un nouveau système d'équations, qui entraîne irrémédiablement de nouvelles valeurs de courants et de tensions.

Copyright © 2007 Dunod.

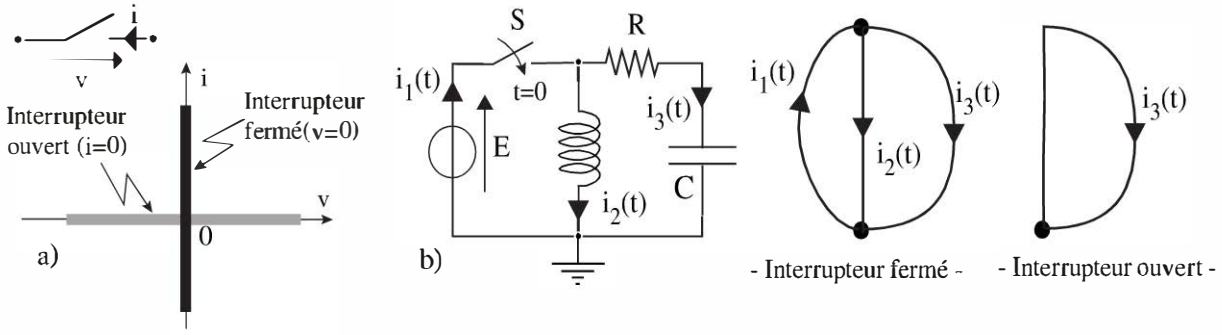


Figure 10.1

➤ ***Perturbations issues de sources impulsionnelles***

Une source impulsionnelle est un dipôle actif dont l'amplitude passe instantanément d'une valeur à une autre (figure 10.2). Il existe plusieurs sources impulsionnelles : impulsion unique en fonction du temps ou impulsions périodiques (sources de signaux carrés ou rectangulaires). La discontinuité entre les différentes valeurs de la source crée une perturbation dans le circuit.

On sait (depuis le chapitre 5) que les équations du circuit intègrent un second membre formé par les expressions des dipôles actifs. Chaque changement d'amplitude des sources impulsionnelles produit alors un nouveau système d'équations qui tend vers de nouvelles grandeurs d'équilibre.

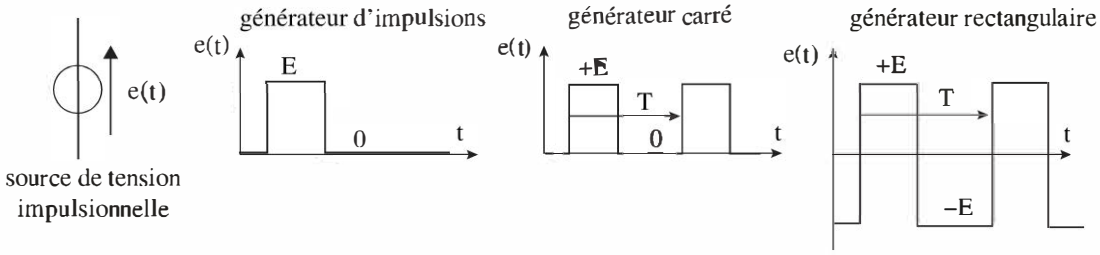


Figure 10.2

Les sources impulsionnelles (parfois périodiques) sont des sources qui produisent des changements instantanés dans les valeurs des coefficients du second membre des équations du système.

10.1.2 Équations différentielles associées au circuit

Les équations qui représentent les circuits électriques linéaires, sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants de la forme :

$A_n \dfrac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \dfrac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f(t)$ avec $f(t)$, une fonction qui rassemble les sources contenues dans le circuit, et avec des coefficients A_i qui sont fonction des valeurs des dipôles R, L, C et qui tiennent compte de leur agencement dans le circuit électrique.

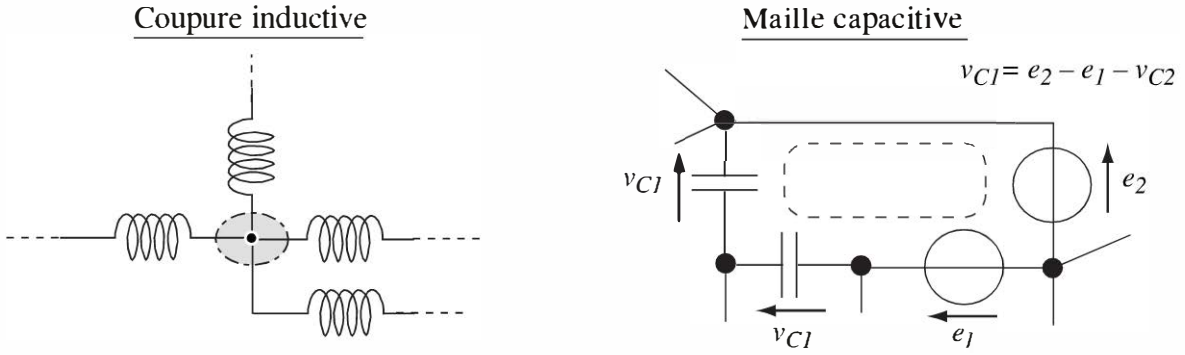
Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Ordre du système*

Les seuls dipôles qui apportent l'opérateur différentiel sont les condensateurs C et les inductances L. Une relation différentielle est ajoutée au système pour chacun de ces dipôles. La notion **d'ordre du système différentiel** est alors étroitement liée au nombre des composants passifs L et C au sein du circuit.

Intuitivement, on s'attend à ce que l'ordre du système soit donné par le nombre des condensateurs et des inductances présents dans le circuit électrique. Toutefois, ce nombre n'exprime que la valeur de l'ordre maximal du système car en réalité, certaines équations étant liées, l'ordre se réduit. C'est par exemple le cas lorsque l'on rencontre des inductances en série, assimilables pour le système d'équations, à une seule inductance. (Cas identique pour des condensateurs en parallèle).

Deux autres cas plus subtils, réduisent l'ordre d'un système : il s'agit de la « coupure inductive » (figure 10.3a) et de la « maille capacitive » (figure 10.3b).



a) 4 branches incidentes au nœud comportent une inductance en série

b) La maille comporte 4 branches composées de condensateurs ou de sources de tension

Figure 10.3

La loi des nœuds supprime l'indépendance entre les courants des branches incidentes d'une coupure inductive. Les courants inductifs ne constituent plus des variables indépendantes.

De même, la loi des mailles supprime l'indépendance des tensions des branches d'une maille capacitive – où toutes les branches possèdent entre leurs extrémités un condensateur ou une source de tension –.

L'ordre n du système d'équations différentielles est conditionné par le nombre total des dipôles indépendants L et C.

➤ *Équation différentielle homogène*

On définit **l'équation homogène** associée à l'équation différentielle, l'expression $A_n \dfrac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \dfrac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = 0$. Cette équation représente le même circuit que l'équation différentielle complète, mais avec ses sources éteintes puisque $f(t) = 0$.

Copyright © 2007 Dunod.

10.1.3 Comportement général des circuits en RT

L'évolution des grandeurs électriques dans un circuit électrique linéaire, dont l'énergie provient des C.I. et des dipôles actifs, est guidée par le **principe de linéarité** de la physique. L'évolution des tensions et des courants provient alors de la superposition des **régimes libre et forcé**.

➤ ***Régime libre***

L'étude d'un circuit électrique en régime libre, revient à résoudre les équations homogènes du système car, par définition, dans ce régime toutes les sources du circuit sont éteintes.

L'évolution des grandeurs électriques est donc conditionnée par l'écoulement de l'énergie initialement stockée W dans le circuit entre les inductances ($W = \frac{1}{2}Li^2$) et les condensateurs ($W = \frac{1}{2}Cv^2$).

> L'énergie électrique qui s'écoule, tend à s'amenuiser lors du passage dans les résistances électriques en se transformant en chaleur. La transformation de toute l'énergie stockée en chaleur implique des courants et des tensions éphémères.

L'annulation progressive de l'énergie entraîne des formes d'ondes qui sont :

– des exponentielles pour les circuits du premier ordre (figure 10.4a) ;
– des oscillations sinusoïdales amorties ou des exponentielles pour un circuit d'ordre égal ou supérieur à deux (figure 10.4a, b, c).

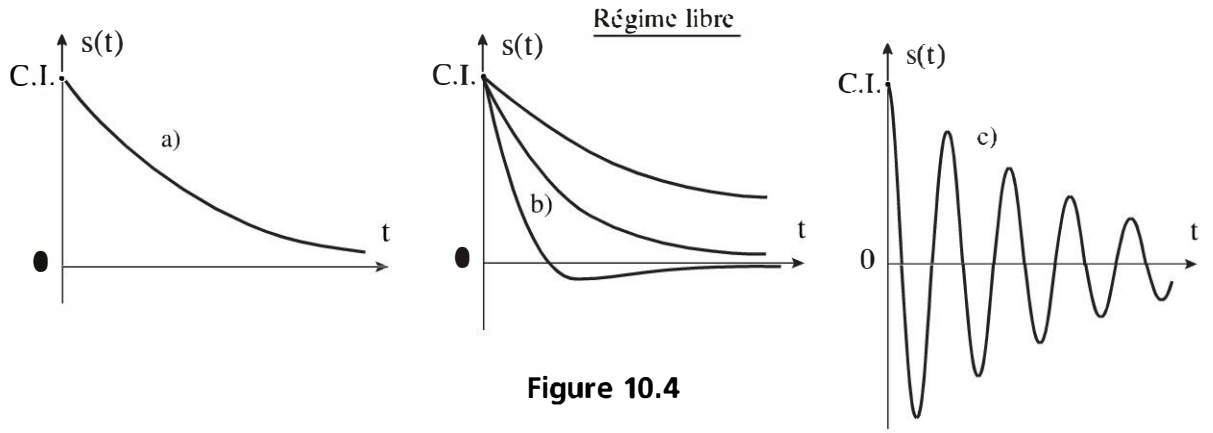


Figure 10.4

➤ ***Régime forcé***

En régime forcé, le circuit est considéré sans énergie initiale stockée : les C.I. sont toutes nulles. L'évolution des courants et des tensions dépend alors essentiellement de l'excitation produite par les sources.

> À terme, l'énergie apportée en permanence par les sources entretient un régime permanent dans le circuit.

Toutefois, entre l'instant initial où toutes les grandeurs électriques sont nulles et le moment où le régime permanent est atteint (figure 10.5), il existe une évolution transitoire des tensions et des courants dans le circuit.

Copyright © 2007 Dunod.

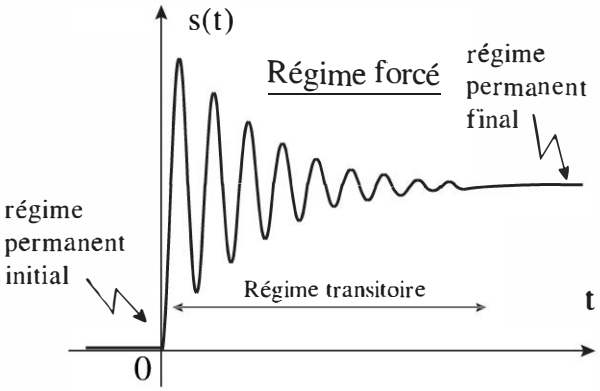


Figure 10.5

➤ ***Évolution des grandeurs électriques en régime transitoire***

La résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants aboutit à une solution (Sol) qui est calculée en superposant les régimes libre et forcé. Généralement, trois étapes sont nécessaires pour établir la solution :

– la détermination de la solution générale du régime libre, obtenue à partir de l'équation homogène (Sol_h) ;

– la détermination d'une solution particulière, donnée par exemple par la solution du régime permanent, imposée par le régime forcé (Sol_p) ;

– l'utilisation des C.I. pour faire coïncider la solution avec les valeurs initiales.

Le mécanisme de résolution est traduit par l'expression :

$$\boxed{Sol = [Sol_h + Sol_p]_{+C.I.}}$$

10.2 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DU 1er ET DU 2e ORDRE

10.2.1 Circuit représenté par une équation du 1er ordre

➤ ***Recherche de la solution finale***

Comme le paragraphe précédent l'a montré, un circuit représenté par une équation différentielle du 1er ordre possède une inertie (un condensateur ou une inductance).

Les circuits électriques du 1er ordre les plus courants sont les circuits du type RC ou RL. Les dipôles R et C (ou R et L) sont connectés soit en série, soit en parallèle et sont alimentés en général par une seule source de tension ou de courant.

L'équation différentielle qui représente ces circuits est de la forme $A_1 \dfrac{di_p(t)}{dt} + A_0 i_p(t) = f(t)$, où $i(t)$ est un courant de branche et on rappelle que $f(t)$ regroupe la (ou les) source(s) qui alimente(nt) le circuit électrique.

Supposons connaître une solution particulière $i_p(t)$ à cette équation, alors :

$$A_1 \frac{di_p(t)}{dt} + A_0 i_p(t) = f(t)$$

Copyright © 2007 Dunod.

Retranchons cette expression à l'équation différentielle :

$$A_1\frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) - \left(A_1\frac{di_p(t)}{dt} + A_0 i_p(t)\right) = f(t) - f(t) = 0$$

$$\Longrightarrow A_1\frac{d\left(i(t) - i_p(t)\right)}{dt} + A_0\left(i(t) - i_p(t)\right) = 0$$

En posant la solution $i(t)$ sous la forme $i(t) = i_p(t) + x(t)$, alors l'équation s'écrit :

$$A_1\frac{dx(t)}{dt} + A_0 x(t) = 0$$

Cette équation est une **équation homogène** ($f(t) = 0$). Soit $i_h(t)$ la solution de cette équation.

En résumé, la solution $i(t)$ de l'équation différentielle est la somme d'une solution particulière $i_p(t)$ et d'une solution de l'équation homogène, notée $i_h(t)$. On retrouve le résultat déjà énoncé dans le paragraphe précédent.

• Solution de l'équation différentielle homogène (régime libre)

L'équation homogène $A_1\frac{di_h(t)}{dt} + A_0 i_h(t) = 0$ produit une famille de solutions, d'équation générale :

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{A_0}{A_1}dt \Longrightarrow \int\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{A_0}{A_1}\int dt + C \Longrightarrow \ln\left(i(t)\right) = -\frac{A_0}{A_1}t + C$$

$$\Longrightarrow \boxed{i_h(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}}$$

$i_h(t)$ est la **solution générale de l'équation homogène**.

Dans le cas particulier où l'équation différentielle du circuit $A_1\frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f(t)$ est elle-même une équation homogène ($f(t) = 0$), alors la solution unique est obtenue en intégrant la C.I. dans la solution générale de l'équation homogène.

Par exemple : avec $i(0) = i_0$, on obtient la solution en calculant :

$$i(0) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\Big]_{t\to 0} = K = i_0, \text{ qui entraîne } i(t) = i_0\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}.$$

• Solution particulière de l'équation différentielle (régime forcé)

La forme de la solution particulière est en général connue pour un électricien expérimenté, mais elle peut être aussi recherchée à partir de la méthode proposée par le mathématicien français Joseph Louis Lagrange (XVIIIe siècle) aussi connue comme la méthode de la **variation de la constante** de Lagrange.

On recherche par cette méthode une solution $i(t)$ de la forme :

$$i(t) = K(t)\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}$$

Copyright © 2007 Dunod.

qui s'apparente à la solution générale de l'équation homogène mais où la fonction $K(t)$ remplace la constante K.

En intégrant la solution dans l'équation différentielle, il vient :

$$A_1 \frac{d\left(K(t)\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\right)}{dt} + A_0 K(t)\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} = f(t)$$

En dérivant, on obtient $A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\frac{dK(t)}{dt} + K(t)\left(A_1\frac{d\left(\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\right)}{dt} + A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\right) = f(t)$.

Sachant que $\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}$ est solution de l'équation homogène (avec $K = 1$), on obtient alors :

$$A_1\frac{d\left(\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\right)}{dt} + A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} = 0.$$

En rassemblant les deux dernières expressions et après simplification, on obtient l'équation $A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\frac{dK(t)}{dt} = f(t) \Longrightarrow K(t) = \frac{1}{A_1}\int \mathrm{e}^{\frac{A_0}{A_1}t} f(t)dt + k$

La solution a pour expression :

$$i(t) = K(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} = \frac{1}{A_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\int \mathrm{e}^{\frac{A_0}{A_1}t} f(t)dt + k\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}$$

Sachant que $i_h(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}$, on peut alors écrire :

$$\boxed{i_p(t) = \frac{1}{A_1}\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\int \mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} f(t)dt}$$

• En résumé

La solution générale de l'équation différentielle du circuit est la somme de la solution générale de l'équation homogène, et d'une solution particulière.

$$\boxed{i(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} + \frac{1}{A_1}\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t}\int \mathrm{e}^{\frac{A_0}{A_1}t} f(t)dt}$$

La prise en compte de la C. I. $i(0)$ imposera la valeur de la constante K et déterminera la solution unique de l'équation différentielle du circuit.

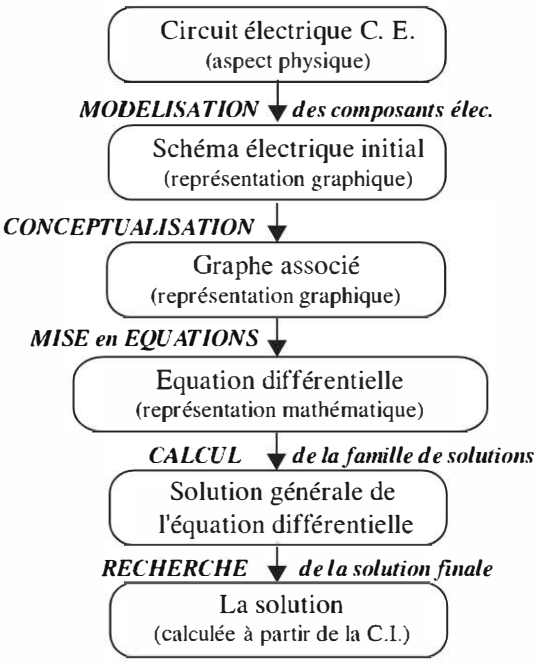


Figure 10.6

La méthodologie d'étude des circuits électriques en régime transitoire à partir d'une modélisation sous forme d'équation différentielle du 1er ordre est résumée par l'algorithme de la figure 10.6.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Exemples des circuits RC***

• Circuit RC alimenté par une source continue

L'équation de la maille du circuit (figure 10.7) $E - v_R(t) - v(t) = 0$ et les équations des dipôles $v_R(t) = Ri(t)$, $q(t) = Cv(t)$ et $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ entraînent l'équation différentielle du courant dans la boucle :

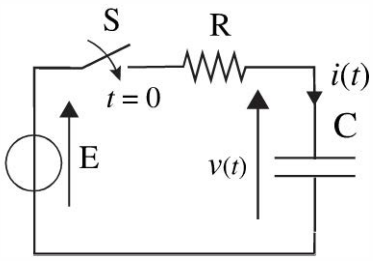


Figure 10.7

$$E - v_R(t) - v(t) = 0 \Longrightarrow E - Ri(t) - \frac{q(t)}{C} = 0$$

qui, en dérivant, aboutit à :

$$\boxed{RC\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{dE}{dt} = 0} \quad \text{(avec } E\text{, une constante)}$$

qui est une équation homogène puisque $f(t) = 0$.

Après identification avec l'équation générale des circuits du 1er ordre, on obtient $A_0 = 1$, $A_1 = \dfrac{1}{RC}$. L'étude menée dans le paragraphe précédent donne la solution générale de l'équation homogène $i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}t} = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

Parce que l'équation différentielle du circuit est aussi une équation homogène, la détermination de la solution finale s'obtient en intégrant directement la C.I. $\left(i(0) = i_0 = \dfrac{E - v(0)}{R}\right)$ dans la solution générale de l'équation homogène ; d'où $i(0) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{A_0}{A_1}0} = K$. La solution est alors :

$$\boxed{i(t) = i_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$$

Cette expression permet de déterminer aussi les autres grandeurs électriques :

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt + q(0) = RCi_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + q(0) \text{ avec } i_0 = \frac{E - v(0)}{R}$$

$$\text{et } q(t) = Cv(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{q(t) = CE\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + q_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}} \text{ et } \boxed{v(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + v_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$$

Les courbes $i(t)$ et $v(t)$ sont tracées à la figure 10.10a.

• Circuit RC alimenté par une source sinusoïdale

La maille du schéma de la figure 10.8 a pour équation $e(t) - v_R(t) - v(t) = 0$, avec $e(t) = \hat{E}\cos(\omega t + \alpha)$. Avec les mêmes équations pour les dipôles passifs que le schéma précédent (figure 10.2a) on obtient :

Copyright © 2007 Dunod.

$$e(t) - v_R(t) - v(t) = 0 \Longrightarrow e(t) - R\,i(t) - \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{RC\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{de(t)}{dt}}$$

(équation différentielle avec second membre).

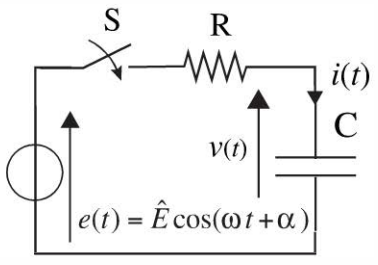


Figure 10.8

On a $A_1 = RC$ et $A_2 = 1$; d'où la solution générale $i(t)$ de l'équation :

$$i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \int \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} C\frac{de(t)}{dt}\right) dt$$

En développant, on obtient :

$$i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \int \mathrm{e}^{\frac{t}{RC}} C\omega\hat{E}\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) dt = i_h(t) + i_p(t)$$

En intégrant deux fois par partie et en posant $\tan\beta = \dfrac{1}{RC\omega}$, on aboutit à :

$$i_p(t) = C\omega\hat{E}\frac{RC\omega\cos(\omega t + \alpha) - \sin(\omega t + \alpha)}{1 + (RC\omega)^2} = \frac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\omega t + \alpha + \beta)$$

La solution générale devient $i(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \dfrac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\omega t + \alpha + \beta)$.

En déterminant K à partir de la C.I. $i(0) = i_0$, soit $i_0 = K + \dfrac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\alpha+\beta)$;

la solution unique devient (figure 10.10b) :

$$\boxed{i(t) = \left(i_0 - \frac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\alpha + \beta)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\omega t + \alpha + \beta)}\,.$$

Dans cette solution, le terme « $\left(i_0 - \dfrac{C\omega\hat{E}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\alpha + \beta)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ » est transitoire, car disparaît lorsque $t \to \infty$, et le terme « $\dfrac{C\omega\hat{E}\cos(\omega t + \alpha + \beta)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ » est la solution du régime permanent alternatif sinusoïdal – qui aurait aussi pu être obtenu à partir d'une étude en RPCA –.

• Circuit RC alimenté par une impulsion

La mise en équation du circuit de la figure 10.9, est particularisée suivant l'intervalle de temps considéré.

Copyright © 2007 Dunod.

Dans l'intervalle $[0,t_1]$ l'équation différentielle complète $RC\dfrac{di(t)}{dt}+i(t)=C\dfrac{de(t)}{dt}=0$ est nulle car $e(t)=E$. La solution est $i(t)=i_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ $=\dfrac{E-v(0)}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ où la C.I. $i(0)$ est imposée par $v(0)$. On tire l'expression de la tension $v(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+v(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}$.

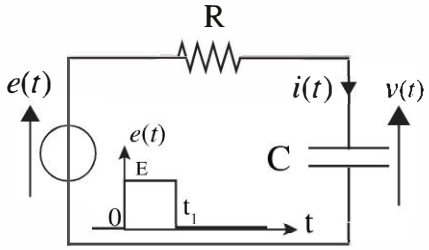


Figure 10.9

Dans l'intervalle $]t_1,\infty[$, l'équation différentielle est la même $RC\dfrac{di(t)}{dt}+i(t)=0$, car $e(t)=0$. La solution est alors $i(t)=i_1 e^{-\frac{(t-t_1)}{RC}}$ avec la C.I. $i_1=i(t_1^+)=\dfrac{-v(t_1)}{R}$ avec $v(t_1)=$ $E\left(1-e^{-\frac{t_1}{RC}}\right)+v(0)\,e^{-\frac{t_1}{RC}}$. La solution finale est donc $i(t)=\dfrac{e^{-\frac{t}{RC}}}{R}\left(v_0+E\left(e^{\frac{t_1}{RC}}-1\right)\right)$; en calculant la tension $v(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_1}^{t} i(t)d(t)=v(t_1)e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$.

À l'instant $t=t_1$, sachant que la tension aux bornes d'un condensateur n'admet aucune discontinuité (voir partie 1), on obtient $v(t_1^+)=v(t_1^-)=v(t_1)$ d'où $i(t_1^+)=\dfrac{-v(t_1)}{R}\neq i(t_1^-)=\dfrac{E-v(t_1)}{R}$; il existe une discontinuité sur $i(t)$ (figure 10.10c).

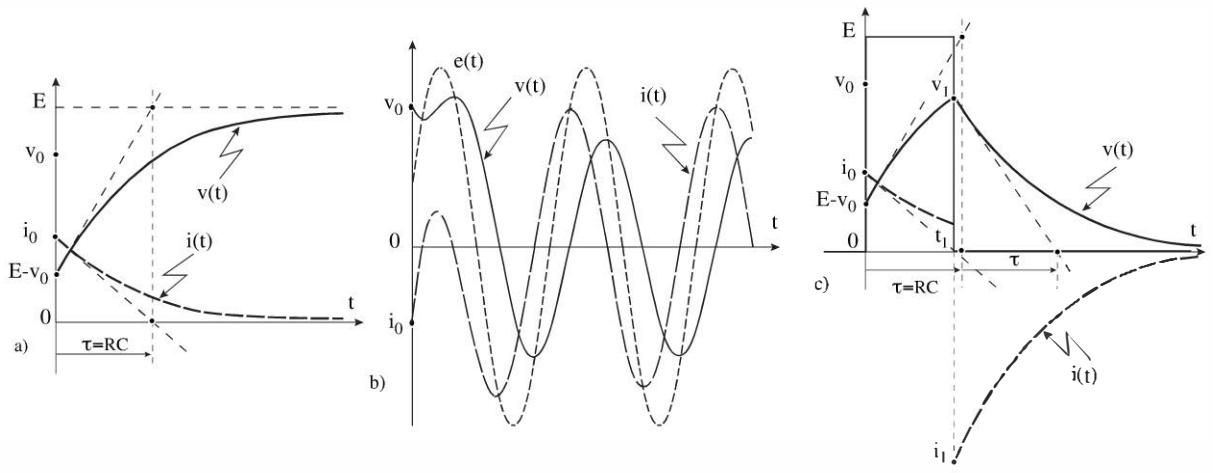


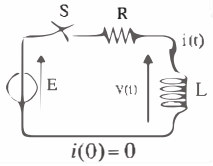
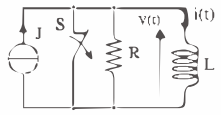
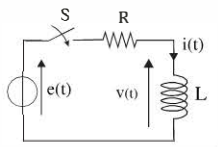
Figure 10.10

➤ *Exemples des circuits RL*

Le tableau 10.1 résume l'étude réalisée à partir d'un circuit RL alimenté par trois types de sources différentes. La mise en équation et la résolution utilisent les mêmes méthodes que pour l'étude du circuit RC.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 10.1

Dipôle passif RL	Equation différentielle	Equation homogène et solution générale	Solution particulière	La solution
avec une source de tension continue  $i(0)=0$	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)=\frac{E}{R}$ $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ $\phi(t)=L\,i(t)$ (éq. du flux dans L)	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$ $i(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$	$K(t)=\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+k$ $i(t)=\frac{E}{R}$	$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $\phi(t)=\frac{LE}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $v(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=Ee^{-\frac{R}{L}t}$
avec une source de courant continue  $i(0)=i_0$	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)=J$ $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ $\phi(t)=L\,i(t)$ (éq. du flux dans L)	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$ $i(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$	$K(t)=Je^{\frac{R}{L}t}$ $i(t)=J$	$i(t)=J\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $\phi(t)=LJ\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $v(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=Ee^{-\frac{R}{L}t}$
avec une source de tension sinusoïdale  $e(t)=\hat{E}\cos(\omega t+\alpha)$	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)$ $=\frac{\hat{E}\cos(\omega t+\alpha)}{R}$ $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ $\phi(t)=L\,i(t)$ (éq. du flux dans L)	$\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$ $i(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$	$K(t)=\frac{\hat{E}e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t+\alpha-\varphi)}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}+k$ $i(t)=\frac{\hat{E}\cos(\omega t+\alpha-\varphi)}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$ $\varphi=\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$	$i(t)=\frac{\hat{E}\cos(\omega t+\alpha-\varphi)}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $\phi(t)=\frac{L\hat{E}\cos(\omega t+\alpha-\varphi)}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ $v(t)=\frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$ $\times\left(\frac{L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2}}\cos(\omega t+\alpha)\right.$ $\left.+\cos(\omega t+\alpha-\varphi)\right)$

Remarque : Dans le cas des schémas avec une source de tension continue la C.I. est forcément $i(0) = 0$ A, car avant la fermeture (à $t = 0^-$) l'interrupteur est ouvert et juste après (à $t = 0^+$) l'inductance s'oppose à la discontinuité du courant.

10.2.2 Circuits représentés par une équation du 2e ordre

Les circuits électriques modélisés par une équation différentielle du 2e ordre comportent forcément deux inerties. On retrouve ici tous les circuits qui comportent soit deux condensateurs indépendants, soit deux inductances indépendantes, soit deux dipôles L et C. L'équation différentielle est linéaire, tous ses coefficients sont constants et elle possède en général un second membre $f(t)$. L'équation est de la forme :

$$A_2\frac{d^2i(t)}{dt^2}+A_1\frac{di(t)}{dt}+A_0i(t)=f(t)$$

L'équation homogène linéaire à coefficients constants ($f(t) = 0$) associée à cette équation est :

$$A_2\frac{d^2i(t)}{dt^2}+A_1\frac{di(t)}{dt}+A_0i(t)=0$$

Copyright © 2007 Dunod.

Théorème : la solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants est la somme de la solution générale de l'équation homogène $i_h(t)$ et d'une solution particulière $i_p(t)$: $\boxed{i(t) = i_h(t) + i_p(t)}$. La détermination de la solution unique $i(t)$ de l'équation du 2e ordre nécessite cette fois-ci deux C.I.

➤ ***Recherche de la solution générale de l'équation homogène, $i_h(t)$***

Les mathématiques indiquent que l'équation homogène admet des solutions particulières de la forme $i_h(t) = e^{rt}$, où r est une constante.

Une solution de cette forme insérée dans l'équation homogène produit, après développement, l'égalité $e^{rt}(A_2r^2 + A_1r + A_0) = 0$; elle ne peut être satisfaite (quel que soit t) que si le polynôme de degré deux $(A_2r^2 + A_1r + A_0)$ admet au moins une racine. L'équation $A_2r^2 + A_1r + A_0 = 0$ est appelée **l'équation caractéristique** associée à l'équation homogène, dont les racines dépendent du discriminant $\Delta = A_1^2 - 4A_2A_0$.

La solution générale $i_h(t)$ de l'équation homogène dépend des solutions particulières, qui sont fonction des racines de l'équation caractéristique.

• Recherche de la solution générale $i_h(t)$ dans le cas où $\Delta \neq 0$

Lorsque le discriminant est différent de zéro, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes et la solution générale de l'équation homogène $i_h(t)$ devient une combinaison linéaire des deux solutions particulières $\boxed{i_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}}$ avec λ_1 et λ_2 deux paramètres constants.

Dans le cas où le discriminant est négatif ($\Delta < 0$), les deux racines sont complexes conjuguées de la forme $r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ [1] et les deux paramètres deviennent eux aussi complexes conjugués $\lambda_{1,2} = A \pm jB$. La solution $i_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ s'écrit alors :

$$i_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} = e^{\alpha t}\left((A + jB)e^{j\beta t} + (A - jB)e^{-j\beta t}\right)$$

$$i_h(t) = e^{\alpha t}\left(A(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + jB\left(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}\right)\right) = e^{\alpha t}\left(2A\cos(\beta t) - 2B\sin(\beta t)\right)$$

$$\boxed{i_h(t) = e^{\alpha t}\left(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\right)}$$

• Recherche de la solution générale $i_h(t)$ dans le cas où $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet une racine double $A_2r^2 + A_1r + A_0 = (r - r_1)^2 = 0$, avec $r_1 = \dfrac{-A_1}{2A_2}$. On ne connaît alors qu'une solution particulière de l'équation homogène $e^{r_1 t}$.

[1] Les deux racines sont réelles $r_{1,2} = \dfrac{-A_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2A_2}$ ou complexes $r_{1,2} = \dfrac{-A_1 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2A_2} = \alpha \pm j\beta$.

Copyright © 2007 Dunod.

Les mathématiques indiquent alors que la solution générale de l'équation homogène peut être recherchée à partir de la solution précédente, en posant $i_h(t) = e^{r_1 t} \cdot s(t)$. Cette expression entraîne :

$$\frac{di_h(t)}{dt} = e^{r_1 t}\left(rs(t) + \frac{ds(t)}{dt}\right) \text{ et } \frac{d^2 i_h(t)}{dt^2} = e^{r_1 t}\left(r_1^2 s(t) + 2r_1 \frac{ds(t)}{dt} + \frac{d^2 s(t)}{dt^2}\right)$$

En intégrant ces relations dans l'équation homogène, on obtient :

$$(A_2 r_1^2 + A_1 r_1 + A_0)s(t) + (2A_2 r_1 + A_1)\frac{ds(t)}{dt} + A_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0$$

Sachant que $A_2 r_1^2 + A_1 r_1 + A_0 = 0$ (r_1 est racine du polynôme), et sachant qu'après dérivation on a $2A_2 r_1 + A_1 = 0$, alors on obtient :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0 \Longrightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \lambda_1 \Longrightarrow s(t) = \lambda_1 t + \lambda_2$$

D'où la solution générale de l'équation homogène :

$$\boxed{i_h(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_1 t}}$$

➤ ***Recherche de la solution particulière $i_p(t)$***

La solution de l'équation est déterminée suivant deux principes : soit la forme de la solution particulière est connue (méthode avec *a priori*), soit elle ne l'est pas (méthode sans *a priori*).

• **Méthode avec *a priori***

Cette méthode nécessite d'avoir une expérience des circuits électriques. Toutefois, lorsque les circuits ne possèdent qu'une source (de tension ou de courant) du type continu ou du type sinusoïdal, alors la solution particulière $i_p(t)$ est soit une constante inconnue, soit une sinusoïde d'amplitude et de phase inconnues.

Par exemple, l'équation du 2e ordre $A_2 \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + A_1 \frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = \hat{S}\cos(\omega t)$ avec un second membre sinusoïdal, a une solution particulière sinusoïdale de la forme $i_p(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$.

Après dérivation et en intégrant cette solution dans l'équation, on aboutit à :

$$-A_2 \hat{I}\omega^2 \cos(\omega t + \beta) - A_1 \hat{I}\omega \sin(\omega t + \beta) + A_0 \hat{I}\cos(\omega t + \beta) = \hat{S}\cos(\omega t)$$

d'où :

$$(-A_2 \hat{I}\omega^2 + A_0 \hat{I})\cos(\omega t + \beta) - A_1 \hat{I}\omega \sin(\omega t + \beta) = \hat{S}\cos(\omega t)$$

qui implique :

$$\hat{I} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{(-A_2\omega^2 + A_0)^2 + (A_1\omega)^2}} \text{ et } \arctan(\beta) = \frac{A_1\omega}{-A_0 + A_2\omega^2}$$

Copyright © 2007 Dunod.

• **Méthode sans *a priori***

Lorsque la structure du circuit ne permet pas de déterminer *a priori* la solution particulière, alors la solution générale $i(t)$ se recherche par la méthode dite des « deux quadratures » ou méthode de Lagrange (ou « variation de la constante »).

La solution générale devient alors $i(t) = \lambda_1(t)i_1(t) + \lambda_2(t)i_2(t)$ où $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène.

En dérivant la solution générale $i(t)$ par rapport à la variable t, on obtient :

$$\frac{di(t)}{dt} = \lambda_1(t)\frac{di_1(t)}{dt} + \lambda_2(t)\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{d\lambda_1(t)}{dt}i_1(t) + \frac{d\lambda_2(t)}{dt}i_2(t).$$

Si on impose aux deux variables $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ de respecter la condition $\boxed{\frac{d\lambda_1(t)}{dt}i_1(t) + \frac{d\lambda_2(t)}{dt}i_2(t) = 0}$, alors on obtient après une nouvelle dérivation $\frac{d^2i(t)}{dt^2} = \frac{d\lambda_1}{dt}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{d\lambda_2}{dt}\frac{di_2(t)}{dt} + \lambda_1\frac{d^2i_1(t)}{dt^2} + \lambda_2\frac{d^2i_2(t)}{dt^2}$. Puis en reportant les dérivées successives dans l'équation différentielle $A_2\frac{d^2i(t)}{dt^2} + A_1\frac{di(t)}{dt} + A_0i(t) = f(t)$, on obtient une nouvelle équation $\boxed{A_2\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{d\lambda_2}{dt}\frac{di_2(t)}{dt}\right) = f(t)}$.

Les deux équations précédentes écrites sous forme vectorielle, conduisent à :

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ \frac{di_1}{dt} & \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d\lambda_1}{dt} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{A_2} \end{bmatrix}$$, dont les variables sont $\frac{d\lambda_1(t)}{dt}$ et $\frac{d\lambda_2(t)}{dt}$.

D'autre part, sachant que $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont deux solutions indépendantes, le déterminant de la matrice est non nul ; d'où $i_1(t)\frac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)\frac{di_1(t)}{dt} \neq 0$.

Par la méthode de Cramer, les deux solutions s'écrivent :

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = \frac{-i_2(t)\frac{f(t)}{A_2}}{i_1(t)\frac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)\frac{di_1(t)}{dt}} = m(t) \text{ et } \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = \frac{i_1(t)\frac{f(t)}{A_2}}{i_1(t)\frac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)\frac{di_1(t)}{dt}} = n(t);$$

d'où $\lambda_1(t) = \int m(t)d(t) + \lambda_1$ et $\lambda_2(t) = \int n(t)d(t) + \lambda_2$, avec λ_1 et λ_2 deux paramètres constants. La solution générale de l'équation différentielle est alors $i(t) = \lambda_1 i_1(t) + \lambda_2 i_2(t) + i_1(t)\int m(t)d(t) + i_2(t)\int n(t)d(t)$. Sachant que le terme $\lambda_1 i_1(t) + \lambda_2 i_2(t)$ est la solu-

Copyright © 2007 Dunod.

tion générale de l'équation homogène, alors la solution particulière recherchée de l'équation différentielle est :

$$\boxed{i_p(t) = i_1(t)\int m(t)d(t) + i_2(t)\int n(t)d(t)}$$

Par exemple, la recherche de la solution particulière $i_p(t)$ de l'équation différentielle du paragraphe précédent $A_2\dfrac{d^2i(t)}{dt^2} + A_1\dfrac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = \hat{S}\cos(\omega t)$, à partir des deux solutions générales de l'équation homogène $i_1(t) = e^{r_1 t}$ et $i_2(t) = e^{r_2 t}$ (où r_1 et r_2 sont deux racines réelles) est donnée par :

$$m(t) = \frac{-i_2(t)\dfrac{f(t)}{A_2}}{i_1(t)\dfrac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)\dfrac{di_1(t)}{dt}} = \frac{-e^{r_2 t}\hat{S}\cos(\omega t)/A_1}{e^{r_1 t}(r_2 e^{r_2 t}) - e^{r_2 t}(r_1 e^{r_1 t})} = \frac{\hat{S}\cos(\omega t)}{A_2 e^{r_1 t}(r_1 - r_2)}, \text{ et}$$

$$i_1(t)\int m(t)d(t) = e^{r_1 t}\int \frac{\hat{S}\cos(\omega t)}{A_2 e^{r_1 t}(r_1 - r_2)}dt = \frac{\hat{S}}{A_2(r_1 - r_2)\omega - r_1^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{r_1}{\omega}\cos(\omega t)\right)$$

$$n(t) = \frac{i_1(t)\dfrac{f(t)}{A_2}}{i_1(t)\dfrac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)\dfrac{di_1(t)}{dt}} = \frac{e^{r_1 t}\hat{S}\cos(\omega t)/A_2}{e^{r_1 t}(r_2 e^{r_2 t}) - e^{r_2 t}(r_1 e^{r_1 t})} = \frac{\hat{S}\cos(\omega t)}{A_2 e^{r_2 t}(r_2 - r_1)}, \text{ et}$$

$$i_2(t)\int n(t)d(t) = \frac{\hat{S}}{A_2(r_1 - r_2)(\omega - r_2^2)}\left(\frac{r_2}{\omega}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right)$$

On obtient alors la forme de la solution particulière de l'équation différentielle :

$$i_p(t) = \frac{\hat{S}}{A_2(r_1 - r_2)}\left(\left(\frac{1}{\omega - r_1^2} - \frac{1}{\omega - r_2^2}\right)\sin(\omega t) + \left(\frac{1}{\omega - r_2^2}\frac{r_2}{\omega} - \frac{1}{\omega - r_1^2}\frac{r_1}{\omega}\right)\cos(\omega t)\right)$$

qui s'écrit aussi :

$$i_p(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta) \text{ avec } \hat{I} = g(r_1, r_2, \omega, A_2, \hat{S}) \text{ et } \tan(\beta) = g(r_1, r_2, \omega)$$

Remarque : Cette méthode est assez fastidieuse et est à n'employer qu'en dernier recours. Toutefois, elle conduit immanquablement à la solution.

➤ *Exemple d'un circuit RLC série*

Le circuit de la figure 10.11 génère l'équation de maille $E - v_R(t) - v_L(t) - v_C(t) = 0$, qui, à partir des équations des dipôles RLC ($v_R(t) = Ri(t)$, $q(t) = Cv(t)$ et $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$) permet d'établir l'équation différentielle homogène $\boxed{LC\dfrac{d^2i(t)}{dt^2} + RC\dfrac{di(t)}{dt} + i(t) = 0}$.

Copyright © 2007 Dunod.

Par identification, on a $A_0 = 1$, $A_1 = RC$ et $A_2 = LC$.

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $LCr^2 + RCr + 1 = 0$, dont le signe du discriminant $\Delta = (RC)^2 - 4LC$, impose la valeur des racines et la forme de la solution générale de l'équation homogène.

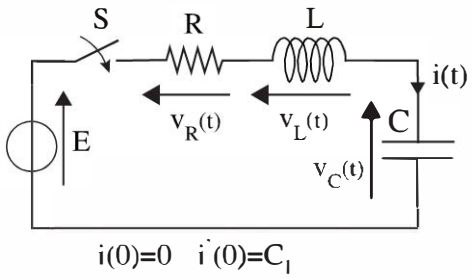


Figure 10.11

Suivant le discriminant, on a :

– pour $\Delta > 0$: deux racines réelles $r_{1,2} = \dfrac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}$; la solution générale est $i(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$;

– pour $\Delta = 0$: une racine double $r_1 = \dfrac{-R}{2L}$ et $i(t) = e^{r_1 t}(\lambda_1 t + \lambda_2)$;

– pour $\Delta < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-R}{2L} \pm j\dfrac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} = \alpha \pm j\beta$, produit deux complexes conjugués avec $i(t) = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))$.

Les deux conditions initiales sur le courant $i(0) = 0$ et $i'(0) = C_1$, permettent de déterminer les deux constantes inconnues (suivant Δ), puis la solution finale :

– pour $\Delta > 0$: $i(0) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $i'(0) = C_1$

$\Longrightarrow \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right]_{t=0} = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = C_1 \Longrightarrow \lambda_1 = \dfrac{C_1}{r_1 - r_2}$ et $\lambda_2 = -\lambda_1$,

d'où la solution $\boxed{i(t) = \dfrac{C_1}{r_1 - r_2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}$ (voir exemple tracé figure 10.12a) ;

– pour $\Delta = 0$: $i(0) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $i'(0) = C_1 \Longrightarrow \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right]_{t=0} = \lambda_2 = C_1$ et la solu-

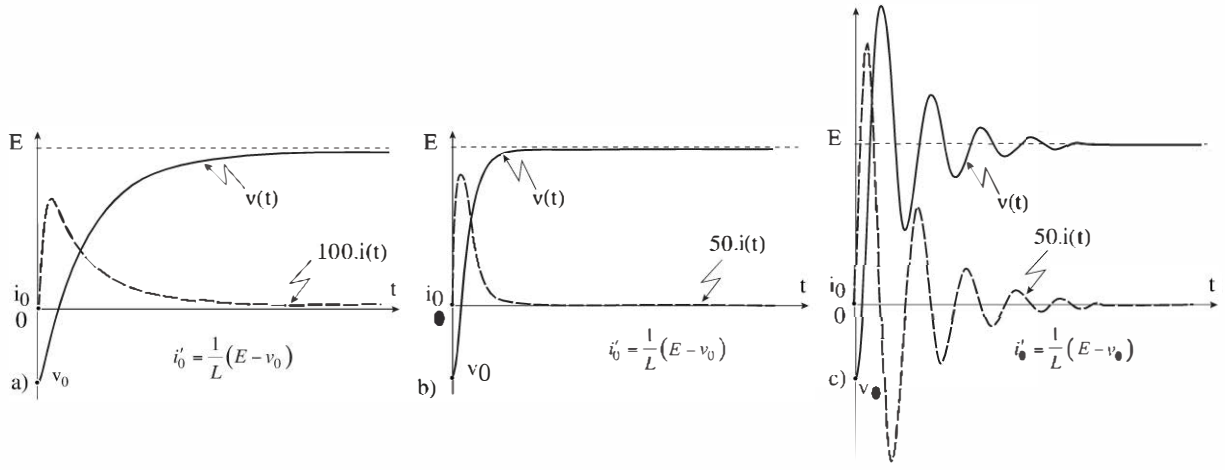


Figure 10.12

Copyright © 2007 Dunod.

tion $\boxed{i(t) = e^{r_1 t} C_1 t}$ (voir exemple tracé figure 10.12b) ;

– pour $\Delta < 0$: $i(0) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $i'(0) = C_1 \Longrightarrow \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right]_{t=0} = \alpha\lambda_1 + \lambda_2\beta = C_1$

$\Longrightarrow \lambda_2 = \dfrac{C_1}{\beta}$, d'où la solution $\boxed{i(t) = \dfrac{C_1}{\beta}\sin(\beta t))e^{\alpha t}}$ (figure 10.12c).

La tension $v_C(t)$ s'obtient à partir de la relation courant-tension du condensateur $i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$, qui entraîne $v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(t)dt$. D'où les solutions (suivant Δ) :

– pour $\Delta > 0$: $i(t) = \dfrac{C_1}{r_1 - r_2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$ et

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{C_1}{r_1 - r_2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})dt = \frac{1}{C}\frac{C_1}{r_1 - r_2}\left[\frac{e^{r_1 t}}{r_1} - \frac{e^{r_2 t}}{r_2}\right]_0^t.$$

$$= \frac{1}{C}\frac{C_1}{r_1 - r_2}\left(\frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} - \frac{1 - e^{r_2 t}}{r_2}\right)$$

– pour $\Delta = 0$: $i(t) = e^{r_1 t} C_1 t$, d'où $v_C(t) = \dfrac{C_1}{C}\left(\dfrac{e^{r_1 t}}{r_1}\left(t - \dfrac{1}{r_1}\right) + \dfrac{1}{r_1^2}\right)$;

– pour $\Delta < 0$: $i(t) = \dfrac{C_1}{\beta}\sin(\beta t)e^{\alpha t}$; qui entraîne

$$v_C(t) = \int_0^t \sin(\beta t)e^{\alpha t}dt = \frac{C_1}{C\alpha\beta}\left(\frac{e^{\alpha t}(\sin\beta t - \cos\beta t + 1)}{1 + \beta}\right).$$

10.3 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DU *n*-ième ORDRE

10.3.1 Représentation matricielle du système différentiel

En pratique, les circuits électriques représentés par une seule équation du 1er ou du 2e ordre ne sont pas nombreux, car en général ils comportent de nombreux dipôles passifs augmentant irrémédiablement l'ordre des équations. Nous sommes donc conduits à la méthode de résolution des problèmes à n inerties.

➤ ***Système d'équations différentielles et système homogène***

Un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre n peut toujours se mettre sous la **forme canonique**, où seules apparaissent les dérivées premières des variables temporelles $\varphi_i(t)$ (où $\varphi_i(t)$ sont des tensions ou des courants du circuit) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt} = a_{11}\varphi_1(t) + \ldots + a_{1n}\varphi_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ \dfrac{d\varphi_n(t)}{dt} = a_{n1}\varphi_1(t) + \ldots + a_{nn}\varphi_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$; qui sous forme matricielle s'écrit :

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt} \\ \\ \dfrac{d\varphi_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \text{ ; qui devient aussi :}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t) \text{ sous la forme d'une équation vectorielle.}$$

a_{ij} sont les coefficients constants du système, $b_i(t)$ les seconds membres, et n est l'ordre du système ; A est une matrice carrée de rang n ; $B(t)$, $\varphi(t)$ et $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ des vecteurs à n composantes.

Par exemple, l'équation $A_n \dfrac{d^n i(t)}{dt} + \ldots + A_1 \dfrac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f(t)$, en posant au préalable $i(t) = \varphi_1$, $di(t)/dt = \varphi_2, \ldots, d^{n-1}i(t)/dt^{n-1} = \varphi_n$, se met sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_2 \\ \vdots \\ \dfrac{d\varphi_{n-1}}{dt} = \varphi_n \\ \dfrac{d\varphi_n}{dt} = -\dfrac{A_{n-1}}{A_n}\varphi_n - \ldots - \dfrac{A_0}{A_n}\varphi_1 + \dfrac{f(t)}{A_n} \end{cases} \Longrightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t) \text{ , avec}$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \searrow & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{A_0}{A_n} & -\dfrac{A_1}{A_n} & -\dfrac{A_2}{A_n} & \dots & -\dfrac{A_{n-1}}{A_n} \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dfrac{f(t)}{A_n} \end{bmatrix}.$$

Tout **système différentiel linéaire à coefficients constants** d'ordre n peut s'écrire sous forme canonique, qui sous forme vectorielle s'écrit $\boxed{\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t)}$.

Lui est associé le **système homogène** $\boxed{\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t)}$.

Copyright © 2007 Dunod.

La recherche de la solution finale du système d'équations différentielles $\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t)$, utilise la méthodologie de résolution des équations différentielles, déjà étudiée dans les paragraphes précédents (1er et 2e ordre) :

– recherche d'un vecteur $\varphi_h(t)$, solution générale du système homogène $\frac{d\varphi_h(t)}{dt} = A\varphi_h(t)$;

– recherche d'un vecteur $\varphi_p(t)$, solution particulière du système différentiel ;

– sommation des solutions $\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$, déterminant la solution générale du système différentiel, et produisant la solution unique $\varphi(t)$ vérifiant les n C.I.

10.3.2 Recherche du vecteur $\varphi_h(t)$ d'un système homogène

On appelle **matrice fondamentale** $\phi(t)$ la matrice carrée de rang n dont les vecteurs $\phi_i(t)$ de ses colonnes $(\phi_1(t),\phi_2(t)...\phi_n(t))$ sont les solutions du système homogène $\frac{d\phi_i(t)}{dt} = A\phi_i(t)$. On adopte alors l'écriture généralisée $\frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t)$.

Remarque : Si $\det(\phi(t)) \neq 0$, les solutions $\phi_i(t)$ sont indépendantes.

Dans le cadre des systèmes linéaires à coefficients constants $\boxed{\phi(t) = e^{At}}$ est une matrice fondamentale qui vérifie $\frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t)$, avec $\phi(0) = I_d$ (I_d matrice unité). Les colonnes de $\phi(t)$ forment la famille des solutions du système homogène. Le **vecteur solution générale du système homogène** est de la forme $\boxed{\varphi_h(t) = \phi(t)C}$, avec C un vecteur constant.

Remarque : Sous forme développée, l'exponentiation de la matrice A s'écrit $e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + \ldots + A^k\frac{t^k}{2} + \ldots$.

Toutefois, le calcul de la matrice fondamentale $\phi(t) = e^{At}$ est en général difficile voire impossible, sauf si :

– dans le développement, la matrice A^k s'annule rapidement avec k ; le calcul est alors possible à partir des premiers termes de e^{At}. En général, ce cas révèle un système singulier, rare ;

– la matrice A est diagonalisable [2]. Il devient possible d'écrire $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, avec P (matrice de passage) et D (matrice diagonale) définies à partir des valeurs et des vecteurs propres de A, et à partir desquelles le calcul de e^{Dt} devient très facile à effectuer.

[2] Voir « Pour en savoir plus : Diagonalisation et exponentiation d'une matrice » en fin de chapitre.

Copyright © 2007 Dunod.

Dans le cas où le système d'équations différentielles représentant le circuit est un système homogène, alors la solution finale est établie en intégrant le vecteur des C. I. $\varphi(t_0)$ dans la solution générale du système homogène $\varphi_h(t) = \phi(t)C$.

La solution finale du système homogène $\varphi_f(t)$ passant par le vecteur des C.I. $\varphi(t_0)$ est $\boxed{\varphi_f(t) = e^{A(t-t_0)}\varphi(t_0)}$.

10.3.3 Solution $\varphi_f(t)$ d'un système différentiel complet

Soit $\varphi_h(t)$ la solution du système homogène associé au système différentiel, et soit $\varphi_p(t)$, une solution particulière du système différentiel ; la solution générale $\varphi(t)$ du système est $\boxed{\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)}$. Le vecteur des C.I. $\varphi(t_0)$ permet de déterminer, parmi la famille des solutions, la solution unique $\varphi(t)$.

➤ ***Recherche du vecteur de la solution particulière***

La détermination de la solution particulière s'effectue à partir de la méthode de la variation de la constante, qui part de l'expression vectorielle $\varphi_p(t) = \phi_h(t)C(t)$, avec $\varphi_h(t)$ la solution particulière recherchée, $\phi_h(t)$ une matrice fondamentale du système homogène et $C(t)$ un vecteur variable.

En dérivant, on obtient $\dfrac{d\varphi_p(t)}{dt} = \dfrac{d\phi_h(t)}{dt}C(t) + \phi_h(t)\dfrac{dC(t)}{dt}$, et parce que $\phi_h(t)$ est une matrice fondamentale $\left(\dfrac{d\phi_h(t)}{dt} = A\phi_h(t)\right)$, on obtient alors :

$$\frac{d\varphi_p(t)}{dt} = A\phi_h(t)C(t) + \phi_h(t)\frac{dC(t)}{dt}$$

D'autre part, $\varphi_p(t)$ est une solution du système différentiel, d'où :

$$\frac{d\varphi_p(t)}{dt} = A\varphi_p(t) + B(t) = A\phi_h(t)C(t) + B(t)$$

En identifiant, on aboutit à :

$$\phi_h(t)\frac{dC(t)}{dt} = B(t)$$

La matrice $\phi_h^{-1}(t)$ existe puisque $\det(\phi_h(t)) \neq 0$; on aboutit alors à l'expression :

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \phi_h^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

La solution particulière est alors définie par $\varphi_p(t) = \phi_h(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \phi_h^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$ avec $\varphi_p(t_0) = 0$;

d'où la solution générale du système différentiel $\varphi(t) = \phi_h(t)C + \phi_h(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \phi_h^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$.

Copyright © 2007 Dunod.

La solution unique $\varphi(t)$ s'obtient à partir de la C.I. $\varphi(t_0)$. En effet, on a $\varphi(t_0) = \phi_h(t_0)C + \varphi_1(t_0)$ avec $\varphi_p(t_0) = 0$, qui implique $\varphi(t_0) = \phi_h(t_0)C$ d'où, après inversion de la matrice :

$$C = \phi_h^{-1}(t_0)\varphi(t_0)$$

La solution s'écrit alors :

$$\varphi(t) = \phi_h(t)\phi_h^{-1}(t_0)\varphi(t_0) + \phi_h(t)\int_{t_0}^{t} \phi_h^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau, \text{ avec } \phi_h(t) = e^{At}$$

La solution $\varphi(t)$ du système différentiel linéaire à coefficients constants, passant par $\varphi(t_0)$, s'écrit : $\boxed{\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}\varphi(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)d\tau}$.

➤ ***Exemple d'application***

Soit le circuit de la figure 10.13 qui comporte deux inerties C_1 et C_2. Le graphe fait apparaître trois branches et deux nœuds ; d'où $ni = 1$ et $mi = 2$.

Les équations du circuit aboutissent à l'équation différentielle

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 3\frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$

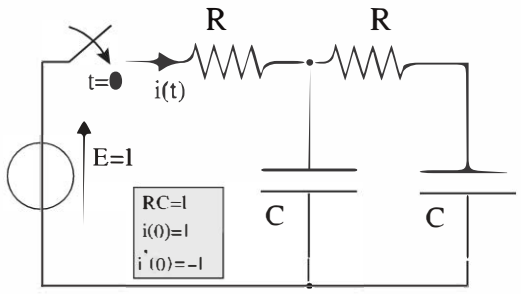


Figure 10.13

qui, en posant $i(t) = \varphi_1(t)$ et $\dfrac{di(t)}{dt} = \varphi_2(t)$, s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt} = \varphi_2(t) \\ \dfrac{d\varphi_2(t)}{dt} = -\varphi_1(t) - 3\varphi_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t)$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_d) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ conduit aux deux valeurs propres négatives $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les vecteurs propres sont calculés à partir de $(A - \lambda_i I_d)V_i = 0$, qui produit les écritures matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & -3-\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0 \text{ et } \begin{bmatrix} \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & -3-\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Copyright © 2007 Dunod.

On obtient les équations : $y_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}x_1$ et $y_2 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}x_2$; d'où par exemple, les vecteurs $V_1\begin{bmatrix} 2 \\ -3+\sqrt{5} \end{bmatrix}$ et $V_2\begin{bmatrix} 2 \\ -3-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ qui impliquent $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3+\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$. Sachant que $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, on obtient :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3+\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

et donc :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}\right) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}\right) & \dfrac{(-3-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} \end{bmatrix}$$

La solution $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}\varphi(t_0) + e^{At}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)d\tau$ devient, avec $B = [0 \quad 0]^{Tr}$ et $\varphi(t_0) = [1 \quad -1]^{Tr}$, $\varphi(t) = \left[i(t) \quad \dfrac{di(t)}{dt}\right]^{Tr} = e^{At}\varphi(t_0)$; d'où :

$$i(t) = \frac{(1+\sqrt{5})e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + (\sqrt{5}-1)e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}}{2\sqrt{5}}$$

On remarque bien que cette solution tend vers 0 quand t tend vers l'infini, moment où tous les condensateurs sont chargés.

10.3.4 Méthodologie d'étude (ordre *n*)

En restant toujours dans le cadre des circuits linéaires, la méthodologie de résolution (figure 10.14) consiste en premier lieu à mettre le système sous forme canonique – qui induit l'écriture $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + B(t)$ –, puis à établir la solution unique $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}\varphi(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)d\tau$$

L'expression nécessite le calcul de e^{At}, facilement réalisable si A est diagonalisable.

Copyright © 2007 Dunod.

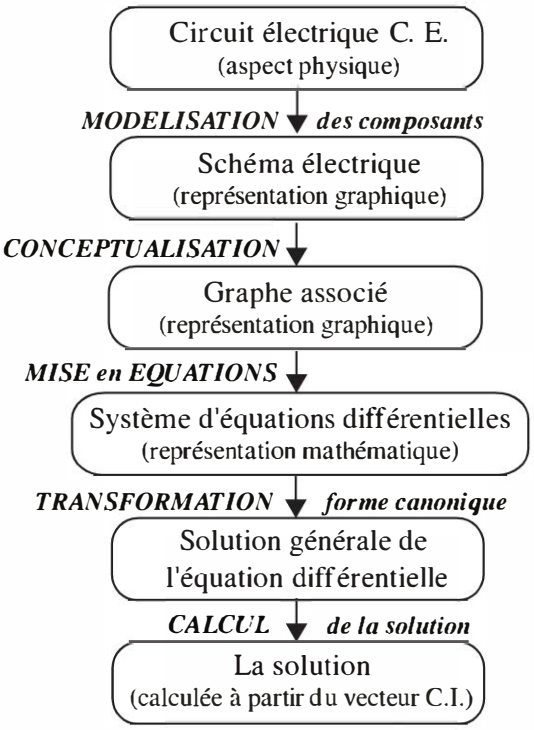


Figure 10.14

10.4 SYSTÈME D'ÉTAT

Une vision moderne des méthodes de résolution des systèmes différentiels est apparue au milieu du XXe siècle, amorcée par l'évolution du domaine de l'automatique. Depuis les lancements des missiles ou des fusées, les techniciens n'ont eu de cesse de résoudre les problèmes ardus de la stabilité des systèmes pilotés. Jusqu'à cette date, la fonction de transfert paraissait une représentation suffisante pour piloter le système. Aujourd'hui, on sait que cette modélisation est trop globalisante : le système possède des modes internes qui ne sont pas tous contrôlables par ce biais. C'est le début du développement de la notion d'état.

10.4.1 Notion d'état dans un système

Les états (grandeurs internes au système) forment la plus petite quantité à surveiller dans un système pour piloter le système, voire lui éviter des avaries.

> Le nombre d'états associés à un système d'équations différentielles est égal à son ordre : il y a n états pour un ordre n.

Comme les paragraphes précédents l'ont montré, un circuit électrique linéaire est décrit par un système d'équations différentielles linéaires qui se met sous une forme canonique, puis matricielle $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(t)$. Les composantes du vecteur $X(t)$ étaient en principe les dérivées successives d'un même courant de branche.

Avec la notion d'état d'un circuit électrique, la représentation mathématique du système est aussi une représentation vectorielle, mais où les composantes du vecteur $X(t)$ sont choisies parmi les courants et les tensions, et contiennent des informations essentielles : les conditions de l'évolution interne du système.

Copyright © 2007 Dunod.

10.4.2 Choix du vecteur d'état

$X(t)$ n'est pas unique, car on sait que plusieurs systèmes d'équations peuvent représenter un même circuit électrique. Toutefois, ces vecteurs d'états différents ne sont pas indépendants l'un de l'autre, ils sont liés. (On rappelle que le nombre des composantes de $X(t)$ est égal à l'ordre du système).

> Pour les circuits électriques, le meilleur choix est d'assigner comme états, les tensions aux bornes des condensateurs et les courants dans les inductances.

En effet, les courants dans les inductances supportent l'énergie magnétique stockée initiale $W = \frac{1}{2}Li^2$, et les tensions des condensateurs contiennent l'énergie électrostatique $W = \frac{1}{2}Cu^2$ du circuit électrique. Ces grandeurs forment donc les inerties du circuit, qui conditionnent l'ordre du système.

> Formé par de telles composantes, le vecteur d'état $X(t)$ est un vecteur qui n'admet aucune discontinuité.

La définition du vecteur d'état initial X_0 est aisée, parce que l'énergie est stockée à travers les tensions et les courants du vecteur d'état, et que cette énergie initiale est parfaitement quantifiée.

Il est intéressant et judicieux de visualiser les variables d'état comme les « grandeurs mémoires » du contexte du circuit à l'instant t. Ainsi, en reprenant le circuit à n'importe quel instant et en affectant des valeurs identiques aux variables d'état, on retrouve la même évolution des courants et tensions dans le circuit.

10.4.3 Représentation d'état adaptée aux circuits électriques

Dans la représentation d'état, $\boxed{\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(t)}$ est **l'équation d'état** où les états du système sont les composantes du **vecteur d'état** $X(t)$. $\boldsymbol{A}$ est la **matrice d'état** qui renferme des termes réels, $\boldsymbol{U}(t)$ est le **vecteur d'entrée** composé par des dipôles sources du système $(E, e(t), J, j(t))$ et $\boldsymbol{B}$ est **la matrice d'entrée** dont les termes sont des coefficients réels.

L'équation d'état une fois résolue, décrit l'évolution des états dans le circuit électrique. Sa résolution, qui conduit à la solution finale recherchée, nécessite au préalable la connaissance des C.I. du vecteur d'état, noté X_0.

En rassemblant les inconnues recherchées sous un vecteur $\boldsymbol{Y}(t)$, le **vecteur de sortie**, il devient possible d'écrire l'équation matricielle de sortie :

$$\boxed{Y(t) = CX(t) + DU(t)}$$

où $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont respectivement la **matrice de sortie** et la **matrice de couplage**.

Copyright © 2007 Dunod.

Les courants et tensions recherchés dans le circuit (les inconnues) sont combinaison linéaire des états du système $X(t)$ et des sources du circuit $U(t)$.

La figure 10.15a illustre la représentation générale d'un système sous forme d'état et la figure 10.15b, son application aux circuits électriques. On distingue nettement deux blocs : un qui concerne l'évolution des états internes du système – qui dépend des entrées et des C.I. – et l'autre qui conditionne les grandeurs de sortie (qui sont fonction des états et des entrées.

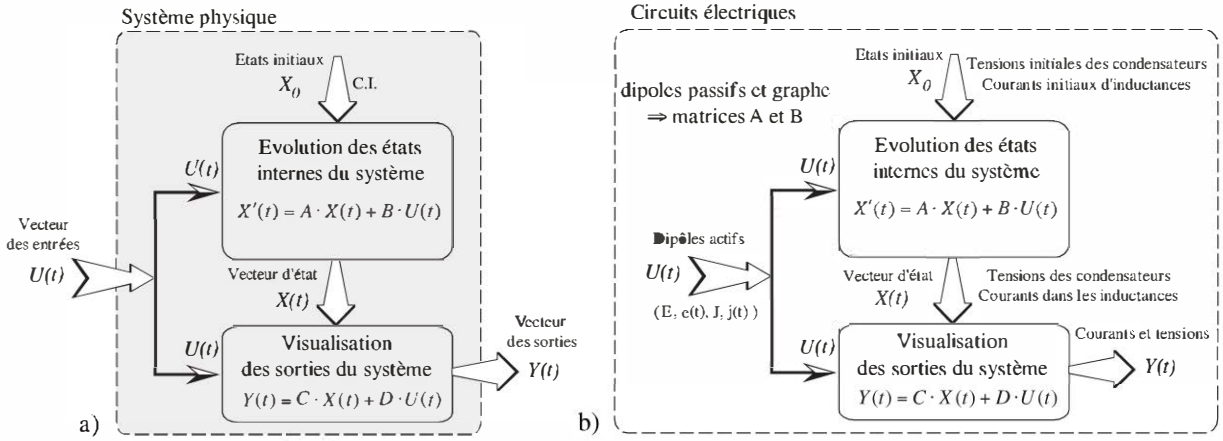
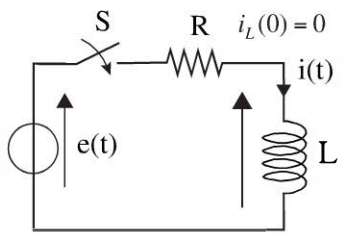


Figure 10.15

La figure 10.16 donne la représentation sous forme d'état d'un système du 1er ordre du type RL et du 2e ordre du type RLC série.

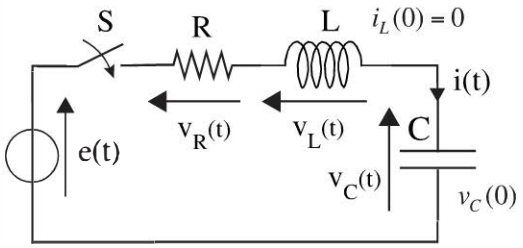


$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri(t) + e(t)\right)$$

$$\boxed{\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{-R}{L}\right]X(t) + \left[\frac{1}{L}\right]U(t)}$$

$$X(t) = i(t); \quad U(t) = e(t); \quad X_0 = 0$$



$$X(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}; \quad U(t) = e(t); \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_C(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - v_C(t) - e(t) \\ i(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}X(t) + \begin{bmatrix} -1/L \\ 0 \end{bmatrix}U(t)}$$

Figure 10.16

Copyright © 2007 Dunod.

10.4.4 Solution d'état

L'équation d'état est une représentation particulière des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, dont l'étude a été menée dans le paragraphe précédent. On retrouve donc pour **solution d'état**, une expression déjà définie :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau$$

On rappelle que cette solution conditionne l'évolution temporelle des états dans le circuit et que l'évolution de l'ensemble des autres grandeurs électriques recherchées dans le circuit est déterminée par l'équation de sortie :

$$Y(t) = CX(t) + DU(t).$$

10.5 MODÉLISATION OPÉRATIONNELLE

Les paragraphes précédents ont montré les méthodes de résolution directe des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La modélisation opérationnelle, comme nous l'avons déjà vu (voir chapitre 7), permet aussi la résolution de ces équations par l'intermédiaire de l'opérateur de Laplace.

Nous rappelons que cette modélisation peut prendre deux formes :

– soit en transformant par Laplace le système d'équations différentielles associées au circuit, qui devient alors plus simple à résoudre ;

– soit en établissant un **schéma opérationnel** (ou **symbolique**), duquel est tiré le système d'équations opérationnelles à résoudre.

10.5.1 Transformation opérationnelle du système d'équations

En régime transitoire, nous avons fait apparaître l'écriture des équations linéaires d'un circuit sous leur forme d'état :

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(t) & \text{(l'équation d'état)} \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) & \text{(l'équation de sortie)} \end{cases}$$

devient par transformation de Laplace :

$$\begin{cases} pX(p) - X_0 = AX(p) + BU(p) & (X_0 \text{ le vecteur des C.I.}) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases}$$

Copyright © 2007 Dunod.

En factorisant, on obtient alors :

$$\begin{cases} (pI_d - A)X(p) = BU(p) + X_0 \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases}$$

La solution[3] d'état s'écrit alors : $\boxed{X(p) = (pI_d - A)^{-1}X_0 + (pI_d - A)^{-1}BU(p)}$.

$X(p)$ est constituée d'une somme de deux termes : $(pI_d - A)^{-1}X_0$ qui représente l'évolution du vecteur d'état en régime libre (les états évoluent à partir de l'énergie stockée) et $(pI_d - A)^{-1}BU(p)$ qui conditionne l'évolution de $X(p)$ états en régime forcé (l'évolution est alors liée aux sources du circuit).

La solution d'état $X(t)$ est alors complètement définie en réalisant la transformation inverse de Laplace de $X(p)$.

La solution d'état devient $X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau$ et détermine l'équation de sortie temporelle $Y(t) = CX(t) + DU(t)$, où $Y(t)$, $X(t)$ et $U(t)$ sont des vecteurs.

Remarque : On savait que la transformée $F(e^{-at}) = \dfrac{1}{p-a} = (p-a)^{-1}$; en rapprochant la solution d'état (§ 10.4.4) et sa transformée de Laplace $X(p)$, on déduit que $F(e^{-At}) = (pI_d - A)^{-1}$.

10.5.2 Schéma opérationnel associé au circuit électrique

Le chapitre 7 (§ 7.3) a déjà permis l'écriture des équations opérationnelles à partir de la modélisation opérationnelle d'un circuit électrique. Toutefois, bien que les C.I. aient été introduites dans le schéma symbolique, elles n'avaient aucun rôle en RPCA.

En régime transitoire, nous reprenons la modélisation opérationnelle des circuits telle qu'introduite dans le chapitre 7, mais en faisant cette fois jouer leur rôle aux C.I., qui conditionnent largement la solution. (Nous rappelons qu'elles sont à l'origine de l'évolution du régime libre).

➤ *Modèle opérationnel équivalent à un circuit électrique*

Nous rappelons l'écriture opérationnelle de la relation caractéristique du condensateur et de l'inductance :

$$V_C(p) = \frac{I_C(p) + Cv_C(0^+)}{Cp} \text{ et } V_L(p) = L\left(pI_L(p) - i_L(0^+)\right)$$

[3] L'inversion matricielle présuppose une matrice A régulière.

Copyright © 2007 Dunod.

Ces écritures induisent un modèle (pour chaque dipôle) formé par une impédance opérationnelle – terme qui divulgue une proportionnalité entre tension et courant –, en série avec une source de tension – terme indépendant du courant –.

Le tableau 10.2 rassemble les modèles des trois dipôles passifs.

Tableau 10.2

	Résistance	Condensateur	Inductance
Relations fondamentales	$v_R(t)$, $i_R(t)$, R $v_R(t) = R\,i_R(t)$	$v_C(t)$, $i_C(t)$, C $i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$	$v_L(t)$, $i_L(t)$, L $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$
Modèles symboliques	$V_R(p)$, $I_R(p)$ $Z_R(p) = R$ $V_R(p) = R\,I_R(p)$	$V_C(p)$, $I_C(p)$ $Z_C(p) = 1/Cp$, $v_C(0^+)/p$ $V_C(p) = Z_C(p)\,I_C(p) + \dfrac{v_C(0^+)}{p}$	$V_L(p)$, $I_L(p)$ $Z_L(p) = Lp$, $-Li_L(0^+)$ $V_L(p) = Z_L(p)\,I_L(p) - Li_L(0^+)$

Pour construire le schéma opérationnel issu d'un circuit électrique, il convient de remplacer chacun des dipôles passifs et actifs par leur modèle équivalent ou leur transformée. Par exemple, on associe au schéma électrique de la figure 10.17a le schéma symbolique équivalent (figure 10.17b).

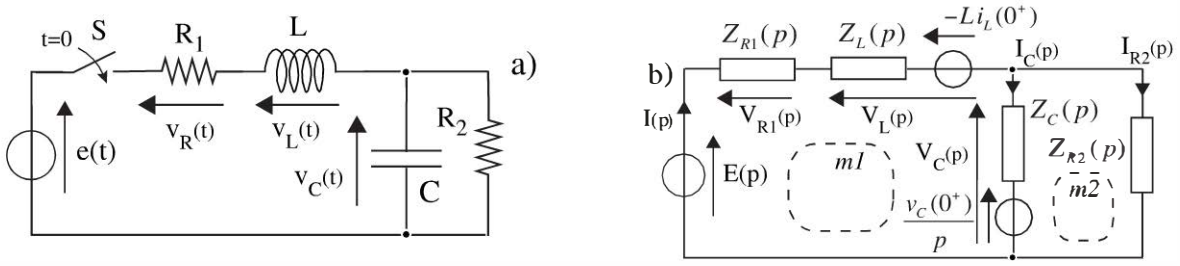


Figure 10.17

➤ *Mise en équation opérationnelle et résolution*

Une fois le schéma symbolique établi, la mise en équation est réalisée en utilisant les méthodes déjà décrites dans les chapitres précédents (notamment, voir le chapitre 7 § 7.3.5).

• Détermination directe d'une grandeur dans le circuit

Lorsque le nombre d'équations n'est pas très important, alors il est possible de déterminer directement une grandeur du circuit. Par exemple, à partir des trois équations opérationnelles tirées du schéma précédent :

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{cases} I(p) = I_C(p) + I_{R2}(p) & \text{(loi d'un nœud)} \\ E(p) = V_{R1}(p) + V_L(p) + V_C(p) & \text{(loi de la maille m1)}, \\ V_C(p) = R_2 I_{R2}(p) & \text{(loi de la maille m2)} \end{cases}$$

et des relations caractéristiques de chacun des dipôles :

$$V_{R1}(p) = R_1 I(p),\ V_C(p) = \frac{I_C(p)}{Cp} + \frac{v_C(0^+)}{p} \text{ et } V_L(p) = LpI(p) - Li(0^+)\ ;$$

on détermine directement la tension aux bornes du condensateur, qui est :

$$V_C(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{E(p) + Cv_C(0^+)(R_1 + Lp) + LCi(0^+)}{1 + \left(\dfrac{L + R_1R_2C}{R_1 + R_2}\right) + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} LCp^2}$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{R_1}{R_2} LCp^2 + \left(\frac{L + R_1R_2C}{R_2}\right) p + \frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) V_C(p) - \left(Cv_C(0^+)(R_1 + Lp) + LCi(0^+)\right) = E(p)$$

qui est la forme générale (voir chapitre 7) des équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$(A_n p^n + \ldots + A_1 p + A_0)\, S(p) + G(p) = F(p)$$

où $S(p)$ est le signal recherché, $G(p)$ rassemble les C.I. et $F(p)$ une relation incluant des sources du circuit.

Un fois sous cette forme, la résolution de cette équation, détaillée dans le chapitre 7, peut être obtenue par exemple par un développement en fractions partielles.

• Mise en équation sous forme matricielle et résolution

La mise en équation précédente est intéressante lorsque l'ordre du système (puissance de l'opérateur p) est peu élevé. Dans le cas contraire, on préfère mettre le système sous forme d'état :

$$pX(p) - X_0 = AX(p) + BU(p)$$

où les composantes du vecteur d'état $X(p)$ reprennent les tensions des condensateurs et les courants des inductances.

Par exemple, pour produire l'équation d'état à partir du schéma de la figure 10.50, on part des équations :

$$pI(p) - i(0^+) = -\frac{R_1}{L} I(p) - \frac{V_C(p)}{L} + \frac{E(p)}{L} \text{ et } pV_C(p) - v_C(0^+) = \frac{I(p)}{C} - \frac{V_C(p)}{R_2C}$$

On pose pour vecteur d'état $X(p) = \begin{bmatrix} I_L(p) = I(p) \\ V_C(p) \end{bmatrix}$; d'où l'équation d'état :

Copyright © 2007 Dunod.

$$pX(p) - X_0 = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} X(p) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(p) \text{ avec } X_0 = \begin{bmatrix} i(0^+) \\ v_C(0^+) \end{bmatrix}$$

Le paragraphe précédent a donné la solution d'état opérationnelle à ce système :

$$X(p) = (pI_d - A)^{-1} X_0 + (pI_d - A)^{-1} BU(p)$$

qui implique la solution temporelle :

$$X(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

La détermination des autres grandeurs provient de l'équation de sortie. Par exemple, pour obtenir la tension aux bornes de la résistance $v_R(t)$:

$$V_R(p) = RI(p)$$

$$Y(p) = [R \quad 0]X(p) + [0]U(p) \Longrightarrow v_R(t) = [R \quad 0]X(t)$$

10.5.3 Méthodologie de modélisation opérationnelle en RT

Nous avons à notre disposition deux méthodes pour déterminer l'évolution des grandeurs d'un circuit électrique en RT : soit à partir de la transformation opérationnelle du système d'équations différentielles (figure 10.18a) soit à partir de la modélisation opérationnelle du circuit (figure 10.18b).

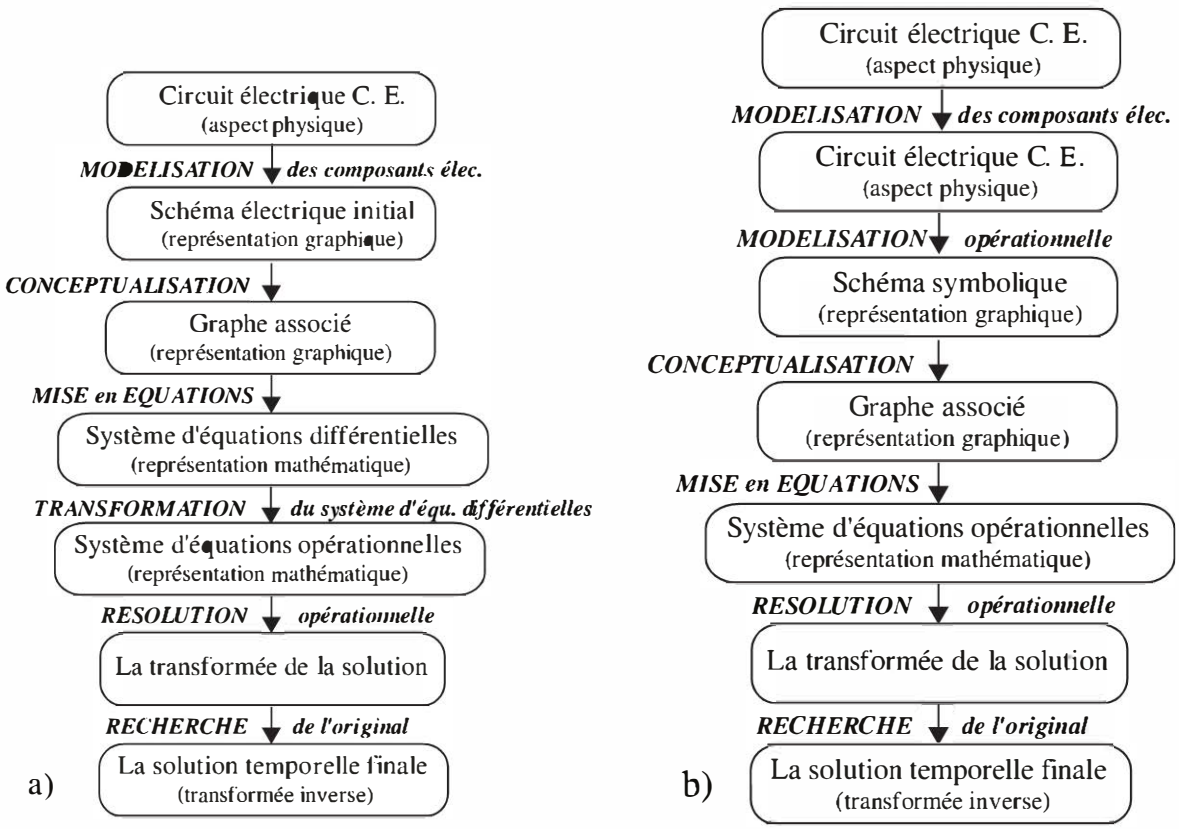


Figure 10.18

Copyright © 2007 Dunod.

De préférence et pour les deux cas, la mise en équation devra se faire sous forme d'état, plus directe. La détermination de la solution d'état $X(t)$ nécessite le calcul de e^{At}, qui est facilement réalisable si la matrice A est diagonalisable.

Pour en savoir plus...

DIAGONALISATION ET EXPONENTIATION D'UNE MATRICE

La résolution des équations différentielles sous forme vectorielle $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BU(t)$ nécessite le calcul de e^{At}. Ce calcul est en général difficile sauf si la matrice A est diagonalisable. (Une matrice est diagonale si tous ses coefficients sont nuls, excepté ceux sur la première diagonale).

La diagonalisation de la matrice carrée A en une matrice carrée diagonale D (dimension d) consiste à rechercher une **matrice de passage** P, de manière à avoir $P^{-1}AP = D$.

Soient V_i les vecteurs colonnes D, alors :

$$P^{-1}AP = D \Longrightarrow AP = PD$$

d'où :

$$AV_i = \lambda_i V_i \Longrightarrow (A - \lambda_i I_d)V_i = 0 \ (\lambda_i : \text{les coefficients de la diagonale de } D).$$

Les vecteurs V_i sont aussi appelés les **vecteurs propres** de A, et λ_i sont les **valeurs propres** associées. Si A est diagonalisable, alors $\det(A - \lambda_i I_d) = 0$.

> Une matrice carrée A de dimension d admet au plus d valeurs propres. Si les d valeurs propres sont distinctes, alors la matrice A est diagonalisable, ce qui est assez souvent le cas dans les circuits électriques.

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_d$ sont calculées à partir du polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda_i I_d) = 0$, de degré d. Ce polynôme développé s'écrit alors : $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_d - \lambda) = 0$. Les valeurs propres ne sont pas nécessairement trouvées dans l'espace des réels $\mathbb{R}$, il faut très souvent dans le cas des circuits électriques étendre la recherche dans l'espace des complexes $\mathbb{C}$.

Exemple de calcul : à partir de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Copyright © 2007 Dunod.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ -1/2 & 3/2-\lambda & -1/2\\ 3/2 & -3/2 & 1/2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow P_{\mathrm{A}}(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ -1/2 & 3/2-\lambda & -1/2\\ 3/2 & -3/2 & 1/2-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$P_{\mathrm{A}}(\lambda)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1-\lambda & 3/2-\lambda & -1/2\\ 0 & -3/2 & 1/2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3/2-\lambda & -1/2\\ 0 & -3/2 & 1/2-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$P_{\mathrm{A}}(\lambda)=(1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2-\frac{3^2}{2}\right)=-(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)=0$$

d'où les valeurs propres $(1,-1,2)$.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont issus de l'équation $(A-\lambda_i I_d)V_i=0$, et donc :

Pour $\lambda=1$, on a : $A-I=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1/2 & 1/2 & -1/2\\ 3/2 & -3/2 & -1/2\end{bmatrix}\Longrightarrow$ par ex. $V_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

Pour $\lambda=-1$, on a : $A+I=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1/2 & 5/2 & -1/2\\ 3/2 & -3/2 & 3/2\end{bmatrix}\Longrightarrow$ par ex. $V_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

Pour $\lambda=2$, on a : $A-2I=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1/2 & -1/2 & -1/2\\ 3/2 & -3/2 & -3/2\end{bmatrix}\Longrightarrow$ par ex. $V_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

D'où la matrice $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ et la matrice diagonale $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : La matrice D n'est pas unique, on peut par exemple avoir une permutation des valeurs propres sur la diagonale (P est aussi modifiée).

La valeur e^{At} peut alors être calculée à partir de :

$$e^{At} = Pe^{DT}P^{-1}, \text{ avec } e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} \\ -e^{t} + e^{2t} & -e^{t} - e^{2t} & -e^{t} + e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & -e^{-t} - e^{2t} \end{bmatrix}$$

Remarque : Si la matrice n'admet pas d valeurs propres distinctes, alors elle n'est pas entièrement diagonalisable. Dans ce cas, la mise sous forme de Jordan permet encore un calcul simplifié du terme e^{At}.

Cahier d'évaluation

RÉVISIONS

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

10.1 Dans quelles circonstances doit-on analyser un circuit en régime transitoire ?

10.2 Que signifient régime transitoire, régime permanent, régime libre et régime forcé ?

10.3 Quelle est l'importance des C.I. dans l'étude des circuits en RT ?

10.4 Quelle est l'expression de la solution $i(t)$ de $A_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \ldots + A_1 \frac{di(t)}{dt} + A_0 i(t) = f(t)$?

10.5 Qu'est-ce qu'un état dans la représentation d'état des circuits électriques ? Pourquoi la représentation d'état fait apparaître deux équations vectorielles indépendantes ?

10.6 Quelle est l'expression générale de la solution $X(t)$ de l'équation d'état ?

10.7 Pourquoi fait-on appel à la modélisation opérationnelle en régime transitoire ?

Copyright © 2007 Dunod.

10.8 Comment passe-t-on d'un circuit électrique à son schéma opérationnel équivalent ?

EXERCICES

Les solutions sont renvoyées à la fin de l'ouvrage

10.9 Soit le circuit RL de la figure 10.19.

1) Déterminer l'équation différentielle en fonction de $i(t)$;

2) Déterminer l'équation homogène et sa solution générale $i_h(t)$;

3) En posant $i(t) = K(t)e^{-A\cdot t}$, déterminer une solution particulière $i_1(t)$ de l'équation différentielle ;

4) Déterminer la solution finale $i(t)$ de l'équation différentielle (avec $i(0) = i_0$) et tracer $i(t)$.

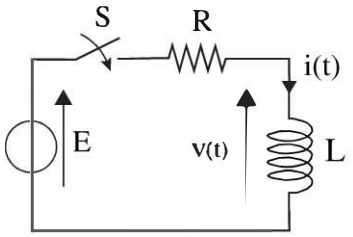


Figure 10.19

10.10 On cherche à la figure 10.20 : $i_1(t)$, $v_{R1}(t)$ et $v_C(t)$; pour cela, déterminer :

1) Le graphe du circuit puis n, b, ni, mi ;

2) L'équation différentielle fonction de $i_1(t)$; quel est son ordre ? Était-ce prévisible ?

3) La solution générale de l'équ. homogène $i_h(t)$, la solution particulière $i_p(t)$ si nécessaire, puis la solution complète $i_1(t)$ en intégrant la condition initiale $i_1(0) = i_1 0$;

4) Les expressions de $v_{R1}(t)$ et $v_C(t)$ en fonction des données ;

5) Les tracés approximatifs de $i_1(t)$, $v_{R1}(t)$ et $v_C(t)$.

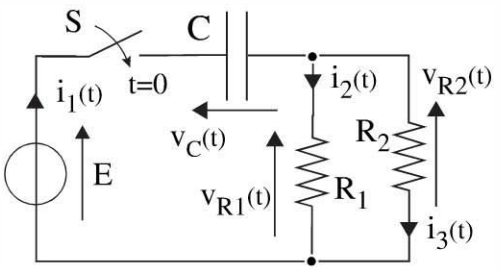


Figure 10.20

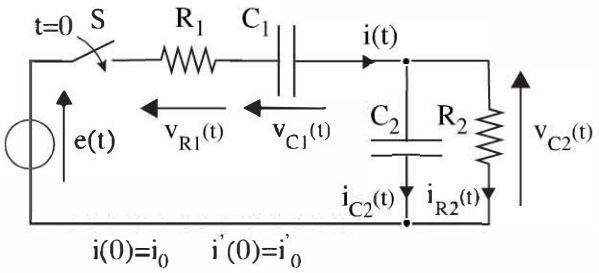


Figure 10.21

10.11 À partir du circuit de la figure 10.21:

1) Déterminer l'équation différentielle ayant pour variable $i(t)$;

2) Mettre cette équation sous forme canonique ;

3) Faire l'application numérique (avec $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $RC = 1$, $i_0 = 0$, $i'_0 = \sqrt{5}$ et $e(t) = 100$ V) ;

4) Déterminer la solution finale $i(t)$ après avoir diagonalisé la matrice.

10.12 Soit le circuit de la figure 10.22, où l'interrupteur S s'ouvre à $t = 0$.

1) Quel est *a priori* l'ordre du système différentiel associé au circuit ?

2) À quoi est alors égal le vecteur d'état $X(t)$ du système ?

3) Écrire l'équation d'état ;

4) Sachant que l'on recherche $v(t)$, écrire l'équation de sortie $Y(t)$;

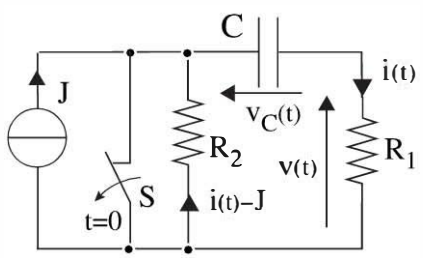


Figure 10.22

Copyright © 2007 Dunod.

5) Déterminer $X(t)$ et $v(t)$, avec la condition initiale $X(0) = v_{C0}$.

10.13 Soit le circuit électrique de la figure 10.23.

1) Dessiner le schéma symbolique équivalent ;

2) Déterminer les équations d'état, sachant que l'on cherche $i(t)$, $i_C(t)$ et $i_L(t)$.

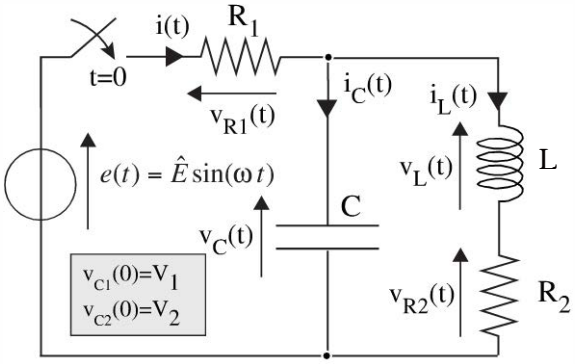


Figure 10.23

10.14 Soit le pont de mesure de la figure 10.24.

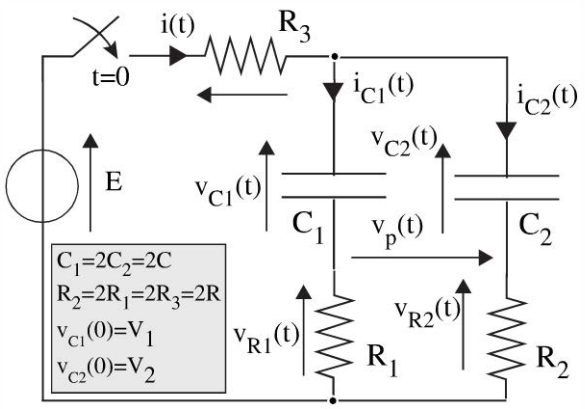


Figure 10.24

1) Dessiner le schéma symbolique équivalent au circuit ;

2) Déterminer l'équation d'état sous forme opérationnelle ;

3) Faire l'application numérique ($RC = 1/10$, $E = 10$ V, $V_1 = -1$ V, $V_2 = 5$ V) et résoudre les équations pour obtenir $v_p(t)$.

10.15 Reprendre l'exercice de la question 10.14 mais avec $e(t) = \hat{E}\ \sin(t)$.

Copyright © 2007 Dunod.

Applications

PARTIE 3

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 11

Modélisation des réseaux alternatifs

Objectifs

- Présenter les moyens de production, de transport et de distribution de l'énergie électrique alternative.
- Modéliser le réseau monophasé et triphasé.
- Définir les calculs des puissances P, Q et S en triphasé.
- Présenter la notion de compensation des réseaux alternatifs.
- Présenter la notion de compensation des réseaux alternatifs.
- Utiliser les méthodes d'étude de la 2e partie autour d'applications des réseaux.

Vocabulaire

Phase, neutre et terre
Courants de phase
Tensions simples et composées
Facteur de puissance
Compensation des réseaux électriques

Ce chapitre est le premier de la série de ceux de la 3e partie qui se fixent pour objectif de proposer des applications autour des circuits électriques permettant de mettre en relief les modèles d'étude développés dans la 2e partie. Dans ce chapitre, nous proposons notamment d'étudier le cas particulier des réseaux électriques triphasés et monophasés, qui sont à la base de la connaissance des systèmes de l'électrotechnique. En effet, le réseau triphasé est chargé de l'alimentation en électricité des systèmes puissants (moteurs alternatifs, chauffage de fours industriels, convoyage...). C'est sous cette forme que l'électricité est produite dans les centrales électriques, qu'elle est aussi transportée et distribuée aux acteurs économiques. Le réseau monophasé – qui découle du réseau triphasé –, est quant à lui distribué principalement dans les bâtiments pour alimenter de petits équipements courants chez le particulier, comme dans l'industrie. Les exercices du chapitre liés au réseau triphasé mettent l'accent sur la modélisation des sources et des charges en régime RPCA, et exploitent les puissances P, Q et S ; ils introduisent aussi la notion importante de compensation des réseaux. Dans le cadre des applications du réseau monophasé, on se propose d'étudier un système original (la tarification EJP) qui utilise les fils de câblage pour transporter l'énergie électrique conjointement au signal qui sert d'indicateur de valeur de tarification. Le fournisseur d'électricité effectue pour cela une modulation numérique sur le réseau monophasé.

Copyright © 2007 Dunod.

11.1 RÉSEAUX ÉLECTRIQUES ALTERNATIFS

11.1.1 Production d'électricité

La production d'électricité n'a pas cessé de progresser depuis la fin du XIXe siècle, en s'adaptant aux différentes sources d'énergie potentielle. Les premières centrales fonctionnaient au bois, tandis qu'aujourd'hui une multitude de ressources (nucléaire, gaz, fuel, charbon, hydraulique, solaire, éolienne, géothermique) entraînent les alternateurs des usines électriques. Mais les ressources énergétiques ne sont pas encore toutes exploitées industriellement (fusion thermonucléaire, marémotrice, hydrolienne, énergie des vagues...).

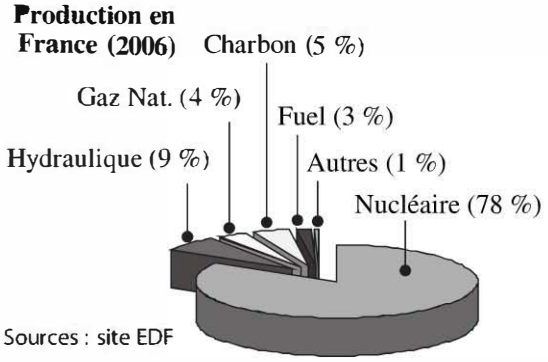


Figure 11.1

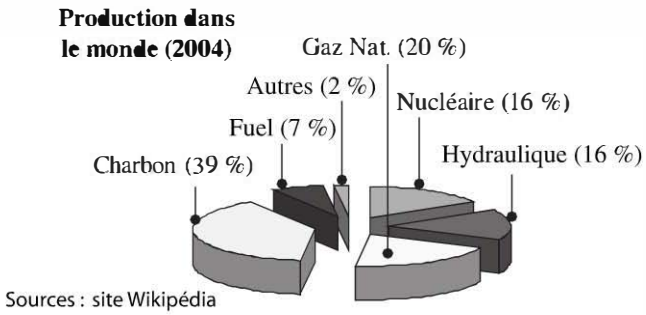


Figure 11.2

Il n'y a pas une ressource meilleure qu'une autre, car la comparaison doit prendre en compte les paramètres de proximité, d'approvisionnement, de facilité de transformation, de rendement, d'impact sur l'environnement... Par choix politique, la France a principalement pris l'option du nucléaire, ce qui aujourd'hui lui assure une indépendance énergétique (figure 11.1) par rapport aux autres pays (figure 11.2) consommant principalement des énergies fossiles (charbon, gaz, pétrole).

Une fois l'énergie électrique produite, il faut la transporter *via* le réseau électrique. Un réseau couvrait il y a encore quelques dizaines d'années la surface d'un pays, mais aujourd'hui ils sont devenus internationaux grâce à l'interconnexion des différents pays frontaliers. La France est d'ailleurs largement exportatrice d'électricité, et principalement vers l'Allemagne.

On y voit bien sûr l'énorme avantage de la mutualisation des ressources qui facilite l'échange d'énergie, mais on oublie trop facilement l'énorme problème de stabilité d'une structure aussi tentaculaire, qui, parce qu'elle ne peut en aucun cas stocker en masse l'énergie électrique, doit en permanence équilibrer la production et la consommation.

11.1.2 Production, transport et distribution de l'électricité

De la matière première jusqu'au tableau de répartition électrique du particulier, il y a un très long chemin.

On fractionne ce processus en trois parties indépendantes :

– la **production électrique** est la partie qui utilise les centrales électriques pour transformer la matière première en énergie cinétique qui fait tourner les alternateurs ;

Copyright © 2007 Dunod.

– le **transport électrique** achemine l'énergie électrique sous forme haute tension (HT) vers les postes de transformation, via des câbles électriques aériens ou enterrés ;

– la **distribution électrique** subdivise l'énergie électrique, depuis les postes de transformation jusqu'aux consommateurs, effectue le comptage pour assurer la facturation, et assure la sécurisation des biens et des personnes abonnées.

Chaque partie constitue un métier différent.

L'énergie électrique de forte puissance est produite dans les centrales sous forme triphasée.

Pour transporter l'énergie, l'amplitude de la tension est augmentée par un transformateur élévateur jusqu'à des niveaux de 250 kV à 400 kV (HTB).

Et donc, pour une même puissance apparente $S = 3VI$, si la tension est augmentée, le courant électrique est réduit d'autant. Les pertes Joule en ligne étant proportionnelle à RI^2, le transport est alors réalisé en minimisant les pertes Joule.

De même, à densité de courant constante $k = \dfrac{I}{S}$ dans les câbles, si I est réduit, la section S des câbles électriques pour le transport de l'électricité est réduite.

En résumé, on observe que l'on a tout intérêt à faire croître le niveau de la tension pour réduire les pertes et le volume des câbles utilisés.

> ***Remarque :*** Sur de très longues distances, et notamment entre les îles canadiennes, des niveaux records ont été atteints avec des tensions de près de 1 MV.

Réseau électrique triphasé



Le réseau électrique triphasé 50 Hz permet d'acheminer l'énergie électrique produite dans les centrales électriques vers les consommateurs. On distingue :

– le réseau de transport, qui part des centrales avec une très haute tension (~ 400 kV) pour limiter les courants en ligne et donc les pertes Joule. Ces lignes traversent les régions et même les frontières (Allemagne, Belgique, Italie, Suisse, Espagne). Au niveau régional, la haute tension des lignes est de 63 kV ou de 90 kV ;

– le réseau de distribution, qui part du réseau de transport et aboutit aux compteurs électriques des abonnés. La tension délivrée aux gros consommateurs est de 20 kV, et est pour les petits consommateurs de 230 V (en monophasé) ou 400 V (en triphasé).

Le réseau triphasé comporte trois **phases** actives (φ_1, φ_2, φ_3) et un fil supplémentaire, le **neutre** (N). Les tensions du réseau triphasé français sont de 400 V entre les phases et de 230 V entre une phase et le neutre.

Le réseau monophasé qui est distribué principalement aux petits consommateurs (particuliers, petites entreprises...) provient du réseau triphasé.

Pour cela, le fournisseur d'électricité délivre une phase et le neutre qui réalise ainsi un réseau monophasé pour de petits consommateurs.

Ce n'est pas toujours la même phase qui est délivrée, sinon le courant ne serait pas équitablement réparti sur les trois phases du réseau triphasé.

Copyright © 2007 Dunod.

11.1.3 Réseaux polyphasés

Le réseau triphasé fait partie du groupe des réseaux dits « **réseaux polyphasés** ». Ces réseaux sont constitués de dipôles actifs, en général des sources de tensions sinusoïdales, qui sont liés entre eux par leurs amplitudes, leurs fréquences et leurs déphasages.

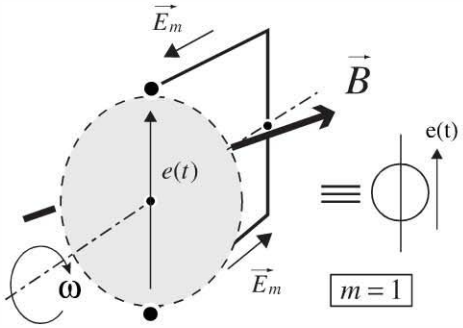


Figure 11.3

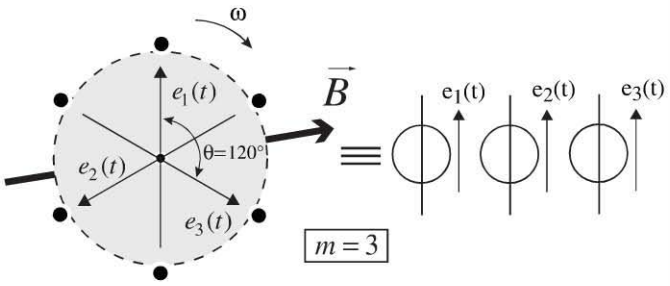


Figure 11.4

Valeurs des tensions alternatives



Les tensions alternatives dans le monde ne sont pas égales, principalement pour des raisons historiques de défense militaire. Les tensions sont regroupées en deux catégories principales, la basse tension (BT) et la haute tension (HT) et deux sous-catégories A et B.

– BTA (50 V à 500 V) et BTB (500 V à 1 kV) ;

– HTA (1 kV à 50 kV) et HTB (> 50 kV).

Les fréquences domestiques dans le monde sont de 50 Hz et 60 Hz. Il existe en plus, quelques fréquences industrielles exotiques : $16^2/3$ Hz (= 50 / 3 pour la traction ferroviaire en Allemagne, Autriche, Suède, Suisse) et 25 Hz (pour les métros aux États-Unis)...

On caractérise un réseau polyphasé par son indice m qui représente le nombre de sources d'énergie sinusoïdales. Ces sources sinusoïdales ont les mêmes fréquences, sont de même amplitude et ont des déphasages régulièrement répartis de $\theta = 2\pi/m$. On trouve ainsi des réseaux dodécaphasés $m = 12\,(\theta = \pi/6)$, hexaphasés $m = 6\,(\theta = \pi/3)$, mais le plus courant reste le réseau triphasé $m = 3\,(\theta = 2\pi/3)$.

Dans la 1re partie de l'ouvrage, nous avons montré comment générer une f.é.m. dans un conducteur en mouvement baignant dans un champ magnétique $\vec{B}$ constant et de direction fixe.

La spire en rotation à vitesse ω constante (figure 11.3) baignant dans le champ $\vec{B}$ est donc le siège d'une f.é.m. $e(t)$ sinusoïdale, d'expression :

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = BS\omega\cos(\omega t) = \hat{E}\cos(\omega t)$$

La spire devient une source de tension sinusoïdale, de pulsation fixée par la vitesse de rotation du rotor ω. La source est monophasée, d'indice $m = 1$.

En répartissant régulièrement n spires sur le pourtour d'un cylindre (d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$), on fait apparaître n sources de tensions indépen-

Copyright © 2007 Dunod.

dantes $e_i(t)$ ($m = 3$ sur la figure 11.4) de même fréquence et de même amplitude, mais dont les phases à l'origine sont décalées de θ.

Les sources sinusoïdales ont pour expressions :

$$\begin{cases} e_1(t) = BS\omega\cos(\omega t) = \hat{E}\cos(\omega t) \\ \vdots \\ e_n(t) = \hat{E}\cos\left(\omega t - (n-1)\dfrac{2\pi}{n}\right) \end{cases}$$

Ces n sources de tensions forment un système de tensions polyphasées.

On règle la pulsation ω des sources en jouant sur la vitesse de rotation des spires, et on fait varier l'amplitude de la tension en modifiant l'amplitude du champ magnétique $\vec{B}$.

> ***Remarque :*** L'augmentation importante de l'amplitude des tensions s'effectue en remplaçant la spire par une bobine comportant n spires : $\hat{E}_b = n\hat{E}$.

11.2 MODÉLISATION DU RÉSEAU ALTERNATIF TRIPHASÉ

Le réseau triphasé est d'indice $m = 3$. Les trois sources sinusoïdales sont donc de même fréquence, de même amplitude et ont des déphasages régulièrement répartis de $\theta = 2\pi/3$ (120°).

11.2.1 Sources triphasées

➤ ***Constitution d'un réseau d'alimentation triphasé***

Il y a six bornes de connexion lorsque les trois sources sinusoïdales sont indépendantes (figure 11.5a). Il existe deux possibilités pour connecter les bornes entre elles et former un réseau triphasé : soit suivant la configuration étoile (figure 11.5b), soit suivant la configuration triangle (figure 11.5c).

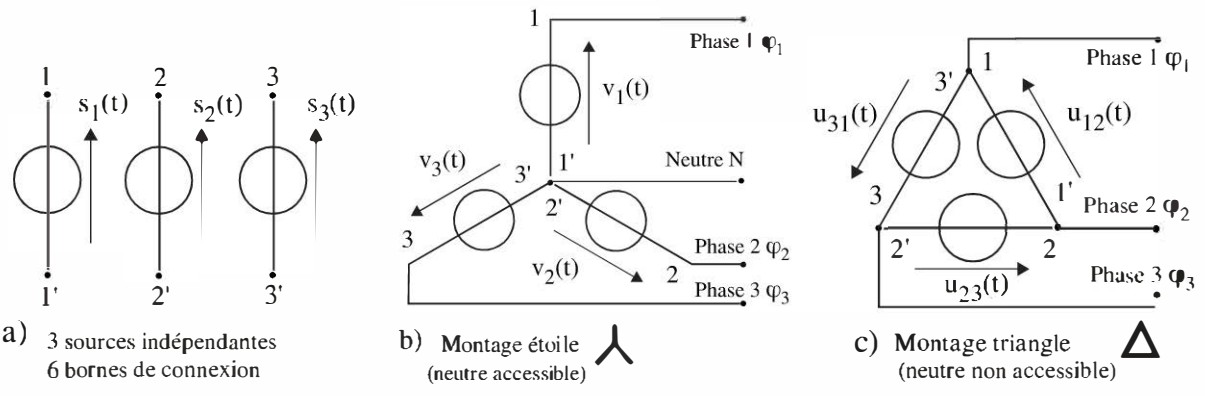


Figure 11.5

Copyright © 2007 Dunod.

Avec un **montage en étoile**, le réseau distribue quatre fils (les trois **fils de phases 1, 2, 3** et le **neutre**) tandis que le **montage en triangle** délivre au plus trois fils (les trois fils de phases 1, 2 et 3).

➤ ***Tensions simples et tensions composées***

Les **tensions simples** notées conventionnellement $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ sont les tensions qui existent entre chacune des phases et le neutre (figure 11.5b). Les **tensions composées** $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ et $u_{31}(t)$ (notations conventionnelles) sont les tensions entre fils de phases (figure 11.5c).

Les tensions simples ne sont pas accessibles lorsque les sources sont connectées en triangle, car le neutre n'est pas disponible.

Les déphasages entre tensions simples sont de ± 120°, comme les déphasages entre les tensions composées (figure 11.6).

➤ ***Représentation de Fresnel***

Les expressions temporelles des tensions simples sont :

$$\begin{cases} v_1(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \theta_0) \\ v_2(t) = \hat{V}\cos\left(\omega t + \theta_0 - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) = \hat{V}\cos\left(\omega t + \theta_0 - \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

avec θ_0 l'angle de phase à l'origine de $v_1(t)$.

Elles induisent (figure 11.7) les expressions et la représentation des vecteurs de Fresnel $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

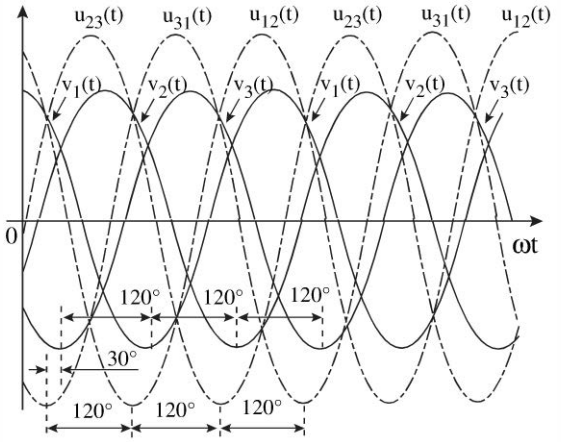


Figure 11.6

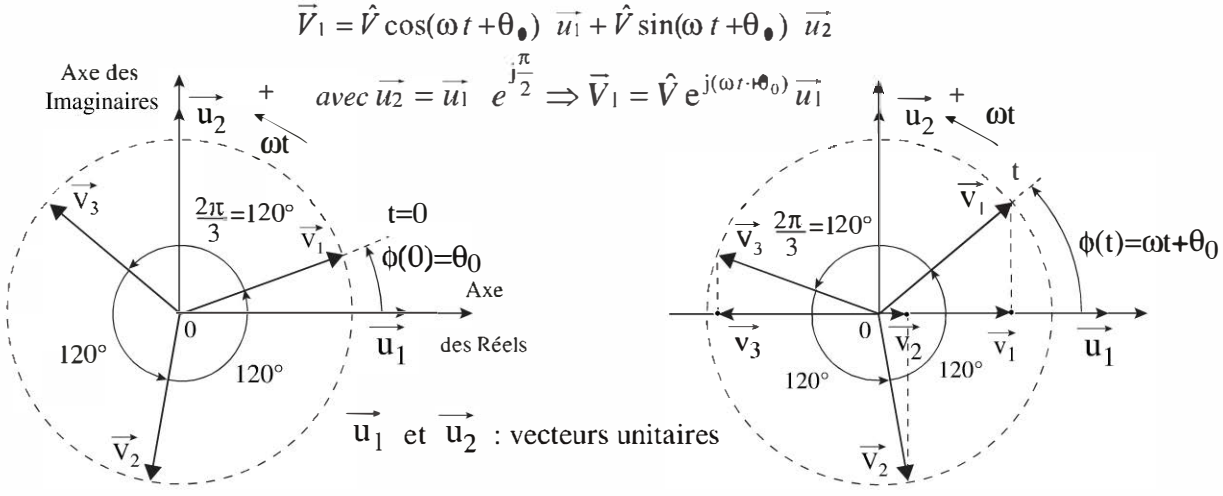


Figure 11.7

Copyright © 2007 Dunod.

$$\begin{cases} \vec{V}_1(t) = \hat{V}e^{j(\omega t+\theta_0)}\vec{u}_1 \\ \vec{V}_2(t) = \hat{V}e^{j\left(\omega t+\theta_0-\frac{2\pi}{3}\right)}\vec{u}_1 = \hat{V}e^{j(\omega t+\theta_0)}\vec{u}_1\, e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \vec{V}_1(t)e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \vec{V}_3(t) = \hat{V}e^{j\left(\omega t+\theta_0-\frac{4\pi}{3}\right)}\vec{u}_1 = \hat{V}e^{j(\omega t+\theta_0)}\vec{u}_1\, e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \vec{V}_2(t)e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$

Les projections sur l'axe des abscisses produisent les vecteurs $\vec{v}_1(t)$, $\vec{v}_2(t)$ et $\vec{v}_3(t)$ d'amplitudes égales à $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$.

$$\begin{cases} \vec{v}_1(t) = (\vec{V}_1(t)\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 = v_1(t)\vec{u}_1 = \hat{V}\cos(\omega t+\theta_0)\vec{u}_1 \\ \vec{v}_2(t) = (\vec{V}_2(t)\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 = v_2(t)\vec{u}_1 = \hat{V}\cos\left(\omega t+\theta_0-\frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_1 \\ \vec{v}_3(t) = (\vec{V}_3(t)\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 = v_3(t)\vec{u}_1 = \hat{V}\cos\left(\omega t+\theta_0-\frac{4\pi}{3}\right)\vec{u}_1 \end{cases}$$

À partir des compositions des tensions simples, on retrouve les expressions des tensions composées.

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = \hat{V}\cos(\omega t+\theta_0) - \hat{V}\cos\left(\omega t+\theta_0-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \hat{V}\left(\cos(\omega t+\theta_0) - \left(\cos(\omega t+\theta_0)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\omega t+\theta_0)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) \\ &= \hat{V}\left(\frac{3}{2}\cos(\omega t+\theta_0) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t+\theta_0)\right) = \hat{V}\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0+arctg(\sqrt{3})) \end{aligned}$$

$$\vec{u}_{12}(t) = u_{12}(t)\vec{u}_1 = \hat{V}\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0+30°)\vec{u}_1 = e^{j\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\hat{V}\cos((\omega t+\theta_0)\vec{u}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_{12}(t) = \sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{v}_1(t)} \Rightarrow \boxed{\vec{U}_{12} = \sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_1}$$

Sachant que les tensions composées sont aussi déphasées entre elles de 120°, on obtient, à l'image des tensions simples, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_{12}(t) = V\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0+30°) \\ u_{23}(t) = V\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0+30°-120°) = V\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0-90°) \\ u_{31}(t) = V\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0+30°-240°) = V\sqrt{3}\cos(\omega t+\theta_0-210°) \end{cases}$$

D'où la représentation des vecteurs de Fresnel (figure 11.8) à $t = 0$ et $\theta_0 = 0$.

$$\begin{cases} \vec{U}_{12} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_1 = \sqrt{3}\hat{V}e^{j\left(\omega t+\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)}\vec{u}_1 \\ \vec{U}_{23} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_2 = e^{j\frac{2\pi}{3}}\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_1 = \sqrt{3}\hat{V}\,e^{j\left(\omega t+\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)}\vec{u}_1 \\ \vec{U}_{31} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_3 = e^{-j\frac{4\pi}{3}}\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{V}_1 = \sqrt{3}\hat{V}e^{j\left(\omega t+\theta_0-\frac{7\pi}{2}\right)}\vec{u}_1 \end{cases}$$

Les phaseurs, avec l'écriture réduite des électrotechniciens (on pose $t = 0$), ont pour expressions :

Copyright © 2007 Dunod.

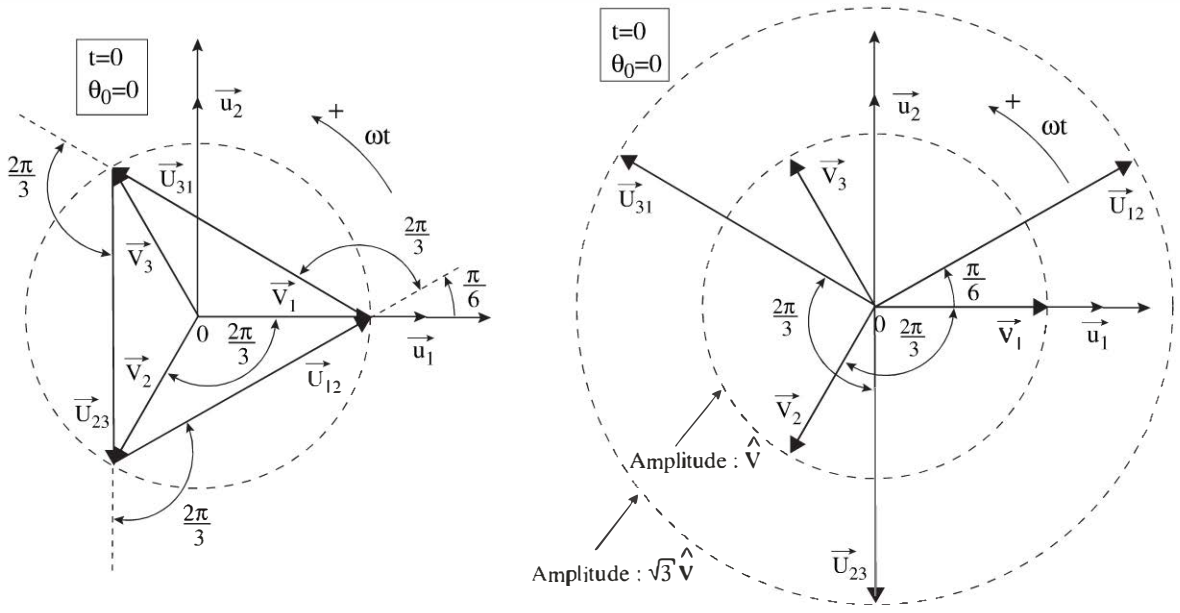


Figure 11.8

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = V e^{j\theta_0} \\ \overline{V}_2 = V e^{j\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right)} \\ \overline{V}_3 = V e^{j\left(\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{U}_{12} = \overline{V}_1\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}V e^{j\left(\theta_0 - \frac{\pi}{6}\right)} = U e^{j(\theta_0 + \frac{\pi}{6})} \\ \overline{U}_{23} = \overline{V}_2\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}V e^{j\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)} = U e^{j(\theta_0 + \frac{\pi}{2})} \\ \overline{U}_{31} = \overline{V}_3\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}V e^{j\left(\theta_0 - \frac{7\pi}{6}\right)} = U e^{j(\theta_0 + \frac{7\pi}{6})} \end{cases}$$

L'amplitude des tensions composées est supérieure à l'amplitude des tensions simples, on retiendra l'expression $\boxed{U = \sqrt{3}V}$. Par ailleurs, la tension composée $\overline{U}_{12}$ possède une avance de phase de 30° par rapport à la tension simple $\overline{V}_1$. Les trois tensions simples ont même amplitude et sont régulièrement réparties sur un cercle ; on a alors $\boxed{\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0}$; pour les mêmes raisons $\boxed{\overline{U}_{12} + \overline{U}_{23} + \overline{U}_{31} = 0}$. Ces relations définissent un **réseau équilibré en tension**.

Un réseau électrique équilibré est représenté par les **trois termes V/U** et **F** (tension simple/tension composée et fréquence) : par ex. 230 V/400 V 50 Hz pour la France.

11.2.2 Charges triphasées équilibrées

Lorsqu'un utilisateur branche un récepteur sur le réseau triphasé, il connecte en réalité trois dipôles, reliés entre eux selon un montage étoile, ou un montage triangle (figure 11.9).

Remarque : Les notations U, V, W et N sont utilisées par convention pour désigner les phases 1, 2, 3 et le neutre.

Copyright © 2007 Dunod.

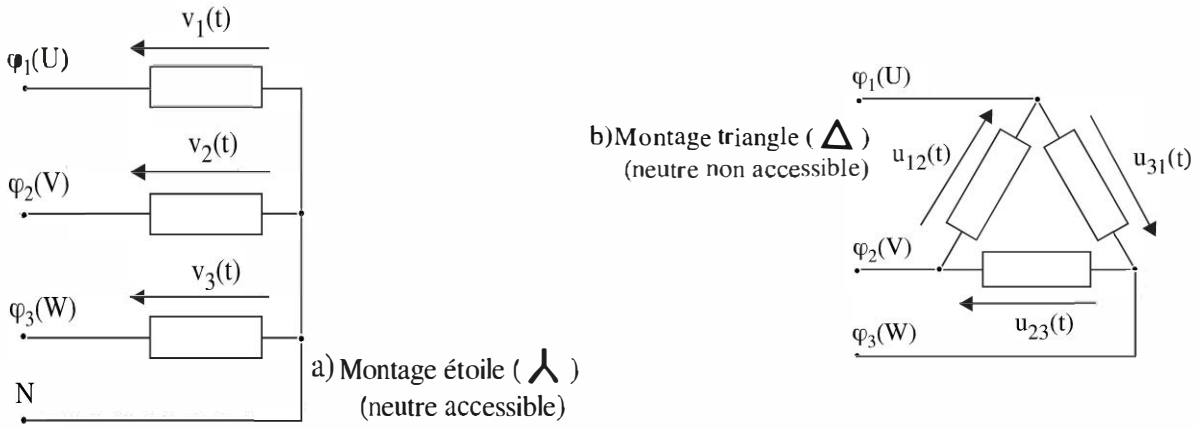


Figure 11.9

➤ ***Montage étoile***

Chacun des dipôles voit à ses bornes une tension simple $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ (figure 11.10a). Si les dipôles sont identiques, les courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ qui les traversent ont la même amplitude efficace I et ont le même déphasage φ avec les tensions simples.

Les trois courants dans les dipôles d'un montage étoile forment un système triphasé équilibré si les dipôles sont identiques (figure 11.10b). Ces courants sont liés par la même relation que celle des tensions simples : $\boxed{\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0}$.

Remarque : Les courants $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, et $\overline{I}_3$ qui traversent les dipôles montés en étoile sont égaux aux courants qui circulent dans les fils des phases.

Si les courants forment un système équilibré, alors le courant dans le fil du neutre $\overline{I}_N = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$. En général, la liaison entre le point neutre du réseau et le point neutre de la charge n'est pas réalisée, car s'avérant inutile ; l'utilisateur et le fournisseur font alors l'économie d'une longueur de fil.

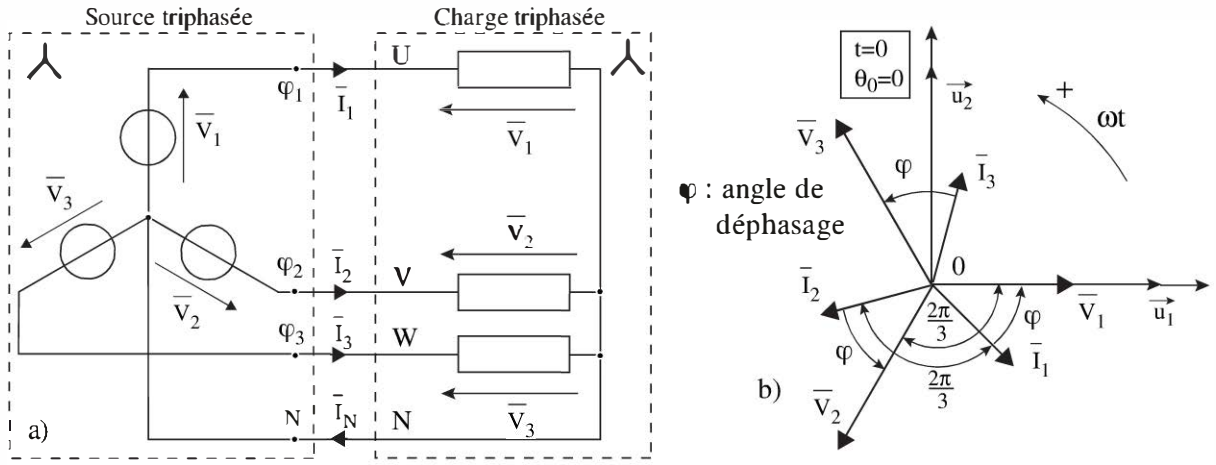


Figure 11.10

Copyright © 2007 Dunod.

➤ *Montage triangle*

Dans ce montage, chacun des trois dipôles identiques voit une tension composée à ses bornes (figure 11.11a). Comme pour le montage étoile, lorsque les dipôles sont identiques alors les courants $\overline{J}_{12}$, $\overline{J}_{23}$ et $\overline{J}_{31}$ ont même amplitude efficace J et même déphasage φ.

Les courants dans les trois dipôles identiques d'un montage triangle forment un système triphasé équilibré (figure 11.11a) vérifiant la relation : $\boxed{\overline{J}_{12} + \overline{J}_{23} + \overline{J}_{31} = 0}$.

Les courants $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ et $\overline{I}_3$ des fils de phases du montage en triangle ne sont pas égaux aux courants $\overline{J}_{12}$, $\overline{J}_{23}$ et $\overline{J}_{31}$ dans les dipôles, puisque (figure 11.11b) :

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{J}_{12} - \overline{J}_{31} \\ \overline{I}_2 = \overline{J}_{23} - \overline{J}_{12} \Rightarrow \\ \overline{I}_3 = \overline{J}_{31} - \overline{J}_{23} \end{cases} \quad \overline{I}_1 = \overline{J}_{12} - \overline{J}_{31} = \overline{J}_{12} - \overline{J}_{12}\,e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \overline{J}_{12}\left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$\overline{J}_{12}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \overline{J}_{12}\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

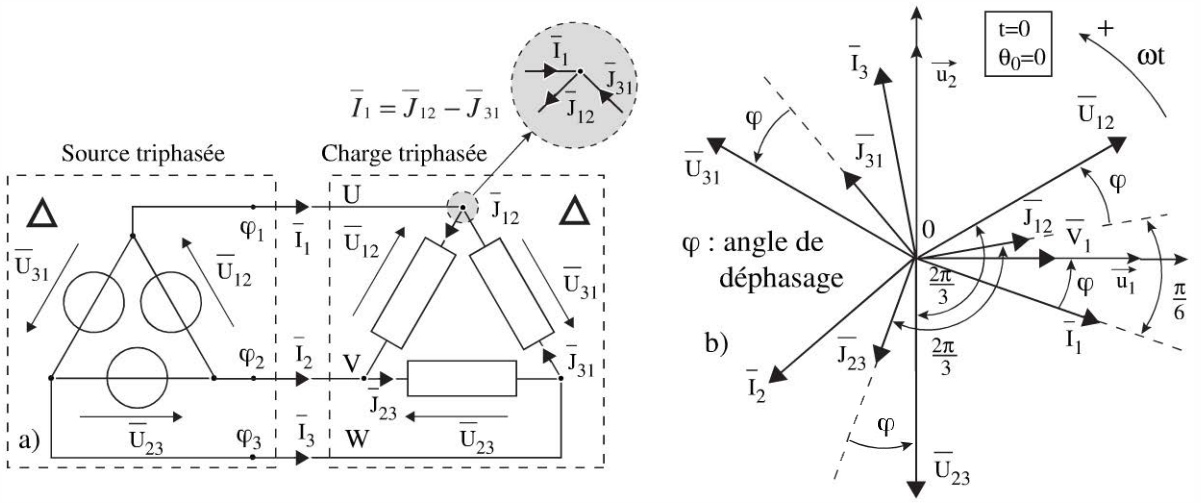


Figure 11.11

D'où : $\boxed{\overline{I}_1 = \overline{J}_{12}\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}}$, $\boxed{\overline{I}_2 = \overline{J}_{23}\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}}$ et $\boxed{\overline{I}_3 = \overline{J}_{31}\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}}$.

Avec une charge équilibrée, l'amplitude des courants de lignes I est supérieure à l'amplitude J des courants des dipôles $\boxed{I = \sqrt{3}J}$; le courant $\overline{J}_{12}$ est en avance de phase de 30° par rapport au courant de ligne $\overline{I}_1$. Les courants dans les fils des phases $\overline{I}_{1,2,3}$ formant un réseau triphasé équilibré en courant, on a $\boxed{\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0}$.

Copyright © 2007 Dunod.

11.2.3 Mesure de la puissance sur un réseau triphasé

➤ ***Mesure des puissances P, Q et S***

Lorsque le neutre est accessible, la mesure des puissances P, Q et S est réalisée avec trois wattmètres (figure 11.12a) avec :

$P = P_1 + P_2 + P_3$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, et $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Dans le cas particulier où le réseau est équilibré en tension et en courant, la mesure des puissances peut être réalisée avec un seul wattmètre, car les puissances dans chaque phase sont égales (figure 11.12b) d'où $P = 3P_1$, $S = 3VI$ et $Q = \sqrt{S^2 - p^2}$.

Si le fil de neutre n'est pas accessible, le réseau étant équilibré en tension et en courant, alors la **méthode des deux wattmètres** permet de restituer les puissances (figure 11.12c) avec $P = P_1 + P_2$, $Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)$ et $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

> ***Remarque :*** Pour appliquer les expressions de la méthode des deux wattmètres, il est impératif de connecter correctement les deux wattmètres.

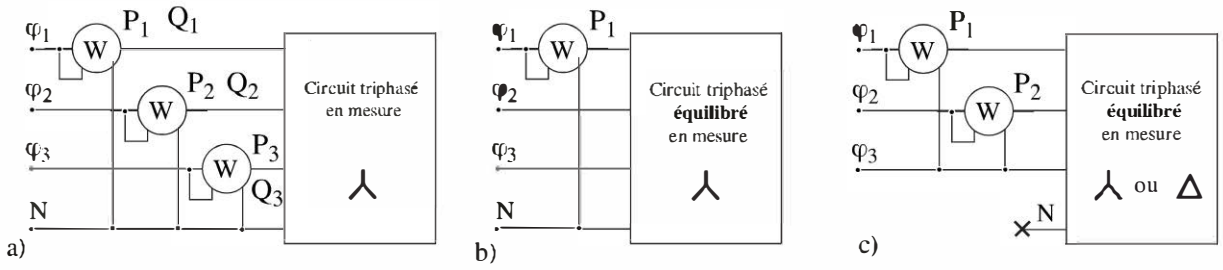


Figure 11.12

➤ ***Mesure de l'énergie électrique***

Quelle que soit la forme d'énergie fournie ou dépensée, elle se mesure en joules (J). De même, la puissance se mesure en watts (W) quelle que soit son origine.

Toutefois, par habitude ou facilité, l'énergie n'est pas toujours représentée par son unité légale, mais par des unités équivalentes (tableau 11.1).

Tableau 11.1

Le wattheure (Wh)	La calorie (cal)	La thermie (Th)
1 W=1 J/s 1 Wh=1 J/s 3600s =3600 J	1 cal=4,18 J	1 Th=1 Mcal
1 kWh=3,6 MJ	1 kcal=4 180 J	1 Th=4,18 Tcal

Par exemple, un moteur de puissance mécanique $P_m = 1\,500$ W, possédant un rendement $\rho = 0{,}82$ qui fonctionne à pleine puissance 24 heures sur 24, consomme une énergie de $E = \dfrac{P_m t}{\rho} = \dfrac{1500 \cdot 24 \cdot 3600}{0{,}82} = 158$ MJ.

En considérant que la facturation est de $P_x = 0{,}15$ cts € par kWh, on obtient un coût quotidien C de $C = E\dfrac{P_x}{3{,}6 \cdot 10^6} = \dfrac{159 \cdot 10^6 \times 0{,}15}{3{,}6 \cdot 10^6} = 6{,}6$ €.

Copyright © 2007 Dunod.

11.2.4 Compensation du facteur de puissance

Tout appareil électrique, de par sa construction, consomme de la puissance active et réactive. Le facteur de puissance du dipôle est donc une donnée du constructeur de l'appareil. Toutefois, l'utilisateur peut **améliorer le facteur de puissance** de cet appareil, relié sur la source d'énergie, en réalisant une **compensation de l'énergie réactive** que l'appareil consomme.

Cela est rendu possible en connectant (en général en parallèle) un élément qui réduit la puissance réactive globale fournie par la source. L'élément ajouté doit avoir une puissance réactive de signe contraire à l'appareil à compenser. Quand son rôle est seulement de compenser l'énergie réactive, alors la puissance active qu'il consomme (en général, des pertes) doit être pratiquement nulle.

Classiquement, le déphasage dans une installation électrique est arrière ($\varphi > 0$). La puissance réactive Q est alors de signe positif. Un compensateur passif utilise alors des condensateurs (qui implique $Q_C < 0$) pour relever le facteur de puissance ($Q + Q_C = 0 \Rightarrow Fp = 1$).

11.2.5 Application : analyse et modification d'un atelier textile

Un atelier de fabrication textile est équipé d'un ensemble de machines de production et d'éléments d'éclairages, alimentés par le réseau de distribution EDF. Un banc de condensateur est placé en entrée de l'installation afin de relever le facteur de puissance de l'ensemble.

Le chef de la production estime devoir modifier le parc des machines alternatives monophasées, car le taux de défaillance de celles-ci est devenu tel, que le manque à gagner est intolérable.

Le changement de la nature des machines modifie le bilan en puissance réactive, il convient donc de reprendre le dimensionnement de la batterie de compensation.

Pour mener ce projet à bien, nous allons tout d'abord effectuer une analyse de l'atelier en l'état, puis nous reprendrons les calculs pour aboutir à l'atelier tel que le désire le chef de production.

➤ *Analyse du circuit de distribution de l'atelier*

L'atelier comporte au total :

- 90 machines à filer et tresser le coton, utilisant chacune un moteur monophasé de puissance $P_{ml} = 500$ W, alimenté sous 230 V 50 Hz avec un $\cos(\varphi) = 0{,}6$ (de type inductif) ;
- 30 lampes à incandescence de puissance unitaire $P_{Ll} = 150$ W, s'alimentant sous 230 V chacune, et qui éclairent une partie ancienne de l'atelier de filage ;
- 60 tubes fluorescents de puissance unitaire $P_{Tl} = 72$ W sous 230 V chacun, avec un $\cos(\varphi) = 0{,}4$ (de type capacitif), qui ont remplacé récemment des lampes à incandescence de la partie de l'atelier de tressage.

Le réseau est distribué dans l'atelier sous 230 V/400 V 50 Hz, avec le neutre accessible. Une charge constituée de trois blocs de condensateurs montés en étoile a été placée en entrée

Copyright © 2007 Dunod.

de l'atelier de manière à relever le cos(φ) global de l'installation. Chaque bloc de condensateur a une valeur égale à $C = 1$ mF.

- Tout d'abord, représentons par un schéma électrique l'ensemble de l'atelier, sachant que les branchements entraînent un équilibre des tensions et courants du réseau de distribution. Le schéma électrique est représenté figure 11.13.

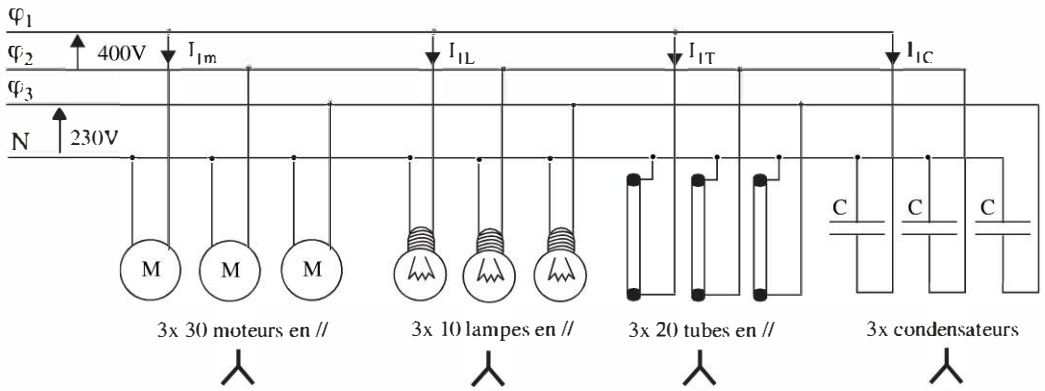


Figure 11.13

- Réalisons maintenant un bilan de puissance pour chaque bloc de récepteurs (les 90 moteurs, les 30 lampes et les 60 tubes) ; calculons donc la puissance active P, la puissance réactive Q, la puissance apparente S.

  Les calculs sont réalisés à partir des relations :

  $P_m = 90P_{m1}$, $\varphi_{m1} = \arccos(0{,}6)$, $Q_m = 90P_{m1}\tan(\varphi_{m1})$ et $S_m = \sqrt{P_m^2 + Q_m^2}$;

  $P_L = 30P_{L1}$, $\varphi_{L1} = 0°$, $Q_L = 0$VAR et $S_L = \sqrt{P_L^2} = P_L$;

  $P_T = 60P_{T1}$, $\varphi_{T1} = \arccos(0{,}4)$, $Q_T = 60P_{T1}\tan(\varphi_{T1})$ et $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$

- Le tableau 11.2 regroupe les puissances P, Q et S des différents blocs.
- Calculons le courant consommé sur la phase 1 (amplitude et phase à l'origine) par chaque groupe de récepteurs, qui sert de référence de phase dans la représentation Fresnel.

Tableau 11.2

	Puissance P (W)	Puissance Q (VAR)	Puissance S (VA)
Moteurs mono.	45 kW	60 kVAR	75 kVA
Lampes	4,5 kW	0 kVAR	4,5 kVA
Tubes	4,3 kW	–9,9 kVAR	10,8 kVA

Le tableau 11.3 regroupe les valeurs des courants pour chaque bloc, calculées à partir de $S_M = 3V\,I_m$ et $\varphi_m = \arccos(0{,}6)$, $S_T = 3V\,I_T$ et $\varphi_T = \arccos(0{,}4)$, $P_L = 3V\,I_L$.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 11.3

	Moteurs	Lampes	Tubes
Courant de la phase 1	106A	6,5A	15,7A
Déphasage du courant par rapport à $\overline{V}_1$	53,1°	0°	–66,4°

- Le courant total qui circule sur la phase n°1 par les récepteurs, est déterminé à partir du bilan en puissance des récepteurs : $P_{To} = 53{,}8$ kW, $Q_{To} = 50{,}1$ kVAR et $S_{To} = 73{,}5$ kVA ; le courant de phase est alors $I_1 = 107\,\text{A}\left(I = \frac{S}{3V}\right)$ avec un déphasage de 43°.
- Les calculs précédents permettent de dessiner (figure 11.14) les tensions et les courants des récepteurs dans la représentation de Fresnel.
- Vérifions que la valeur des condensateurs assure correctement leur rôle de compensation.

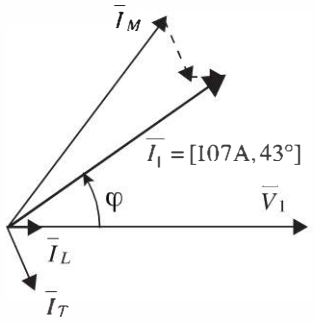


Figure 11.14

La puissance réactive consommée par l'ensemble des récepteurs est $Q_{To} = 50{,}1$ kVAR. La puissance réactive des condensateurs est $Q_C = -3C\omega V^2 = -49{,}8$ kVAR. Le réseau est bien compensé, car la puissance réactive globale est $Q_G = Q_{To} + Q_C = 300$ VAR ; le facteur de puissance devient $\cos\varphi = 0{,}999$.

- Si l'on cherche à déterminer l'impédance équivalente $\overline{Z}_{équi}$ pour une phase, suivant par exemple un modèle série, on obtient alors :

  En considérant l'ensemble des récepteurs :

$$R_{équi.} = \frac{P}{3I^2} = \frac{53\,800}{3 \cdot 107^2} = 1{,}57\,\Omega \text{ et } X_{équi.} = \frac{Q}{3I^2} = \frac{50\,100}{3 \cdot 107^2} = 1{,}46\,\Omega$$

  et en incluant les condensateurs :

$$R_{équi.} = \frac{P}{3I^2} = \frac{17\,933}{107^2} = 1{,}57\,\Omega \text{ et } X_{équi.} = \frac{Q}{3I^2} = \frac{300}{3 \cdot 107^2} = 0{,}009\,\Omega$$

➤ *Reprise de construction de l'atelier*

Le chef de production envisage de remplacer 45 des 90 machines de production.

Les nouvelles machines auront des moteurs asynchrones triphasés de $P_{m2} = 500$ W sous 230 V/400 V 50 Hz avec un $\cos(\varphi) = 0{,}8$ (inductif). De même, l'ensemble de l'éclairage à incandescence est remplacé par 30 nouveaux tubes, identiques aux précédents.

Copyright © 2007 Dunod.

• Établissons le nouveau schéma électrique de l'installation (figure 11.15) sachant que l'on dispose du même réseau d'alimentation et que l'on désire toujours avoir un équilibre des courants de phases.

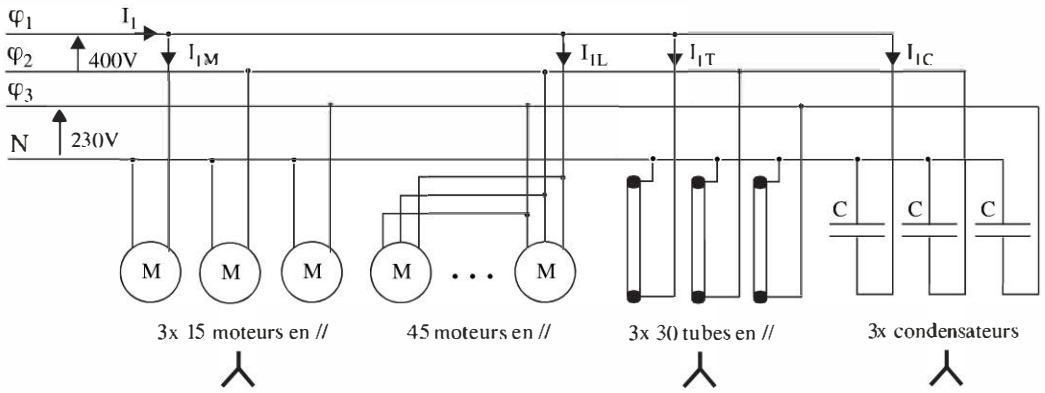


Figure 11.15

• Le tableau 11.4 regroupe les valeurs des puissances absorbées par le groupe des machines monophasées, des machines triphasées et des tubes fluorescents.

Tableau 11.4

	Puissance P (W)	Puissance Q (VAR)	Puissance S (VA)
Moteurs monophasé	22,5 kW	30 kVAR	37,5 kVA
Moteurs triphasé	22,5 kW	16,9 kVAR	28,1 kVA
Tubes	6,5 kW	–14,8 kVAR	16,2 kVA

• Le tableau 11.5 est déduit des puissances précédentes et présente les courants absorbés par bloc de récepteurs.

Tableau 11.5

	Moteurs mono.	Moteurs triph.	Tubes
Courant de la phase 1	54,3 A	40,7 A	23,5 A
Déphasage du courant par rapport à $\overline{V}_1$	53,1°	36,9°	–66,4°

• Recalculons les puissances globales (tableau 11.6) en intégrant la batterie de condensateurs de l'ancien atelier.

Le facteur de puissance est alors : $\tan\varphi = \dfrac{Q_{T\bullet}}{P_{T\bullet}} = -0{,}34$, d'où $\cos\varphi = 0{,}94$.

On s'aperçoit qu'il est possible d'améliorer le facteur de puissance en modifiant la valeur de la capacité des condensateurs, car $Q_{To} < 0$.

Copyright © 2007 Dunod.

Tableau 11.6

	Puissance P (W)	Puissance Q (VAR)	Puissance S (VA)
Les récepteurs	51,5 kW	32,1 kVAR	60,7 kVA
Les condensateurs	0 W	−49,8 kVAR	69,9 kVA
TOTAL	51,5 kW	−17,7 kVAR	54,5 kVA

- Calculons la valeur de C des condensateurs montés en étoile pour rétablir un meilleur facteur de puissance.

$$Q_C = -3C\omega V^2 \Rightarrow C = \frac{Q_C}{-3C\omega V^2} = \frac{-17\,700}{-3 \cdot 314 \cdot 230^2} = 355\ \mu\text{F}.$$

- Déterminons l'impédance équivalente $\overline{Z}_{équi.}$ d'une phase sous la forme de deux composants en parallèle à définir.

Les deux composants (figure 11.16) sont une résistance, qui modélise la puissance active absorbée et une susceptance (partie réelle nulle) qui est l'image de la puissance réactive.

$$R_p = \frac{V^2}{P_{To}/3} = \frac{230^2}{17\,166} = 3\ \Omega$$

$$\text{et } X_p = \frac{V^2}{Q_{To}/3} = \frac{230^2}{5\,000} = -9\ \Omega.$$

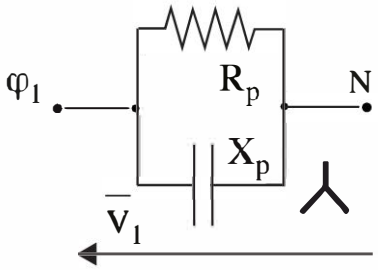


Figure 11.16

11.3 RÉSEAU ALTERNATIF MONOPHASÉ

Le réseau monophasé, tel qu'il nous est fourni, est réalisé à partir du réseau triphasé. Dans certains cas de figure où le réseau triphasé n'est pas disponible, il est alors nécessaire de reconstituer une tension monophasée. En général, dès que la puissance est importante, la solution adoptée est le recours à un groupe électrogène, d'autres solutions (souvent de petites puissances) utilisent des énergies renouvelables et des convertisseurs statiques.

11.3.1 Construction du réseau monophasé

La source monophasée équivalente prélève son énergie entre une phase et le neutre du réseau triphasé (figure 11.17).

Un transformateur local permet d'adapter les niveaux d'amplitude entre les lignes BT et le réseau local triphasé.

Il est nécessaire de respecter l'équilibre des courants dans le réseau triphasé pour assurer le bon fonctionnement des organes en aval (transformateurs, circuits de mesures...). La distribution des sources monophasées est ainsi répartie sur les trois phases du réseau triphasé, après une étude statistique des consommations.

Copyright © 2007 Dunod.

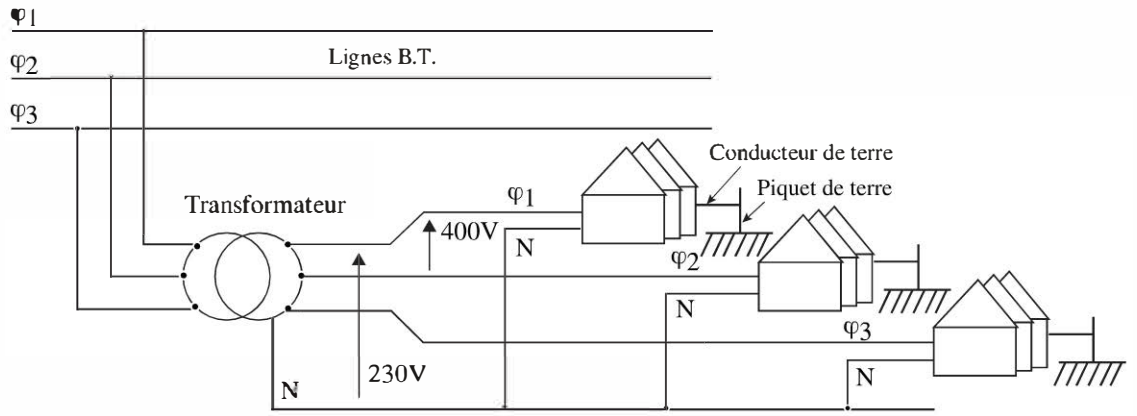


Figure 11.17

La **prise de terre** (formée par exemple d'un **piquet de terre** planté en terre sur lequel est relié le **conducteur de terre**) est un élément qui permet à la fois d'assurer l'équipotentialité des conducteurs non électrifiés (plomberie, enveloppe métallique d'appareils électriques...) et à la fois sert d'élément de sécurité contre l'électrocution.

> ***Remarque :*** La prise de terre n'est pas un conducteur qui permet la circulation d'un courant permanent. Le courant électrique qui alimente les appareils électriques provient du conducteur de phase et retourne par le conducteur de neutre.

11.3.2 Charge monophasée, puissance et compensation

On retrouve le même souci que sur le réseau triphasé : un mauvais facteur de puissance Fp impose un courant de ligne important. Sachant que sur le réseau monophasé le courant par fil de ligne est limité (prises 10 A, prises 16 A, prises 32 A) la puissance apparente est donc limitée $S_{max} = V\, I_{max}$.

Un mauvais facteur de puissance réduit alors la puissance active disponible sur une prise, puisque $P_{max} = V\, I_{max} \cos\varphi = S_{max} \cos\varphi$ ($P_{max} = S_{max}$ pour $\cos\varphi = 1$).

La solution pour retrouver la pleine capacité en puissance d'une prise est de compenser l'appareil branché.

Par exemple, à la figure 11.18a un moteur monophasé branché sur la « prise de force » 20 A avec un facteur de puissance $Fp = 0{,}78$ ne peut délivrer sur son arbre moteur (avec un rendement supposé unitaire) qu'une puissance de $P = 230 \cdot 20 \cdot \cos\varphi = 3{,}6$ kW. Le même moteur peut absorber une puissance allant jusqu'à $P = 230 \cdot 20 = 4{,}6$ kW avec un compensateur (figure 18b).

Le rôle du compensateur étant de réduire (ou d'annuler) la puissance réactive du côté du réseau, il ne consomme en général aucune puissance active.

Le compensateur peut être passif (réalisé avec des dipôles L ou C) ou actif (réalisé avec des semi-conducteurs). Le principal avantage d'un compensateur actif est de s'adapter à la variation de la consommation d'énergie réactive, car le danger d'un compensateur est de surcompenser, entraînant par suite un accroissement de l'énergie réactive de signe opposé.

Copyright © 2007 Dunod.

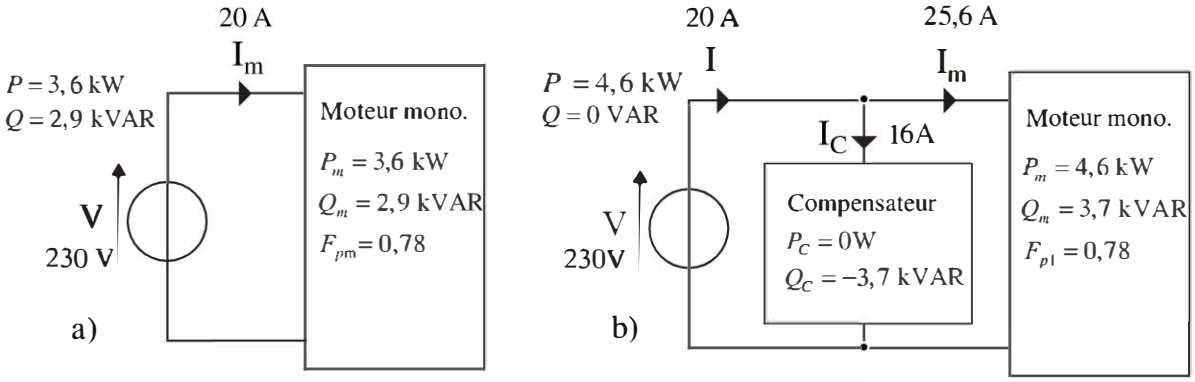


Figure 11.18

11.3.3 Utilisation particulière du réseau monophasé

Le réseau monophasé apporte l'énergie électrique courante, que ce soit pour les besoins de l'habitation ou pour ceux de l'entreprise industrielle.

Comme dans ces secteurs, l'automatisation s'est considérablement accrue, l'idée d'utiliser les lignes du réseau déjà installées pour transmettre les signaux de commande a fait son chemin. Aujourd'hui, les conducteurs du réseau servent à transmettre aussi bien des signaux de commande du relais jour/nuit que le signal de commande d'avertissement des jours de forte tarification des contrats EJP[1] ou TEMPO, et bientôt s'y superposeront aussi les signaux Internet.

Dans ce paragraphe, on se propose de détailler l'application de l'EJP, qui indique à l'abonné les jours (50 jours non consécutifs dans l'année) où la tarification du kilowattheure est très élevée.

➤ ***Principe de fonctionnement de la modulation l'EJP***

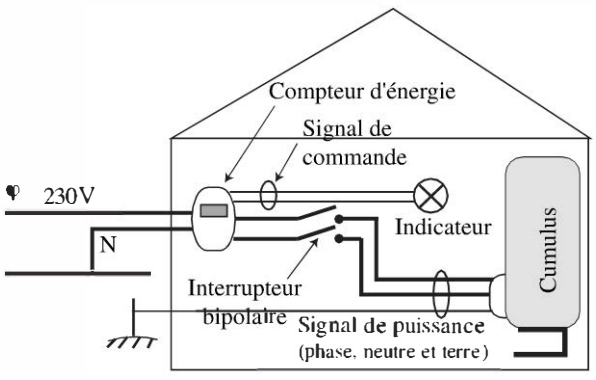


Figure 11.19

La figure 11.19 propose une représentation de l'alimentation d'un cumulus. Un compteur spécial sépare la source de puissance du signal de commande, qui allume ou éteint un indicateur. Un interrupteur bipolaire permet d'alimenter manuellement le cumulus.

L'interrupteur est fermé manuellement quand l'indicateur est éteint (le cumulus est alors alimenté normalement.

Dès que l'indicateur s'allume (automatiquement) l'utilisateur a intérêt à ouvrir l'interrupteur pour ne pas consommer d'énergie, qui durant cette période est facturée beaucoup plus cher.

[1] EJP : effacement des jours de pointe.

Copyright © 2007 Dunod.

Sur la figure 11.20, $e_1(t)$ modélise la source de puissance (230 V 50 Hz) tandis que $e_2(t)$ représente le signal de commande envoyé par le fournisseur d'électricité. Leurs expressions sont :

$$\begin{cases} e_1(t) = 230\sqrt{2}\cos(2\pi 50t) \\ e_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(2\pi 157t) \end{cases}$$

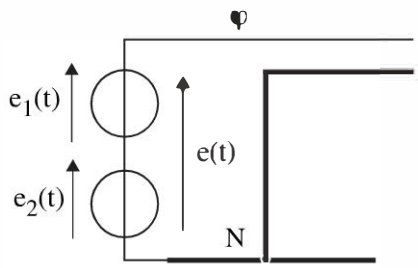


Figure 11.20

L'amplitude de la source $e_2(t)$ délivrant le signal de commande est très faible – moins de 1 % de l'amplitude de $e_1(t)$ – ; on ne perçoit pas la présence de $e_2(t)$ dans le signal $e(t)$.

La fréquence de $e_2(t)$ est nettement plus élevée que celle de $e_1(t)$ (figure 11.21) ce qui va permettre de séparer les signaux, pour exploiter le codage.

La figure 11.22 présente une trame de modulation qui illustre le principe de fonctionnement du codage « Pulsadis » généré par EDF pour la tarification EJP.

Un top de départ est formé d'une impulsion d'une seconde suivie par un blanc de 2,5 s.

Quarante impulsions d'une seconde, séparées par un blanc d'une seconde et demie, suivent le top de départ. Le fournisseur d'électricité transmet ses différents ordres de commande par l'intermédiaire des combinaisons des numéros d'impulsions présentes (ou manquantes) dans le motif.

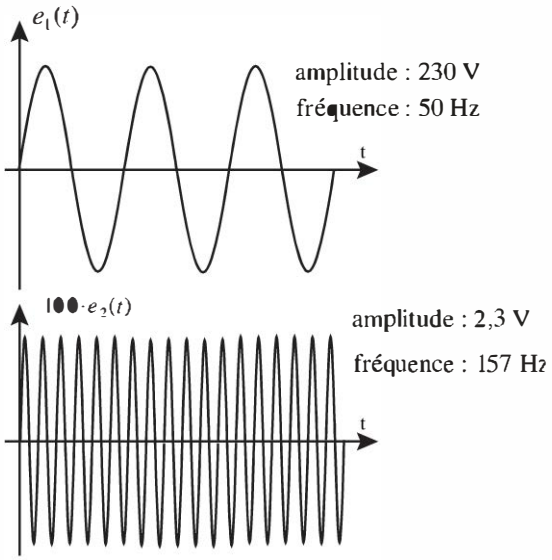


Figure 11.21

Par exemple, si dans la trame il y a l'impulsion n° 5 mais pas l'impulsion n° 15, alors le fournisseur informe le récepteur que le jour prochain (compris entre 6 h et 18 h) sera un jour de pointe. De même, s'il y a conjointement les impulsions n° 5 et n° 15, alors l'instant en cours est un jour de pointe. Maintenant, si seule l'impulsion n° 15 est présente (la n° 5 étant manquante), alors l'instant en cours est un jour normal, sans surtarification.

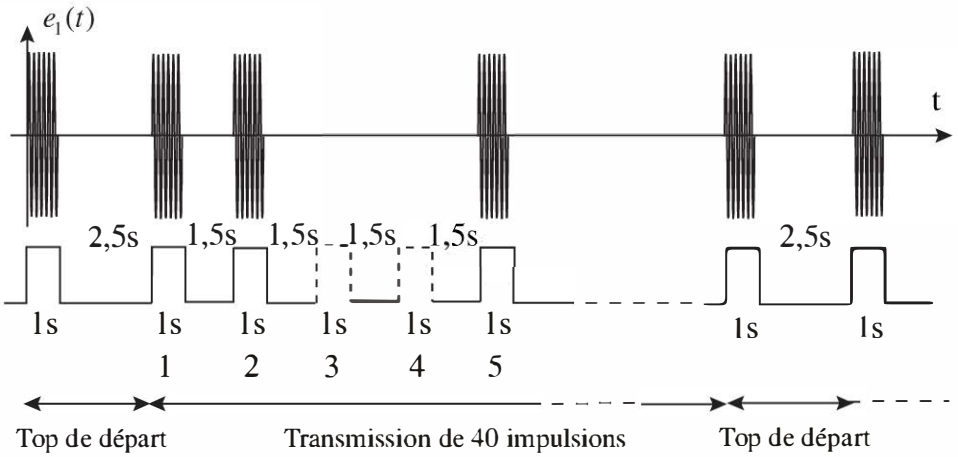


Figure 11.22

Copyright © 2007 Dunod.

Le système récepteur, chargé de recevoir l'ordre de commande pour l'exécuter, doit être branché sur le réseau et disposer d'un circuit électrique sensible au signal $e_2(t)$.

Un circuit électrique qui permet d'extraire le signal de commande est présenté figure 11.23. Dans ce circuit on reconnaît deux cellules RLC montées en cascade. Chaque cellule est câblée suivant un montage dit « montage bouchon ».

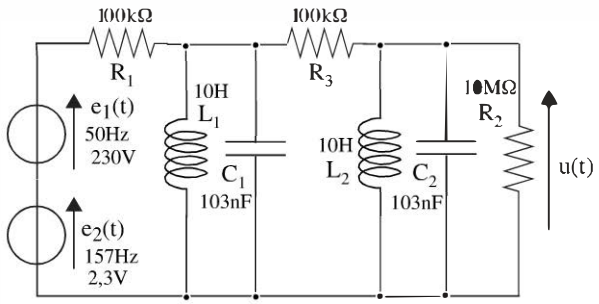


Figure 11.23

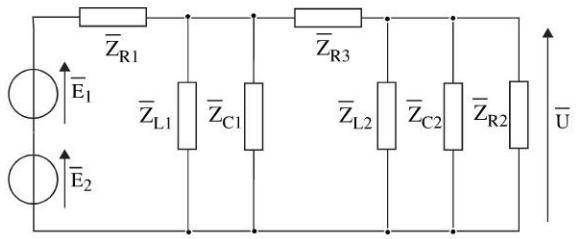


Figure 11.24

La résonance parallèle (voir chapitre 9) de chacune des cellules est accordée à la fréquence de 157 Hz pour permettre la restitution du signal $e_2(t)$ et l'atténuation des signaux de fréquences différentes, dont $e_1(t)$.

L'étude du circuit est réalisée en régime permanent périodique, car deux régimes coexistent : la source à 50 Hz ($e_1(t)$) et la source à 157 Hz ($e_2(t)$).

➤ ***Détermination de u(t)***

Le schéma électrique en régime permanent périodique associé au circuit est présenté à la figure 11.24.

On rappelle que la tension $u(t)$ est la somme de deux composantes $u_1(t)$ et $u_2(t)$, nécessitant :

– une étude à 50 Hz (pulsation $\omega_1 = 314$ rad/s) ; il en résulte la tension temporelle $u_1(t)$;

– une étude à 157 Hz (pulsation $\omega_2 = 986$ rad/s) qui définit la tension $u_2(t)$.

• Étude à 50 Hz (ω_1= 314 rad/s) en RPCA

Le schéma électrique est celui de la figure 11.25.

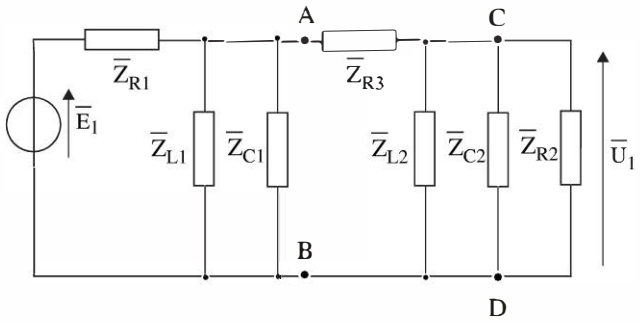


Figure 11.25

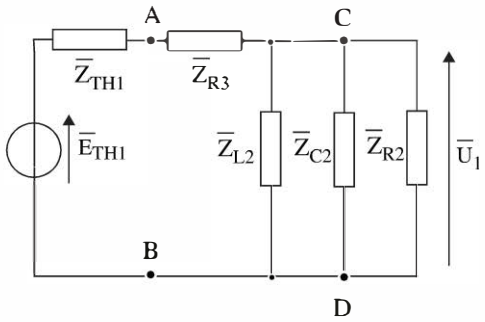


Figure 11.26

Copyright © 2007 Dunod.

En réalisant le Thévenin équivalent entre les points A et B du schéma, on obtient le schéma figure 11.26 avec :

$$\overline{E}_{TH1} = \frac{jL_1\omega_1}{R_1(1 - L_1C_1\omega_1^2) + jL_1\omega_1}\overline{E}_1 \text{ et } \overline{Z}_{TH1} = \frac{jL_1R_1\omega_1}{R_1(1 - L_1C_1\omega_1^2) + jL_1\omega_1}$$

La règle de Millman permet de déterminer rapidement l'expression de la tension $\overline{U}_1$ entre les points C et D :

$$\overline{U}_1 = \frac{\overline{E}_{TH1}/(\overline{Z}_{TH1} + \overline{Z}_{R3})}{1/(\overline{Z}_{TH1}\overline{Z}_{R3}) + 1/\overline{Z}_{L2} + 1/\overline{Z}_{C2} + 1/\overline{Z}_{R2}}$$

En posant $R_1 = R_3 = R$, $R_2 \gg R$, $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, on obtient :

$$\overline{U}_1 = \frac{j\left(\frac{L^2\omega_1^2}{R^2}\right)\overline{E}_1}{1 + j\frac{3L\omega_1}{R} - \frac{L^2\omega_1^2}{R^2} + j\frac{L^2CR\omega_1^3}{R^2} + L^2C^2\omega_1^4}$$

L'analyse fréquentielle de $\overline{H}_1(j\omega) = \dfrac{\overline{U}_1}{\overline{E}_1}$ produit un tracé asymptotique (voir chapitre 9) :

– avec le terme $j\left(\dfrac{L^2\omega^2}{R^2}\right)$, le tracé possède une pente croissante de + 40 dB/déc. et passant par le point $\left(0\,\text{dB}, \omega = \dfrac{R}{L}\right)$;

– avec le terme $1 + \ldots + L^2C^2\omega^4$, le tracé contient d'une part une asymptote horizontale lorsque $\omega \ll \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{10 \times 103 \cdot 10^{-9}}} = 986$ rad/s, et d'autre part une asymptote décroissante de pente décroissante de – 80 dB/déc. passant par le point (0 dB, $\omega_1 = \omega_0$) lorsque $\omega \gg \omega_0$.

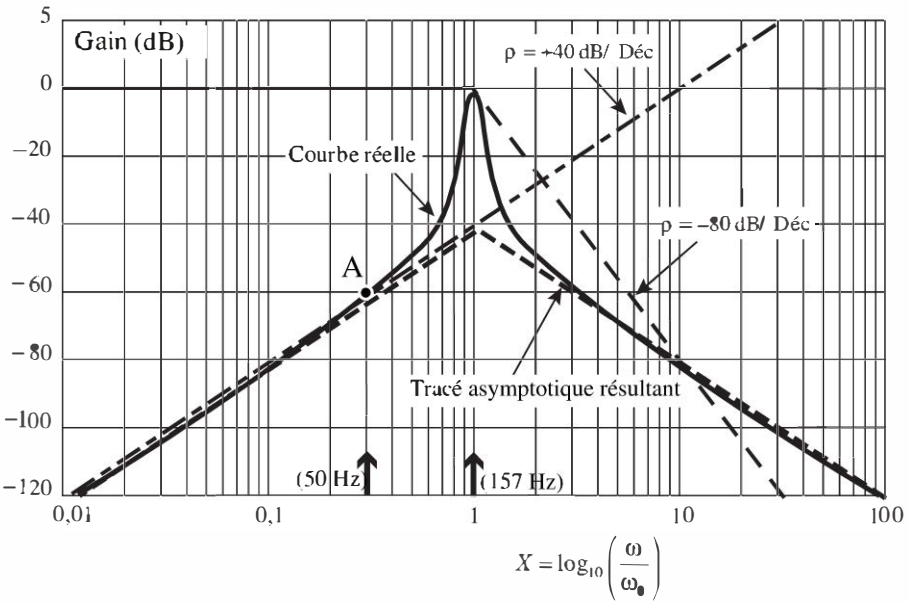


Figure 11.27

Copyright © 2007 Dunod.

Le tracé du gain $G_1 = 20\log_{10}|\overline{H}_1|$ est présenté à la figure 11.27 ; c'est la courbe d'un **circuit sélectif**, où le gain est maximal pour la **fréquence de résonance** $\omega = \omega_0$, avec $G_1(\omega_0) = -0{,}5$ dB.

Sur cette courbe, on voit que la pulsation $\omega_1 = 0{,}3\omega_0$ (fréquence 50 Hz) est fortement atténuée (point A) ; cela se confirme quand on calcule son expression :

$$G_1(\omega_1) = 20\log_{10}|\overline{H}_1(j\omega_1)| = 20\log_{10}(9{,}910^{-4}) = -60\,\text{dB et } \arg(\overline{H}_1(j\omega_1)) = 90°.$$

D'où : $u_1(t) = (9{,}91 \cdot 10^{-4} \times 230\sqrt{2})\cos(100\pi t - 90°) = 0{,}32\cos(100\pi t - 90°)$

• Étude à 157 Hz (ω_2 = 985 rad/s) en RPCA

Le schéma électrique équivalent pour cette étude est le même que précédemment (figure 11.25) mais en remplaçant ω_1 par la pulsation ω_2 et $\overline{E}_1$ par la source $\overline{E}_2$.

L'expression de $\overline{U}_2$ est alors :

$$G_2(\omega_2) = 20\log_{10}|\overline{H}_2(j\omega_2)| = 20\log_{10}(0{,}94) = -0{,}5\ \text{dB et } \arg(\overline{H}_2(j\omega_2)) = 0°$$

D'où : $u_2(t) = (0{,}94 \times 2{,}3\sqrt{2})\cos(314\pi t) = 3\cos(314\pi t)$

Le signal $e_2(t)$ traverse le circuit électrique sans atténuation significative (0,94 plutôt que 1).

• Expression de $u(t)$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 0{,}32\cos(100\pi t + \pi/2) + 3\cos(314\pi t)$$

La courbe qui correspond à cette expression est tracée à la figure 11.28.

On voit bien apparaître le signal à 157 Hz, et on observe un battement de l'amplitude à une fréquence de 50 Hz. Les deux signaux sont bien présents avec une forte amplitude du signal à 157 Hz.

Le léger battement de l'amplitude ne gêne en rien le détecteur électronique du 157 Hz, qui branché après ce circuit, se charge de traiter l'information pour allumer ou éteindre l'indicateur des jours de pointe.

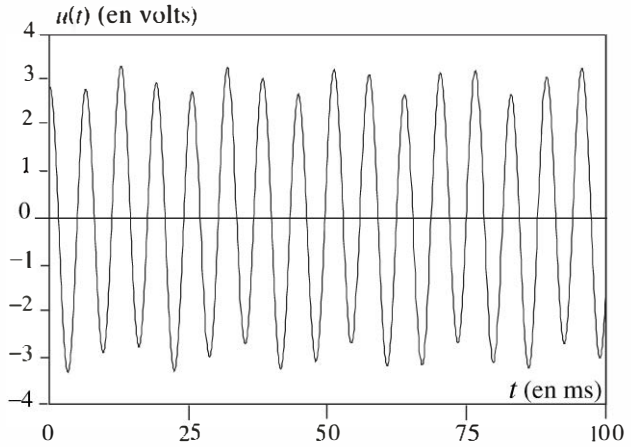


Figure 11.28

Copyright © 2007 Dunod.

Pour en savoir plus...

MÉTHODE DES DEUX WATTMÈTRES

Lorsque le réseau est distribué avec quatre fils (les trois fils de phases et le fil du neutre) la mesure des puissances sur le réseau triphasé, consommée par une charge ou fournie par une source, ne pose aucun problème majeur. Toutefois, lorsque que le réseau n'est distribué que suivant les trois fils de phase (sans le neutre), seule la méthode des deux wattmètres est utilisable. Le branchement des deux wattmètres est présenté à la figure 11.12c : chacun des deux appareils mesure le courant dans son fil de phase, et mesure la tension entre sa phase et la phase de référence.

> ***Remarque :*** Par cette méthode, on n'est pas obligé de respecter un ordre de mesure des phases.

Cette méthode nécessite une charge équilibrée. Soit φ le déphasage et soit $v_1(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t)$.

Pendant la mesure, les deux wattmètres ont pour indications P_1 et P_2 :

$$P_1 = \Re_e(\overline{U}_{13}\overline{I}_1^*) = \Re_e\left((\overline{V}_1 - \overline{V}_3)\overline{I}_1^*\right) = \Re_e\left((V\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ} - V\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240}\right)I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi},$$

$$P_1 = \Re_e\left((V\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ} - V\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ})I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right) = \Re_e\left((1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ}\right)VI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)$$

$$P_1 = \Re_e\left((\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ})VI\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) = \sqrt{3}V\,I\cos(\omega t - 30^\circ)$$

$$P_2 = \Re_e(\overline{U}_{23}\overline{I}_2^*) = \Re_e\left((\overline{V}_2 - \overline{V}_3)\overline{I}_2^*\right) = \Re_e\left((\overline{V}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ} - V\mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ})I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+120)^\circ}\right)$$

$$P_2 = \Re_e\left((\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ})\,V\,I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}\right) = \Re_e\left\{\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}\right)VI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right\}$$

$$P_2 = \Re_e\left((\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}VI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right) = \sqrt{3}V\,I\cos(\omega t + 30^\circ)$$

En additionnant P_1 et P_2, puis en les soustrayant, on obtient :

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3}V\,I(\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ)) = 2\sqrt{3}V\,I\cos 30^\circ\cos\varphi$$

$$P_1 + P_2 = 3V\,I\cos\varphi = P \Rightarrow \boxed{P = P_1 + P_2}$$

$$P_1 - P_2 = \sqrt{3}VI\left((\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ)\right) = 2\sqrt{3}V\,I\sin 30^\circ\sin\varphi = \sqrt{3}V\,I\sin\varphi$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$P_1 - P_2 = \sqrt{3} V\, I \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)}$$

Ex. : Les appareils indiquent : $P_1 = 2{,}4$ kW et $P_2 = 1{,}4$ kW

$\Rightarrow P = 3{,}8$ kW, $Q = 1{,}7$ kVAR, $S = 4\,267$ VA

Sur une charge, on sait que $P > 0 \Rightarrow (P_1 + P_2) > 0$. Si cette condition n'est pas respectée à partir de l'affichage des wattmètres, il suffit d'inverser les signes.

Ex. : $P_1 = -2{,}4$ kW et $P_2 = 1{,}4$ kW $\Rightarrow P = 1$ kW, $Q = 6{,}6$ kVAR, $S = 6{,}6$ kVA

Ex. : $P_1 = -2{,}4$ kW et $P_2 = -1{,}4$ kW $\Rightarrow P = 3{,}8$ kW, $Q = 1{,}7$ kVAR, $S = 4, 2$ kVA

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 12

Modélisation du transformateur électrique

Objectifs

- Présenter la constitution d'un transformateur électrique.
- Donner les principes de fonctionnement du transformateur électrique.
- Modéliser le composant électrique en tenant compte des effets parasites aux fréquences industrielles.
- Compléter le modèle en intégrant les effets parasites significatifs dans les hautes fréquences.

Vocabulaire

Bobines primaires et secondaires
Carcasse de bobinage
Circuit magnétique
Tôles ferromagnétiques – Ferrites
Cycle d'hystérésis
Pertes fer – Pertes par courants de Foucault
Inductance magnétisante et de fuite
Rapport de transformation
Condensateur de mode commun
Condensateur de mode différentiel

Ce chapitre est consacré à la modélisation du transformateur électrique, qui est un composant employé dans tous les domaines de l'électricité, pour toutes les gammes de puissances et de fréquences. Et pourtant, bien souvent dans la vie courante, on ignore sa présence et son indispensable nécessité. Le transformateur électrique est réalisé à partir de matériaux courants, dont des tôles d'acier faiblement allié (silicium, cobalt, etc.) parfois des ferrites, et dont les bobinages sont bobinés avec du fil de cuivre ou d'aluminium, protégé par un vernis isolant. Malgré sa constitution simple, c'est un composant dont la maîtrise nécessite de l'expérience. Dans un premier paragraphe, nous présentons sa constitution et son principe de fonctionnement. Le deuxième paragraphe est l'occasion d'établir un premier modèle en basse fréquence, tenant compte des différentes pertes et des chutes de tension propres aux fuites du flux magnétique. Ce modèle est complété dans le troisième paragraphe, où sont intégrés les effets capacitifs qui influent fortement sur les performances en haute fréquence.

Copyright © 2007 Dunod.

12.1 PRINCIPES ET CONSTITUTION DU TRANSFORMATEUR ÉLECTRIQUE

Le transformateur est un élément clé de la distribution de l'énergie électrique. En effet, c'est l'organe qui va permettre l'augmentation des tensions, fournies par les alternateurs des centrales électriques, jusqu'aux niveaux requis par les lignes HT du transport de l'électricité (voir chapitre 11). De même, il permet de réaliser l'opération inverse qui consiste, à partir des lignes HT, à réduire les amplitudes pour les adapter aux lignes BT. On voit que cet élément joue un rôle essentiel dans la distribution en modifiant les niveaux de tension, sans changer la fréquence et les puissances Son rendement est excellent ($\geqslant 0{,}98$).

Le principe de fonctionnement du transformateur et sa constitution permettent d'envisager une gamme très large de puissances (du watt à quelques dizaines de mégawatts) et une gamme très large de fréquences (de quelques hertz à quelques dizaines de mégahertz).

Ses plages de puissance et de fréquence font de ce composant électrique un élément parfait pour l'adaptation des amplitudes dans le domaine de l'électrotechnique, mais aussi dans celui de l'électronique.

En plus de sa maîtrise des amplitudes, le transformateur est utilisé pour son pouvoir d'isolement galvanique, tout en maintenant le transfert de l'énergie nécessaire. Sa capacité d'isolement assure aussi la sécurité des biens et des personnes vis-à-vis du réseau d'alimentation.

Comme on le voit, ce composant électrique est incontournable dès qu'il est question de modifier les amplitudes de signaux alternatifs ou d'assurer l'isolement galvanique.

12.1.1 Constitution du transformateur monophasé

Un transformateur monophasé comporte au moins (figure 12.1) :

- un **circuit magnétique**, dans lequel circule le flux qui transporte l'énergie ;
- un **bobinage primaire**, qui reçoit l'énergie électrique pour la transformer en énergie magnétique dans le circuit magnétique ;
- un **bobinage secondaire**, qui restitue l'énergie électrique initiale en transformant l'énergie magnétique du circuit magnétique.

Le symbole du composant (figure 12.2) reprend les éléments précédents, où les cercles représentent les bobinages, où leur entrelacement montre la liaison entre le primaire et le

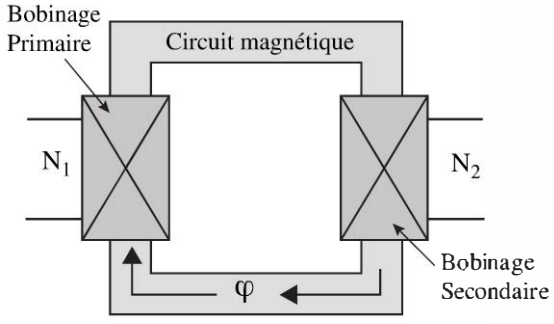
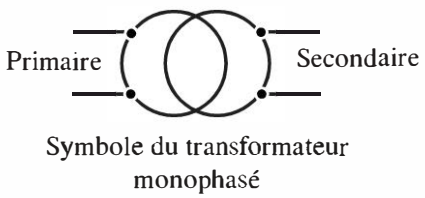


Figure 12.1



Symbole du transformateur monophasé

Figure 12.2

Copyright © 2007 Dunod.

secondaire (par le biais du circuit magnétique) et où les paires de fils révèlent l'entrée et la sortie du transformateur.

➤ *Bobinages*

Un **bobinage** est constitué de spires jointives réalisées par des fils conducteurs (du cuivre ou de l'aluminium) recouverts d'un vernis qui isole les spires entre elles.

Les deux bobinages d'un transformateur, le primaire à N_1 spires et le secondaire à N_2 spires, doivent être au plus près l'un de l'autre pour obtenir un **couplage magnétique**[1] idéal.

Pour cela, les bobines sont soit **concentriques** (figure 12.3a) soit montées en **galettes alternées** (figure 12.3b), soit en combinant les deux solutions précédentes. La différence principale entre ces solutions tient dans la valeur de la tension d'isolement que peuvent tenir les bobinages : un montage en galettes permet d'isoler des tensions très élevées au détriment de la simplicité de la réalisation. La bobine primaire est généralement montée au plus près du circuit magnétique, pour que la totalité du flux magnétique produit soit canalisée, et pour que la bobine secondaire voie la totalité de la variation du flux du primaire.

Le fil utilisé est souvent en cuivre, recouvert d'un vernis polymérisable qui, après étuvage, se durcit pour réduire les phénomènes de vibration.

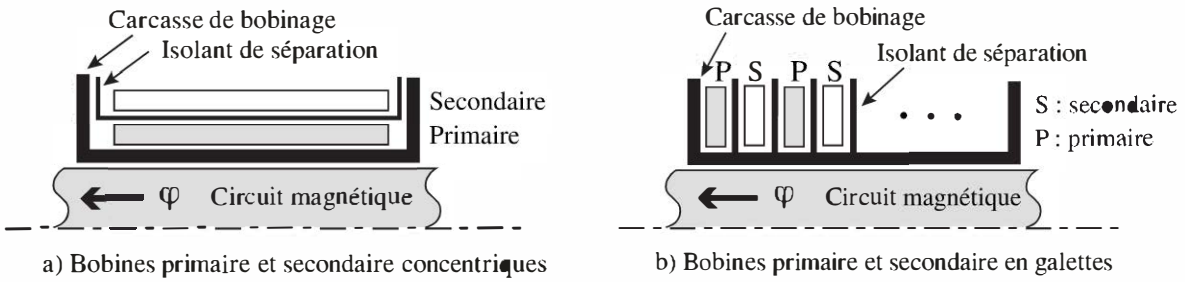


Figure 12.3

Une **carcasse** de bobinage (à base de matériaux polymères) permet de maintenir en place les bobinages et les isole du contact avec le circuit magnétique (conducteur).

On appelle **coefficient de foisonnement** du bobinage α_{BO} le rapport entre la surface totale des N spires de cuivre S_{CU} et la surface utile de la carcasse S_{BO} (figure 12.4).

Des isolants de séparation (film en matière plastique, papier huilé...) assurent la tenue en tension entre chaque bobinage. L'excès d'isolants réduit considérablement le coefficient de foisonnement α_{BO}.

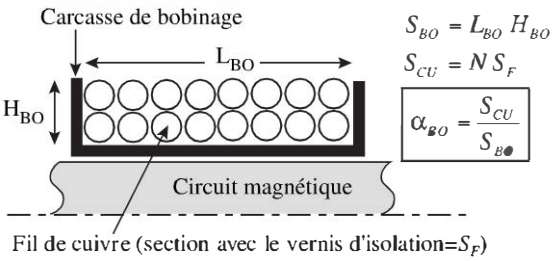


Figure 12.4

➤ *Circuit magnétique*

Le **circuit magnétique** permet la circulation du flux au travers des enroulements primaire et secondaire. Pour canaliser le flux, le matériau réalisant le circuit magnétique doit être

[1] Le couplage magnétique est parfait lorsque le flux traversant la bobine primaire est égal au flux traversant la bobine secondaire.

Copyright © 2007 Dunod.

ferromagnétique [2]. Pour canaliser entièrement le flux, les circuits magnétiques ont en général des structures symétriques, qui se referment sur elles-mêmes, car on rappelle que le flux est une grandeur conservative (voir première partie).

Lorsqu'une bobine parcourue par un courant i possède en son centre un barreau de matière ferromagnétique, alors une réorganisation se crée dans la matière du barreau produisant un champ magnétique $\vec{B}$ (figure 12.5a).

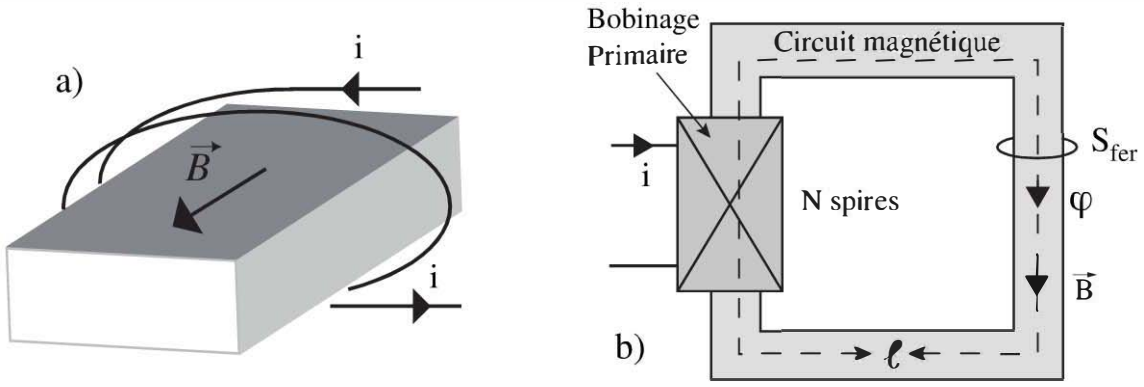


Figure 12.5

Dans le transformateur, $\vec{B}$ est produit par un bobinage primaire, comportant N spires, parcouru par un courant i (figure 12.5b). Le champ magnétique $\vec{B}$ circule alors dans le circuit magnétique.

L'expérience montre que la relation qui lie le courant i à $\vec{B}$ n'est pas une relation linéaire, comme le prouve la **caractéristique de première aimantation** de la figure 12.6.

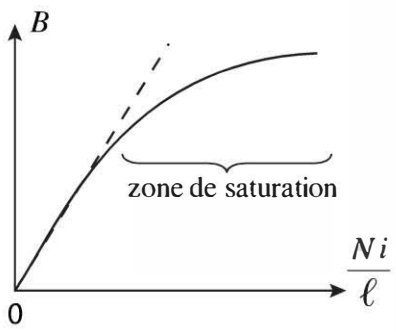


Figure 12.6

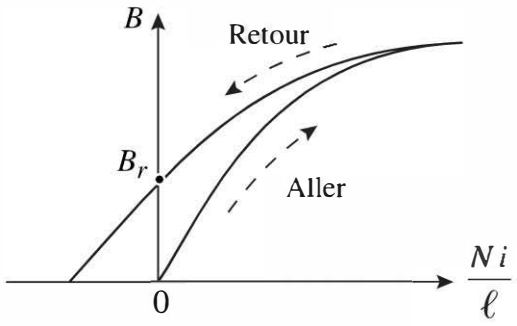


Figure 12.7

Mais en plus de la saturation, le matériau fait apparaître un **effet d'hystérésis** (figure 12.7) se traduisant par une courbe différente à l'aller et au retour. Ce phénomène montre l'aspect non réversible du réarrangement de la matière. Notamment, la courbe montre que lorsque $i = 0$ alors $\vec{B} = \vec{B}_r \neq 0$; l'aimantation ne s'annule pas, produisant un champ magnétique rémanent B_r. C'est cette propriété qui permet la réalisation d'aimants artificiels.

L'annulation du champ magnétique ne se produit que si l'on produit une désaimantation de la matière par un courant négatif.

---

[2] Le ferromagnétisme est la propriété qu'ont certains corps de s'aimanter très fortement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, et pour certains (les aimants, matériaux magnétiques durs) de garder une aimantation importante même après la disparition du champ extérieur.

Copyright © 2007 Dunod.

Le phénomène d'hystérésis est toujours lié à une transformation de l'énergie interne en chaleur, entraînant des pertes dans la matière.

À partir d'un courant i alternatif, la caractéristique précédente se prolonge pour aboutir au **cycle d'hystérésis** de la figure 12.8.

La forme du cycle d'hystérésis dépend de la nature du matériau.

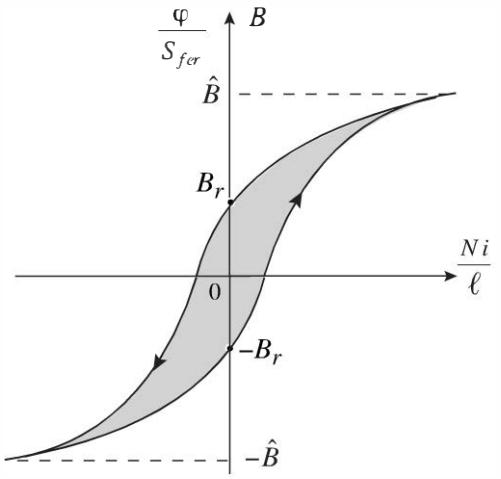


Figure 12.8

Pour produire un champ $\vec{B}$ alternatif, il faut que le courant i parcourant la bobine soit, lui aussi, alternatif.

Le champ circulant sur le cycle d'hystérésis génère un flux alternatif, puisque $\varphi = BS_{fer}$ (avec S_{fer} la section du matériau).

> Il ressort que l'ensemble des grandeurs i, B et φ dans la bobine primaire et le matériau du circuit magnétique d'un transformateur est alternatif. Le courant qui traverse la bobine, à l'origine des champs et du flux magnétique, est appelé le **courant magnétisant**.

Les matériaux qui réalisent les circuits magnétiques se différencient par les pertes qu'ils génèrent lorsque le flux qui les traverse est alternatif. La source de ses pertes est principalement due aux **pertes par hystérésis** [3] et aux **pertes par courant de Foucault**.

La fréquence f et l'amplitude crête du champ magnétique $\hat{B}$ sont les paramètres principaux qui influent sur les pertes.

12.1.2 Principe de fonctionnement du transformateur

Le flux dans le circuit magnétique est le vecteur de transmission de l'énergie du primaire vers le secondaire.

Le fonctionnement du transformateur est basé sur deux principes :

- la création d'un flux par la circulation d'un courant dans une bobine à N spires, qui entoure un circuit magnétique. En supposant le circuit magnétique linéaire, on a la relation $N\varphi = Li$, où L est le coefficient d'inductance (voir chapitre 2) ;
- l'apparition d'une f.é.m. e aux bornes d'une bobine, traversée par un flux temporel φ variable, avec $e(t) = -N \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$.

[3] Voir « Pour en savoir plus : Pertes dans les circuits magnétiques » en fin de chapitre.

Copyright © 2007 Dunod.

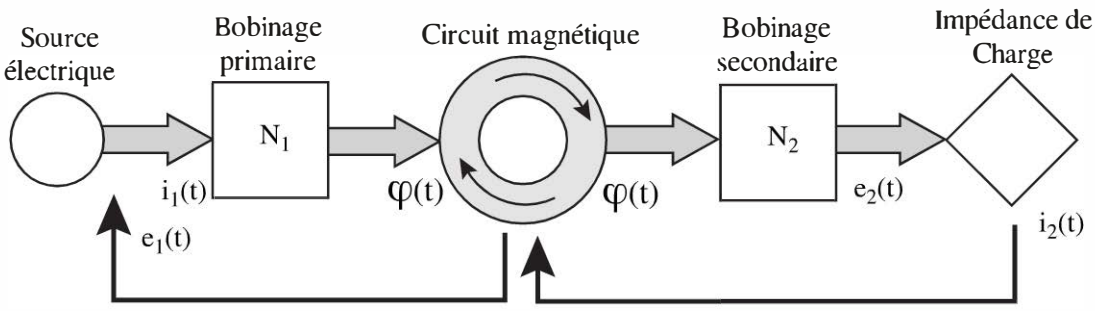


Figure 12.9

Sur la figure 12.9, la source électrique alimente le primaire, qui produit le flux $\varphi(t)$ grâce à la circulation du courant $i_1(t)$.

Le flux circulant dans le circuit magnétique traverse le bobinage secondaire, et génère la f.é.m. $e_{20}(t) = -N_2 \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ aux bornes du bobinage. Le flux traverse aussi le bobinage primaire créant $e_1(t) = -N_1 \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$, qui s'oppose en partie au courant $i_1(t)$ lui ayant donné naissance (loi de Lenz).

On définit un paramètre important, le **rapport de transformation** $\boxed{m = \dfrac{E_{20}}{E_1} = \dfrac{N_2}{N_1}}$

(où E_{20} et E_1 sont les valeurs efficaces de e_{20} et e_1)

12.1.3 Application : dimensionnement d'un transformateur

Le paragraphe précédent a certainement montré que le transformateur était un composant dont la maîtrise nécessite une certaine expérience. C'est pourquoi, nous proposons d'expliciter une méthode industrielle de dimensionnement d'un transformateur.

On doit réaliser un transformateur alimenté en tension à partir des données suivantes :

- tension efficace au primaire : U_1 ;
- tension efficace au secondaire : U_2 ;
- courant efficace au primaire : I_1 ;
- forme des signaux électriques : sinusoïdale ;
- fréquence f : 50 Hz ;
- tension d'isolement (pri./sec.) : 1 500 V ;
- refroidissement : convection naturelle.

À partir de ces données, nous choisissons *a priori* :

- une densité de courant dans les fils de $k = 2$ A/mm^2. Cette valeur est choisie dans l'intervalle qui s'étend de 1 A/mm^2 (pour un petit transformateur haute fréquence) jusqu'à 4 A/mm^2 (pour un transformateur bien refroidi en basse fréquence) ;
- un champ magnétique crête $\hat{B} = 0{,}9$ T, qui peut s'étendre de $\hat{B} = 0{,}2$ T (fréquence 20 kHz et circuit magnétique en ferrite) jusqu'à $\hat{B} = 2$ T (transformateur basse fréquence en supermalloy) ;

Copyright © 2007 Dunod.

– un coefficient de foisonnement $\alpha_{BO} = 50\ \%$, qui nécessite d'avoir un enroulement en fil de cuivre souple, de réaliser le bobinage à la machine (une bobineuse) et d'avoir des entretoises d'isolement entre primaire et secondaire de faible épaisseur (la tension d'isolement de seulement 1 500 V le permet).

La puissance apparente du transformateur $S = U_1 I_1$ impose le courant secondaire $I_2 = \dfrac{S}{U_2}$. Le rapport de transformation est $\boxed{m = \dfrac{N_2}{N_1} \simeq \dfrac{U_2}{U_1}}$.

La section du fil de cuivre du primaire de $\boxed{S_{CU1} = \dfrac{I_1}{k}}$, et la section secondaire de $\boxed{S_{CU2} = \dfrac{I_2}{k}}$ entraîne une section totale de cuivre de $S_{CU} = N_1 S_{CU1} + N_2 S_{CU2}$ $= N_1 \left(\dfrac{I_1}{k} + m \dfrac{I_2}{k} \right) = 2 \dfrac{S N_1}{k V_1}$. La surface bobinée devient $\boxed{S_{BO} = S_{CU} \alpha_{BO}}$.

En négligeant les résistances des enroulements, on a :

$$U_1 = |-e_1| = \left| N_1 \frac{d\varphi}{dt} \right| = N_1 \frac{\hat{B}}{\sqrt{2}} S_{fer} \omega \text{ (en supposant } \varphi = \hat{B} S_{fer} \sin(\omega t)\text{) d'où :}$$

$$\boxed{S_{fer} = \frac{\sqrt{2} U_1}{2\pi f \hat{B} N_1}}$$

Le calcul du produit des surfaces mène à : $\boxed{S_{fer} S_{BO} = \dfrac{\sqrt{2} S \alpha_{BO}}{\pi f \hat{B} k}}$.

La valeur de $S_{fer} S_{BO}$ permet de choisir dans les catalogues des constructeurs, la carcasse de bobinage adaptée (figure 12.10). Une fois ce choix adopté, la section de bobinage S_{BO} ainsi que la section de fer S_{fer} sont connues.

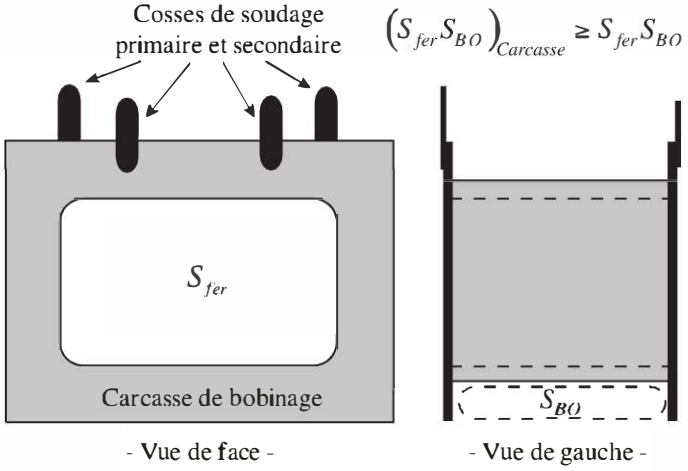


Figure 12.10

À partir de $S_{fer} = \dfrac{\sqrt{2} U_1}{2\pi f \hat{B} N_1}$, on déduit le nombre de spires du primaire N_1, et connaissant le rapport de transformation $m = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$, on calcule N_2.

Copyright © 2007 Dunod.

Ces deux calculs définissent parfaitement les bobinages à réaliser (les sections des fils et les nombres de spires).

La section S_{fer} du circuit magnétique étant connue, sa forme sera toujours choisie pour réduire au plus court la longueur de la circulation du flux.

En résumé, le calcul du produit $S_{fer}S_{BO}$ à partir du cahier des charges et le choix d'une carcasse, permet de déduire tous les paramètres de réalisation du transformateur.

Remarque : On note que le calcul du produit $S_{fer}S_{BO}$ impose de choisir dans les catalogues une valeur immédiatement au dessus. Cette méthode laisse une grande liberté dans le choix des dimensions de la carcasse (plus haute que large ou vice versa, ou plutôt équilibrée, etc.)

12.2 MODÈLE DU TRANSFORMATEUR EN BASSE FRÉQUENCE

La constitution du transformateur étant présenté, il convient ici de présenter un modèle de fonctionnement.

Ce premier modèle prend en compte les éléments essentiels nécessaires qui interviennent dans le fonctionnement et qui permettent de chiffrer les pertes Joule et les pertes fer [4].

Le modèle constitue alors une bonne approximation du comportement d'un transformateur en régime permanent basse fréquence (< 1 kHz).

Le transformateur peut être modélisé comme un quadripôle (figure 12.11) avec une entrée et une sortie

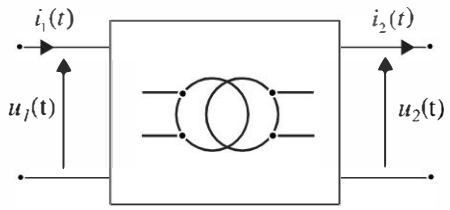


Figure 12.11

Le bobinage primaire recevant l'énergie électrique de l'extérieur, il est plus naturel d'utiliser la convention récepteur au primaire, et d'utiliser la convention générateur au secondaire.

12.2.1 Modèle du transformateur à vide (sans charge)

Tout d'abord, menons l'analyse du fonctionnement du transformateur lorsqu'il n'y a pas de charge ($i_2(t) = 0$).

Le bobinage primaire (parcouru par le courant magnétisant $i_1(t) = i_m(t)$) génère le flux φ_m dans le circuit magnétique, qui s'établit alors dans les bobinages primaire (comprenant N_1 spires) et secondaire (N_2 spires).

[4] Voir « Pour en savoir plus : Pertes dans les circuits magnétiques » en fin de chapitre.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Rapport de transformation m***

Le flux φ_m dans le bobinage primaire produit la f.é.m. $e_1 = -N_1 \dfrac{\varphi_m}{dt}$ aux bornes de la bobine. De même, traversant la bobine secondaire, il crée la f.é.m. à vide $e_{2\bullet} = -N_2 \dfrac{d\varphi_m}{dt}$ (figure 12.12).

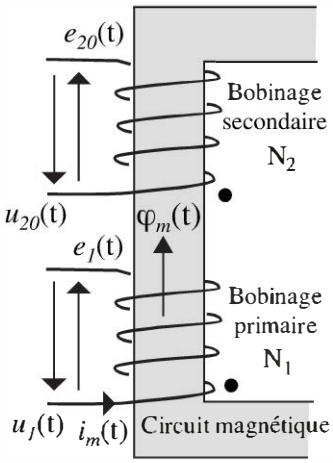


Figure 12.12

Le rapport des tensions est conditionné par le rapport constant du nombre de spires $\dfrac{e_{20}(t)}{e_1(t)} = \dfrac{N_2}{N_1}$. On retrouve la définition du rapport de transformation $\boxed{m = \dfrac{N_2}{N_1}}$.

En convention récepteur, la tension primaire est $u_1 = -e_1 = N_1 \dfrac{\varphi_m}{dt}$. Au secondaire on définit la tension à vide $u_{2\bullet} = -e_{2\bullet} = +N_2 \dfrac{d\varphi_m}{dt}$.

Les points, représentés sur la figure 12.12 et marquant les deux bobinages, indiquent que si des courants rentrent dans les bobines du côté des points, alors les flux produits dans le circuit magnétique sont additifs.

En d'autres termes, les points donnent aussi le sens respectif des tensions $u_1(t)$ et $u_{2\bullet}(t)$ par la relation $u_{20}(t) = m u_1(t)$.

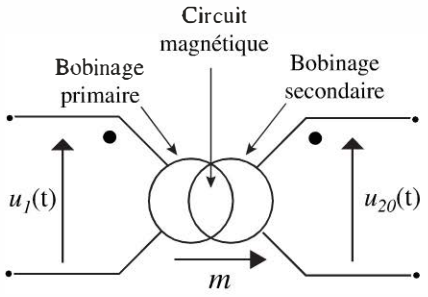


Figure 12.13

Le modèle qui traduit cette relation est présenté à la figure 12.13. Le symbole laisse deviner les bobinages primaire et secondaire, ainsi que leur liaison par le circuit magnétique.

➤ ***Courant magnétisant – Inductance magnétisante L_m***

Le courant magnétisant $i_m(t)$ produit le flux $\varphi_m(t)$ qui traverse le circuit magnétique. Dans un circuit magnétique linéaire, la relation liant le courant magnétisant et le flux est donnée par :

$$N_1 \varphi_m = L_m i_m$$

En reprenant cette équation et celle de la tension primaire $u_1(t)$, on obtient :

$$N_1 \varphi_m = L_m i_m \text{ et } u_1 = N_1 \frac{d\varphi_m}{dt} \Rightarrow \boxed{u_1 = L_m \frac{di_m}{dt}}$$

Copyright © 2007 Dunod.

On peut modéliser le bobinage primaire (figure 12.14) par une **inductance magnétisante** L_m qui, parcourue par le courant magnétisant $i_m(t)$, induit la tension $u_1(t)$.

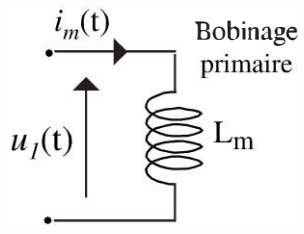


Figure 12.14

Une autre écriture lie le courant au flux. En effet, le théorème d'Ampère appliqué sur la longueur moyenne du circuit magnétique entraîne $H_m \ell = N_1 i_m$, la nature du matériau (supposé linéaire) conduit à $B_m = \mu H_m$ et le flux à travers la surface du matériau implique $\varphi_m = B_m S$. En regroupant ces relations, on obtient $N_1 i_m = \dfrac{\ell}{\mu S_{fer}} \varphi_m$, d'où $\boxed{N_1 i_m = \Re \varphi_m}$, avec $\Re = \dfrac{\ell}{\mu S_{fer}}$, la réluctance propre au circuit magnétique et au matériau utilisés. On en déduit une expression de l'inductance magnétisante :

$$N_1 \varphi_m = L_m i_m \quad \text{et} \quad N_1 i_m = \Re \varphi_m \Rightarrow \boxed{L_m = \frac{N_1^2}{\Re}}$$

➤ *Prise en compte des pertes Joule primaire P_{Jp} et des pertes fer P_{fer}*

Le courant primaire $i_m(t)$, et plus généralement $i_1(t)$, circulant dans le bobinage, échauffe les conducteurs par effet Joule. Pour prendre en compte cet effet, on insère une résistance r_1 dans le modèle (figure 12.15).

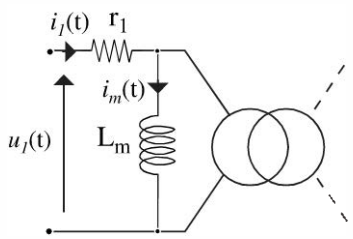


Figure 12.15

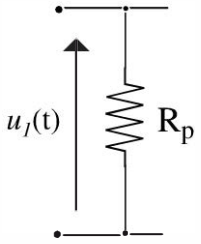


Figure 12.16

Les pertes fer et les pertes par courant de Foucault sont conditionnées par la fréquence et par le carré de l'amplitude crête du champ magnétique. Sachant que l'induction est proportionnelle à la tension primaire $u_1(t)$, à fréquence fixe, les pertes sont donc proportionnelles au carré de la tension. Pour tenir compte de ces pertes, on place une résistance R_p en parallèle du primaire, dissipant alors une puissance $P_R = \dfrac{U_1^2}{R_p}$ (figure 12.16), avec U_1 la valeur efficace de $u_1(t)$.

➤ *Modèle du transformateur à vide*

En regroupant l'ensemble des éléments précédents, on arrive au modèle du transformateur à vide (figure 12.17).

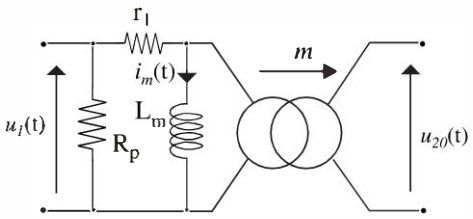


Figure 12.17

Copyright © 2007 Dunod.

12.2.2 Modèle du transformateur en charge

En charge, la tension $u_2(t)$ entraîne la circulation d'un courant $i_2(t)$ dans la charge Z_{CH} (figure 12.18).

Le courant $i_2(t)$ produit alors un flux $\varphi_2(t)$, qui s'oppose à la cause (le flux $\varphi_1(t)$) qui lui a donné naissance (loi de Lenz). Si le circuit magnétique était parfait, on aurait la relation $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 0$. Dans la réalité, subsiste un flux résiduel de magnétisation, identique au flux du transformateur sans charge, d'où $\boxed{\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi_m(t)}$.

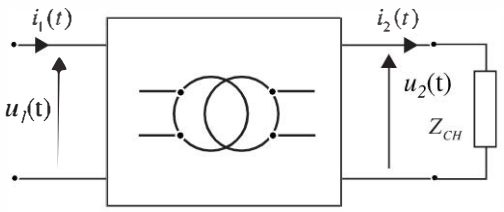


Figure 12.18

➤ ***Relation entre les courants primaire et secondaire***

En considérant le circuit magnétique linéaire (de longueur ℓ, de section S et de perméabilité μ), il vient :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi_m(t) &\Rightarrow B_1(t)S - B_2(t)S = \varphi_m(t)\\ &\Rightarrow \mu H_1(t)S - \mu H_2(t)S = \varphi_m(t)\\ &\Rightarrow \mu S\left(\frac{N_1 i_1(t)}{\ell} - \frac{N_2 i_2(t)}{\ell}\right) = \varphi_m(t)\\ &\Rightarrow N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) = \frac{\ell}{\mu S}\varphi_m(t) = \Re\varphi_m(t)\end{aligned}$$

En reprenant un résultat du paragraphe précédent $N_1 i_m = \Re\,\varphi_m$, la relation précédente devient $N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) = \Re\,\varphi_m(t) = N_1 i_m(t)$, et se transforme en $N_1\big(i_1(t) - i_m(t)\big) - N_2 i_2(t) = 0$. En posant $i_1'(t) = i_1(t) - i_m(t)$, on peut alors écrire :

$$N_1 i_1'(t) - N_2 i_2(t) = 0$$

D'où : $\boxed{i_1'(t) = m i_2(t)}$

Cette relation entraîne une division du courant primaire dans le schéma équivalent (figure 12.19) et fait apparaître une relation importante entre les courants côté primaire et côté secondaire.

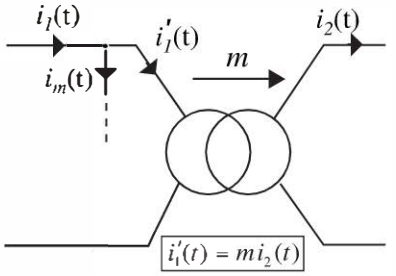


Figure 12.19

Remarque : Si le circuit magnétique était parfait ($\Re \to 0$) alors on aurait $i_m(t) = 0$, d'où $i_1(t) = m i_2(t)$. Le courant secondaire serait parfaitement proportionnel au courant primaire.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Inductance de fuite***

Jusqu'alors, nous avons considéré que le flux était parfaitement canalisé par le circuit magnétique. Bien évidemment, c'était sans compter sur les imperfections du circuit magnétique, qui ne possède pas une réluctance nulle ($\Re \neq 0$).

On s'aperçoit sur la figure 12.20 qu'une petite partie du flux produit par le bobinage primaire ne circule pas dans le circuit magnétique, mais dans l'air.

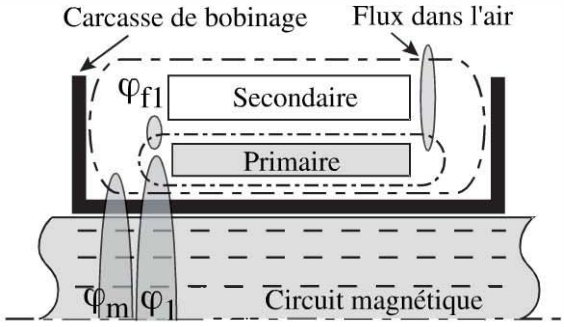


Figure 12.20

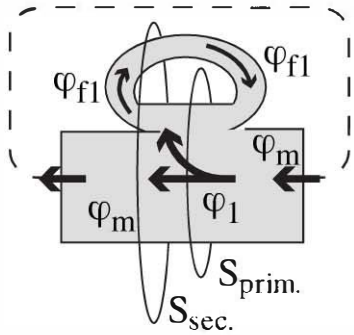


Figure 12.21

Ce qui est le plus gênant, c'est qu'il existe un flux φ_{f1} qui, en plus de circuler dans l'air, n'entoure pas le secondaire. En effet, traversant sa surface dans les deux sens, il s'annule (figure 12.21).

En résumé, la bobine primaire alimentée par le courant $i_1(t)$ génère le flux $\varphi_1(t)$, tandis que la bobine secondaire reçoit le flux $\varphi_{12}(t) = \varphi_1 - \varphi_{f1}$.

Le phénomène de fuite se produit aussi au secondaire lorsque $i_2(t)$ parcourt le bobinage secondaire, produisant alors : $\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{f1}$ (avec φ_{21} le flux traversant le bobinage primaire).

La circulation des flux est illustrée à la figure 12.22. On a alors les relations : $\varphi_m = \varphi_{12} - \varphi_{21}$, $\varphi_p = \varphi_1 - \varphi_{21}$ et $\varphi_s = \varphi_{12} - \varphi_2$ (avec φ_p le flux traversant le primaire et φ_s, le secondaire).

$$\text{La f.é.m. } e_2 = -N_2 \frac{d\varphi_s}{dt} = N_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - N_2 \frac{d\varphi_{12}}{dt} = N_2 \frac{d\varphi_{21}}{dt} + N_2 \frac{d\varphi_{f2}}{dt} - N_2 \frac{d\varphi_{12}}{dt}.$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\varphi_m}{dt} + N_2 \frac{d\varphi_{f2}}{dt}$$

Sachant que $e_{20} = N_2 \dfrac{d\varphi_m}{dt}$ et sachant que le flux de fuite est proportionnel au courant secondaire $i_2(t)$ (avec ℓ_2 l'inductance de fuite secondaire), alors :

$$N_2\varphi_{f2} = \ell_2 i_2, \quad e_2 = e_{20} + \ell_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{et } u_2 = u_{20} - \ell_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Lorsque le courant de charge $i_2(t) = 0$ alors on retrouve la relation $u_2 = u_{20}$.

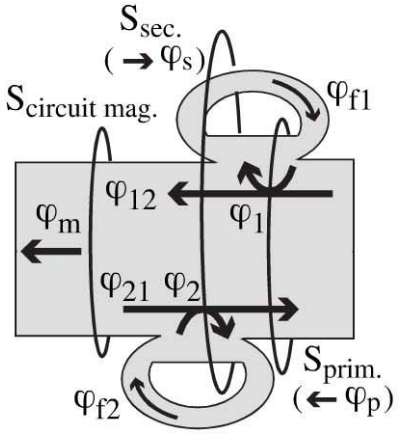


Figure 12.22

Copyright © 2007 Dunod.

De même, l'équation de la f.é.m au primaire prend la forme suivante : $e_1 = -N_1 \dfrac{d\varphi_p}{dt}$.

$$e_1 = -N_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + N_1 \frac{d\varphi_{21}}{dt}$$

$$= -N_1 \frac{d\varphi_m}{dt} - N_1 \frac{d\varphi_{f1}}{dt}$$

En écrivant la relation qui lie le flux de fuite primaire au courant $i_1(t)$, avec $N_1\varphi_{f1} = \ell_1 i_1$ (ℓ_1 l'inductance de fuite primaire), on obtient :

$$e_1 = e_{10} - \ell_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{d'où} \quad u_1 = u_{10} + \ell_1 \frac{di_1}{dt}.$$

➤ ***Modèle complet du transformateur***

La figure 12.23 présente le modèle complet du transformateur en basse fréquence. On y retrouve les éléments modélisant les pertes fer (R_p), les pertes Joule du primaire et du secondaire (r_1, r_2), la magnétisation (L_m) et les fuites magnétiques dans le couplage (ℓ_1 et ℓ_2).

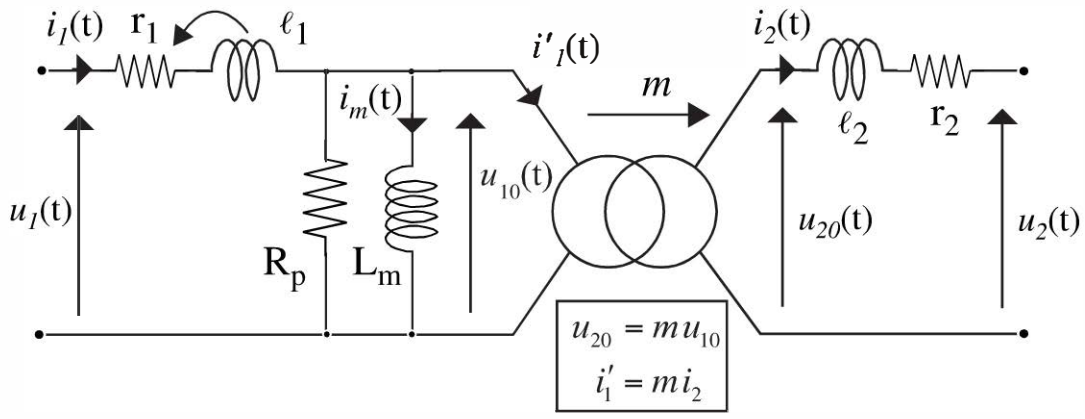


Figure 12.23

Si ce modèle représente bien le transformateur réel, il est toutefois inadapté pour établir une résolution aisée des équations de circuit. On lui préfère nettement le modèle équivalent de la figure 12.24, où l'approximation réalisée par le déplacement de r_1 se traduit par une réduction des pertes Joule. Elles deviennent $r_1 I_1'^2$ au lieu de $r_1 I_1^2$. Sachant que $I_1' \simeq 0{,}98\, I_1$ à la puissance nominale, cette approximation est légitime.

De même, le déplacement de ℓ_1 réduit la chute de tension en charge à ses bornes, $\ell_1 \dfrac{di_1'}{dt}$ au lieu de $\ell_1 \dfrac{di_1}{dt}$. Comme en charge $I_1' \gg I_m$, cette approximation n'a aucune conséquence.

Toutefois, le modèle équivalent le plus utilisé par les électrotechniciens reste celui de la figure 12.25, où tous les éléments en série sont ramenés au secondaire.

Copyright © 2007 Dunod.

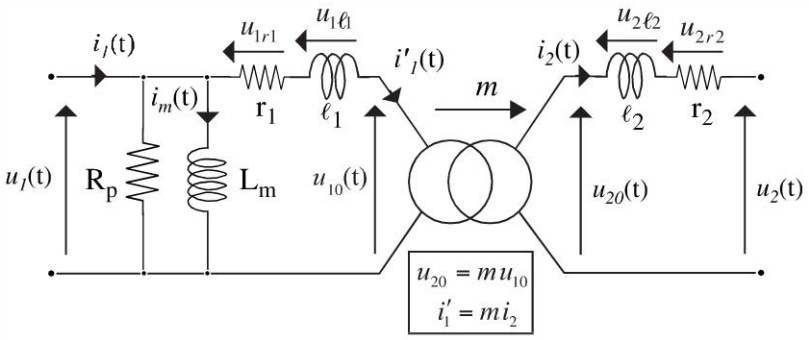


Figure 12.24

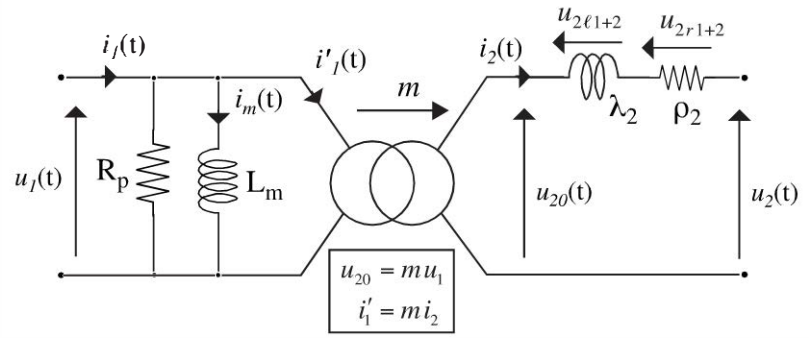


Figure 12.25

Pour arriver à cela, on calcule la chute de tension côté primaire, due aux fuites primaire, soit $u_{1\ell 1} = \ell_1 \dfrac{di'}{dt} = \ell_1 m \dfrac{di_2}{dt}$. Cette chute s'écrit aussi $u_{2\ell 1} = m u_{1\ell 1} = m^2 \ell_1 \dfrac{di_2}{dt}$. De même, la chute de tension côté secondaire, due aux fuites du secondaire, est $u_{2\ell 2} = \ell_2 \dfrac{di_2}{dt}$.

La chute de tension ramenée au secondaire, due à l'ensemble des fuites des bobinages, est donc $u_{2\ell 1+2} = u_{2\ell 1} + u_{2\ell 2} = (m^2 \ell_1 + \ell_2)\dfrac{di_2}{dt} = \lambda_2 \dfrac{di_2}{dt}$, avec $\boxed{\lambda_2 = m^2 \ell_1 + \ell_2}$.

Le même raisonnement mené à partir des chutes de tension résistive, dues à r_1 et r_2, aboutit à l'expression $u_{2r1+2} = (m^2 r_1 + r_2) i_2 = \rho_2 \, i_2$, avec $\boxed{\rho_2 = m^2 r_1 + r_2}$.

12.2.3 Application : représentation dans Fresnel

On rappelle que dans le transformateur, les grandeurs électriques sont alternatives. Pour la majorité des applications, ces grandeurs sont sinusoïdales. Nous utiliserons donc dans cette application, les phaseurs réduits associés aux grandeurs électriques et magnétiques (voir RPCA au chapitre 7).

Lorsque le transformateur est chargé par une impédance équivalente à la charge $\overline{Z}_{CH} = R_{CH} + \mathrm{j}X_{CH}$, la tension en sortie $\overline{U}_2$ dépend des paramètres du modèle et de ceux de la charge R_{CH} et X_{CH}.

On se propose dans cette application de déterminer l'évolution de $\overline{U}_2$ suivant la valeur de l'impédance $\overline{Z}_{CH}$.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Représentation dans le plan de Fresnel (λ_2 et ρ_2, négligées)***

Représentons les grandeurs électriques et magnétiques à partir d'un schéma simplifié (figure 12.26), dans lequel sont négligées les fuites au primaire et au secondaire.

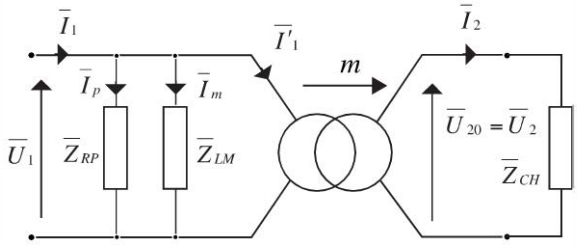


Figure 12.26

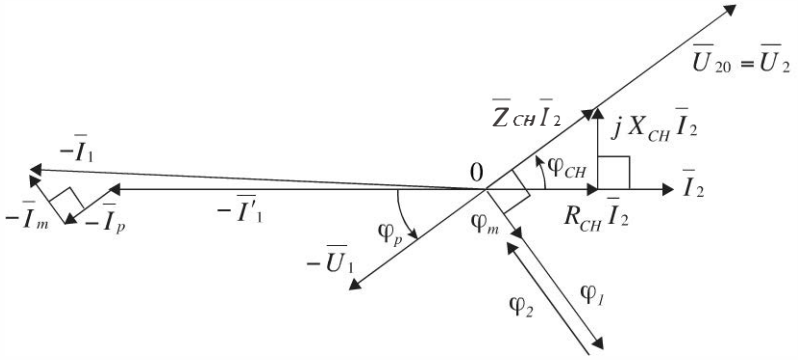


Figure 12.27

Concernant les équations du circuit primaire, on a :

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_p + \overline{I}_m + \overline{I}'_1, \quad \overline{U}_1 = \overline{Z}_{RP}\overline{I}_p = R_p\overline{I}_p, \quad \overline{U}_1 = \overline{Z}_{LM}\overline{I}_{LM} = \mathrm{j}L_m\omega\overline{I}_m$$

De même, le circuit secondaire permet d'écrire :

$$\overline{I}_2 = m\overline{I}'_1, \quad \overline{U}_{20} = \overline{U}_2 = m\overline{U}_1, \quad \overline{U}_2 = \overline{Z}_{CH}\overline{I}_2 = (R_{CH} + \mathrm{j}X_{CH})\overline{I}_2$$

L'équation des flux magnétiques, avec les fuites négligées, se résume à $\overline{\varphi}_m = \overline{\varphi}_p - \overline{\varphi}_s$.

> ***Remarque :*** Pour une simplification des écritures, plutôt que de placer les expressions vectorielles en face des vecteurs de Fresnel, on écrit directement l'expression des phaseurs réduits associés.

Le déroulement du tracé (figure 12.27) suit une certaine logique :

- on part de la sortie, en prenant le courant $\overline{I}_2$ comme direction des abscisses ; ce qui revient à poser sa phase à l'origine nulle ; $\overline{I}_2$ donne alors la direction de $\overline{I}'_1$;
- $\overline{Z}_{CH}$ étant connue, $R_{CH}\overline{I}_2$ a la direction de $\overline{I}_2$ et $\mathrm{j}X_{CH}\overline{I}_2$ est en quadrature avant. $\overline{Z}_{CH}\overline{I}_2$ donne alors la direction de $\overline{U}_2$;
- la direction de $\overline{U}_2$ donne celle de $\overline{U}_1$, et impose la direction du flux $\overline{\varphi}_m = \overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2$, puisque $\overline{U}_{20} = \overline{U}_2$ (en réalité, c'est $\overline{U}_{20}$ qui impose φ_m) ;
- de $\overline{U}_1$, on établit les directions de $\overline{I}_p$ (en phase) et $\overline{I}_m$ en quadrature ;
- on place ensuite $\overline{I}_1$ à partir des directions de $\overline{I}_p$, $\overline{I}_m$ et $\overline{I}'_1$ connues.

Sur la figure 12.27, nous représentons $-\overline{U}_1$, $-\overline{I}_p$, $-\overline{I}_m$ et $-\overline{I}'_1$ pour plus de clarté.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Représentation du modèle complet dans Fresnel***

Pour établir le modèle complet, on ajoute l'équation $\overline{U}_f = m\overline{U}_1 - \overline{U}_2$.

Les différences entre les tracés du modèle complet et du modèle précédent (sans les fuites) tiennent dans l'ajout de la chute de tension $\overline{U}_f = (r_2 + j\lambda_2\omega)\overline{I}_2$ pour produire la tension $-m\overline{U}_1$, et dans la représentation des flux qui ne peut plus exister. En effet, les éléments r_1, ℓ_1 et r_2, ℓ_2 ne sont pas séparés de ρ_2, λ_2, les f.é.m. $\overline{U}_{20}$ et $\overline{U}'_1$ ne sont donc pas accessibles.

Si l'on souhaite représenter la direction des flux, alors il faut séparer les éléments r_1, ℓ_1, r_2 et ℓ_2 dans le modèle (voir figure 12.24) et écrire les équations complexes. Cela ne présente *a priori* aucune difficulté quand on a compris le principe développé précédemment. Toutefois, expérimentalement, on ne peut pas identifier simplement les valeurs unitaires des inductances de fuite ℓ_1 et ℓ_2, alors que déterminer λ_1 est à la portée de tout expérimentateur.

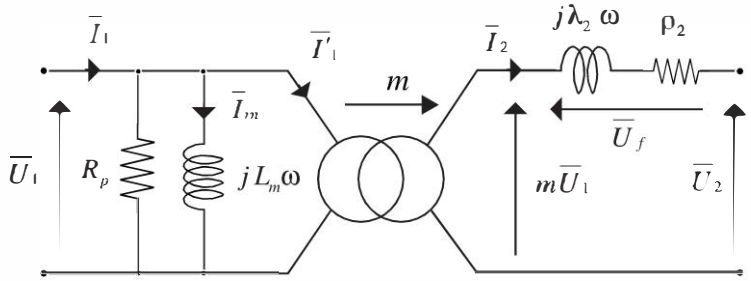


Figure 12.28

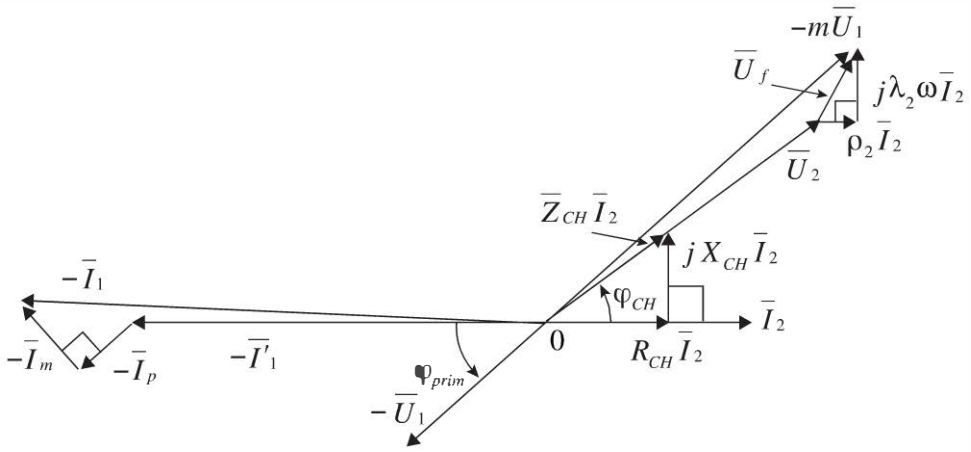


Figure 12.29

12.3 MODÈLE DU TRANSFORMATEUR EN HAUTE FRÉQUENCE

Nous abordons dans ce paragraphe un deuxième modèle, où le transformateur conserve ses fonctions principales d'adaptation des amplitudes (grâce à m) et d'isolement galvanique,

Copyright © 2007 Dunod.

mais où les signaux appliqués à l'entrée (le primaire) sont maintenant de hautes fréquences. On désigne dans ce paragraphe les hautes fréquences, comme les fréquences au moins supérieures à quelques centaines de fois les fréquences industrielles ; typiquement, les fréquences sont dans la gamme de la dizaine de kilohertz.

Pour situer le domaine d'applications des transformateurs en hautes fréquences, imaginons par exemple les transformateurs utilisés en audiofréquence pour réaliser l'adaptation des hauts parleurs des enceintes de sonorisation, ou encore ceux qui permettent de réaliser des alimentations à découpage (comme celles utilisées dans les ordinateurs familiaux).

12.3.1 Reprise du modèle du transformateur

Le modèle du transformateur en hautes fréquences doit être repris pour faire apparaître des éléments parasites, qui revêtent, dans cette gamme de fréquence, une importance primordiale.

➤ ***Condensateur C_D***

Le premier élément parasite, qui affecte la transmission des signaux hautes fréquences, peut être modélisé par un condensateur.

En effet, en reprenant les bobinages à l'échelle de la spire, on peut mettre en évidence une influence électrostatique entre deux spires jointives (figure 12.30).

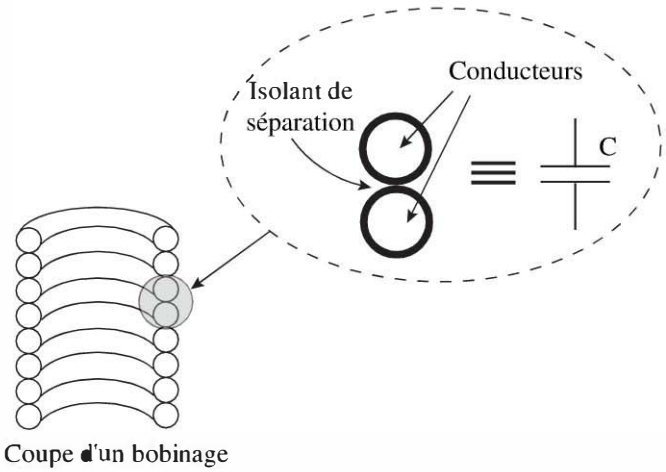


Figure 12.30

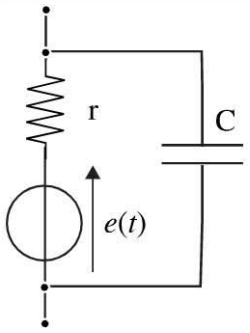


Figure 12.31

Les conducteurs des deux spires forment les armatures du condensateur parasite, tandis que le vernis d'isolation électrique joue le rôle de diélectrique. On remarquera ici que l'influence électrostatique entre spires, se manifeste dans tous les bobinages.

Le modèle équivalent d'une spire comporte alors en plus de la f.é.m. $e(t)$ induite et de la résistance du conducteur, un condensateur parasite interspire (figure 12.31).

Le modèle du transformateur présenté dans le paragraphe précédent est modifié, par l'introduction des condensateurs parasites au primaire et au secondaire (figure 12.32a).

Copyright © 2007 Dunod.

En utilisant les lois d'association des dipôles en parallèle, les deux condensateurs C_{DP} et C_{DS} se regroupent en un seul (figure 12.32b).

Ce condensateur, ramené côté primaire, devient $C_D = m^2 C_{DS} + C_{DP}$.

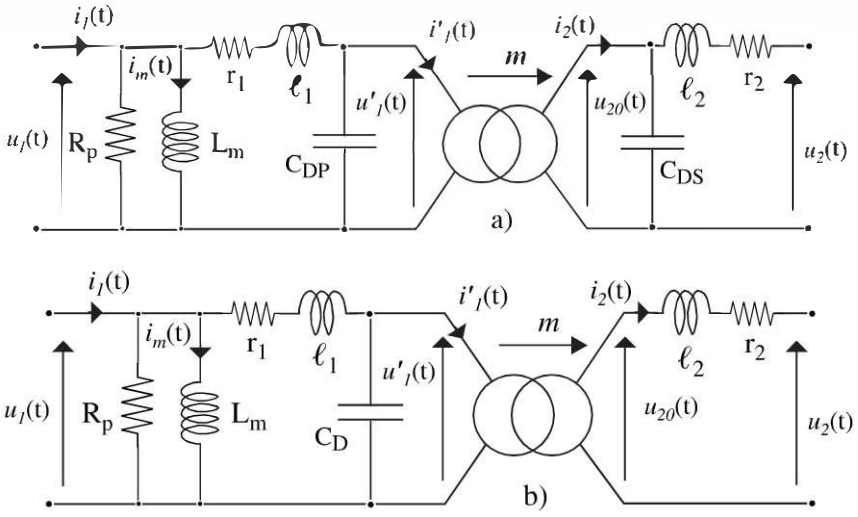


Figure 12.32

➤ *Condensateur C_{MC}*

Un autre condensateur parasite est identifié entre les deux bobinages primaire et secondaire (figure 12.33).

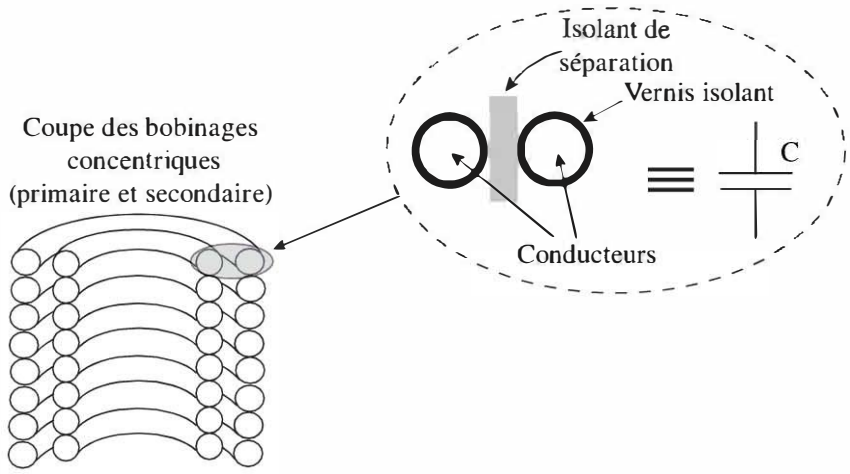


Figure 12.33

En effet, l'intercalaire inséré entre les spires conductrices des bobinages primaire et secondaire, pour réaliser l'isolement galvanique, joue le rôle du diélectrique d'un condensateur.

Ce condensateur dérive un courant, qui circule entre les bobinages. Le schéma équivalent du transformateur est donné à la figure 12.34. Un condensateur C_{MC} est placé entre le primaire et le secondaire.

> ***Remarque :*** La capacité du condensateur est relativement élevée (vis-à-vis des fréquences envisagées) car les surfaces en regard sont importantes.

Copyright © 2007 Dunod.

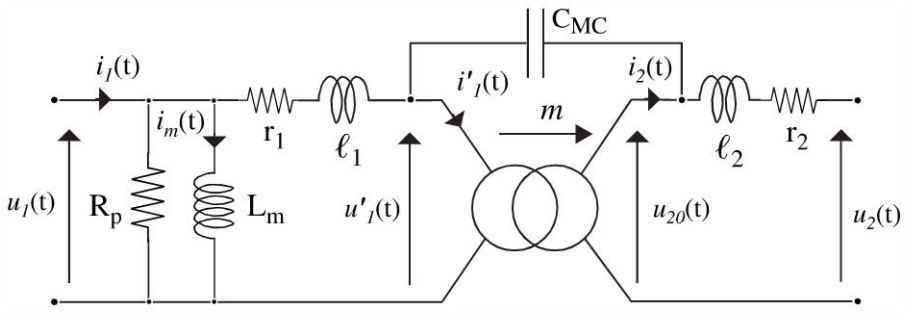


Figure 12.34

➤ ***Schéma complet en haute fréquence***

Le schéma électrique de la figure 12.35, associant les deux effets capacitifs, reflète assez fidèlement le comportement du transformateur en haute fréquence, d'après l'expérience.

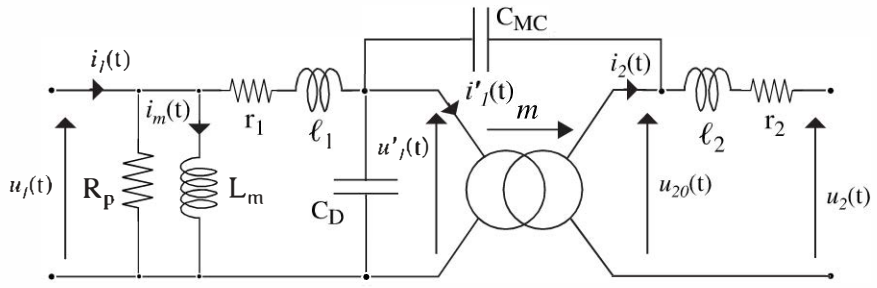


Figure 12.35

Moyennant quelques approximations, on lui préfère le modèle simplifié de la figure 12.36, où ℓ_2 et r_2 sont ramenés du côté primaire.

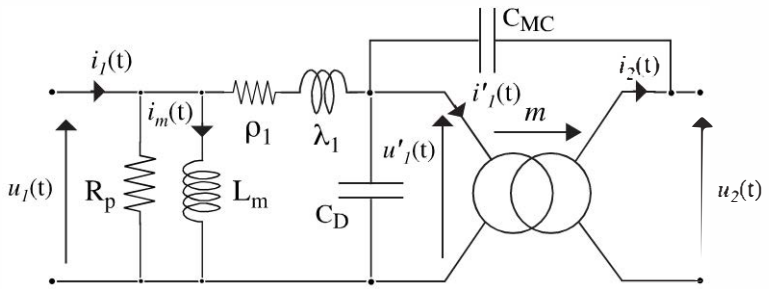


Figure 12.36

12.3.2 Application : analyse fréquentielle en mode différentiel

Nous proposons pour illustrer ce paragraphe d'effectuer l'analyse fréquentielle du transformateur en mode différentiel. Dans ce mode, seul le condensateur C_D est pris en compte dans le modèle. En effet, la tension aux bornes du condensateur C_{MC} ne variant pas, aucun courant ne traverse cette branche.

En ramenant l'ensemble des éléments au primaire, le schéma électrique d'étude devient celui de la figure 12.37, dans lequel est représenté le générateur d'alimentation du transformateur $(e_g(t),\ r_g)$.

Copyright © 2007 Dunod.

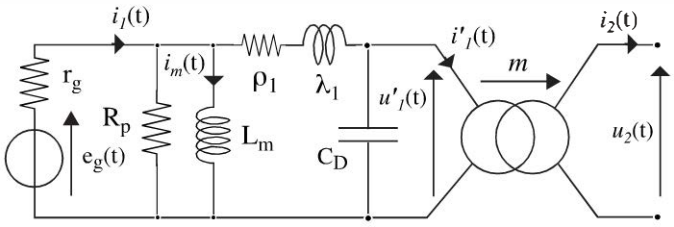


Figure 12.37

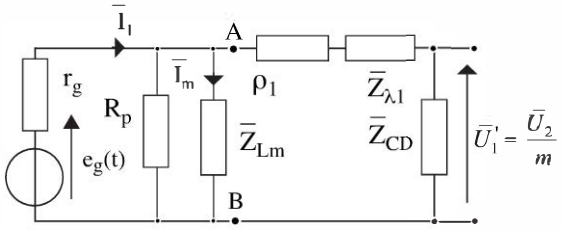


Figure 12.38

L'analyse fréquentielle impose d'étudier le circuit en RPCA à fréquence variable. Le schéma électrique symbolique est présenté à la figure 12.38.

La transmittance en tension est définie par $T_u(j\omega) = \dfrac{\overline{U}_2}{\overline{E}_g}$.

En établissant le modèle équivalent de Thévenin entre les points A et B, et sachant que $R_p \gg r_g$, on obtient :

$$\overline{E}_{TH} = \frac{jL_m\omega}{jL_m\omega + r_g}\overline{E}_g \quad \text{et} \quad \overline{Z}_{TH} = \frac{jL_m\omega r_g}{jL_m\omega + r_g}$$

En utilisant la règle du pont diviseur de tension, on aboutit à l'expression de la transmittance suivante :

$$T_u(j\omega) = \frac{\overline{U}_2}{\overline{E}_g} = +\frac{\overline{Z}_{CD}}{\overline{Z}_{CD} + \overline{Z}_{\lambda_1} + \overline{Z}_{\rho_1} + \overline{Z}_{TH}} \frac{m\overline{E}_{TH}}{\overline{E}_g}$$

$$T_u(j\omega) = +\frac{jmL_m\omega}{r_g + j\omega(\rho_1 C_D r_g + L_m r_g) + j^2\omega^2 C_D(\rho_1 L_m + \lambda_1 r_g + L_m r_g) + j^3\omega^3 C_D L_m \lambda_1}$$

La transmittance se met aussi sous la forme suivante :

$$T_u(j\omega) = m\,\frac{j\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1 + 2\gamma j\,\dfrac{\omega}{\omega_1} + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{r_g}{L_m},\ \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_D\lambda_1}} \quad \text{et}$$

$$\gamma = \frac{\rho_1}{2}\sqrt{\frac{C_D}{\lambda_1}}.$$

Le tracé asymptotique est conditionné par le comportement des termes suivants :

- m qui correspond à une droite horizontale de valeur $20 \log_{10} m$;
- $j\,\dfrac{\omega}{\omega_0}$ qui produit une droite croissante de pente 20 dB/déc. et passant par ($\omega = \omega_0$, 0 dB) ;

Copyright © 2007 Dunod.

– $\left(1+\mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-1}$ qui entraîne une droite horizontale à 0 dB jusqu'à $\omega = \omega_0$, puis une cassure entraîne une décroissance de −20 dB/déc. ;

– $\left(1+\mathrm{j}2\gamma\,\frac{\omega}{\omega_1}+\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^{-1}$ qui correspond à une droite horizontale à 0 dB jusqu'à $\omega = \omega_1$, puis suit une cassure et une pente de −40 dB/déc.

Dans le tracé asymptotique représenté à la figure 12.39. On voit parfaitement apparaître le rôle de chacun des termes de la transmittance.

En conclusion, l'introduction des termes parasites (les résistances, l'inductance magnétisante, les inductances de fuite et les condensateurs) entraîne une limitation fréquentielle du transformateur en HF, identifiée par une bande passante (figure 12.40). L'expérimentation vérifie ces résultats.

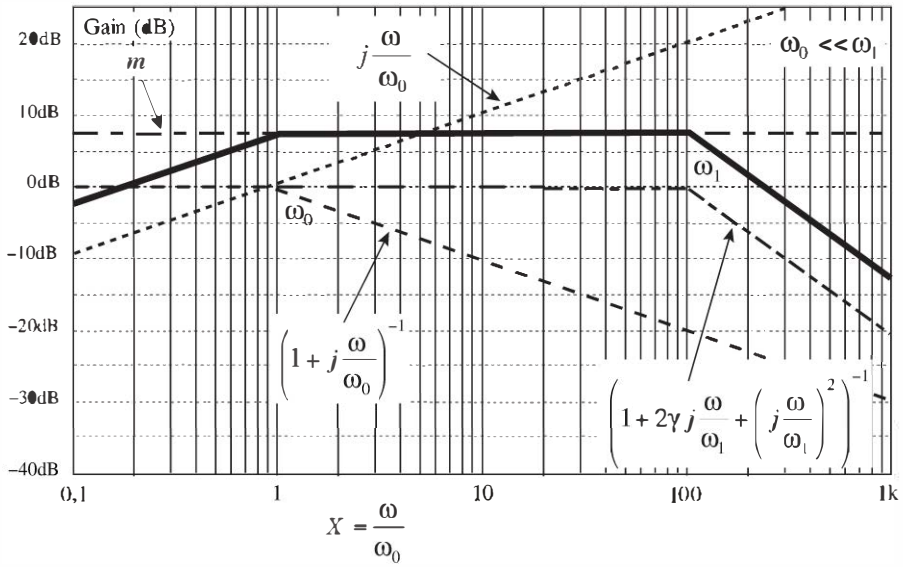


Figure 12.39

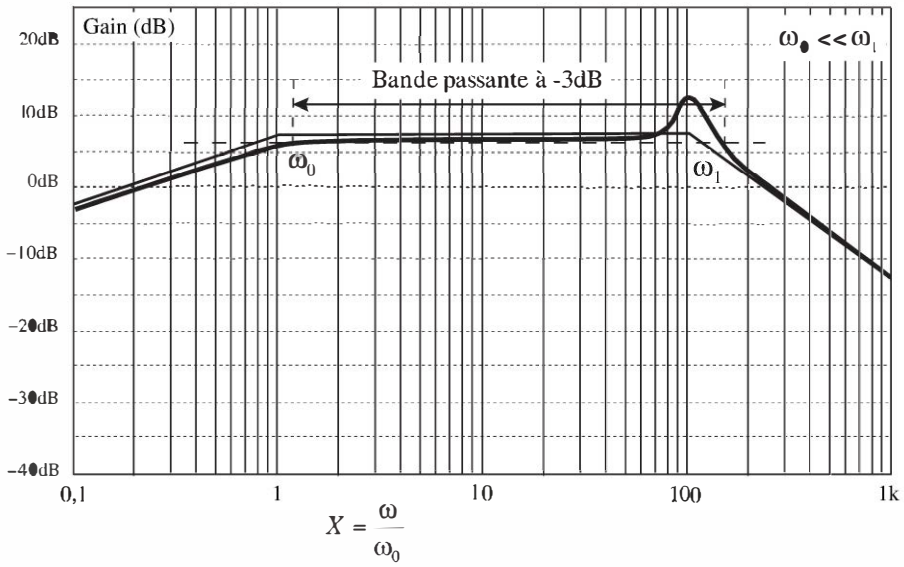


Figure 12.40

Copyright © 2007 Dunod.

Pour en savoir plus...

PERTES DANS LES CIRCUITS MAGNÉTIQUES

Les pertes dans les circuits magnétiques entraînent un échauffement des matériaux qu'il convient de refroidir, et nuisent au rendement d'ensemble. Ces pertes sont d'origine double : les pertes par hystérésis et les pertes dues aux courants de Foucault.

➤ *Pertes par hystérésis*

Un courant i alimentant une bobine de N spires crée un champ magnétique $\vec{B}$ dans un matériau magnétique de longueur ℓ et de section S_{fer} (figure 12.41).

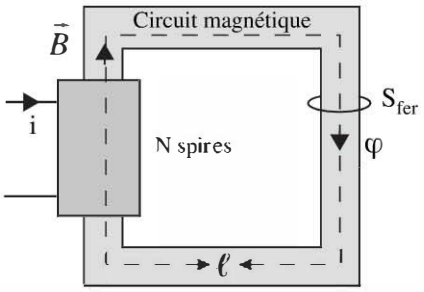


Figure 12.41

Lorsque le matériau est ferromagnétique et que le courant est alternatif, alors $\vec{B}$ décrit un cycle d'hystérésis (figure 12.42). Le phénomène d'hystérésis, typique d'une courbe dont le chemin à l'aller est différent de celui du retour, traduit une perte d'énergie dans le matériau par effet Joule.

Cette énergie est proportionnelle à la surface décrite par le cycle (dépendant elle-même du champ $\hat{B}$) mais aussi très largement des propriétés du matériau (figure 12.43).

Les matériaux doux mécaniquement ont un cycle très étroit (peu de pertes), mais ont un champ rémanent B_r important. Ces matériaux sont à base de fer avec des alliages de nickel, molybdène ou de silicium. Sur la figure, on voit que B_r est facilement annulé par un petit courant. Une application idéale est la fabrication d'électroaimants.

A contrario, les matériaux durs ont un champ rémanent B_r faible, mais le courant doit être très élevé pour annuler l'aimantation. On réalise ainsi des aimants de fortes puissances, ne se désaimantant pas facilement. Leur fabrication utilise des terres rares (samarium-cobalt, néodyme-fer-bore), ce qui en fait des éléments dont le coût est élevé.

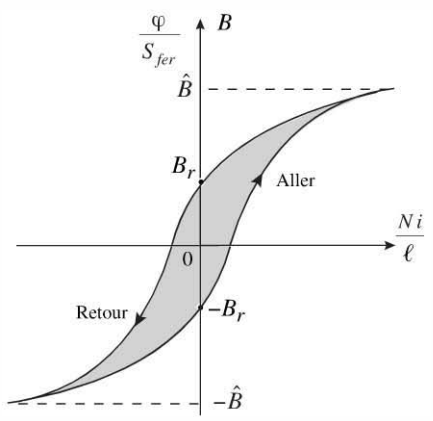


Figure 12.42

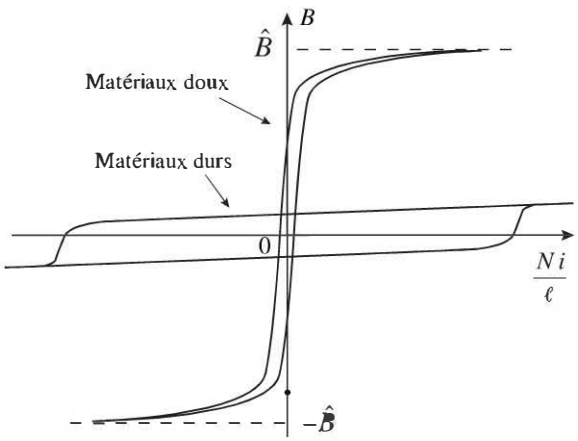


Figure 12.43

Copyright © 2007 Dunod.

Pour les basses fréquences (< 1 kHz), le circuit magnétique en matériau doux est constitué par un alliage de fer et nickel (ou silicium) pour réduire les **pertes par hystérésis**. Pour des fréquences plus hautes, le circuit magnétique est réalisé à partir de ferrite (matériau dur).

L'expression des pertes par hystérésis est de la forme $P_{fer} \simeq k f \hat{B}^{\alpha}$, où f est la fréquence, où α est un coefficient de l'ordre de 2 et où k est fonction du matériau.

➤ *Pertes dues aux courants de Foucault*

Nous avons vu dans la première partie, que lorsqu'un conducteur refermé sur lui-même est traversé par un champ magnétique variable (générant un flux variable) alors il apparaît dans ce conducteur un champ électromoteur qui induit un courant.

Les matériaux ferromagnétiques étant conducteurs, des courants apparaissent produisant un dégagement d'énergie calorifique.

Dans le bloc de matière conductrice de la figure 12.44, la surface peut-être assimilée à une infinité de chemins concentriques, d'épaisseur négligeable, traversée par le champ B, et dans laquelle circulent un courant i. Ces courants sont dénommés « **courants de Foucault** ».

Les pertes dues à la transformation d'une partie de l'énergie en chaleur deviennent vite considérables dès que la fréquence atteint quelques dizaines de hertz.

Pour réduire les pertes, une solution consiste à augmenter la résistivité du matériau en réalisant la surface S_{fer} grâce à un empilement de tôles fines, soigneusement isolées entre elles par un traitement de surface (figure 12.45). Les courants de Foucault i sont alors réduits dans la proportion de l'augmentation de la résistivité du chemin, et les pertes étant proportionnelles au carré du courant ($P_F = RI^2$) s'en trouvent réduites.

Le feuilletage du matériau par l'utilisation de tôles de faible épaisseur est une solution efficace pour des fréquences de quelques centaines de hertz. Pour des fréquences plus élevées, des poudres de fer (les ferrites) sont utilisées pour augmenter la résistivité à une échelle encore plus fine (figure 12.46).

Les pertes par courants de Foucault ont pour expression générale $P_{CF} \approx e^2 f^2 \hat{B}^2$, qui montre l'importance de la fréquence f et de l'amplitude du champ $\hat{B}$ (e est fonction du matériau).

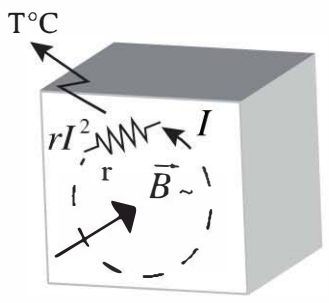


Figure 12.44

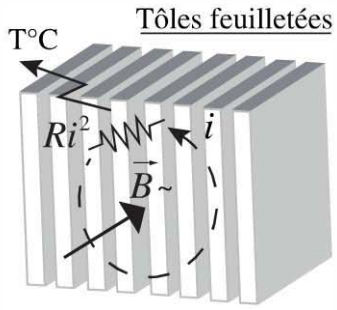


Figure 12.45

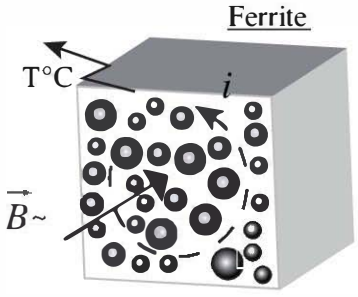


Figure 12.46

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 13

Composants semi-conducteurs

Objectifs

- Présenter les techniques de modélisation linéaire de composants semi-conducteurs.
- Mettre en œuvre les modèles linéaires de composants semi-conducteurs dans des circuits électriques.

Vocabulaire

Diode de redressement	Redressement de tension
Diode Zener	Stabilisation de tension
Transistor bipolaire	Amplification de tension
MOSFET	Hacheur

La grande majorité des composants électroniques utilisés actuellement repose sur l'utilisation de matériaux semi-conducteurs. Pour analyser simplement le comportement du circuit électrique dans lequel ils sont employés, il s'avère très utile de dresser un schéma électrique linéaire du circuit. Les méthodes d'analyse développées dans la deuxième partie de l'ouvrage peuvent alors être utilisées. Pour ce faire, les composants semi-conducteurs, structurellement non linéaires, doivent donc être linéarisés sur leur domaine de fonctionnement. Ce chapitre se propose de présenter les composants semi-conducteurs usuellement utilisés en électronique. Une rapide présentation du composant étudié, notamment de ses caractéristiques électriques, est effectuée. Les techniques de modélisation linéaire sont ensuite développées à travers des exemples relevant d'applications linéaires (amplification, stabilisation) mais aussi non linéaires (redressement, commutation).

Copyright © 2007 Dunod.

13.1 DIODE DE REDRESSEMENT

13.1.1 Caractéristique électrique

Une diode de redressement D est un composant semi-conducteur, présentant deux connexions appelées cathode (C) et anode (A). Le symbole associé est représenté figure 13.1.

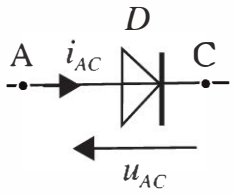


Figure 13.1

Pour caractériser électriquement son fonctionnement, il est d'usage d'orienter le courant i_{AC} de l'anode vers la cathode, et de définir la tension entre l'anode et la cathode u_{AC}.

Avec cette convention, la caractéristique électrique graphique d'une diode de redressement est présentée figure 13.2.

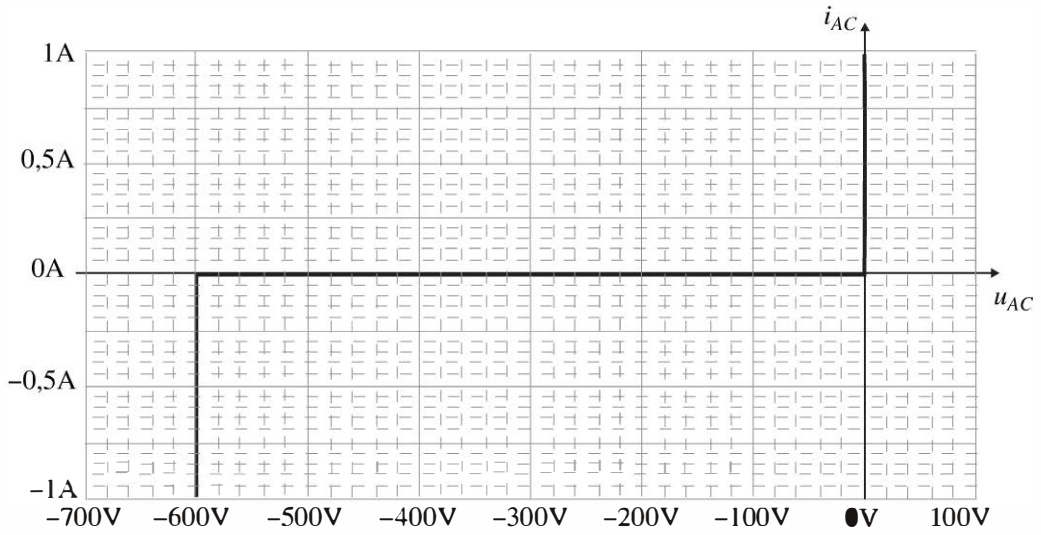


Figure 13.2

13.1.2 Application

➤ ***Schéma électrique***

Le schéma électrique d'une application simple mettant en œuvre cette diode est proposé figure 13.3a.

Outre la diode, le circuit est composé d'une résistance de valeur $R = 330\ \Omega$ et d'une source de tension délivrant une f.é.m. $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude crête $\widehat{E} = 330$ V (figure 13.3b).

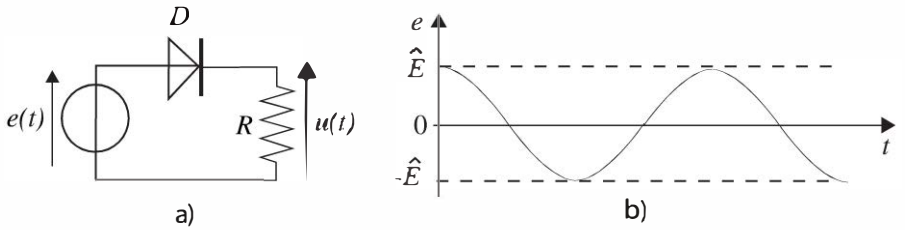


Figure 13.3

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Domaine de fonctionnement de la diode***

La diode peut être considérée comme connectée à un dipôle équivalent D_{AC} constitué de l'association série de la source de tension et de la résistance (figure 13.4).

Le dipôle D_{AC} constitue la charge de la diode. Pour déterminer le point de fonctionnement de la diode, il est nécessaire d'établir la relation caractéristique de D_{AC}. Une loi des mailles permet d'exprimer celle-ci :

$$i_{AC} = \frac{e(t) - u_{AC}}{R}$$

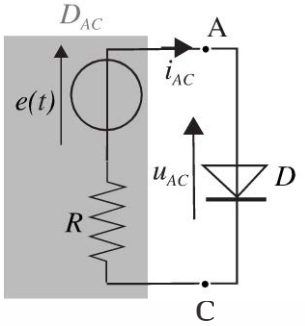


Figure 13.4

La caractéristique graphique associée dans le plan (u_{AC}, i_{AC}) est une droite de pente $1/R = 3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$ et d'ordonnée à l'origine $e(t)/R$. La pente de cette droite de charge reste constante au cours du temps, alors que l'ordonnée se déplace au rythme de $e(t)$. Les valeurs minimum et maximum de $e(t)$ permettent de représenter les deux positions extrêmes de la droite de charge (tracées en pointillés sur la figure 13.5).

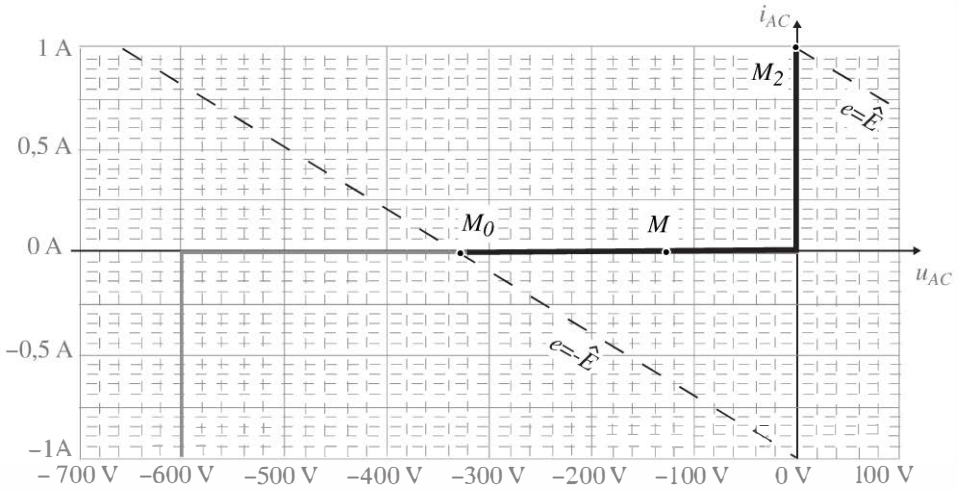


Figure 13.5

La recherche du point de fonctionnement passe par la recherche de l'intersection des caractéristiques graphiques de la diode D et du dipôle de charge D_{AC}. Le point de fonctionnement de l'association de D_{AC} et du transistor se situe en M_0 (330 ; 0) pour $e = -\hat{E}$, et en M_2 (0 ;1 A) pour $e = \hat{E}$. Pour toute autre valeur de e, le point de fonctionnement M occupe une position intermédiaire sur la portion de caractéristique définie entre M_0 et M_2. Cette portion de caractéristique délimite le domaine de fonctionnement de la diode.

Un point mérite une attention particulière, il s'agit du point de fonctionnement noté M_1 pour lequel $e = 0$.

➤ ***Modélisation de la diode***

Le domaine de fonctionnement est linéaire par morceaux.

En effet, pour $-\widehat{E} < e < 0$, le point de fonctionnement se déplace sur le segment $[M_0, M_1]$ (figure 13.6a). Sur ce segment de caractéristique d'équation $i_{AC} = 0$, la diode est modélisable par un circuit ouvert (figure 13.6b).

Copyright © 2007 Dunod.

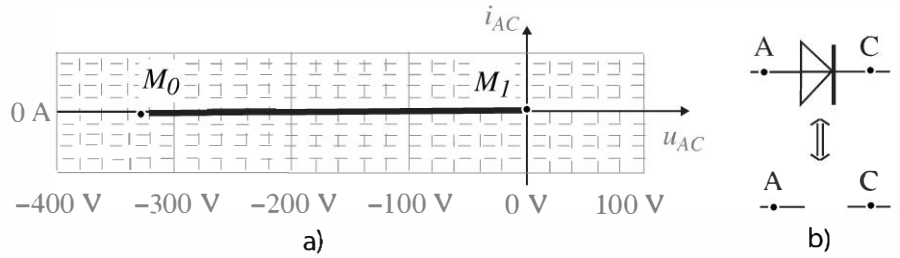


Figure 13.6

Pour $0 < e < \widehat{E}$, le point de fonctionnement se déplace sur le segment $[M_1, M_2]$ (figure 13.7a).

Sur ce segment de caractéristique d'équation $u_{AC} = 0$, la diode est modélisable par un fil électrique (figure 13.7b).

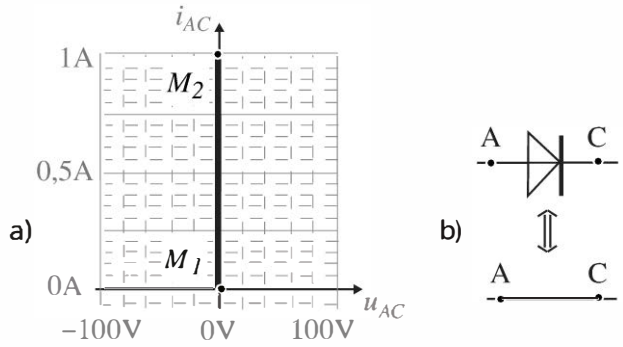


Figure 13.7

➤ *Fonction réalisée par le circuit*

Pour déterminer la fonction réalisée par le circuit étudié, replaçons dans le circuit électrique, le modèle de la diode établi au paragraphe précédent.

Nous obtenons deux schémas électriques distincts, selon que $-\widehat{E} < e < 0$ (figure 13.8a) ou que $0 < e < \widehat{E}$ (figure 13.8b).

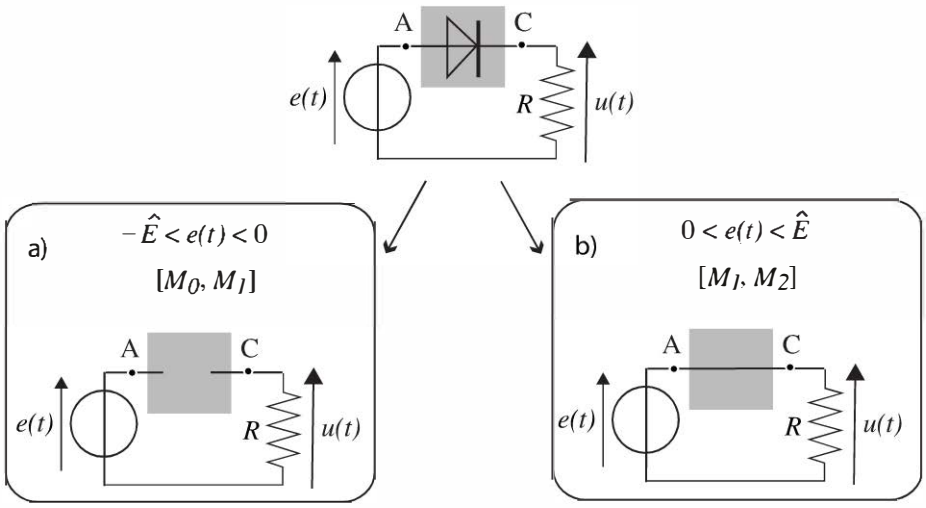


Figure 13.8

Copyright © 2007 Dunod.

Déterminons alors l'expression de la tension $u(t)$ sur chaque schéma :

– pour $-\widehat{E} < e < 0$, le circuit électrique est ouvert, par conséquent aucun courant ne peut circuler dans la résistance R, donc $u(t) = 0$;

– pour $0 < e < \widehat{E}$, la source de tension et la résistance sont connectées en parallèle, donc $u(t) = e(t)$.

On en déduit donc l'évolution de la tension $u(t)$ représentée figure 13.9.

La fonction réalisée par la diode dans le circuit étudié est de reporter aux bornes de la résistance, la tension $e(t)$ sur laquelle ont été supprimées les alternances négatives.

Un tel dispositif, appelé redresseur, a pour fonction d'obtenir une tension de signe constant à partir d'une tension alternative.

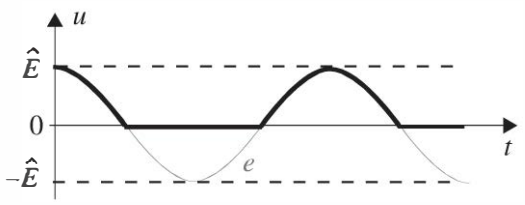


Figure 13.9

13.2 DIODE ZENER

13.2.1 Caractéristique électrique

Une diode Zener Z est un composant semi-conducteur possédant deux connexions appelées cathode (C) et anode (A). Le symbole associé est représenté figure 13.10.

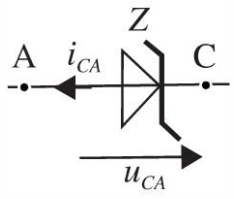


Figure 13.10

Pour caractériser électriquement son fonctionnement, il est d'usage d'orienter le courant i_{CA} de la cathode vers l'anode, et de définir la tension entre la cathode et l'anode u_{CA}.

Avec la convention ainsi définie, la caractéristique électrique graphique d'une telle diode est présentée figure 13.11.

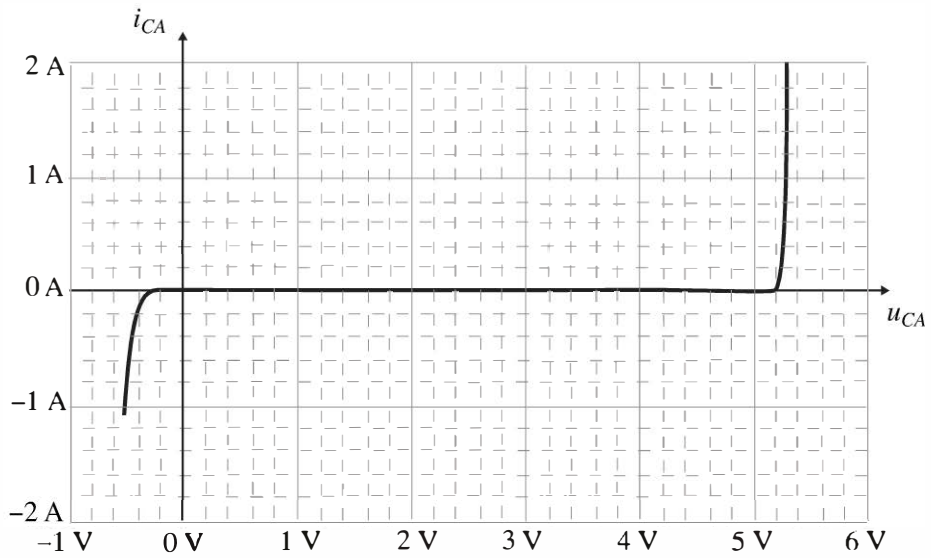


Figure 13.11

Copyright © 2007 Dunod.

13.2.2 Application

➤ ***Schéma électrique***

Le schéma électrique d'une application simple mettant en œuvre cette diode est proposé figure 13.12a.

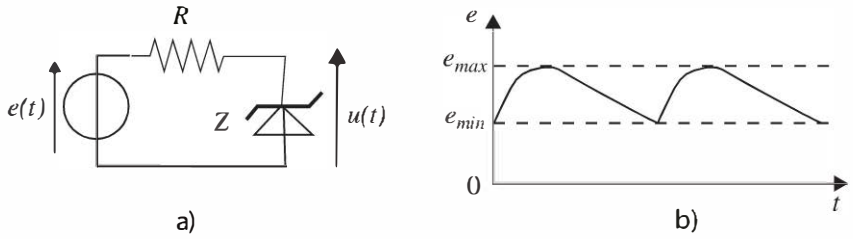


Figure 13.12

Outre la diode Zéner, le circuit est composé d'une résistance de valeur $R = 10\ \Omega$ et une source de tension délivrant une f.é.m. $e(t)$ variant entre deux valeurs $e_{\text{min}} = 8$ V et $e_{\text{max}} = 12$ V (figure 13.12b).

➤ ***Domaine de fonctionnement de la diode***

La diode peut être considérée comme connectée à un dipôle équivalent D_{CA} constitué de l'association série de la source de tension $e(t)$ et de la résistance R (figure 13.13).

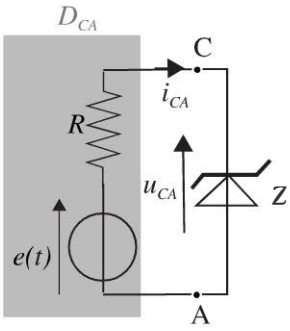


Figure 13.13

Le dipôle D_{CA} constitue la charge de la diode. Pour déterminer le point de fonctionnement de la diode, il est nécessaire d'établir la relation caractéristique de D_{CA}. Une loi des mailles permet d'exprimer celle-ci : $i_{CA} = \dfrac{e(t) - u_{CA}}{R}$. La caractéristique graphique associée dans le plan (u_{CA}, i_{CA}) est une droite de pente $1/R = 0{,}1\ \Omega^{-1}$ et d'ordonnée à l'origine $e(t)/R$. La pente de cette droite de charge reste constante au cours du temps, alors que l'ordonnée se déplace au rythme de $e(t)$. Les valeurs minimum et maximum de $e(t)$ permettent de tracer les deux positions extrêmes de la droite de charge (tracées en pointillés sur la figure 13.14).

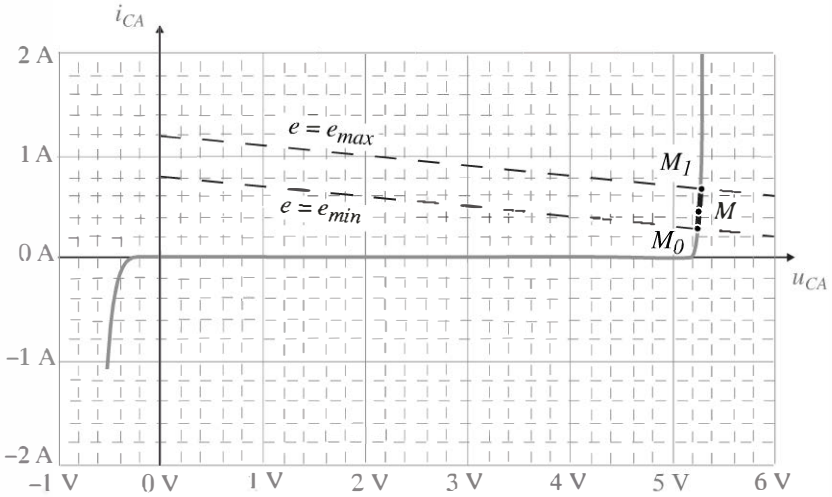


Figure 13.14

Copyright © 2007 Dunod.

La recherche du point de fonctionnement passe par la recherche de l'intersection des caractéristiques graphiques de la diode Zener Z et du dipôle de charge D_{CA}. Le point de fonctionnement de l'association de D_{CA} et du transistor se situe en M_0 (5,25 V ; 300 mA) pour $e = e_{\min}$, et en M_1 (5,3 V ; 650 mA) pour $e = e_{\max}$. Pour toute autre valeur de e, le point de fonctionnement M occupe une position intermédiaire sur la portion de caractéristique définie entre M_0 et M_1. Cette portion de caractéristique délimite le domaine de fonctionnement de la diode.

➤ *Modélisation de la diode*

Le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$ correspond à un segment de droite. Il est donc possible d'associer un modèle de Thévenin à la diode Zener sur ce domaine.

Notons e_z la f.é.m. et r_z la résistance du modèle de Thévenin (figure 13.15). La relation caractéristique associée à ce modèle est $u_{CA} = e_z + r_z i_{CA}$.

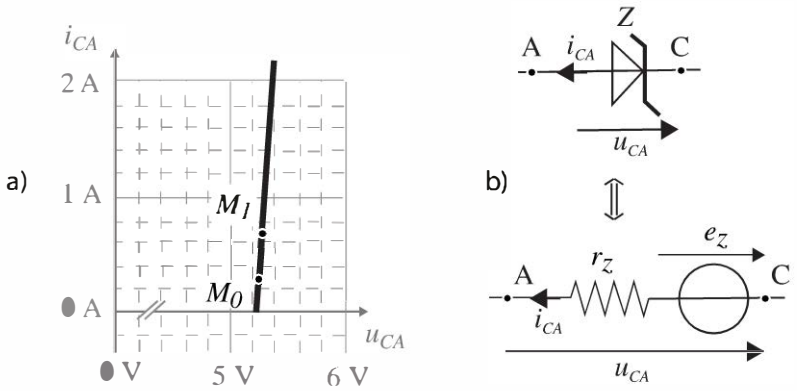


Figure 13.15

Exprimée sous la forme $i_{CA} = \dfrac{u_{CA} - e_z}{r_z}$, cette relation correspond à l'équation d'une droite $i_{CA} = a\,u_{CA} + b$, où $a = \dfrac{1}{r_z}$ et $b = -\dfrac{e_z}{r_z}$. Pour réaliser l'identification des paramètres caractéristiques du modèle (e_z et r_z), il est nécessaire de s'assurer que cette équation décrive la droite passant par le segment $[M_0, M_1]$.

Pour faciliter l'identification, on remarquera en particulier, que :

– la pente de la droite correspond à l'inverse de la résistance $a = \dfrac{1}{r_z}$;

– l'abscisse à l'origine de la droite correspond à e_z.

On en déduit $a = \dfrac{1}{r_z} = 10\ \Omega^{-1}$, d'où $r_z = 100\ \text{m}\Omega$ et $e_z = u_{CA\ (i_{CA}=0)} = 5{,}15\ \text{V}$.

➤ *Fonction réalisée par le circuit*

Pour déterminer la fonction réalisée par le circuit électrique étudié, replaçons dans celui-ci, le modèle de la diode Zener établi au paragraphe précédent (figure 13.16).

Pour déterminer l'expression de la tension $u(t)$, appliquons le principe de superposition. En éteignant la source $e(t)$, la règle du diviseur de tension donne $u = \dfrac{R}{R + r_z} e_z$. De manière

Copyright © 2007 Dunod.

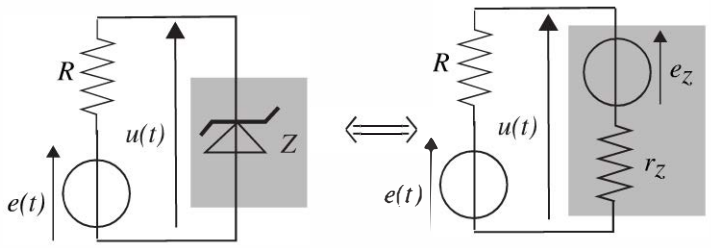


Figure 13.16

similaire, en éteignant la source e_z, on obtient $u(t) = \dfrac{r_z}{R + r_z} e(t)$. En conclusion la relation entre $u(t)$ et $e(t)$ peut s'exprimer sous la forme $u(t) = \dfrac{r_z}{R + r_z} e(t) + \dfrac{R}{R + r_z} e_z$, soit encore numériquement $u(t) \simeq 10^{-2} e(t) + 5{,}1$.

En notant Δe, l'amplitude de la variation de $e(t)$, et Δu l'amplitude de variation de $u(t)$, on a $\Delta u \simeq 10^{-2} \Delta e$. Pour $\Delta_e = E_{\text{min}} - E_{\text{max}} = 12\ \text{V} - 8\ \text{V} = 4\ \text{V}$, on obtient alors $\Delta u = 4 \cdot 10^{-2} = 40$ mV. On comprend dès lors, que la fonction réalisée par le circuit est d'atténuer de manière très sensible les variations de tension sur $e(t)$. Il est donc possible de négliger l'amplitude de cette variation par rapport à 5,1 V, donc $u(t) \simeq 5{,}1$ V. La fonction réalisée par le circuit consiste en une stabilisation de tension (ou régulation) au voisinage de la tension $e_z = 5{,}15$ V. La tension e_z appelée tension de claquage de la diode Zéner est un paramètre caractéristique de ce type de semi-conducteurs.

13.3 TRANSISTOR BIPOLAIRE

13.3.1 Caractéristiques électriques

Un transistor bipolaire NPN est un composant semi-conducteur possédant trois connexions appelées base (B), émetteur (E) et collecteur (C).

Le symbole associé est représenté figure 13.17a. Bien que ne possédant que trois bornes électriques, un transistor bipolaire est utilisé comme quadripôle. L'une des bornes constitue simultanément une borne d'entrée et de sortie.

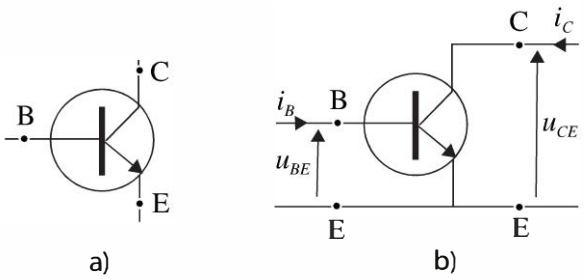


Figure 13.17

C'est notamment le cas de la configuration représentée figure 13.17b, appelée montage en émetteur commun. Les bornes d'entrée du quadripôle équivalent sont la base et l'émetteur, la tension d'entrée est donc u_{BE}, le courant d'entrée i_B. De même, collecteur et émetteur correspondent aux bornes de sortie. La tension de sortie est donc u_{CE} et le courant de sortie i_C. Quatre caractéristiques graphiques permettent de caractériser complètement le comportement électrique du transistor.

La caractéristique d'entrée (figure 13.18) traduit l'évolution de u_{BE}, en fonction de i_B. Il s'agit en réalité d'un réseau de courbes tracées à $u_{CE} = Cste$. Compte tenu de la faible influence de u_{CE}, on assimilera ce réseau à une seule courbe.

Copyright © 2007 Dunod.

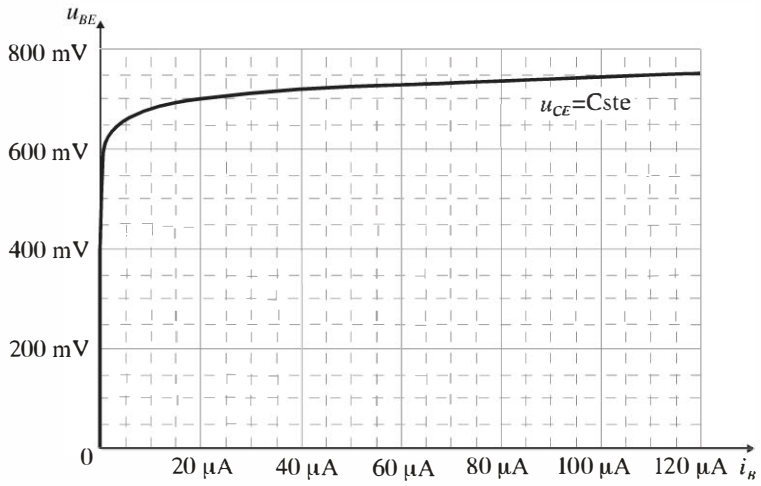


Figure 13.18

La caractéristique graphique de sortie (figure 13.19) traduit l'évolution de i_C, en fonction de u_{CE}. Il s'agit d'un réseau de courbes tracées à i_B = Cste.

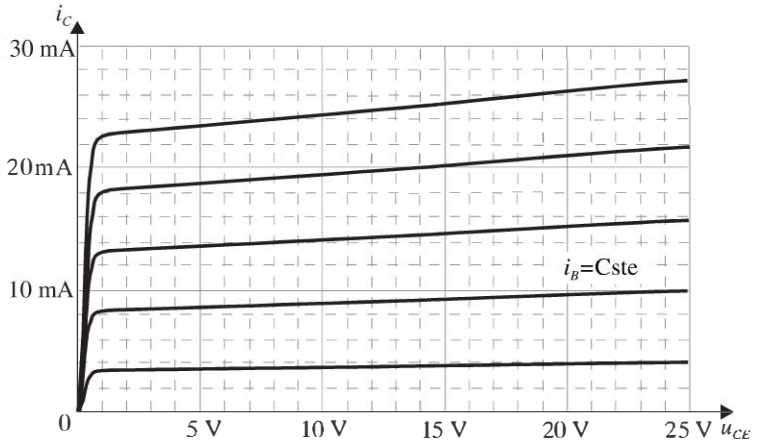


Figure 13.19

La caractéristique graphique de transfert (figure 13.20) traduit l'évolution de i_C, en fonction de i_B.

Il s'agit en réalité d'un réseau de courbes tracées à u_{CE} = Cste. Compte tenu de la faible influence de u_{CE}, on assimilera ce réseau à une seule courbe.

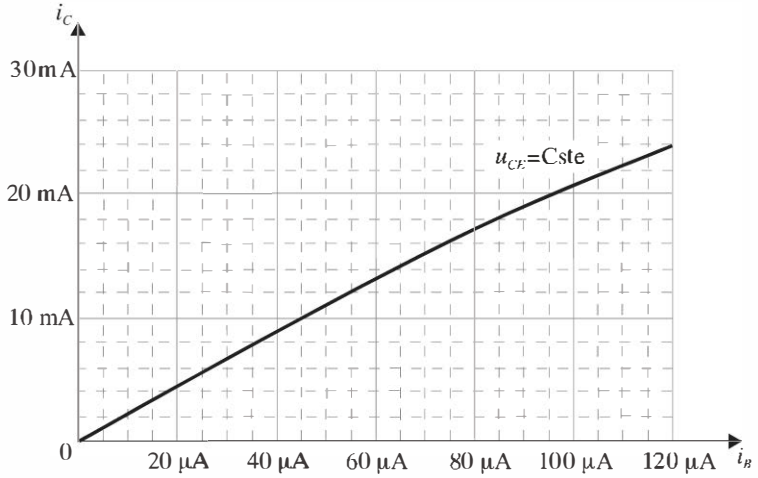


Figure 13.20

Copyright © 2007 Dunod.

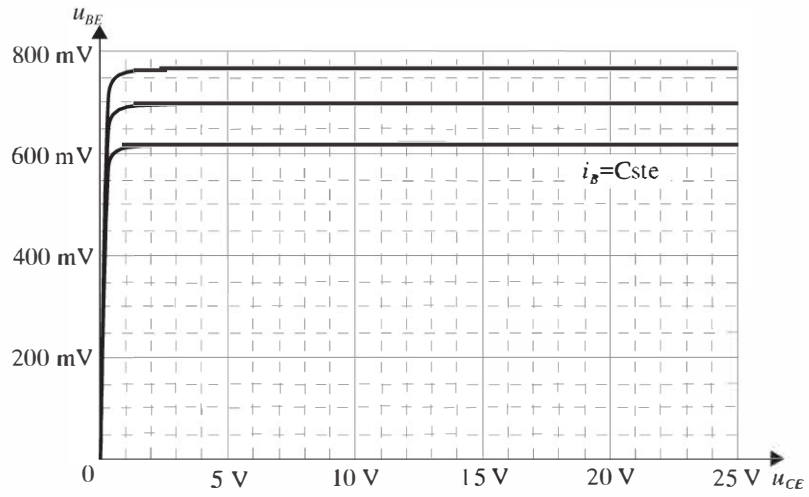


Figure 13.21

La caractéristique de réaction (figure 13.21) traduit l'évolution de u_{BE}, en fonction de u_{CE}.

Il s'agit en réalité d'un réseau de courbes tracées à i_B = Cste.

13.3.2 Application

➤ ***Schéma électrique***

Le schéma électrique d'une application simple mettant en œuvre ce transistor est proposé figure 13.22a.

Outre le transistor, le circuit est composé de deux résistances de valeurs $R_1 = 10$ kΩ et $R_2 = 1{,}5$ kΩ. Une source de tension délivrant une f.é.m. $E = 24$ V constante réalise l'alimentation électrique du circuit. Le signal traité par la structure est généré par une source de tension de f.é.m $e(t)$ sinusoïdale variant entre deux niveaux $e_{\min} = 1$ V et $e_{\max} = 1{,}2$ V (figure 13.22b).

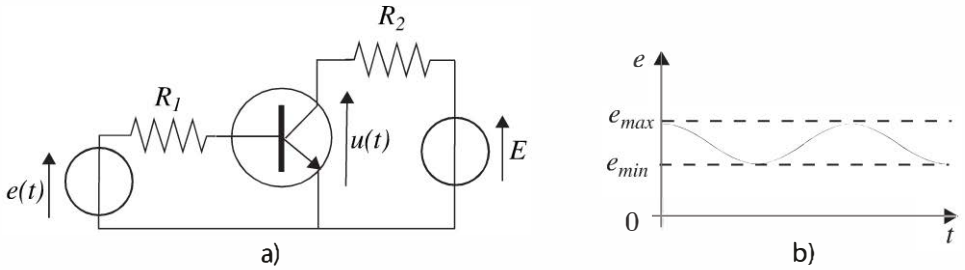


Figure 13.22

➤ ***Domaine de fonctionnement du transistor***

Le transistor utilisé comme quadripôle peut être considéré comme connecté à un dipôle équivalent D_{BE} entre ses bornes d'entrée et D_{CE} entre ses bornes de sortie (figure 13.23).

Le dipôle D_{BE} a pour relation caractéristique : $u_{BE} = e(t) - R_1 i_B$. La caractéristique graphique associée dans le plan (i_B, u_{BE}) est une droite de pente $R_1 = 10$ kΩ et d'ordonnée à l'origine $e(t)$. La pente de cette droite de charge reste constante au cours du temps, alors que l'ordonnée se déplace au rythme de $e(t)$.

Copyright © 2007 Dunod.

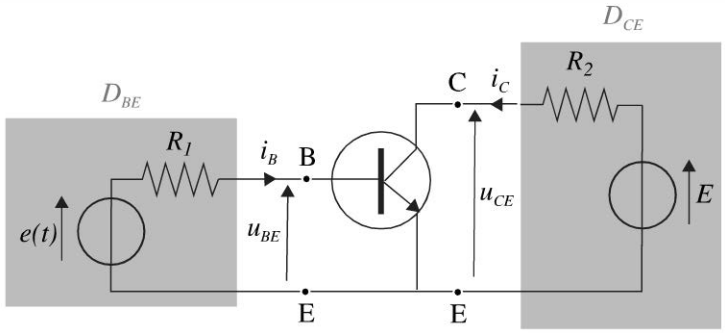


Figure 13.23

Les valeurs minimum et maximum de $e(t)$ permettent de tracer les deux positions extrêmes de la droite de charge (tracées en pointillés sur la figure 13.24).

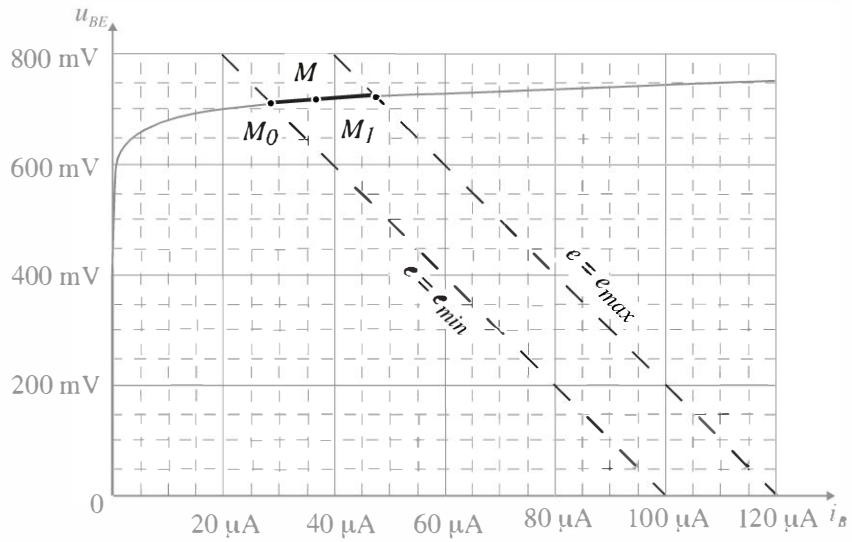


Figure 13.24

La recherche du point de fonctionnement passe par la recherche de l'intersection de la caractéristique d'entrée et de celle du dipôle D_{BE}. Le point de fonctionnement de l'association de D_{BE} et du transistor se situe en M_0 (28 µA, 710 mV) pour $e = e_{\text{min}}$, et en M_1 (48 µA, 720 mV) pour $e = e_{\text{max}}$. Pour toute autre valeur de e, le point de fonctionnement M occupe une position intermédiaire sur la portion de caractéristique définie entre M_0 et M_1. Cette portion de caractéristique délimite le domaine de fonctionnement du transistor sur la caractéristique d'entrée.

La connaissance des valeurs de i_B pour les points de fonctionnement M_0 et M_1 permet de positionner ceux-ci sur la caractéristique de transfert et d'en déduire la valeur des courants i_C associés, respectivement 8,2 mA et 11 mA (figure 13.25).

Le domaine de fonctionnement du transistor sur sa caractéristique de transfert correspond au segment délimité par les points M_0 (28 µA ; 8,2 mA) et M_1 (48 µA ; 11 mA).

Le dipôle D_{CE} a pour relation caractéristique : $i_C = \dfrac{E - u_{CE}}{R_2}$. La caractéristique graphique associée dans le plan (u_{CE}, i_C) est une droite de pente $1/R_2 = 666 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}$ et d'ordonnée à l'origine $E/R_2 = 16$ mA.

Copyright © 2007 Dunod.

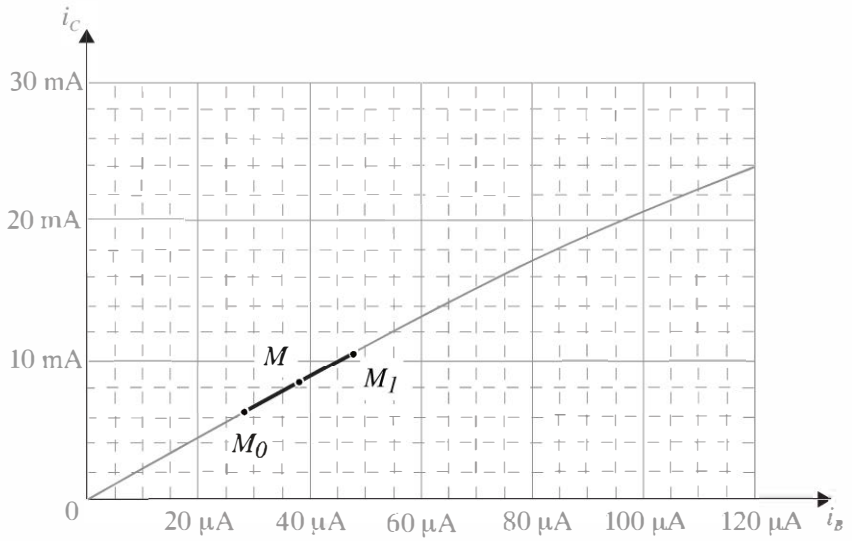


Figure 13.25

La connaissance des valeurs de i_C pour les points de fonctionnement M_0 et M_1, permet de positionner ceux-ci sur la caractéristique de sortie et d'en déduire la valeur des tensions u_{CE} associées, respectivement 15 V et 8,3 V (figure 13.26).

Le domaine de fonctionnement du transistor sur sa caractéristique de sortie correspond au segment délimité par les points M_0 (15 V ; 8,2 mA) et M_1 (8,3 V ; 11 mA).

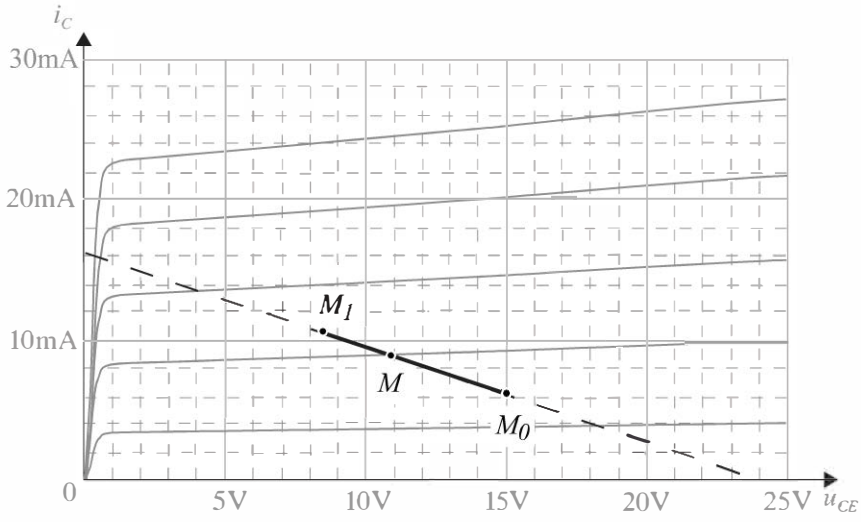


Figure 13.26

Nous connaissons ainsi toutes les coordonnées des points de fonctionnement extrêmes M_0 (28 µA ; 710 mV ; 8,2 mA ; 15 V) et M_1 (48 µA ; 720 mV ; 11 mA ; 8,3 V).

Nous pouvons donc placer ceux-ci sur la caractéristique de réaction (figure 13.27), et ainsi identifier le domaine de fonctionnement. Ce dernier correspond au segment $[M_0, M_1]$.

➤ *Modélisation du transistor*

Le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$ identifié sur chacune des quatre caractéristiques correspond à un segment de droite. Il est donc possible d'associer un modèle linéaire au transistor sur ce domaine.

Le choix se porte sur une modélisation sous forme de paramètres hybrides. Cette modélisation consiste à associer au transistor le quadripôle représenté figure 13.28.

Copyright © 2007 Dunod.

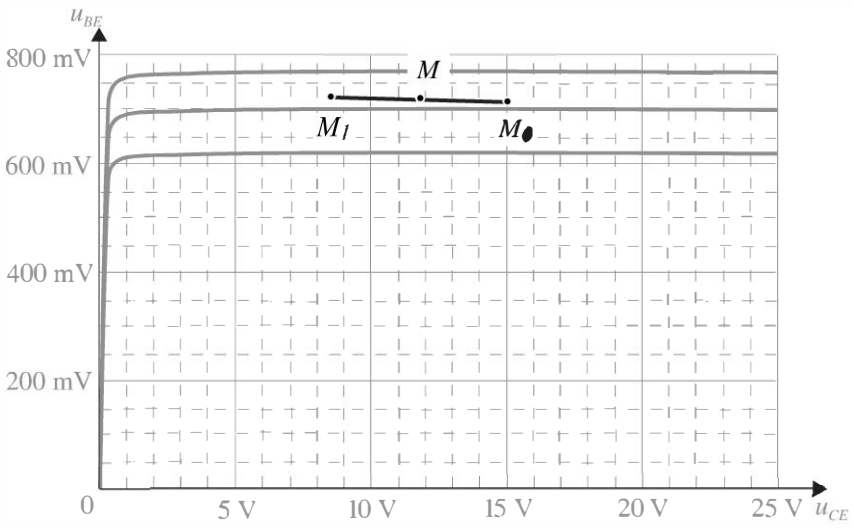


Figure 13.27

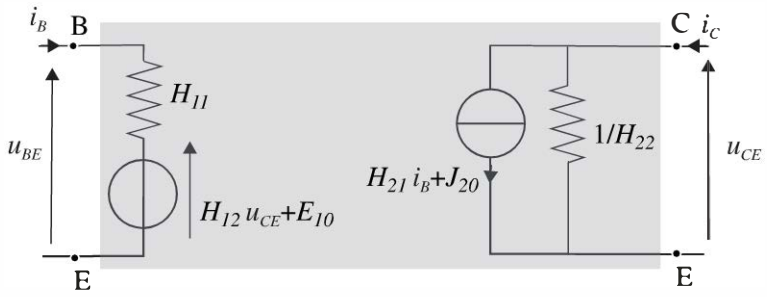


Figure 13.28

Les relations caractéristiques qui lient entre elles les quatre grandeurs électriques (u_{BE}, i_B, u_{CE}, i_C) s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_{BE} = E_{10} + H_{11} i_B + H_{12} u_{CE} \\ i_C = J_{20} + H_{21} i_B + H_{22} u_{CE} \end{cases}$$

La détermination des différents paramètres passe par la recherche de droites qui approximent au mieux les quatre caractéristiques du transistor sur le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$.

La caractéristique d'entrée permet d'établir une relation entre u_{BE} et i_B à $u_{CE} = \text{Cste}$. Dans le plan (i_B, u_{BE}), le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$ délimite un segment de caractéristique assimilé à une droite d'équation $u_{BE} = 650 i_B + 0{,}7$ (figure 13.29a).

La caractéristique de réaction permet d'établir une relation entre u_{BE} et u_{CE} à $i_B = \text{Cste}$. Dans le plan (u_{CE}, u_{BE}), sur le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$, la dispersion du réseau de caractéristique est faible.

On assimile ainsi la caractéristique du transistor à une équation : $u_{BE} \simeq \text{Cste}$ indépendante de u_{CE} (figure 13.29b).

La première relation caractéristique s'exprime donc sous la forme :

$$u_{BE} = 650 i_B + 0{,}7$$

Par identification, avec $u_{BE} = E_{10} + H_{11} i_B + H_{12} u_{CE}$, on en déduit les paramètres caractéristiques : $H_{11} = 650\ \Omega$, $E_{10} = 0{,}7$ V et $H_{12} = 0$. Ainsi, le transistor vu de ses bornes d'entrée, est modélisable par le dipôle représenté figure 13.29c.

Copyright © 2007 Dunod.

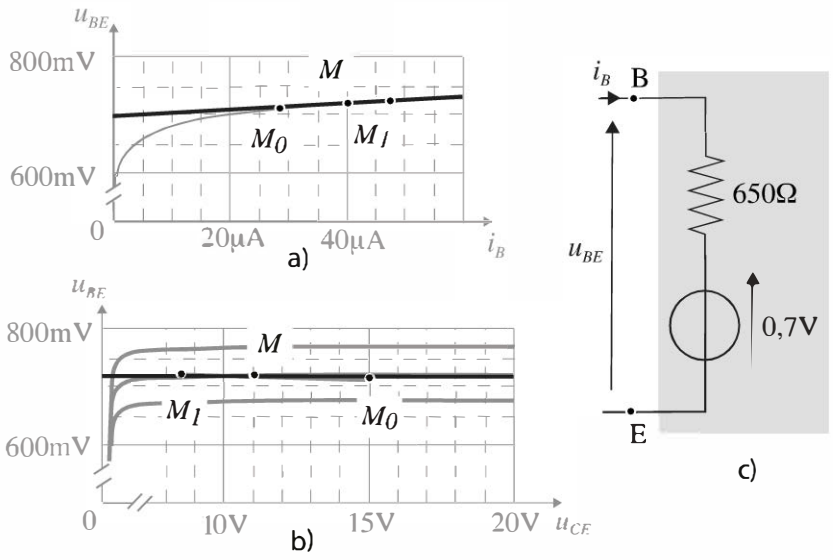


Figure 13.29

La caractéristique de sortie permet d'établir une relation entre i_C et u_{CE} à $i_B = \text{Cste}$. Dans le plan (i_C, u_{CE}), sur le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$, le réseau de caractéristiques de sortie du transistor s'identifie à un ensemble de droites quasiment parallèles (figure 13.30a). La pente de cet ensemble de droites est de $20 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}$. L'équation de ces droites est donc de la forme $i_C = 20 \cdot 10^{-6} u_{CE} + I_{CC}$. L'ordonnée à l'origine $I_{CC} = i_{C\,(u_{CE}=0)}$ de celles-ci est variable selon la valeur de i_B. Pour déterminer la loi de variation de I_{CC} en fonction de i_B, on utilise la caractéristique de transfert du transistor (figure 13.30b).

Sur le domaine de fonctionnement, en négligeant la dispersion du réseau de courbes, on assimile la caractéristique de transfert à une droite d'équation $i_C = 210\, i_B$.

La deuxième relation caractéristique s'exprime donc sous la forme :

$$i_C = 20 \cdot 10^{-6} u_{CE} + 210\, i_B$$

Par identification, avec $i_C = J_{20} + H_{21} i_B + H_{22} u_{CE}$, on en déduit les paramètres caractéristiques : $H_{22} = 20 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}$, $H_{21} = 210$ et $J_{20} = 0$. Ainsi, le transistor vu de ses bornes de sortie, est modélisable par le dipôle représenté à la figure 13.30c.

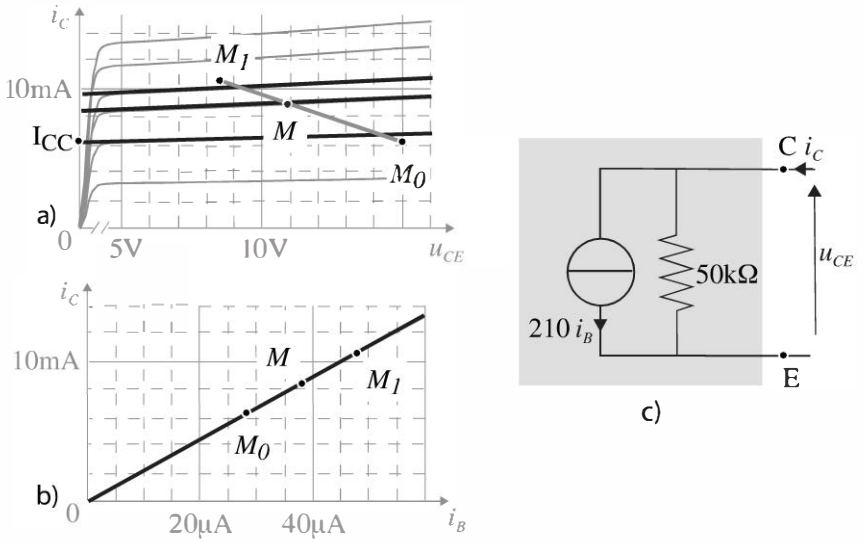


Figure 13.30

Copyright © 2007 Dunod.

En conclusion, sur le domaine de fonctionnement $[M_0, M_1]$, le transistor bipolaire est ainsi modélisé par le quadripôle linéaire représenté figure 13.31.

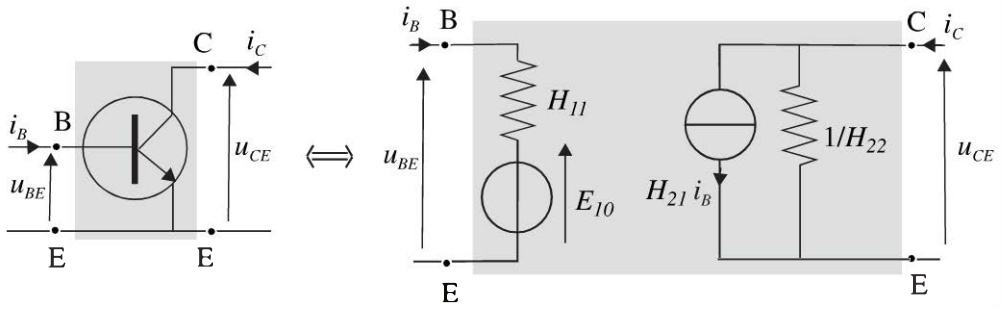


Figure 13.31

➤ ***Fonction réalisée par le circuit***

Pour déterminer la fonction réalisée par le circuit électrique étudié (figure 13.22), replaçons dans celui-ci, le modèle du transistor établi au paragraphe précédent (figure 13.32).

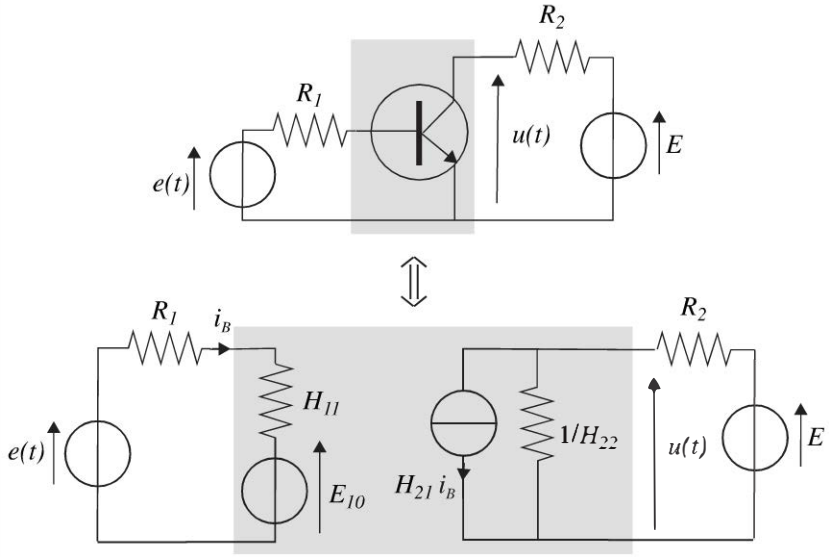


Figure 13.32

Une équation de maille exprimée sur le circuit d'entrée permet d'obtenir la relation entre e et i_B :

$$i_B = \frac{e - E_{10}}{R_1 + H_{11}}$$

Pour déterminer l'expression de la tension $u(t)$, appliquons le principe de superposition sur le circuit de sortie. En éteignant la source de courant, la règle du diviseur de tension donne $u = \dfrac{E}{1 + H_{22}R_2}$. En éteignant la source de tension, le courant $H_{21}i_B$ se répartit dans la résistance équivalente à l'association parallèle de $1/H_{22}$ et R_2. Par suite, on obtient $u = -\dfrac{H_{21}R_2}{1 + H_{22}R_2}i_B$. L'expression complète de $u(t)$ est donc $u = \dfrac{E - H_{21}R_2 i_B}{1 + H_{22}R_2}$. En remplaçant dans cette égalité l'expression de i_B en fonction de e, on aboutit à : $u = \dfrac{E - H_{21}R_2\left(\dfrac{e - E_{10}}{R_1 + H_{11}}\right)}{1 + H_{22}R_2}$, soit encore numériquement $u \simeq -31{,}5e + 48$.

Copyright © 2007 Dunod.

En notant Δe, l'amplitude de la variation de e, et Δu l'amplitude de variation de u, on a $\Delta u \simeq -31{,}5\Delta e$. Pour $\Delta e = e_{min} - e_{max} = 1\text{ V} - 1{,}2\text{ V} = -200$ mV, on obtient $\Delta u = 6{,}3$ V.

On comprend dès lors, que la fonction réalisée par le circuit est d'amplifier de les variations de tension sur $e(t)$. La linéarité de la relation entre u et e est garante du fait que u est sinusoïdal (figure 13.33). On comprend ainsi en quoi la structure proposée correspond à un amplificateur de tension de gain $G_u = 20\log_{10}(31{,}5) \simeq 30$ dB.

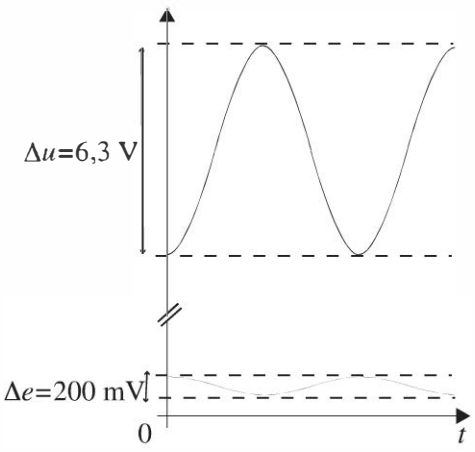


Figure 13.33

13.4 MOSFET

13.4.1 Caractéristiques électriques

Un MOSFET (transistor à effet de champ MOS) est un composant semi-conducteur possédant trois connexions appelées grille (G), source (S) et drain (D).

Le symbole associé à un MOSFET (type N) est représenté figure 13.34a. Comportant trois bornes électriques, un MOSFET est utilisé comme quadripôle : l'une des bornes constitue simultanément une borne d'entrée et de sortie.

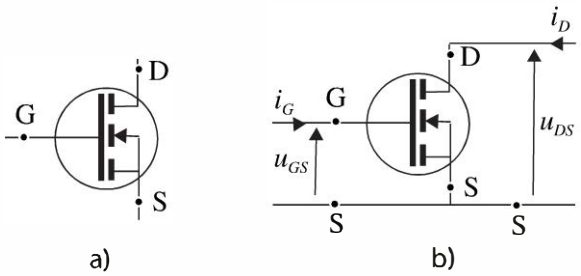


Figure 13.34

La configuration représentée figure 13.34b est appelée montage en source commune. Les bornes d'entrée du quadripôle équivalent sont la grille et la source, la tension d'entrée est donc u_{GS}, et le courant d'entrée i_G. Drain et source constituent les bornes de sortie. La tension de sortie est donc u_{DS} et le courant de sortie i_D.

Structurellement, la grille est électriquement reliée à un oxyde de silicium isolant. Le courant de grille i_G peut ainsi être considéré comme nul.

Le courant d'entrée étant nul, deux caractéristiques graphiques permettent de traduire complètement le comportement électrique du transistor :

– une caractéristique graphique de transfert (figure 13.35) traduisant l'évolution de i_D en fonction u_{GS}. Il s'agit d'un réseau de courbes tracées à $u_{DS} = \text{Cste}$;

– une caractéristique graphique de sortie (figure 13.36) traduisant l'évolution de i_D en fonction u_{DS}. Il s'agit d'un réseau de courbes tracées à $u_{GS} = \text{Cste}$.

13.4.2 Application

➤ ***Schéma électrique***

Le schéma électrique d'une application simple mettant en œuvre ce transistor est proposé figure 13.37a.

Copyright © 2007 Dunod.

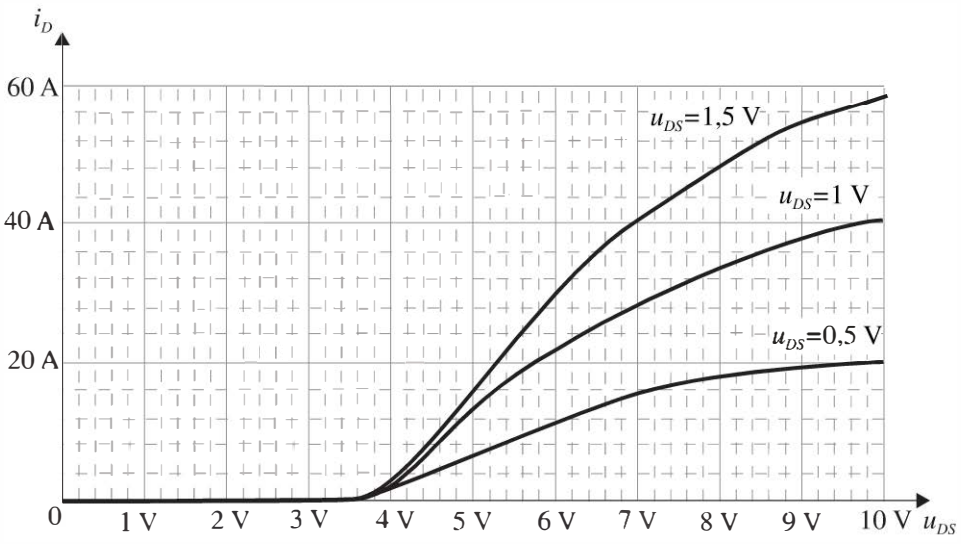


Figure 13.35

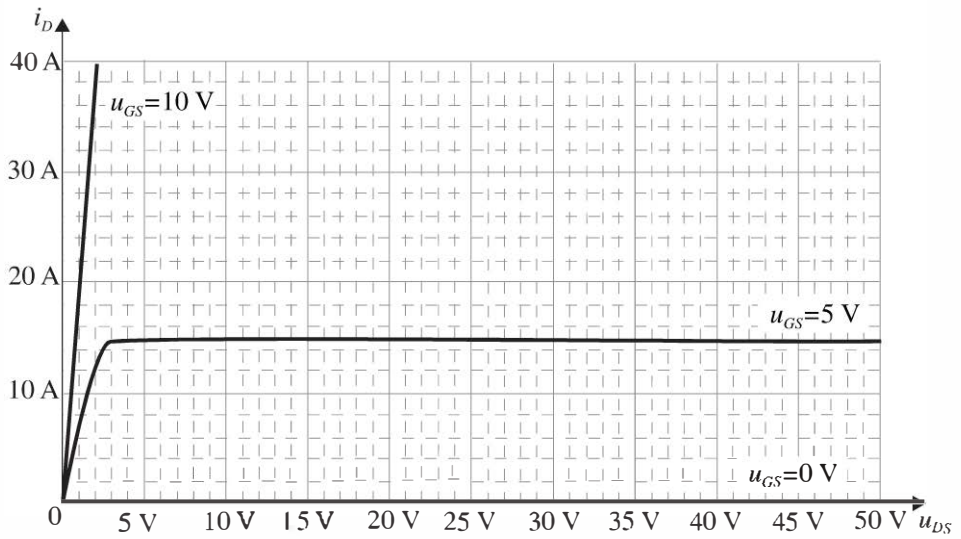


Figure 13.36

Outre le MOSFET, le circuit est composé d'une résistance de valeur $R = 2\ \Omega$ en série avec une source de tension délivrant une f.é.m. $E = 40$ V constante. Le signal de commande du MOSFET est généré par une source de tension carrée de f.é.m. $e(t)$ variant entre 0 et 10 V et de rapport cyclique α réglable (figure 13.37b).

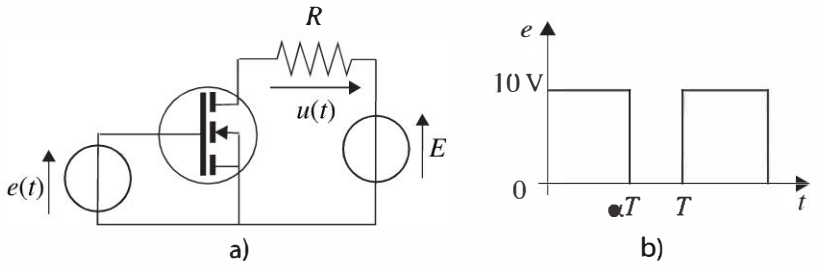


Figure 13.37

➤ ***Points de fonctionnement du MOSFET***

Le MOSFET utilisé comme quadripôle peut être considéré comme connecté à un dipôle équivalent D_{GS} entre ses bornes d'entrée et D_{DS} entre ses bornes de sortie (figure 13.38).

Copyright © 2007 Dunod.

Le dipôle D_{GS} impose directement la valeur de la tension $u_{GS} = e$ indépendamment de i_D. Ainsi, la caractéristique graphique associée à ce dipôle est donc une droite verticale dans le plan (i_D, u_{GS}). Selon les deux valeurs prises par e ces droites auront tour à tour pour équation $u_{GS} = 0$ ou $u_{GS} = 10$ V (figure 13.39).

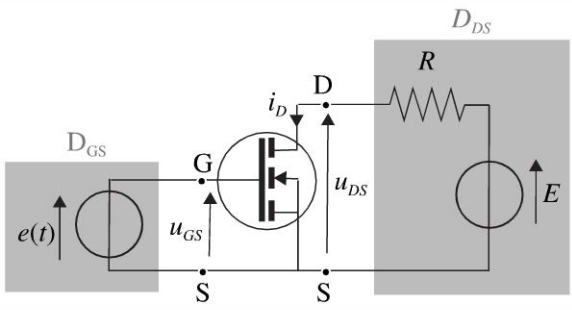


Figure 13.38

De plus, le dipôle D_{DS} a pour relation caractéristique :

$$i_D = \frac{E - u_{DS}}{R}$$

La caractéristique graphique associée dans le plan (i_D, u_{DS}) est une droite de pente $R = 2\ \Omega$ et d'ordonnée à l'origine $E/R = 20$ A (figure 13.40).

Les deux points de fonctionnement possibles seront obtenus en recherchant l'intersection de cette droite avec les caractéristiques de sortie du MOSFET correspondant à $u_{GS} = 0$ ou $u_{GS} = 10$ V. Pour $u_{GS} = 0$, le point de fonctionnement se situe en M_0 (40 V ; 0) et pour $u_{GS} = 10$ V, le point de fonctionnement se situe en M_1 (500 mV ; 19 A). De la connaissance de i_D, on peut déduire la position des points M_0 (0 ; 0) et M_1 (10 V ; 19 A) sur la caractéristique de transfert (figure 13.39).

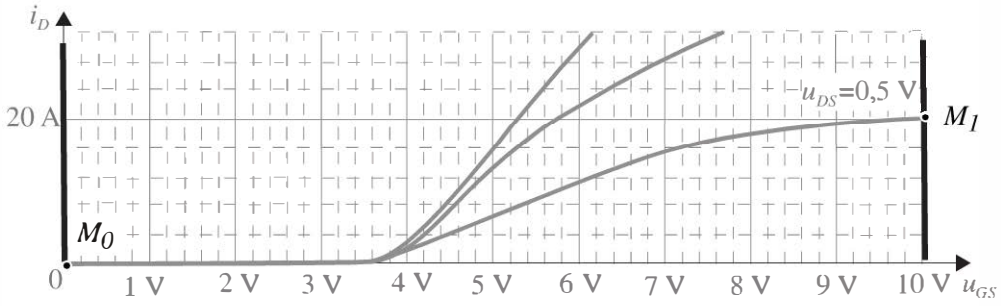


Figure 13.39

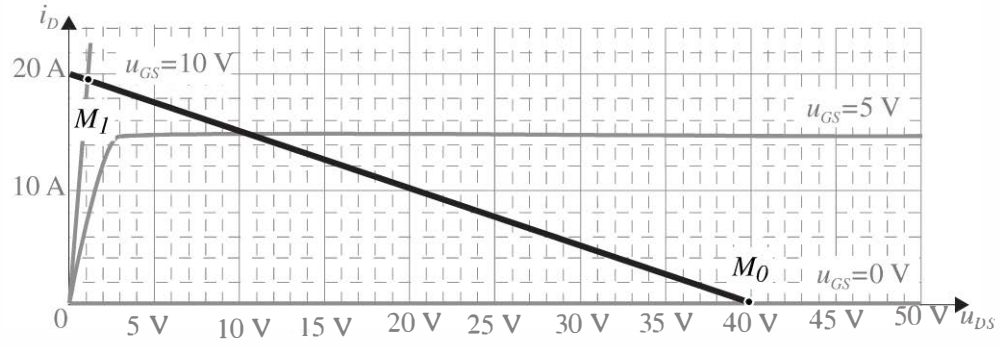


Figure 13.40

➤ *Modélisation du MOSFET*

Lorsque $e = 0$ V, le point de fonctionnement M_0 se situe sur une partie de la caractéristique de sortie assimilable à une droite d'équation $i_D = 0$ (figure 13.41a).

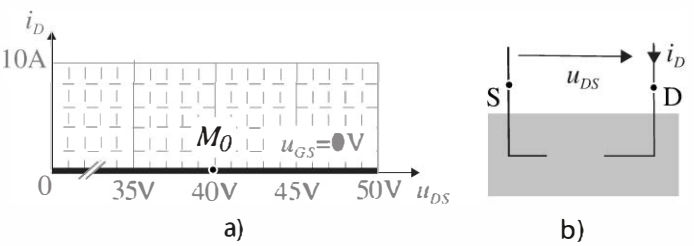


Figure 13.41

Copyright © 2007 Dunod.

Le MOSFET peut ainsi être modélisé par un circuit ouvert entre drain et source (figure 13.41b).

Lorsque $e = 10$ V, le point de fonctionnement M_1 se situe sur une partie de la caractéristique de sortie assimilable à une droite d'équation $u_{DS} = a\, i_D$ avec $a = 40\ \Omega^{-1}$ (figure 13.42a).

Le MOSFET peut ainsi être modélisé par une résistance de valeur $r = 1/a = 25$ mΩ entre drain et source (figure 13.42b).

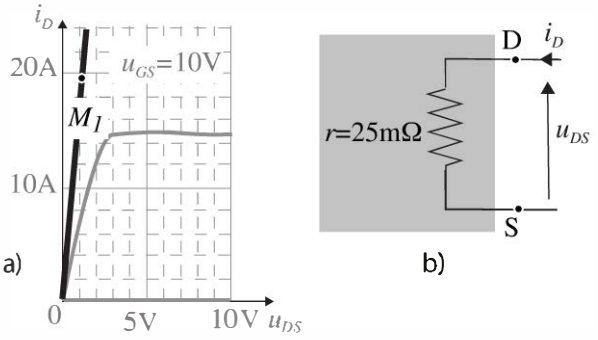


Figure 13.42

➤ *Fonction réalisée par le circuit*

Pour déterminer la fonction réalisée par le circuit étudié (figure 13.37), replaçons dans le circuit électrique, le modèle du MOSFET établi au paragraphe précédent.

Nous obtenons deux schémas électriques distincts, selon que $e = 0$ (figure 13.43a) ou que $e = 10$ V (figure 13.43b).

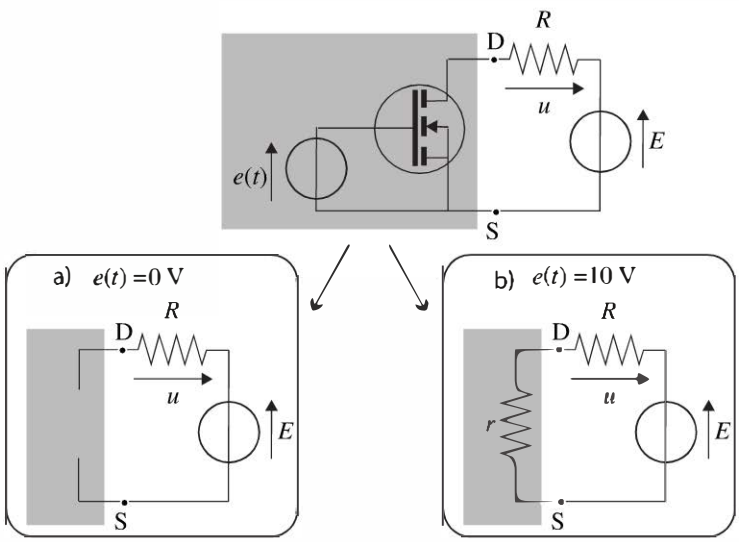


Figure 13.43

Déterminons alors l'expression de la tension $u(t)$ sur chaque schéma :

– pour $e = 0$, le circuit électrique est ouvert, par conséquent aucun courant ne peut circuler dans la résistance R, donc $u(t) = 0$;

– pour $e = 10$ V, la tension $u(t)$ est donnée par la règle du diviseur de tension $u = \dfrac{R}{R+r}E$, soit encore numériquement $u \simeq 39{,}51$ V.

On en déduit donc l'évolution de la tension $u(t)$ représentée figure 13.44.

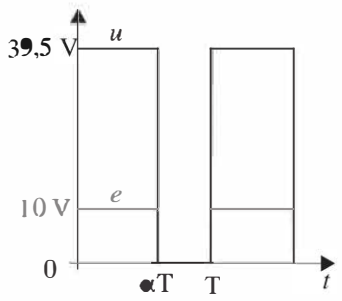


Figure 13.44

Pour mieux comprendre la fonction réalisée par le MOSFET dans le circuit étudié, effectuons un bilan de la puissance consommée par chacun des éléments du circuit.

Copyright © 2007 Dunod.

La puissance active P_R transmise à la résistance est :

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i_D(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} \frac{(39{,}5)^2}{2} dt = \frac{\alpha(39{,}5)^2}{2} \simeq 780\alpha\,.$$

La puissance active P_M consommée par le MOSFET est :

$$P_M = \frac{1}{T}\int_0^T u_{DS}(t)\, i_D(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} \frac{(0{,}5)^2}{25\cdot 10^{-3}} dt = \frac{\alpha(0{,}5)^2}{25\cdot 10^{-3}} \simeq 10\alpha\,.$$

La puissance active P_E prélevée à la source de tension E est :

$$P_E = \frac{1}{T}\int_0^T E\, i_D(t) dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} 40\frac{39{,}5}{2} dt = \frac{\alpha\, 1\,580}{2} \simeq 790\alpha\,.$$

Une puissance ajustable par le rapport cyclique α du signal de commande $e(t)$ a donc été transférée de la source à la résistance R. Le rendement de ce transfert est de $\eta = \dfrac{\alpha 10}{\alpha 790} \simeq 99\ \%$.

En découpant la tension transmise à la résistance R, le MOSFET se comporte comme interrupteur électronique commandé par la tension e. Par ce type de structure, appelée « hacheur », il devient possible de transférer des puissances importantes à une charge électrique (modélisée par R) en conservant un rendement très élevé.

> ***Remarque :*** En pratique, les rendements de ce type de hacheur se situent plutôt vers 80 %. En effet, le modèle statique du MOSFET considéré dans notre étude ne permet pas de traduire les pertes d'énergie lors des commutations de la structure.

Pour en savoir plus...

PHOTODIODE

Les milieux semiconducteurs sont sensibles à l'évolution de certaines grandeurs physiques de leur environnement. Les conditions d'éclairement influencent en particulier leur comportement électrique. Certains composants semiconducteurs qualifiés de photocomposants exploitent cette propriété. C'est le cas de la photodiode.

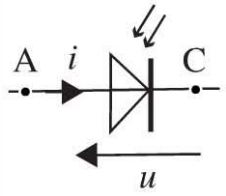


Figure 13.45

Une photodiode est un composant semiconducteur présentant deux bornes de connexions dénommées anode (A) et cathode (C). Ce composant est symbolisé figure 13.45.

La photodiode constitue l'élément central d'une photopile destinée à réaliser la conversion d'énergie lumineuse sous forme électrique. Les photodiodes sont également utilisées pour la conception de photodétecteurs destinés à effectuer la mesure d'intensité lumineuse.

Copyright © 2007 Dunod.

Caractéristique électrique

La caractéristique électrique $i = f(u)$ d'une photodiode se présente comme un réseau de courbes paramétrées par l'éclairement ε (en W/m^2) du composant (figure 13.46).

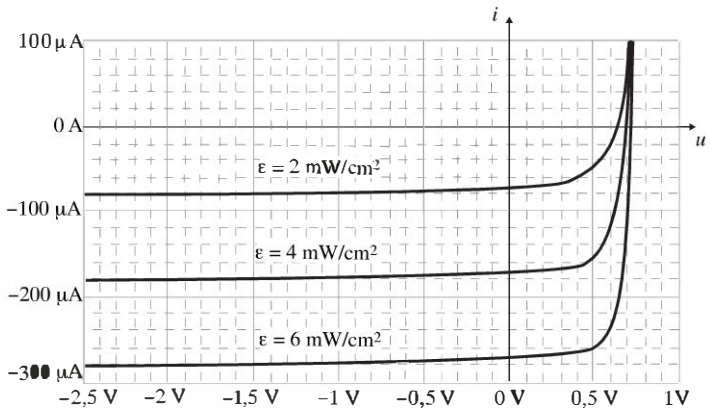


Figure 13.46

Selon son quadrant de travail, la photodiode consomme ou produit de l'énergie électrique. En effet, en convention récepteur, un fonctionnement dans le quadrant III ($i < 0$ et $u < 0$) conduit à une puissance positive ($p = ui > 0$) donc consommée par le composant. En revanche, dans le quadrant II ($i < 0$ et $u > 0$), la puissance négative obtenue ($p = ui < 0$) traduit une production d'énergie électrique.

Un fonctionnement du composant dans le quadrant I ne présente guère d'intérêt. En effet, l'influence de l'éclairement ne se manifeste pas de manière significative dans ce quadrant, la photodiode perd alors ses propriétés de photocomposant.

Sensibilité spectrale

À éclairement constant, la longueur d'onde de la radiation lumineuse reçue par le photocomposant modifie son comportement électrique.

Les fabricants de photocomposants donnent une courbe illustrant l'évolution de la sensibilité du composant en fonction de la longueur d'onde λ (figure 13.47).

La sensibilité S exprime, pour chaque longueur d'onde, le rapport entre le courant maximum et l'éclairement qui l'a induit.

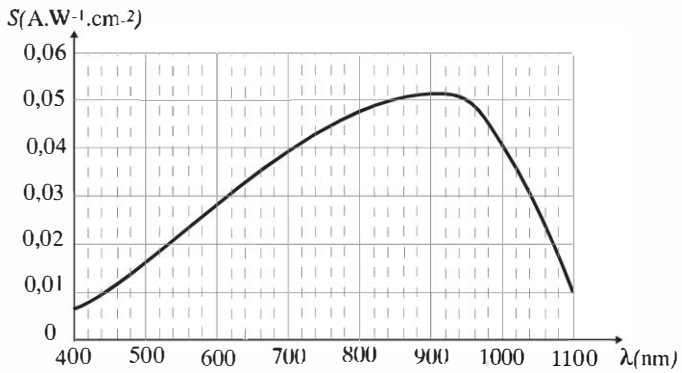


Figure 13.47

Copyright © 2007 Dunod.

Une telle courbe met en évidence un maximum de sensibilité pour certaines longueurs d'ondes. Dans le cas de la figure 13.47, la sensibilité maximale est obtenue pour $\lambda = 900$ nm, qui correspond au proche infrarouge.

Mode photoconducteur

Le mode photoconducteur correspond à un fonctionnement dans le quadrant III. Pour obtenir un fonctionnement dans ce mode, la photodiode doit être placée dans un circuit électrique permettant l'obtention d'une tension $u < 0$.

Un tel circuit est représenté figure 13.48. La photodiode est placée en série avec une source de tension de f.é.m. $E = 1{,}5$ V et une résistance $R = 1{,}5$ kΩ.

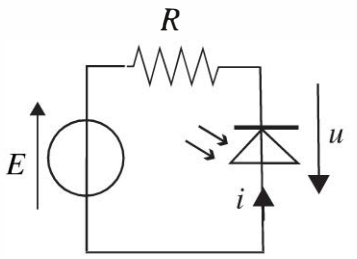


Figure 13.48

Le point de fonctionnement M de la photodiode est obtenu en recherchant l'intersection entre la droite de charge $i = -6{,}6 \cdot 10^{-4}u - 10^{-3}$ et la caractéristique graphique de la photodiode (figure 13.49). Cette intersection est obtenue dans le quadrant III.

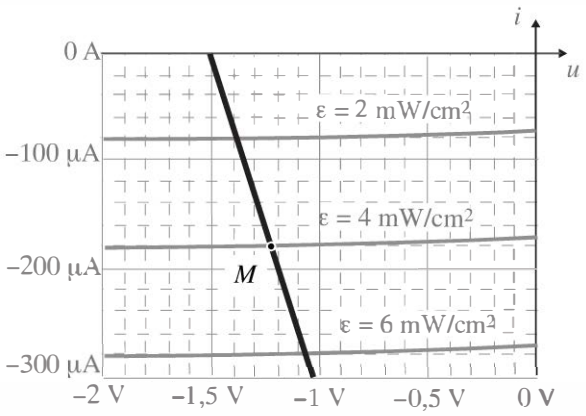


Figure 13.49

Sur cette portion de caractéristique, la photodiode est modélisable par une source de courant, dont le courant électromoteur est paramétré par l'éclairement du composant. On veillera notamment à choisir une résistance R suffisamment faible, pour garantir un fonctionnement dans la quadrant III, quel que soit l'éclairement.

Ce mode de fonctionnement de la photodiode est utilisé pour effectuer une mesure d'éclairement (photomètres, colorimètres, spectrophotomètres). Le courant de mesure obtenu varie avec l'éclairement selon une loi sensiblement linéaire.

> ***Remarque :*** Dans une structure électronique destinée à la mesure de l'intensité lumiseuse émise par une source, le montage utilise également un dispositif de filtrage destiné à supprimer le bruit inhérent à la mesure. Un circuit de conditionnement complète la structure en offrant la possibilité de convertir le courant de mesure en tension évoluant dans une gamme prédéfinie.

Mode photovoltaïque

Le mode photovoltaïque correspond à un fonctionnement dans le quadrant II. Un fonctionnement dans ce mode est obtenu en raccordant la photodiode à une simple résistance permettant obtention d'une tension $u > 0$.

En considérant que la résistance à pour valeur $R = 3$ kΩ, on obtient un circuit dont le schéma électrique est présenté figure 13.50.

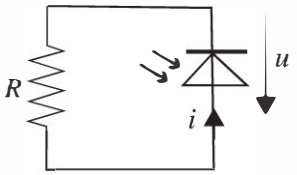


Figure 13.50

Copyright © 2007 Dunod.

Le point de fonctionnement M de la photodiode est obtenu en recherchant l'intersection entre la droite de charge $i = -3{,}3 \cdot 10^{-4}u$ et la caractéristique graphique de la photodiode (figure 13.51). Cette intersection est obtenue dans le quadrant II.

Sur cette portion de caractéristique, la photodiode se comporte comme un générateur d'énergie où l'on recherche, à éclairement donné, l'obtention d'une puissance électrique fournie maximale. On notera que contrairement au fonctionnement en mode photoconducteur, l'évolution du courant en fonction de l'éclairement n'est plus linéaire.

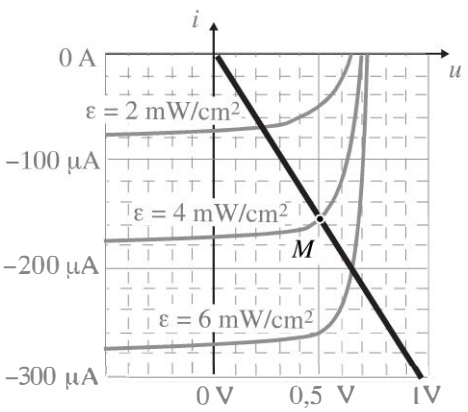


Figure 13.51

Remarque : On comprend que pour différents éclairements la valeur de R doit être modifiée pour positionner celui-ci au point de puissance maximale. C'est le principe utilisé par certaine structure qualifiées de MPPT (*Maximum Power Point Tracker*). L'objectif est d'adapter le comportement d'un convertisseur statique assurant l'interface entre la photodiode et la charge afin de receuillir en permanence l'énergie maximale.

Copyright © 2007 Dunod.

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 14

Amplificateur opérationnel

Objectifs

- Présenter les différents modèles électriques linéaires statiques et dynamiques d'un amplificateur opérationnel.
- Présenter le fonctionnement d'un amplificateur en réaction.
- Étudier le comportement statique d'un amplificateur et d'un comparateur.
- Étudier le comportement dynamique d'un oscillateur harmonique.
- Étudier le comportement dynamique d'un multivibrateur astable

Vocabulaire

Entrée inverseuse et non inverseuse
Courant de polarisation
Tension de décalage
Mode commun et mode différentiel
Réactions positive et négative
Amplificateur de tension
Comparateur à hystérésis
Oscillateur harmonique
Multivibrateur astable

L'électronique constitue un champ considérable d'applications pour l'étude de circuits électriques. En effet, les structures électroniques conçues actuellement, reposent sur l'utilisation de circuits intégrés, appelés vulgairement « puces électroniques ». Ces éléments, intégrés à l'intérieur d'un petit boîtier, constituent un circuit électrique à part entière. L'objet de ce chapitre est précisément l'étude de l'un d'entre eux, devenu au fil des décennies, le circuit intégré analogique d'utilisation universelle : l'amplificateur opérationnel. Après une présentation rapide de la structure, les différents modèles électriques de ce circuit intégré seront évoqués. L'étude de différentes applications de ce circuit intégré sera ensuite proposée, relevant d'un fonctionnement en régime linéaire ou non linéaire.

Copyright © 2007 Dunod.

14.1 MODÉLISATION DE L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

14.1.1 Structure et fonction

➤ ***Structure et symbole***

Un amplificateur opérationnel (AOP) est réalisé autour d'un circuit électrique constitué de transistors et de résistances. Un exemple de ce type de structure est représenté figure 14.1a. Pour pouvoir fonctionner, il est nécessaire d'appliquer une tension constante dite tension d'alimentation sur les bornes (4) et (5). Les tensions appliquées sur chaque borne d'alimentation sont généralement symétriques (+ 15 V/ – 15 V) et définies par rapport à une référence de tension correspondant à la masse (0 V) de la structure. Ce circuit est enfermé à l'intérieur d'un boîtier (figure 14.1b), où un ensemble de broches permettent de réaliser les connexions entre les bornes du circuit intégré et son environnement. La représentation symbolique d'un amplificateur opérationnel est proposée figure 14.1c.

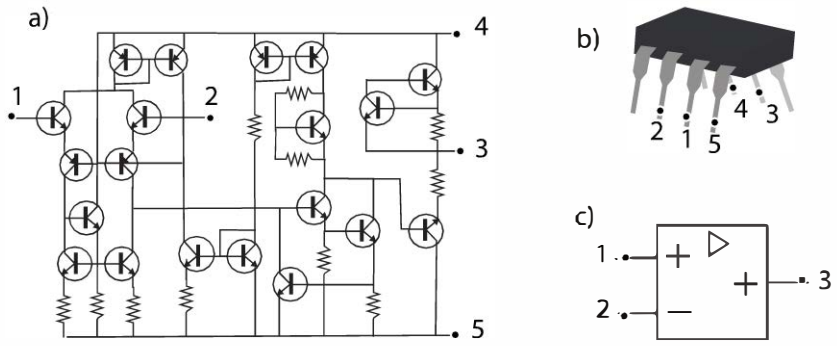


Figure 14.1

Remarque : Il est d'usage de ne pas faire figurer les bornes d'alimentation (4) et (5) du circuit intégré sur le symbole de celui-ci.

➤ ***Fonction***

Un amplificateur opérationnel est un système électrique, comportant deux entrées et une sortie (figure 14.2). L'évolution de la tension sur chacune des bornes d'entrée (1) et (2) influence la tension présente sur l'unique borne de sortie (3). La fonction électronique de ce circuit intégré est de réaliser une très forte amplification différentielle de tension.

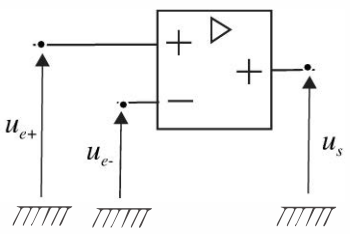


Figure 14.2

En effet, en première approximation, on considère que la tension de sortie u_s dépend de la différence entre les tensions d'entrée u_{e+} et u_{e-}. Cette relation est du type : $u_s = T_{ud}(u_{e+} - u_{e-})$, où le coefficient T_{ud} supposé constant possède une valeur très élevée ($> 10^5$). Il est d'usage d'appeler l'entrée « + » entrée **non inverseuse**, et l'entrée « – » entrée **inverseuse**.

Copyright © 2007 Dunod.

14.1.2 Modélisation

La complexité de la structure interne de l'amplificateur opérationnel (figure 14.1a), impose à l'utilisateur de ce type de circuit intégré de travailler sur des modèles électriques. Ces derniers sont plus ou moins élaborés selon le degré d'approximation requis.

La plupart de ces modèles électriques sont linéaires, décrivant le comportement statique ou dynamique de l'amplificateur opérationnel.

➤ *Modélisation quadripolaire*

La fonction réalisée par l'AOP conduit à le modéliser par un quadripôle. En effet, la tension à amplifier correspondant à la tension u_e entre les deux entrées.

Ces dernières constituent les bornes d'entrée (E et E') du quadripôle équivalent (figure 14.3). La sortie amplifiée est prélevée entre la sortie et la masse. Les bornes de sortie correspondent à la sortie S de l'AOP, et la masse S'.

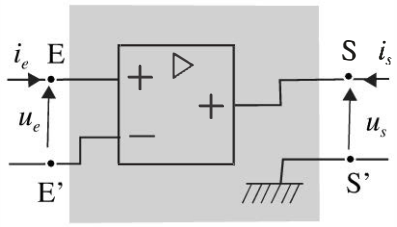


Figure 14.3

➤ *Modèle linéaire statique standard*

Un premier type de modèle vise à traduire le comportement électrique et fonctionnel de la structure amplificatrice dans des conditions nominales d'utilisation. Dans ces conditions, le comportement de l'AOP est linéaire.

Le choix de la représentation quadripolaire s'oriente vers une représentation en paramètres hybrides K_{ij} (figure 14.4). C'est en effet, une représentation qui traduit une influence directe de la tension d'entrée sur la tension de sortie.

Ce transfert est modélisé par une source de tension liée, commandée par tension (voir chapitre 4). Le paramètre K_{21} noté T_{ud} est appelé **coefficient d'amplification** en tension. La réaction de la sortie sur l'entrée étant négligeable, elle n'est pas prise en compte ($K_{12} = 0$). Le paramètre $1/K_{11}$ désigne la **résistance d'entrée** R_e. De même, on appelle **résistance de sortie** R_s le paramètre K_{22}.

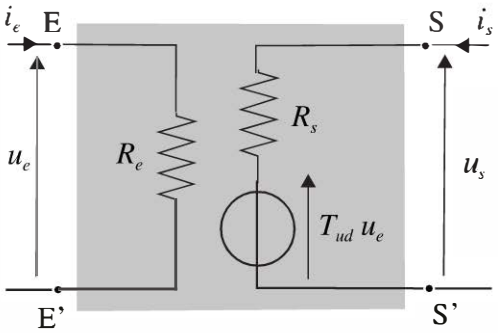


Figure 14.4

Technologiquement, les amplificateurs opérationnels sont conçus pour prélever un minimum de puissance en entrée, donc avoir R_e très élevée. De plus, pour rendre la tension de sortie indépendante de la charge connectée en sortie, R_s doit être la plus faible possible. Le coefficient d'amplification est, quant à lui, extrêmement élevé ($T_{ud} > 10^5$).

➤ *Modèle idéal*

Compte tenu de la valeur très élevée de la résistance d'entrée ($R_e > 10^{12}\ \Omega$) par rapport aux valeurs couramment utilisées en électronique, on considère que $R_e = \infty$. À l'opposé, la valeur très faible de la résistance de sortie ($R_s < 100\ \Omega$) peut être négligée $R_s = 0$.

Copyright © 2007 Dunod.

Il est ainsi possible de dresser de l'amplificateur opérationnel, un **modèle idéal** représenté figure 14.5. Seul demeure, sur ce modèle épuré à l'extrême, l'aspect fonctionnel de la structure :

$$u_s = T_{ud}\, u_e$$

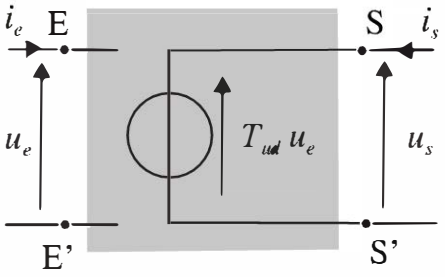


Figure 14.5

Ainsi, le modèle idéal est caractérisé par un courant d'entrée $i_e = 0$ et une tension de sortie u_s indépendante de i_s.

La validité du modèle proposé est assurée tant que la tension u_s exigée en sortie n'excède pas la plage d'alimentation du circuit intégré. Au-delà, la tension u_s garde une valeur constante voisine des niveaux d'alimentation : l'amplificateur est dit **saturé**.

Ainsi, dans le cas d'une alimentation symétrique matérialisée par deux niveaux de tension ($\pm V_A$), l'évolution de la tension u_s en fonction de u_e, correspond à la caractéristique représentée figure 14.6.

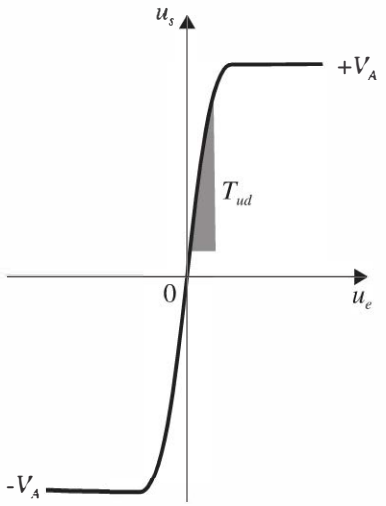


Figure 14.6

Remarque : Un modèle électrique tenant compte des saturations de l'AOP ne constitue plus un modèle linéaire. En effet, en phase de saturation, la tension de sortie n'est plus proportionnelle à la tension d'entrée.

➤ *Modèle linéaire statique complet*

Pour certaines applications, il peut s'avérer nécessaire de prendre en considération un certain nombre d'imperfections de l'amplificateur. La plupart de celles-ci sont inhérentes à la technologie utilisée pour réaliser le circuit intégré. Il est alors nécessaire de compléter le modèle linéaire statique par un ensemble d'éléments électriques supplémentaires.

En tant qu'amplificateur différentiel, l'AOP est conçu pour amplifier la tension présente entre ses entrées. Mais une absence de symétrie parfaite dans sa structure interne, fait que son comportement électrique est également influencé par la tension sur chaque entrée u_{e+} et u_{e-}.

On tient compte de l'effet de ces deux tensions à travers une grandeur moyennée appelée **tension de mode commun** : $u_{emc} = \dfrac{u_{e+} + u_{e-}}{2}$.

Le modèle électrique linéaire de l'amplificateur opérationnel traduisant les effets de la tension de mode commun est représenté figure 14.7.

Les tensions u_{e+} et u_{e-} induisent la circulation de courants i_{e+} et i_{e-} de façon dissymétrique sur chaque entrée. Celle-ci est prise en compte par la présence de résistances de mode commun R_{e+} et R_{e-}.

Copyright © 2007 Dunod.

De plus, la tension de sortie est également influencée par la tension de mode commun. On traduit cette dépendance en exprimant la f.é.m. délivrée par la source commandée, sous la forme :

$$u_{emc} = T_{ud}u_e + T_{ucm}u_{ecm} = T_{ud}(u_{e+} - u_{e-}) + T_{ucm}\left(\frac{u_{e+} + u_{e-}}{2}\right)$$

Le paramètre T_{ucm} est communément appelé **coefficient d'amplification** de mode commun. Par opposition à celui-ci, le paramètre T_{ud} est généralement appelé coefficient d'amplification de mode différentiel.

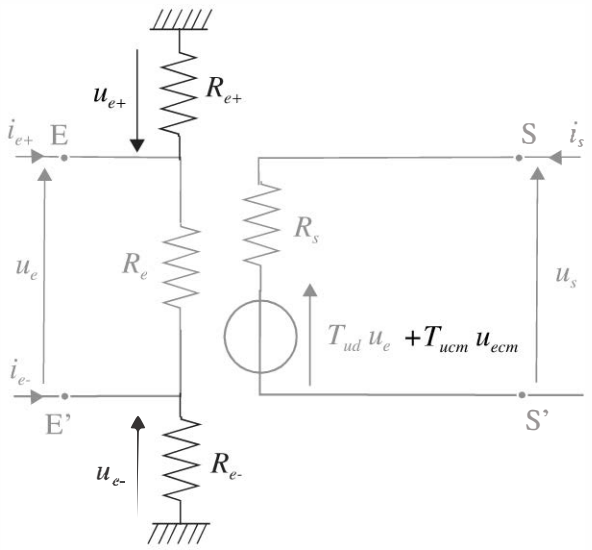


Figure 14.7

Remarque : L'aptitude du circuit intégré à privilégier l'amplification différentielle au détriment de celle de mode commun, est quantifiée à travers un coefficient α de réjection du mode commun : $\alpha = T_{ucm}/T_{ud}$.

D'autres imperfections de l'amplificateur opérationnel se manifestent aussi indépendamment des tensions présentes en entrée. En effet, pour obtenir un domaine de fonctionnement le plus linéaire possible, les transistors constituant le circuit intégré fonctionnent autour d'un point de polarisation. Le **point de polarisation** désigne le point de fonctionnement des transistors « au repos » en dehors de tout signal d'entrée.

La prise en considération de l'existence d'un point de polarisation conduit au modèle présenté figure 14.8. De légères dissymétries au niveau de l'étage d'entrée de la structure interne se traduisent par une tension u_s non rigoureusement nulle quand $u_{e+} = u_{e-} = 0$. Cette imperfection est modélisée en rajoutant en entrée une source de tension délivrant une force électromotrice E_d appelée **tension de décalage**.

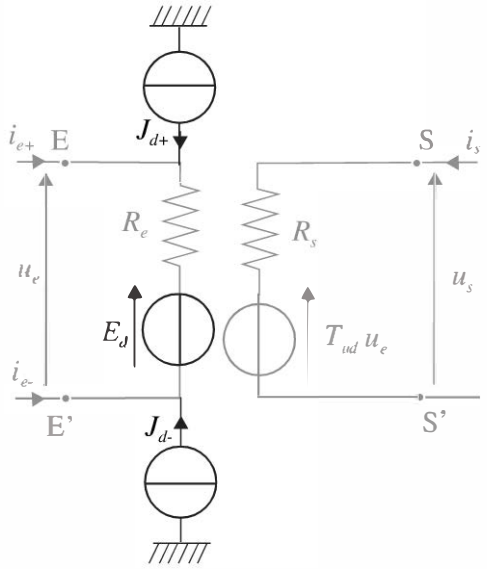


Figure 14.8

De plus, le processus de polarisation est responsable de la circulation de courants de polarisation sur chacune des entrées de l'AOP. L'existence de ceux-ci est prise en compte par la présence de sources de courant délivrant des courants électromoteurs J_{d+} et J_{d-}.

Remarque : On notera que les paramètres E_d, J_{d+} et J_{d-} dérivent de manière significative avec la température. La force électromotrice E_d peut, en particulier, être positive ou négative.

Copyright © 2007 Dunod.

➤ ***Modèle dynamique standard***

En régime dynamique, qu'il soit permanent ou transitoire, il s'avère bien souvent nécessaire de traduire le comportement de l'amplificateur opérationnel. Il est notamment nécessaire de tenir compte des couplages capacitifs entre différents éléments du composant. Le modèle quadripolaire standard statique doit donc être adapté (voir chapitres 4 et 9).

En substituant respectivement aux résistances d'entrée et de sortie, les impédances opérationnelles $Z_e(p)$ et $Z_s(p)$, et au coefficient d'amplification, une transmittance opérationnelle $T_{ud}(p)$, on obtient le schéma opérationnel représenté figure 14.9.

Il est possible de donner une expression de $T_{ud}(p)$ en exploitant le diagramme de Bode de l'amplificateur opérationnel (figure 14.10). Ce diagramme illustre en régime sinusoïdal l'évolution de $\overline{T}_{ud} = \dfrac{\overline{U}_s}{\overline{U}_e}$ en fonction de la fréquence. Il est composé d'une courbe de gain $G_{ud}(f)$ et d'une courbe de déphasage $\varphi_{ud}(f)$.

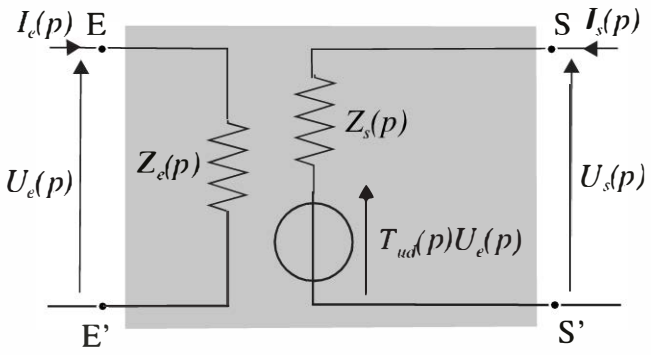


Figure 14.9

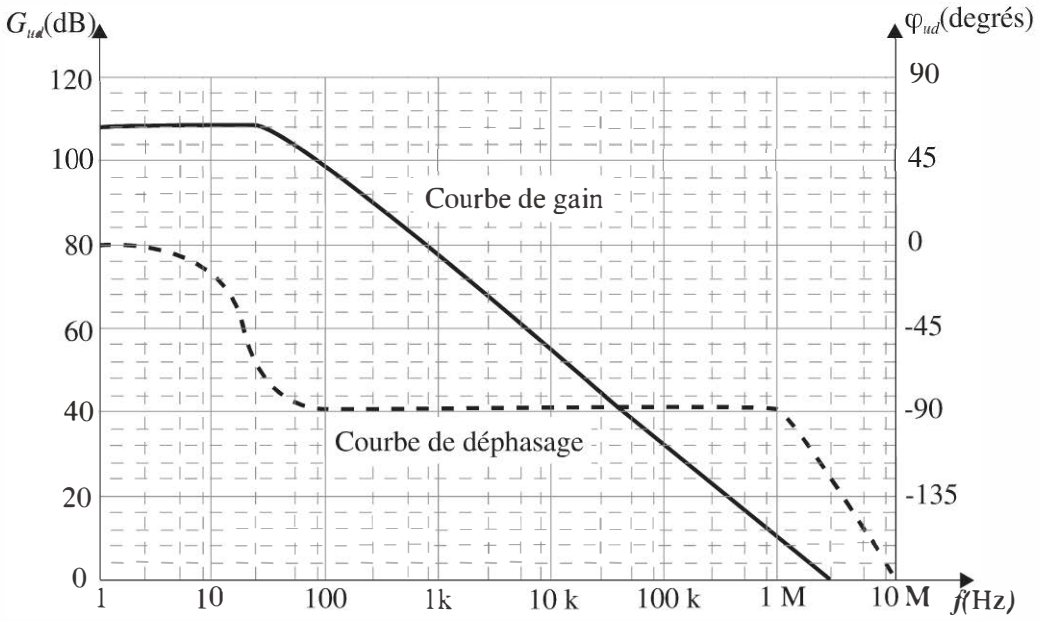


Figure 14.10

L'analyse de cet ensemble de courbes met en évidence trois types de comportement fréquentiel concernant l'amplificateur opérationnel :

Copyright © 2007 Dunod.

– pour des fréquences $f < 30$ Hz, le gain est constant avec un déphasage nul. La transmittance opérationnelle peut être exprimée sous la forme : $T_{ud}(p) = K_0 = \text{Cste} > 0$;
– pour des fréquences $30 \text{ Hz} < f < 1$ MHz, le comportement de l'AOP est celui d'une structure du premier ordre (décroissance du gain de 20 dB/décade, déphasage bloqué à – 90°). La transmittance opérationnelle peut alors être exprimée sous la forme : $T_{ud}(p) = \dfrac{K_1}{p + p_0}$;
– pour des fréquences $f > 1$ MHz, la phase tombe en dessous de 180°, traduisant un comportement d'ordre supérieur à deux.

14.2 FONCTIONNEMENT EN RÉACTION

En raison d'un gain en tension très élevé ($G_{udmax} > 100$ dB), l'amplificateur opérationnel n'est que rarement utilisé tout seul. Il lui est généralement associé un quadripôle passif opérant **une réaction** sur celui-ci, et lui permettant de réaliser un grand nombre de fonctions électroniques.

14.2.1 Mise en situation

Les deux structures proposées figure 14.11 fonctionnent en réaction. En effet, un quadripôle constitué des résistances R_1 et R_2 permet d'effectuer une liaison électrique entre la sortie et l'une des entrées.

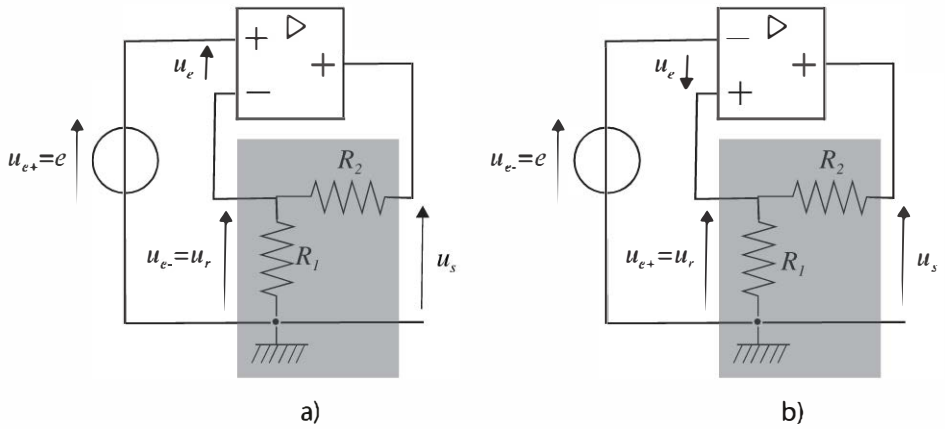


Figure 14.11

Dans la configuration proposée figure 14.11a, la réaction est réalisée sur l'entrée inverseuse, on la qualifie de **réaction négative** (ou **contre-réaction**). Dans celle proposée figure 14.11b, la réaction est réalisée sur l'entrée non inverseuse, il s'agit d'une **réaction positive**.

D'un point de vue électrique, la réaction consiste à appliquer, sur l'entrée réactionnée, une tension u_r liée à la tension de sortie u_s. Pour établir la relation entre ces tensions, utilisons le modèle idéal de l'amplificateur opérationnel ($i_e = 0$).

Copyright © 2007 Dunod.

L'application de la règle du diviseur de tension conduit pour la tension u_r à l'expression $u_r = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$. L'autre entrée de l'amplificateur opérationnel est connectée à une source de tension de force électromotrice e. Pour mieux comprendre le fonctionnement de chacune des deux structures, déterminons l'évolution du point de fonctionnement de l'association de l'amplificateur opérationnel et du quadripôle de réaction.

14.2.2 Étude en contre-réaction

Examinons tout d'abord le comportement de la structure présentée à la figure 14.11a. La tension d'entrée u_e est égale à $u_e = e - u_r = e - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$. Celle-ci peut être exprimée sous la forme $u_s = b - a u_e$ avec $a = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ et $b = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} e$. Cette relation correspond à l'équation d'une droite dans le plan (u_e, u_s), de pente a et d'ordonnée à l'origine égale à b (figure 14.12).

La détermination du point de fonctionnement M passe par la recherche de l'intersection de cette droite et de la caractéristique graphique statique de l'amplificateur opérationnel. Dans la mesure où $-V_A < e < +V_A$, le point M se déplace sur la portion de caractéristique linéaire de l'amplificateur opérationnel. On parle alors de **régime linéaire** pour désigner le fonctionnement de l'AOP.

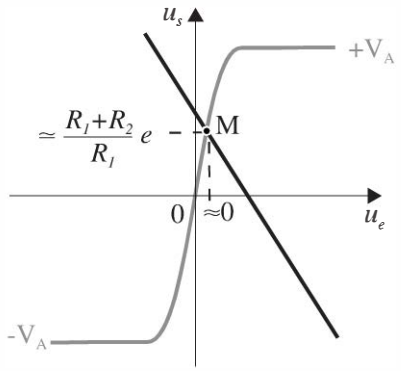


Figure 14.12

Compte tenu de la pente de cette caractéristique ($T_{ud} > 10^5$), le point de fonctionnement possède pour abscisse une valeur de u_e voisine de 0, et une ordonnée u_s voisine de $\dfrac{R_1 + R_2}{R_1} e$. La tension de sortie peut donc s'exprimer sous la forme $u_s = Ke$, où $K = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} > 1$. La structure étudiée réalise donc une **amplification en tension** d'usage très répandu en électronique analogique. Celle-ci est caractérisée par un gain en tension :

$$G = 20 \log_{10}(u_s/e) = 20 \log_{10}(K) = 20 \log_{10}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

14.2.3 Étude en réaction positive

Pour la structure présentée figure 14.11b, la tension d'entrée u_e est égale à $u_e = u_r - e = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s - e$. Celle-ci peut être exprimée sous la forme $u_s = b + a u_e$ avec $a = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ et $b = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} e$.

Cette relation correspond à l'équation d'une droite dans le plan (u_e, u_s), de pente a et d'ordonnée à l'origine égale à b (figure 14.13).

Copyright © 2007 Dunod.

La détermination du point de fonctionnement passe par la recherche de l'intersection de cette droite de charge et de la caractéristique graphique statique de l'amplificateur opérationnel.

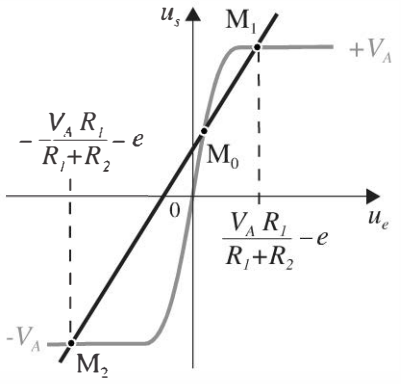


Figure 14.13

Pour chaque valeur de e, trois intersections sont possibles correspondants aux points M_0, M_1, et M_2.

Seuls deux points correspondent à des points de fonctionnement stables. En effet, si le point de fonctionnement est en M_0, toute augmentation minime de e conduira à une augmentation de u_e qui induira, *via* l'AOP, une augmentation de u_s. Celle-ci, à son tour, provoquera une élévation de u_e. Par ce processus en chaîne, la tension u_s dérivera jusqu'à atteindre la saturation $u_s = +V_A$ en M_1. De la même façon, une légère diminution entraînera le point de fonctionnement en M_2, où $u_s = -V_A$.

La conclusion s'impose alors, que dans cette configuration, le point de fonctionnement se situe nécessairement dans la zone de saturation. On parle de **régime non linéaire ou saturé** pour l'amplificateur opérationnel.

Pour mieux appréhender le fonctionnement, considérons que la force électromotrice e soit de forme sinusoïdale d'amplitude crête V_A (figure 14.14).

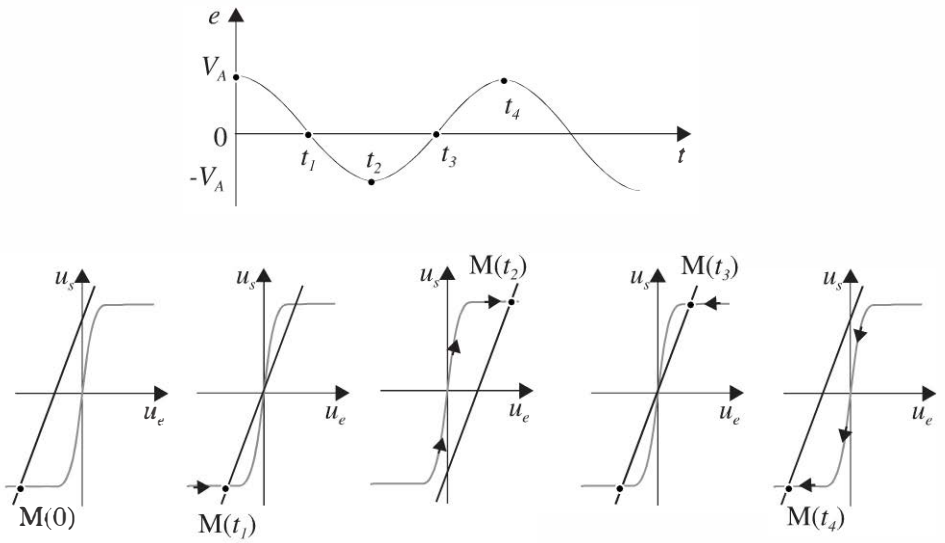


Figure 14.14

Au gré de l'évolution de e, la droite de charge $u_s = b + au_e$ se déplace, en conservant une pente constante, mais dont l'ordonnée à l'origine, varie en proportion de e. À l'instant initial ($t = 0$), l'unique point de fonctionnement se situe en $M(0)$ où la tension $u_s = -V_A$. Une décroissance de e entraîne progressivement le point de fonctionnement en $M(t_1)$ quand $e = 0$. Bien qu'il existe trois intersections, la stabilité du point de fonctionnement contraint ce dernier à demeurer sur le segment de la caractéristique correspondant à $u_s = -V_A$. À l'instant t_2, l'intersection entre caractéristiques conduit le point de fonctionnement en $M(t_2)$ pour lequel $u_s = +V_A$.

Copyright © 2007 Dunod.

Entre les instants t_1 et t_2, la tension de sortie a donc brutalement changé de signe. De façon symétrique, une décroissance de e conduira le point de fonctionnement en $M(t_3)$ puis en $M(t_4)$, entre lesquels une seconde commutation de la sortie aura ramené u_s à sa valeur initiale ($u_s = -V_A$).

Le fonctionnement présenté met en évidence des effets de seuil se manifestant par un brutal changement d'état de u_s au passage de la tension e à certaines valeurs. Pour déterminer la valeur de ces seuils, déterminons les positions du point de fonctionnement où se produisent les changements d'état.

En effet, juste avant l'instant où se produit la transition de u_s entre $-V_A$ et $+V_A$, le point de fonctionnement a pour abscisse $-\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A - e \simeq 0$ (figure 14.15a).

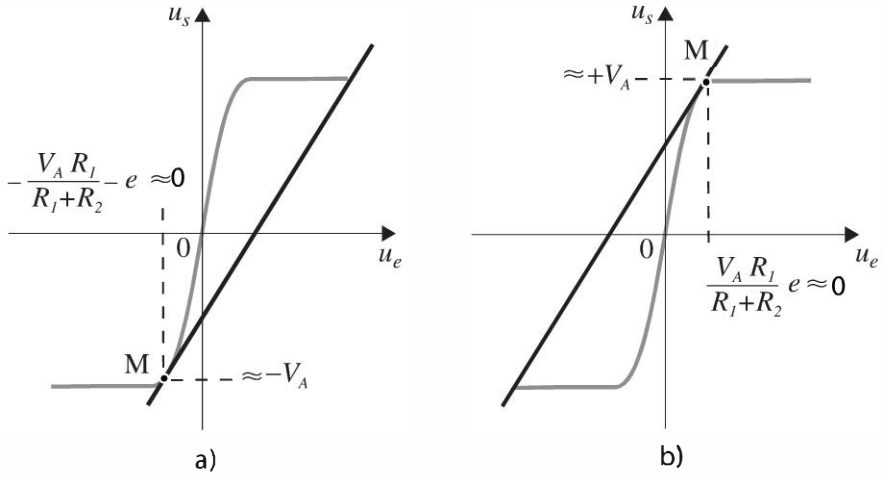


Figure 14.15

Ainsi, le changement d'état de la sortie s'effectue au passage de la tension e à une valeur de seuil $U_B = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$. Un raisonnement identique mené juste avant la transition de u_s entre $+V_A$ et $-V_A$ conduit à déterminer l'abscisse du point de fonctionnement $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A - e \simeq 0$ à cet instant (figure 14.15b). Le changement d'état de u_s s'effectue au passage de e à une valeur de seuil $U_H = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$. On comprend ainsi que la valeur de u_s est dictée par la valeur de e par rapport aux seuils U_B et U_H, mais aussi par le sens d'évolution de celle-ci.

Pour résumer le comportement de la structure à amplificateur opérationnel étudiée, il est possible de tracer la caractéristique graphique de transfert de la structure reflétant l'évolution de u_s en fonction de e.

Celle-ci représentée figure 14.16, est emblématique d'une structure baptisée **comparateur à hystérésis**. Cette structure est très utilisée en électronique pour mettre en forme des signaux numériques bruités.

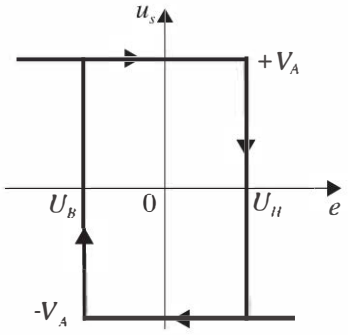


Figure 14.16

Copyright © 2007 Dunod.

14.3 FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE LINÉAIRE

La réalisation d'oscillateur harmonique constitue une utilisation de l'amplificateur opérationnel en régime linéaire. Un oscillateur harmonique est une structure électronique susceptible de délivrer un signal sinusoïdal. Analysons le comportement de la structure baptisée oscillateur à pont de Wien.

14.3.1 Mise en situation

Un oscillateur à pont de Wien consiste à associer en cascade deux quadripôles Q_1 et Q_2, comme représenté sur la figure 14.17.

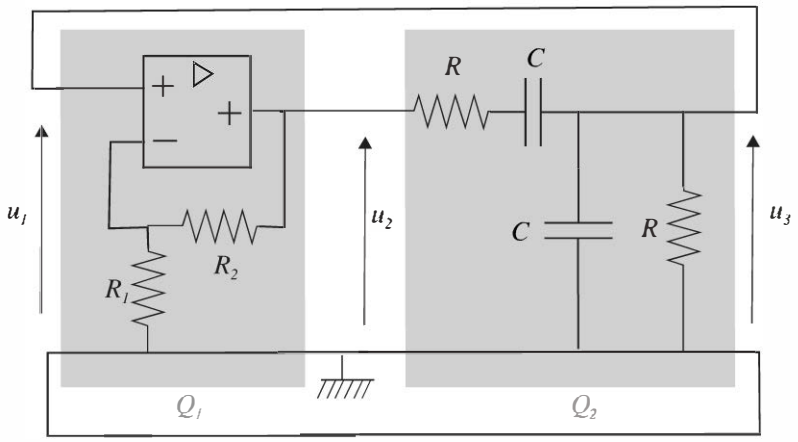


Figure 14.17

Les bornes de sortie du quadripôle Q_2 sont également reliées aux bornes d'entrée de Q_1. L'association constitue ce qu'il est d'usage de qualifier de système en **boucle fermée**.

Pour déterminer la condition d'existence d'un régime permanent sinusoïdal (RPAC), il est nécessaire de dresser le schéma électrique complexe de la structure (figure 14.18).

Le quadripôle Q_2 est schématisé par un ensemble de deux impédances complexes $\overline{Z_s}$ et $\overline{Z_p}$: $\overline{Z_s} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$ correspond à l'association série de la résistance et du condensateur, $\overline{Z_p} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$ correspond à l'association parallèle de la résistance et du condensateur.

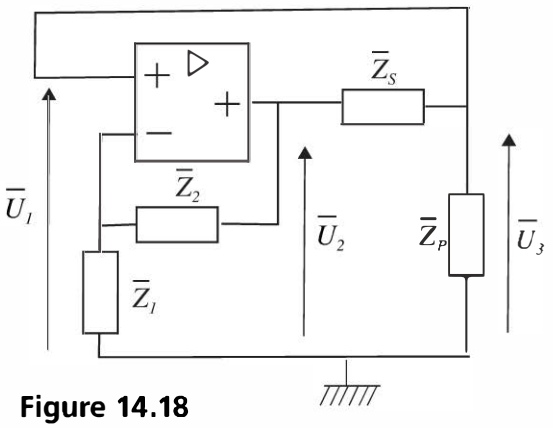


Figure 14.18

Les impédances complexes associées aux résistances présentes dans la structure de Q_1 sont $\overline{Z_1} = R_1$ et $\overline{Z_2} = R_2$.

Exprimons la transmittance en tension complexe de Q_1 et Q_2 :

– le quadripôle Q_1 correspond à l'amplificateur de tension précédemment étudié (figure 14.11a). En exploitant le modèle idéal de l'amplificateur opérationnel, la transmittance complexe associée à Q_1 peut s'exprimer sous la forme : $\overline{T}_1 = \dfrac{\overline{U_2}}{\overline{U_1}} = \dfrac{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}}{\overline{Z_1}} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$;

Copyright © 2007 Dunod.

– le quadripôle Q_2 correspond à un diviseur de tension constitué des impédances complexes $\overline{Z_s}$ et $\overline{Z_p}$. La transmittance complexe associée à Q_2 peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\overline{T}_2 = \frac{\overline{U_3}}{\overline{U_2}} = \frac{\dfrac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \dfrac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}3RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}.$$

> ***Remarque*** : La transmittance de Q_1 chargée par Q_2 est identique à celle obtenue à vide au § 14.2. En effet, sous l'hypothèse du modèle idéal de l'AOP, la tension u_2 est indépendante de la charge de l'AOP.

Le quadripôle équivalent à l'association cascade de Q_1 et Q_2 possède une transmittance complexe $\overline{T} = \dfrac{\overline{U_3}}{\overline{U_1}} = \dfrac{\overline{U_3}}{\overline{U_2}}\dfrac{\overline{U_2}}{\overline{U_1}} = \left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right)\dfrac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}3RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}$.

Dans la structure présentée figure 14.18, la sortie Q_2 est directement reliée à l'entrée de Q_1. On impose ainsi, par cette liaison, l'égalité des tensions u_3 et u_1 et donc des phaseurs associés $\overline{U_3} = \overline{U_1}$. Cette égalité implique donc $\overline{T} = \left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right)\dfrac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}3RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2} = 1$, que l'on peut encore exprimer sous la forme : $\dfrac{\mathrm{j}RC\omega K}{1+\mathrm{j}3RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2} = 1$, où le coefficient $K = \dfrac{R_1+R_2}{R_1}$.

Pour exprimer la condition d'existence d'un régime sinusoïdal permanent, il existe différentes techniques.

Une première technique (appelée critère de Barkhausen), exprime de façon purement algébrique l'égalité complexe. D'autres méthodes vues au chapitre 9, qui relèvent de l'étude d'un circuit en régime permanent sinusoïdal à fréquence variable (Diagramme de Bode, Plan de Nyquist, Lieu d'Evans) peuvent également être employées.

14.3.2 Critère de Barkhausen

L'équation $\dfrac{\mathrm{j}RC\omega K}{1+\mathrm{j}3RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2} = 1$ peut encore être traduite sous l'égalité complexe : $\mathrm{j}RC\omega K = 1+\mathrm{j}3RC\omega-(RC\omega)^2$, en tenant compte du fait que $\mathrm{j}^2 = -1$.

À cette égalité, correspondent deux équations réelles portant sur l'égalité des parties réelles et imaginaires :

– l'égalité des parties réelles s'écrit $0 = 1-(RC\omega)^2$ et donne l'expression de la pulsation de l'oscillation obtenue $\omega = 1/(RC)$. La fréquence associée est égale à $f = 1/(2\pi RC)$;

– l'égalité des parties imaginaires s'écrit $RC\omega K = 3RC\omega$. En tenant compte de l'expression de la pulsation, celle-ci donne $K = 3$, soit $R_2 = 2R_1$ en tenant compte de l'expression de K. Cette dernière égalité correspond à la condition d'obtention d'une oscillation sinusoïdale d'amplitude constante au cours du temps.

Copyright © 2007 Dunod.

L'égalité complexe $\overline{T}_1\overline{T}_2 = 1$, exprimant la condition d'existence d'une oscillation harmonique dans un système bouclé, est appelée critère de Barkhausen, en hommage à H.G. Barkhausen.

Hienrich Georg BARKHAUSEN (1881-1956)



Les travaux de ce physicien allemand ont principalement porté sur l'étude des matériaux ferromagnétiques. Mais, il a également contribué à l'élaboration d'une théorie sur les oscillations spontanées de systèmes électroniques.

14.3.3 Étude par le diagramme de Bode

Rappelons que la transmittance en tension $\overline{T}$ est porteuse d'une double information sur la manière dont une tension sinusoïdale est transformée entre l'entrée et la sortie d'un quadripôle :

– $|\overline{T}| = \left|\dfrac{\overline{U_3}}{\overline{U_1}}\right| = \dfrac{\hat{U}_3}{\hat{U}_1}$ illustre comment l'amplitude des tensions est modifiée ;

– $\text{Arg}(\overline{T}) = \text{Arg}\left(\dfrac{\overline{U_3}}{\overline{U_1}}\right) = \text{Arg}(\overline{U_3}) - \text{Arg}(\overline{U_1}) = \varphi_3 - \varphi_1$ illustre comment la tension est déphasée.

Deux courbes traduisent l'évolution de $|\overline{T}|$ et $\text{Arg}(\overline{T})$ en fonction de la fréquence, elles définissent le diagramme de Bode associé à $\overline{T}$:

– la courbe de gain $G(f) = 20\log_{10}(\overline{T})$;

– la courbe de déphasage $\varphi(f) = \text{Arg}(\overline{T})$.

Le diagramme de Bode du quadripôle équivalent à l'association cascade est représenté figure 14.19.

La connexion de l'association en boucle fermée impose $u_3 = u_1$. Cette condition réali-

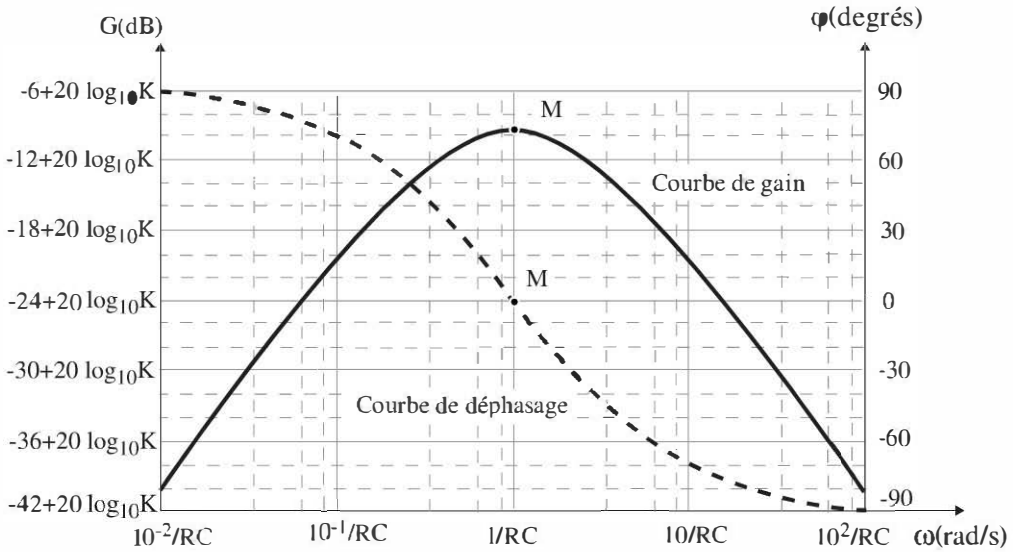


Figure 14.19

Copyright © 2007 Dunod.

sée en régime sinusoïdal impose que ces deux tensions soient en phase et possèdent la même amplitude.

La courbe de déphasage met en évidence que l'obtention d'une tension en entrée et en sortie sinusoïdale en phase, ne peut être envisagée que pour une seule pulsation $\omega = 1/(RC)$ (point M sur la courbe de déphasage).

L'égalité des amplitudes ne peut être réalisée que si le gain est nul pour la pulsation $\omega = 1/(RC)$ (point M sur la courbe de gain).

Ce qui se traduit par la relation : $-9{,}5 + 20 \log_{10} K = 0$, que l'on peut encore exprimer sous la forme $\log_{10} K = 0{,}475$, soit encore : $K = 3$, et enfin $R_2 = 2R_1$.

L'étude du comportement de l'oscillateur à pont de Wien est bien conforme aux résultats obtenus par application du critère de Barkhausen et elle apporte une explication sur le rôle joué par chacun des quadripôles au sein de l'association.

En effet, Q_2 apparaît comme l'élément qui fixe la fréquence d'oscillation en imposant un déphasage nul pour une fréquence particulière, dite fréquence d'accord. Le quadripôle Q_1 est présent dans l'association pour compenser l'atténuation occasionnée par Q_2 à la fréquence d'accord.

14.3.4 Étude par le lieu de Nyquist

La transmittance en tension peut être exprimée sous forme cartésienne :

$$\overline{T} = \Re e(\overline{T}) + \mathrm{j}\, \Im m(\overline{T})$$

Si, pour différentes valeurs de ω, on représente l'évolution de $\Im m(\overline{T})$ en fonction $\Re e(\overline{T})$, l'ensemble des points obtenus décrit une courbe appelée lieu de Nyquist.

Le lieu de Nyquist de la transmittance de l'association cascade des quadripôles Q_1 et Q_2 a l'allure représentée à la figure 14.20.

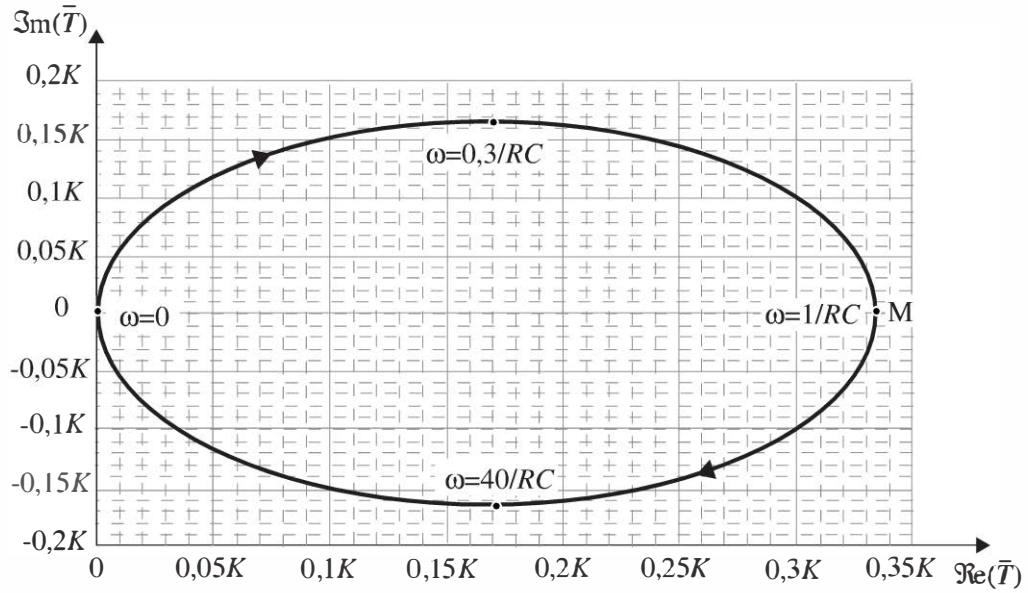


Figure 14.20

Copyright © 2007 Dunod.

L'obtention d'une tension est subordonnée au passage du lieu par le point où $\overline{T} = 1$. Cette condition n'est réalisée au point M que si $0{,}33K = 1$, soit $K = 3$, qui conduit à $R_2 = 2R_1$. Au point M, la pulsation $\omega = 1/(RC)$ correspond à celle de l'oscillation.

> ***Remarque*** : Le point de coordonnées (1,0) est appelé point critique de l'association en boucle fermée : le passage du lieu de Nyquist par ce point traduit un comportement oscillatoire de l'association.

14.4 FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE NON LINÉAIRE

Comme vu précédemment, l'amplificateur opérationnel peut être utilisé en régime non linéaire pour réaliser des opérations de mise en forme. En particulier, le comparateur à hystérésis étudié au § 14.2 peut être employé pour la réalisation d'un multivibrateur astable. Ce type de structure se comporte comme un oscillateur générant un signal carré. Elle peut être utilisée comme horloge en électronique numérique. Fonctionnant en saturation, son comportement électrique diffère notablement de celui de l'oscillateur harmonique décrit au paragraphe précédent.

14.4.1 Mise en situation

La structure d'un multivibrateur repose sur l'association en cascade de deux quadripôles Q_1 et Q_2 (figure 14.21). Les bornes de sortie du quadripôle Q_2 étant reliées aux bornes d'entrée de Q_1, l'association constitue un système en boucle fermée.

Le quadripôle Q_1 correspond au comparateur à hystérésis représenté figure 14.11b.

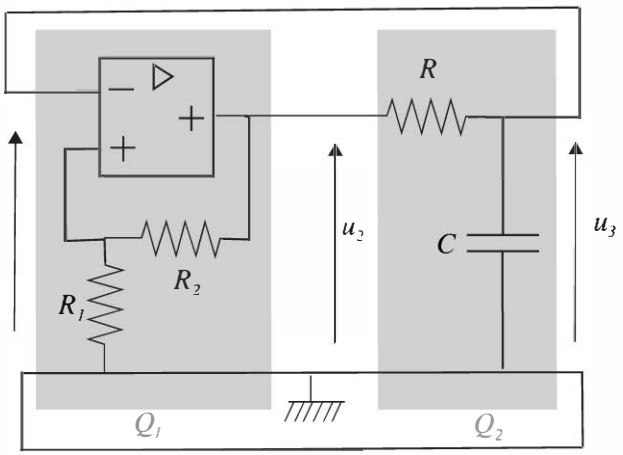


Figure 14.21

La boucle fermée impose une tension en entrée du comparateur identique à celle présente aux bornes du condensateur ($u_3 = u_1$).

Déterminons l'évolution du point de fonctionnement de l'association sur la caractéristique de transfert du comparateur à hystérésis (figure 14.22).

Rappelons que l'expression des seuils de commutation du comparateur est la suivante $U_B = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$ et $U_H = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$. Considérons, par exemple, qu'à l'instant où l'on débute l'étude ($t = 0$), le condensateur est déchargé $u_3 = u_1 = 0$ et que la tension de sortie de l'AOP est $u_2 = V_A$. Le point de fonctionnement correspondant se situe en $M_0(0, V_A)$. Sous l'effet de la tension V_A, le condensateur se charge, d'où une tension $u_3 = u_1$

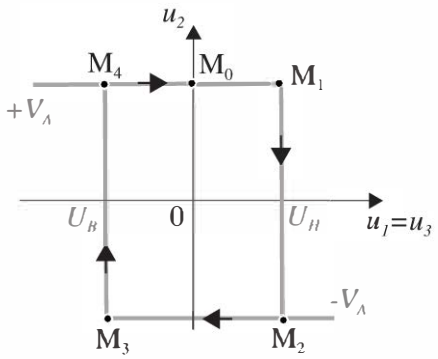


Figure 14.22

Copyright © 2007 Dunod.

qui augmente. Le point de fonctionnement se déplace alors en $M_1(U_H, V_A)$. La tension u_2 bascule alors brutalement à $-V_A$ entraînant le point de fonctionnement en $M_2(U_H, -V_A)$. Par la suite, sous l'effet de $-V_A$, le condensateur se décharge $u_3 = u_1$ diminue. Le point de fonctionnement se déplace de M_2 en $M_3(U_B, -V_A)$. La tension u_2 bascule alors en V_A, entraînant le point de fonctionnement en $M_4(U_B, U_A)$. Une nouvelle charge du condensateur peut alors débuter.

On comprend qu'ensuite, en régime permanent, le point de fonctionnement décrit le cycle d'hystérésis $[M_1, M_2, M_3, M_4]$. La tension u_2 évolue donc périodiquement entre les deux niveaux $-V_A$ et V_A.

14.4.2 Schéma électrique opérationnel

Pour déterminer l'expression de $u_3 = u_1$, dressons le schéma électrique opérationnel du circuit de charge et décharge du condensateur (figure 14.23). Sur ce schéma, la sortie de l'AOP (supposé idéal), est assimilée à une source de tension $U_2(p)$. On tient également compte de la tension initiale $U_0(p)$ du condensateur à l'instant où débute la charge ou la décharge.

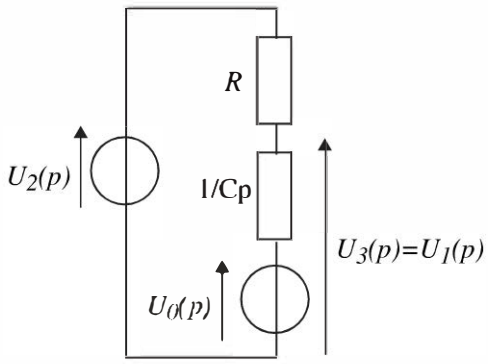


Figure 14.23

L'application du théorème de superposition permet une détermination rapide de la tension $U_3(p)$. En effet, en considérant la source $U_0(p)$ éteinte et $U_2(p)$ active, par application de la règle du diviseur de tension, on obtient : $U_3(p) = \dfrac{1/Cp}{R + 1/Cp} U_2(p) = \dfrac{U_2(p)}{RCp + 1}$. En procédant de même avec $U_2(p)$ éteinte et $U_0(p)$ active, on obtient $U_3(p) = \dfrac{R}{R + 1/Cp} U_0(p) = \dfrac{RCp}{RCp + 1} U_0(p)$

Par suite, on aboutit à :

$$U_3(p) = \frac{U_2(p)}{RCp + 1} + \frac{RCp}{RCp + 1} U_0(p)$$

14.4.3 Étude en régime permanent

➤ ***Évolution de la tension u_3***

Plaçons-nous en régime permanent et considérons un point de fonctionnement en M_4 à un instant t_1. Pendant la phase de charge (segment $[M_4, M_1]$), $u_2 = V_A \Gamma(t - t_1)$ et $U_0 = U_B \Gamma(t - t_1)$.

Les tensions opérationnelles associées sont donc respectivement $U_2(p) = \dfrac{V_A}{p} e^{-pt_1}$ et $U_0(p) = \dfrac{U_B}{p} e^{-pt_1}$. La tension $U_3(p)$ s'exprime alors sous la forme :

Copyright © 2007 Dunod.

$$U_3(p) = \left(\frac{V_A}{p(RCp+1)} + \frac{U_B RC}{RCp+1}\right) e^{-pt_1}.$$

La recherche de l'originale $u_3(t)$ de $U_3(p)$ passe par une décomposition en éléments simples de cette dernière $U_3(p) = \frac{V_A e^{-pt_1}}{p} - \frac{V_A e^{-pt_1}}{p+1/RC} + \frac{U_B RC e^{-pt_1}}{p+1/RC}$. La recherche de l'original de chacun des trois termes conduit à l'expression de $u_3(t)$ pendant la phase de charge du condensateur :

$$u_3(t) = (V_A(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}) + U_B e^{-\frac{t-t_1}{RC}})\Gamma(t-t_1) = (V_A + (U_B - V_A)e^{-\frac{t-t_1}{RC}})\Gamma(t-t_1)$$

Un raisonnement similaire peut être mené pendant une phase de décharge du condensateur. Pour ce faire, considérons un point de fonctionnement en M_2 à un instant t_2, on a $U_2(p) = \frac{-V_A}{p} e^{-pt_2}$ et $U_0(p) = \frac{U_H}{p} e^{-pt_2}$. La tension $U_3(p)$ est donc :

$$U_3(p) = \left(\frac{-V_A}{p(RCp+1)} + \frac{U_H RC}{RCp+1}\right) e^{-pt_2} = \frac{-V_A e^{-pt_2}}{p} + \frac{V_A e^{-pt2}}{p+1/RC} + \frac{U_H RC e^{-pt2}}{p+1/RC}$$

La recherche de l'original conduit à l'expression de $u_3(t)$ pendant la phase de décharge du condensateur :

$$u_3(t) = (-V_A(1 - e^{-\frac{t-t_2}{RC}}) + U_H e^{-\frac{t-t_2}{RC}}\Gamma(t-t_2) = (-V_A + (U_H + V_A)e^{-\frac{t-t_2}{RC}})\Gamma(t-t_2)$$

L'évolution de la tension $u_3(t)$ pendant une phase de charge et de décharge est représentée figure 14.24.

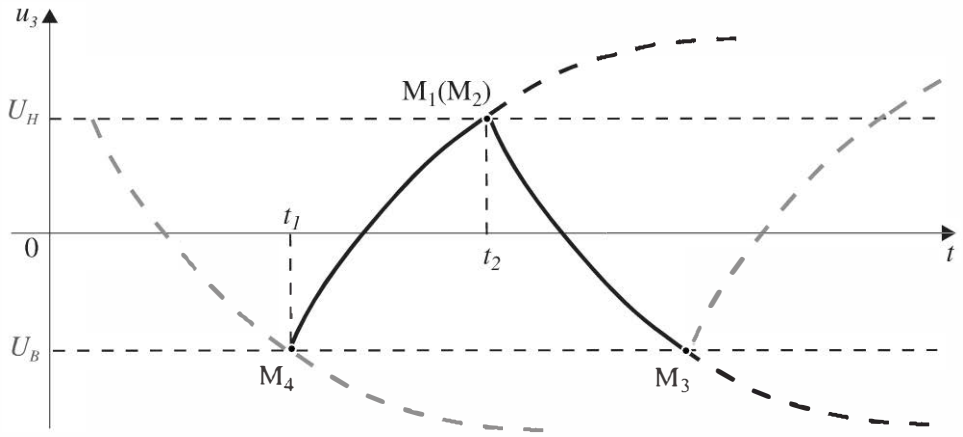


Figure 14.24

➤ *Évolution de la tension u_2*

La représentation au synchronisme des temps de l'évolution temporelle des tensions $u_3(t)$ et $u_2(t)$ en régime permanent (figure 14.25), met en évidence que la tension $u_2(t)$ est de forme carrée.

Copyright © 2007 Dunod.

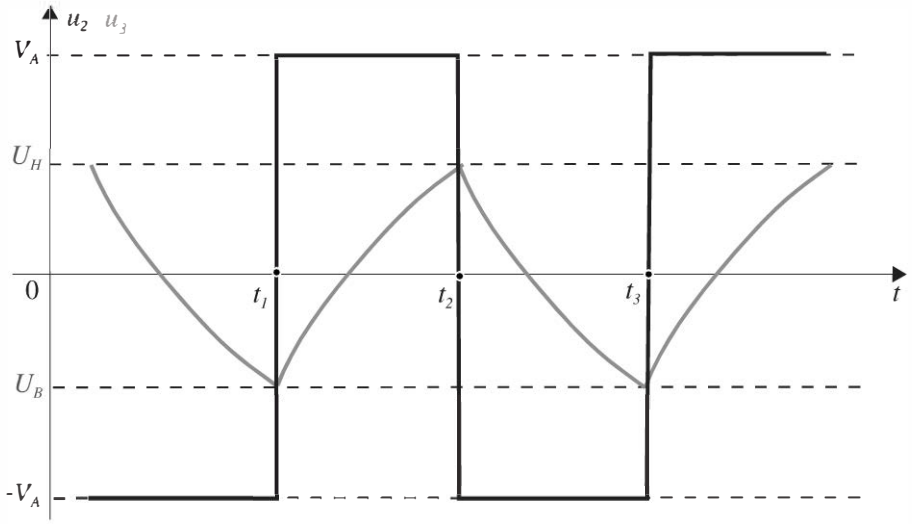


Figure 14.25

À l'instant t_1, débute une séquence de fonctionnement pendant laquelle $u_2 = V_A$ et le point de fonctionnement se déplace entre M_4 en M_1. Cette séquence se termine, à l'instant t_2, par une commutation de u_2 de V_A à $-V_A$. L'instant t_2 marque le passage du point de fonctionnement de M_1 en M_2. Commence ensuite, une séquence pendant laquelle $u_2 = -V_A$, et le point de fonctionnement évolue entre M_2 en M_3. L'instant t_3 marque le passage du point de fonctionnement de M_3 en M_4, avec une commutation de u_2 de $-V_A$ à V_A.

➤ *Expression de la période*

Durant l'intervalle $[t_1,t_2]$, on a $u_2 = V_A$. Nous appellerons donc **temps à l'état haut**, la durée $T_H = t_2 - t_1$.

Comme vu précédemment, la tension $u_3(t)$ est décrite sur l'intervalle $[t_1,t_2]$ par la loi $u_3(t) = V_A + (U_B - V_A)e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$. À l'instant t_2, elle est égale à $u_3(t_2) = V_A + (U_B - V_A)e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}}$ $= V_A + (U_B - V_A)e^{-\frac{T_H}{RC}}$. L'instant t_2 marque la fin de T_H, où la tension u_3 atteint U_H : $u_3(t_2) = U_H$. On a ainsi l'égalité suivante : $V_A + (U_B - V_A)e^{-\frac{T_H}{RC}} = U_H$, soit encore $e^{\frac{T_H}{RC}} = \dfrac{V_A - U_B}{V_A - U_H}$, d'où l'on déduit l'expression de T_H : $T_H = RC \ln\left(\dfrac{V_A - U_B}{V_A - U_H}\right)$.

De manière similaire, nous pouvons définir un **temps à l'état bas** $T_B = t_3 - t_2$, pendant lequel $u_2 = -V_A$.

Sur l'intervalle $[t_2,t_3]$, on a $u_3(t) = -V_A + (U_H + V_A)e^{-\frac{t-t_2}{RC}}$. À l'instant t_3 qui marque la fin de T_B, la tension u_3 atteint U_B : $u_3(t_3) = U_B$. À l'instant t_3, on vérifie donc $u_3(t_3) = -V_A + (U_H + V_A)e^{-\frac{t_3-t_2}{RC}} = -V_A + (U_H + V_A)e^{-\frac{T_B}{RC}} = U_B$. Cette égalité peut encore être exprimée sous la forme : $e^{\frac{T_B}{RC}} = \dfrac{V_A + U_H}{V_A + U_B}$, d'où l'on déduit : $T_B = RC \,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{V_A + U_H}{V_A + U_B}\right)$.

Copyright © 2007 Dunod.

La période de la tension u_2 est donc :

$$T = T_H + T_B = RC \operatorname{Ln}\left(\frac{V_A - U_B}{V_A - U_H}\right) + RC \operatorname{Ln}\left(\frac{V_A + U_H}{V_A + U_B}\right)$$
$$= RC \operatorname{Ln}\left(\frac{(V_A - U_B)(V_A + U_H)}{(V_A - U_H)(V_A + U_B)}\right)$$

En remplaçant U_B et U_H par leur expression ($U_B = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$ et $U_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$) on obtient $T_H = T_B = RC \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$. La période de u_2 est donc $T = 2RC \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$.

Remarque : Certaines structures de multivibrateurs astables possèdent des seuils U_B et U_H dissymétriques. Cela conduit à des temps à l'état haut et à l'état bas différents.

14.4.4 Étude en régime transitoire

Le régime permanent ne débute qu'après la première commutation de l'amplificateur opérationnel.

Dans le cas de figure envisagé au § 14.4.1, celle-ci intervient au point M_1. Le passage du point de fonctionnement de M_0 en M_1 correspond à un régime transitoire (voir chapitre 10).

Pour caractériser l'évolution de u_3 pendant ce régime transitoire, dressons le schéma opérationnel du circuit de charge du condensateur (figure 14.26).

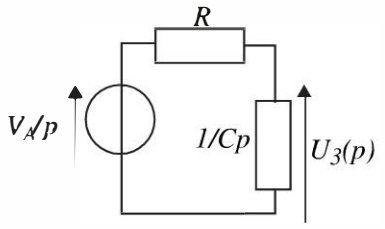


Figure 14.26

La règle du diviseur de tension donne : $U_3(p) = \frac{V_A}{p(RCp + 1)} = \frac{V_A}{p} - \frac{V_A}{p + 1/RC}$,

dont l'original est $u_3(t) = V_A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

Le régime transitoire s'achève au passage de u_3 à la valeur $U_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$.

La durée τ du régime transitoire est donnée par la relation : $u_3(\tau) = V_A\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right)$

$= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_A$, soit $\tau = RC \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$.

Il est important de bien comprendre que la durée de ce régime transitoire est directement liée à la charge initiale du condensateur. En effet, la prise en compte d'une tension initiale $u_3(0)$ aux bornes du condensateur conduirait à une expression du type : $u_3(t) = V_A\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + u_3(0)$. La durée τ du régime transitoire s'exprimerait alors sous la forme :

$$\tau = -RC \ln\left(\frac{u(0)}{V_A} + \frac{R_2}{R_1 + R_1}\right)$$

Copyright © 2007 Dunod.

Remarque : Le cycle $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ décrit en régime permanent est indépendant des conditions initiales arbitrairement choisies. En ce sens, le multivibrateur astable est un sytème déterministe insensible aux conditions initiales. Il se distingue de certains oscillateurs électroniques chaotiques (oscillateur de Chua).

Pour en savoir plus...

STABILITÉ D'UN AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL EN RÉACTION

La grande majorité des structures impliquant un amplificateur opérationnel repose sur une utilisation de celui-ci en réaction. L'amplificateur opérationnel associé à son circuit de réaction constitue ainsi un système bouclé. La stabilité du système, au sens automatique du terme, conditionne le régime de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel. Ce dernier pouvant fonctionner en régime linéaire ou en régime saturé.

Stabilité d'un système

Soit un système physique causal, où un signal d'entrée $e(t)$ conditionne l'évolution d'un signal de sortie $s(t)$ (figure 14.27).

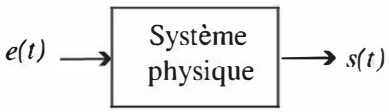


Figure 14.27

Plaçons-nous en régime permanent, et considérons que l'entrée $e(t)$ est affectée d'une perturbation Δe d'énergie finie. Le système est qualifié d'asymptotiquement stable, si la perturbation Δs induite en sortie est d'énergie finie. En d'autres termes, la perturbation ne se manifestera que de manière transitoire en sortie. On retiendra que le régime transitoire induit par la perturbation doit s'éteindre progressivement au cours du temps.

Critère de stabilité d'un système linéaire

Dans le cas d'un système physique linéaire causal la relation mathématique liant $s(t)$ et $e(t)$ peut être exprimée sous la forme différentielle suivante ($n \leqslant m$) :

$$a_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} s(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_0\, s(t) = b_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0\, e(t)$$

Une telle relation peut être exprimée sous forme opérationnelle, en faisant intervenir une transmittance opérationnelle : $T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$, où $S(p)$ et $E(p)$ désignent respectivement les transformées de Laplace associées à $s(t)$ et $e(t)$.

Copyright © 2007 Dunod.

La transmittance s'exprime donc sous la forme :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_0}$$

Notons z_i les racines du numérateur appelés zéros de $T(P)$, et p_i les racines du dénominateur appelés pôles de $T(P)$. La transmittance opérationnelle peut être exprimée sous la forme :

$$T(p) = \frac{b_n(p - z_n)(p - z_{n-1}) \ldots (p - z_0)}{a_m(p - p_m)(p - p_{m-1}) \ldots (p - p_0)}$$

L'analyse de la stabilité du système passe par la recherche de l'évolution de $s(t)$ quand le système est excité en entrée par une impulsion correspondant à une sollicitation d'énergie finie. La transformée de Laplace d'une impulsion est $E(p) = 1$, ce qui conduit à :

$$S(p) = \frac{b_n(p - z_n)(p - z_{n-1}) \ldots (p - z_0)}{a_m(p - p_m)(p - p_{m-1}) \ldots (p - p_0)}$$

Une décomposition en éléments simples facilite la recherche de l'expression de $s(t)$ à partir de sa transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{A_0}{p - p_0} + \frac{A_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

La recherche de l'originale de $S(p)$ s'effectue par la détermination de l'originale de chacun des termes de la sommation. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

– Un pôle réel p_i conduit à un original du type $A_i e^{p_i t}$ qui tend à disparaître si $p_i < 0$ (figure 14.28a), ou, au contraire, à s'amplifier si $p_i > 0$ (figure 14.28b) ;

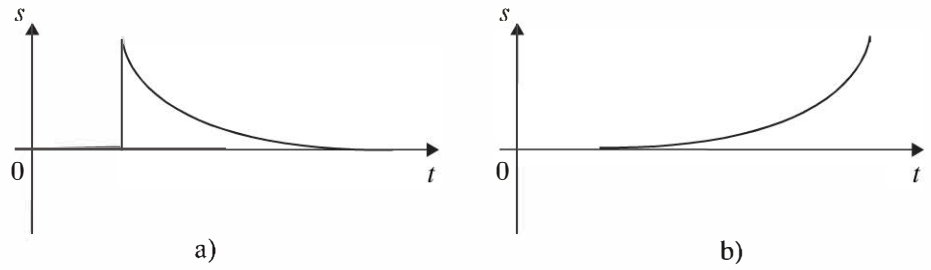


Figure 14.28

– Un ensemble de deux pôles conjugués complexes $p_i = a + jb$ et $p_i^* = a - jb$, conduisent à un original du type $A_i e^{p_i t} \cos(bt + \varphi)$, qui tend à disparaître si $a < 0$ (figure 14.29a), ou, au contraire, à s'amplifier si $a > 0$ (figure 14.29b).

On retiendra que le régime transitoire provoqué par l'impulsion d'entrée tend à disparaître (système stable) si la partie réelle des pôles est négative.

Copyright © 2007 Dunod.

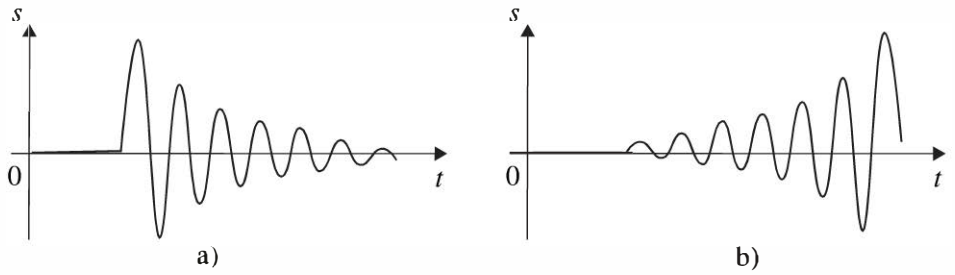


Figure 14.29

Remarque : L'instabilité d'un système ne conduit pas en pratique à une croissance infinie de $s(t)$. L'amplitude de celle-ci se trouve généralement limitée par les non-linéarités (saturation) inhérentes à la structure de tout système physique.

Stabilité d'un amplificateur opérationnel en réaction

Le schéma électrique opérationnel, proposé figure 14.30a, correspond à une configuration standard d'amplificateur opérationnel. Les impédances $Z_1(p)$ et $Z_2(p)$, entraînent une réaction positive, $Z_3(p)$ et $Z_4(p)$ imposent une réaction négative. Les tensions $E_+(p)$ et $E_-(p)$ sont créées par des sources de tension non représentées.

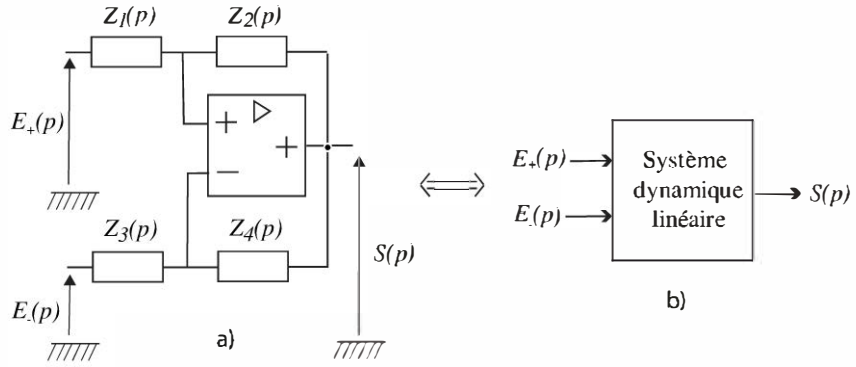


Figure 14.30

Assimilons la structure étudiée à un système linéaire dynamique (figure 14.30b) possédant deux d'entrées $E_+(p)$ et $E_-(p)$ et une sortie $S(p)$. Il est possible de caractériser son fonctionnement par une relation du type : $S(p) = U_{e^+}(p)T_+(p) + U_{e^-}(p)T_-(p)$, où $T_+(p)$ et $T_-(p)$ désignent les transmittances opérationnelles vis-à-vis des entrées respectives $E_+(p)$ et $E_-(p)$.

Établissons les expressions de $T_+(p)$ et $T_-(p)$. Désignons par $U_{e^+}(p)$ et $U_{e^-}(p)$ les transformées de Laplace associées aux tensions présentes sur les entrées non inverseuse et inverseuse. En considérant le modèle idéal de l'AOP (impédance d'entrée infinie et impédance de sortie nulle), on peut écrire :

$$U_{e^+}(p) = \frac{Z_1(p)S(p) + Z_2(p)E_+(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} \quad \text{et} \quad U_{e^-}(p) = \frac{Z_3(p)S(p) + Z_4(p)E_-(p)}{Z_3(p) + Z_4(p)}$$

De plus, en assimilant le comportement dynamique de l'amplificateur opérationnel à un système du premier ordre, on peut écrire $S(p) = \dfrac{K_1}{p + p_0}(U_{e^+}(p) - U_{e^-}(p))$. Par suite, on peut écrire :

Copyright © 2007 Dunod.

$$S(p) = \frac{K_1}{p + p_0}\left(\frac{Z_1(p)S(p) + Z_2(p)E_+(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} - \frac{Z_3(p)S(p) + Z_4(p)E_-(p)}{Z_3(p) + Z_4(p)}\right),$$

que l'on peut encore exprimer sous la forme : $S(p) = E_+(p)T_+(p) + E_-(p)T_-(p)$ avec :

$$T_+(p) = \frac{Z_2(p)(Z_3(p) + Z_4(p))}{Z_2(p)Z_3(p) - Z_1(p)Z_4(p) + \dfrac{(p + p_0)(Z_2(p) + Z_1(p))(Z_3(p) + Z_4(p))}{K_1}}$$

$$T_-(p) = \frac{-Z_4(p)(Z_1(p) + Z_2(p))}{Z_2(p)Z_3(p) - Z_1(p)Z_4(p) + \dfrac{(p + p_0)(Z_2(p) + Z_1(p))(Z_3(p) + Z_4(p))}{K_1}}$$

La recherche de la partie réelle des pôles de ces transmittances nous permettra de définir la stabilité de la structure.

Une instabilité de la structure conduira à une divergence de $s(t)$ jusqu'à la saturation. Un tel comportement électrique correspond à un régime non linéaire de l'amplificateur opérationnel. Une stabilité correspondra à un fonctionnement linaire où $s(t)$, $e_+(t)$ et $e_-(t)$ seront liés par une relation linéaire. Compte tenu du gain élevé de l'amplificateur opérationnel, le régime linéaire est caractérisé par une différence de potentiel très faible entre les entrées de l'amplificateur opérationnel : $u_{e^+}(t) \simeq u_{e^-}(t)$

Exemple

Considérons la structure représentée figure 14.31. En utilisant les notations utilisées figure 14.30, on a :

$$Z_1(p) = 0,\ Z_2(p) = \infty,\ Z_3(p) = R$$
$$\text{et } Z_4(p) = 1/CP$$

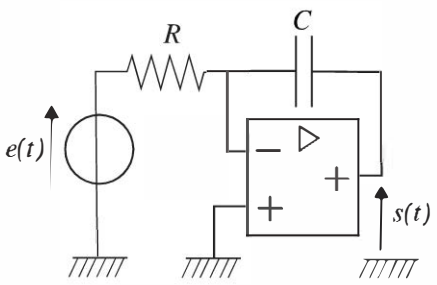


Figure 14.31

Les transmittances $T_+(p)$ et $T_-(p)$ ont donc pour expression :

$$T_+(p) = \frac{K_1\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)}{p^2 + p\left(K_1 + p_0 + \dfrac{1}{RC}\right) + \dfrac{p_0}{RC}} \text{ et } T_-(p) = \frac{\dfrac{-K_1}{RC}}{p^2 + p\left(K_1 + p_0 + \dfrac{1}{RC}\right) + \dfrac{p_0}{RC}}$$

Le dénominateur de chacune de ces transmittances est identique, on peut l'exprimer sous la forme : $p^2 + p(K_1 + p_0 + 1/RC) + p_0/RC = (p - p_1)(p - p_2)$, où p_1 et p_2 désignent les pôles des transmittances.

On a donc $K_1 + p_0 + \dfrac{1}{RC} = -(p_1 + p_2)$ et $\dfrac{p_0}{RC} = p_1 p_2$, qui implique que p_1 et p_2 soient négatifs. Le régime de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est donc linéaire.

En assimilant alors la tension entre les entrées à zéro et, en considérant l'AOP comme idéal, le courant circulant dans la résistance et le condensateur est identique. La relation

Copyright © 2007 Dunod.

entre $E(p)$ et $S(p)$ s'exprime donc sous la forme : $\frac{E(p)}{R} = -CpS(p)$, soit $S(p) = -\frac{E(P)}{RCp}$. La recherche de l'originale de cette équation conduit à $s(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t e(t)dt + s(0)$. Cette structure permet de réaliser électriquement un processus d'intégration sur les tensions.

> ***Remarque*** : Le comportement de cette structure en régime permanent continu (RPDC) met en évidence que le condensateur se comportant comme un circuit ouvert supprime la contre réaction. L'AOP fonctionne en régime non linéaire et ne réalise donc plus l'opération d'intégration.

Copyright © 2007 Dunod.

Solutions

CHAPITRE 1

RÉVISIONS

1.1 Les phénomènes électriques résultent de déplacements de particules chargées dont le mouvement est régi par l'interaction électromagnétique.

1.2 Un champ électrostatique se manifeste dans des régions de l'espace où existent des éléments ayant acquis ou perdu une charge électrique. La charge q portée par un élément conditionne le flux du champ électrostatique $\vec{E}_s$ à travers une surface fermée S_G enfermant cet élément. Cette relation, appelée théorème de Gauss, s'exprime sous la forme : $\oiint_{S_G} \vec{E}_s(M) \cdot \vec{n} ds = \frac{q}{\varepsilon}$.

1.3 Un courant électrique est un mouvement d'ensemble de porteurs de charges électriques dans une même direction. L'intensité du courant à travers une surface S correspond au flux du courant à travers celle-ci.

1.4 Un milieu semi-conducteur est structurellement isolant. Il se comporte néanmoins comme un milieu conducteur aux températures usuelles d'utilisation. À la différence d'un milieu conducteur, un semi-conducteur propose deux types de charges mobiles : les électrons libres et les trous.

1.5 La propriété de conservation de la charge exprime que la charge électrique ne peut être ni créée ni détruite et que, par conséquent, toute variation de charge à l'intérieur d'une enceinte fermée entraîne l'apparition d'un courant électrique à travers les parois de celle-ci.

1.6 Intensité et tension électriques reposent sur la détermination de produit scalaire (respectivement $\vec{E} \cdot \vec{n}$ et $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$) et sont donc des grandeurs scalaires. Le fléchage de ces grandeurs résulte d'une représentation graphique.

1.7 Le fléchage des tensions consiste à choisir arbitrairement, pour chacune d'entre elles, un sens de déplacement pour chiffrer la circulation du champ électrique. De même, le fléchage des courants consiste à choisir arbitrairement un sens de normale pour chiffrer le flux du courant.

1.8 La définition d'une « convention générateur » ou d'une « convention récepteur » s'envisage pour la détermination de la puissance communiquée ou soustraite à une charge lors de son déplacement. Elle consiste à flécher la tension dans le sens du courant (convention générateur) ou opposé au sens du courant (convention récepteur).

1.9 Un champ magnétique se manifeste dans des régions de l'espace où existent des courants électriques. Un courant électrique d'intensité i conditionne la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé C_A enlaçant cet élément. Cette relation, appelée théorème d'Ampère, s'exprime sous la forme :

$$\oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \mu i.$$

1.10 Le flux du champ magnétique est dit conservatif, car évalué à travers une surface fermée, celui-ci est nul. Les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes.

EXERCICES

1.11 1. La répartition radiale du champ électrostatique qui diverge de la charge lui confère la direction représentée figure 1.36.
De plus, la symétrie de rotation de la charge impose au champ la même valeur lorsque l'on se situe à la même distance de la charge. En choisissant comme surface de Gauss la sphère de rayon l et centrée sur la charge, l'expression du flux s'exprime de la manière suivante ($\vec{E}(M)$ étant perpendiculaire en tout point M à la sphère S_G) :

Copyright © 2007 Dunod.

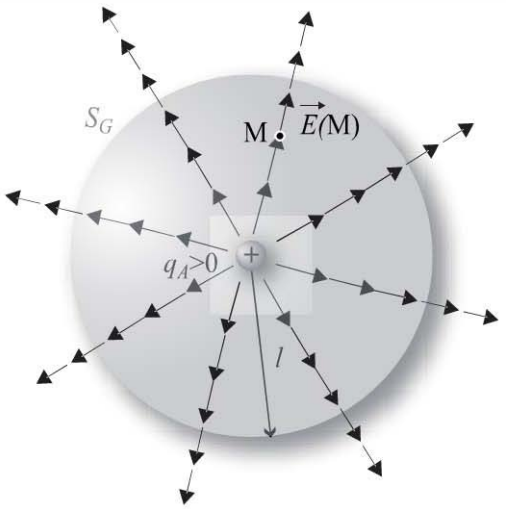


Figure 1.36

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}(M)\cdot\vec{n}ds = \oiint_{S_G} E(M)\cdot ds$$
$$= E(M)\oiint_{S_G} ds = E(M)4\pi l^2$$

Le théorème de Gauss s'exprime alors sous la forme : $\Phi = E(M)4\pi l^2 = \dfrac{q_A}{\varepsilon_0}$, d'où nous déduisons l'expression du champ électrostatique : $E(M) = \dfrac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$.

2. La tension électrique entre les points M_1 et M_2 est par définition : $u_{M_1M_2} = v(M_1) - v(M_2) = \displaystyle\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl}$. Compte tenu de la direction du champ :

$$u_{M_1M_2} = v(M_1) - v(M_2) = \int_{l_1}^{l_2} E(M)dl$$
$$= \int_{l_1}^{l_2} \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 l^2}dl = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dl}{l^2}$$
$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right)$$

Si le point M_1 est plus éloigné que M_2 ($l_1 > l_2$) alors $u_{M_1M_2} < 0$. La tension sera positive dans le cas contraire.

3. La connaissance du champ électrostatique créé au point M par la charge électrique q_A permet de déterminer directement la force exercée par q_A sur $-q$:

$$||\vec{F}(M)|| = ||-q\vec{E}(M)|| = \frac{q\,q_A}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

4. De par la connaissance de la tension existant entre les points de départ (M_1) et d'arrivée (M_2), l'énergie communiquée à $-q$ s'exprime sous la forme : $w_{M_1M_2} = -q\,u_{M_1M_2} = \dfrac{q\,q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{l_2} - \dfrac{1}{l_1}\right)$.

Si le point M_1 est plus éloigné que M_2 ($l_1 > l_2$) alors $w_{M_1M_2} > 0$: dans ce cas de figure, de l'énergie a été apportée à la charge $-q$. En effet, celle-ci s'est rapprochée de q_A sous l'action de la force d'attraction générée par cette dernière.

1.12 Pour évaluer l'intensité du courant qui circule dans le conducteur, il convient de flécher celle-ci. En notant A et B les extrémités du tronçon (figure 1.37), la détermination de l'intensité i_{AB}, par exemple, implique un fléchage de la normale orientée de A vers B.

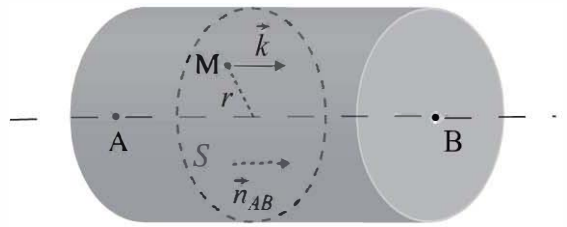


Figure 1.37

Alors : $i_{AB} = \displaystyle\iint_S \vec{k}(M)\cdot\vec{n}_{AB}\,ds$ où S désigne par exemple une section droite du cylindre (rappelons qu'en régime quasi stationnaire, le flux du courant étant conservatif, il ne dépend pas de la surface à travers laquelle il est évalué). La densité de courant étant dirigée selon l'axe du conducteur, en tout point de S, $\vec{k}$ et $\vec{n}_{AB}$ sont colinéaires, par suite : $i_{AB} = \displaystyle\iint_S k(M)ds = \iint_S k_0\left(1 - e^{-\frac{r}{R_0}}\right)ds$. Un choix de coordonnées polaires ayant pour origine le centre de S, permet de décrire au mieux le domaine d'intégration, ainsi :

$$i_{AB} = \int_0^{D/2}\int_0^{2\pi} k_0\left(1 - e^{-\frac{r}{R_0}}\right)rdrd\theta$$
$$= 2\pi k_0\int_0^{D/2}\left(1 - e^{-\frac{r}{R_0}}\right)rdr$$

Le changement de variable $X = -\dfrac{r}{R_0}$ rend la résolution de l'intégrale plus facile :

$$i_{AB} = 2\pi k_0 R_0^2\int_0^{\frac{-D}{2R_0}}(1 - e^X)XdX.$$

Copyright © 2007 Dunod.

Une intégration par partie permet d'aboutir au résultat suivant :

$$i_{A\blacksquare} = 2\pi k_0 \left(\frac{D^2}{4} - R_0^2 + R_0 \left(\frac{D}{2} + R_0 \right) e^{\frac{-D}{2R_0}} \right).$$

1.13 1. La répartition orthoradiale du champ magnétique qui « tourne » autour du fil lui confère la direction représentée figure 1.38.

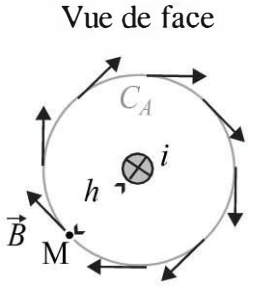


Figure 1.38

De plus, la symétrie de révolution autour de l'axe du fil impose au champ la même valeur lorsque l'on se situe à la même distance du fil.
En choisissant comme contour d'Ampère le cercle de rayon h centré sur le fil, l'expression de la circulation s'exprime de la manière suivante ($\vec{B}$ étant tangent en tout point au cercle C_A) :

$$\gamma_{C_A} = \oint_{C_A} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_{C_A} B\, dl$$
$$= B(M) \oint_{C_A} dl = B(M) 2\pi h$$

L'application du Théorème d'Ampère donne $\gamma_{C_A} = B(M)2\pi h = \mu_0 i$, d'où l'on déduit l'expression du champ magnétique : $B(M) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi h}$.

2. En tout point de la surface du cadre, le champ magnétique est normal à celle-ci. L'expression du flux de champ est donc la suivante :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n} ds = \iint_S B(M)\, ds.$$

Un choix de coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ centré sur le fil (figure 1.39) permet de décrire au mieux le domaine d'intégration, ainsi :

$$\Phi = \iint_S B(M) ds$$
$$= \int_0^a \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} dx dy = \frac{\mu_0 a i}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{1}{x} dx$$

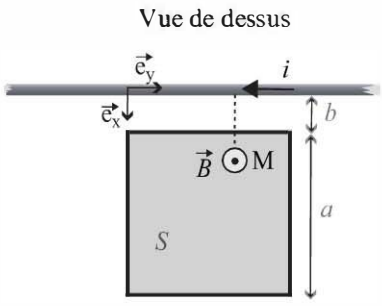


Figure 1.39

L'intégration, une fois menée, conduit au résultat suivant : $\Phi = \dfrac{\mu_0 a i}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b+a}{b} \right)$.

CHAPITRE 2

RÉVISIONS

2.1 Une source électrique modélise un processus physique électromoteur qui traduit la production d'énergie électrique dans un circuit à partir d'une origine non électrique. Une source de tension modélise la présence d'un champ électromoteur dans un circuit et une source de courant, l'action d'un courant électromoteur.

2.2 Une source de tension présente une tension (force électromotrice) indépendante du courant qu'elle délivre ; une source de courant délivre un courant (courant électromoteur) indépendant de la tension à ses bornes.

2.3 Le processus de conduction ohmique se traduit par la présence d'un courant proportionnel au champ électrique qui en est à l'origine.

2.4 Un résistor est un composant électrique idéalisé constitué d'un élément de conducteur ohmique. La tension entre les bornes d'un résistor est proportionnelle au courant qui le traverse : $u = Ri$. Le coefficient de proportionnalité R porte le nom de résistance, exprimée en ohm.

2.5 Le processus d'influence électrostatique traduit l'influence mutuelle de deux conducteurs chargés. Cette influence se manifeste par une répartition surfacique de la charge, sur chaque conducteur, préférentiellement sur les zones de proximité avec l'autre conducteur.

2.6 Un condensateur est un composant idéalisé constitué de deux armatures conductrices sépa-

Copyright © 2007 Dunod.

rées par un isolant, placées en influence électrostatique totale. Le courant qui s'établit sur chaque armature est proportionnel à la dérivée de la tension inter-armatures : $i = C\frac{du}{dt}$. Le coefficient de proportionnalité C porte le nom de capacité exprimée en farad.

2.7 Le processus d'induction électromagnétique traduit l'apparition d'une force électromotrice dans un composant électrique sous l'effet d'une variation de champ magnétique, elle-même induite par une variation de courant.

2.8 Une inductance est un composant idéalisé constitué d'un élément conducteur bobiné. La tension entre les bornes d'une inductance est proportionnelle à la dérivée du courant qui circule en son sein : $u = L\frac{di}{dt}$. Le coefficient de proportionnalité L porte le nom de coefficient d'induction exprimée en henry.

EXERCICES

2.9 1. L'expression du flux magnétique à travers la surface $s = a^2$ du cadre est :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds.$$

À chaque instant t, en tout point de la surface plane du cadre, la normale au cadre et le champ $\vec{B}$ font un angle indépendant de la position de M noté $\theta(t)$ (figure 2.30). Par suite

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = ||\vec{B}|| \, ||\vec{n}|| \cos\theta(t)$$

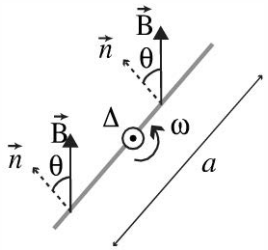


Figure 2.30

Le flux s'exprime donc sous la forme :

$$\phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iint_S B\cos\theta(t) ds$$

$$= B\cos\theta(t) \iint_S ds = Ba^2\cos\theta(t)$$

Vitesse de rotation du cadre et angle θ sont liés par la relation cinématique : $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$, ω étant constante, on en déduit la loi de variation de θ : $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ donc : $\phi(t) = Ba^2\cos(\omega t + \theta_0)$.

2. La variation de flux dans le cadre engendre l'apparition d'une force électromotrice induite dans le cadre conducteur dont l'expression est donnée par la loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -Ba^2\frac{d(\cos(\omega t + \theta_0))}{dt} = Ba^2\omega\sin(\omega t + \theta_0)$

Une ouverture ménagée dans le cadre permet ainsi de prélever une tension variant selon une loi sinusoïdale. Tel est le principe de l'alternateur.

2.10 1. La description quantique d'une onde électromagnétique de fréquence ν consiste à assimiler cette dernière à un flux de photons transportant une énergie $w = h\nu$. L'effet photoélectrique se manifeste dans une structure semiconductrice par la création d'une paire électron-trou quand l'énergie apportée par un photon est supérieure à un seuil énergétique (w_g) caractéristique du semi-conducteur utilisé.

2. Le principe de conservation de la charge appliqué sur la surface fermée délimitant la sphère, impose que la libération d'un nombre n de porteurs de charges par unité de temps engendre un courant d'intensité $j = \frac{d(nq)}{dt}$. Le nombre de photons n_l reçus par la structure par unité de temps est égal à $\frac{dn_p}{dt} = \frac{P_p}{h\nu}$. Le rendement quantique de la structure impose : $dn = \eta\, dn_p$. Par suite, l'expression du photocourant électromoteur est : $j = q\frac{dn}{dt} = q\eta\frac{dn_p}{dt} = q\eta\frac{P_p}{h\nu}$. L'intensité du courant électromoteur dans la structure est directement proportionnelle à la puissance lumineuse reçue. Tel est le principe des photodiodes.

2.11 1. Sous l'effet d'une tension $u_{AB} > 0$ supposée appliquée entre les extrémités du tronçon, un champ électrique $\vec{E}$ s'établit, dirigé de A vers B (figure 2.31).

La relation liant tension et champ s'exprime sous la forme : $u_{AB} = \int_{L_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{dl}_{AB}$. Le milieu réagit par l'apparition d'un courant électrique de

Copyright © 2007 Dunod.

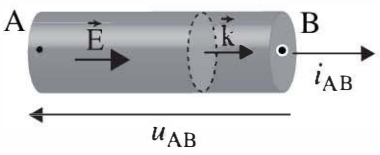


Figure 2.31

densité $\vec{k} = \dfrac{\vec{E}}{\rho}$. Par suite, le matériau étant homogène :

$$u_{AB} = \int_{L_{AB}} \rho \vec{k} \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = \rho \int_{L_{AB}} \vec{k} \cdot \overrightarrow{dl}_{AB}$$

et la section du tronçon étant constante :

$$u_{AB} = \rho \int_{L_{AB}} \vec{k} \cdot \overrightarrow{dl}_{AB} = \rho k \int_{L_{AB}} dl_{AB} = \rho k l .$$

De plus, l'intensité du courant i_{AB} chiffrée à travers une section droite donne :

$$i_{AB} = \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n}_{AB} ds = \iint_S k ds = k \iint_S ds = kS .$$

En utilisant la relation établie entre k et u_{AB}, nous obtenons : $i_{AB} = kS = \dfrac{u_{AB}}{\rho l} S$.

2. Avec l'orientation de i_{AB} et u_{AB} choisie, la résistance du tronçon est égale à :

$$R = \frac{u_{AB}}{i_{AB}} = \frac{\rho l}{S}.$$

2.12 1. Si la sphère S_1 stocke une charge Q, du fait que celle-ci est entièrement enfermée dans la sphère S_1, une charge $-Q$ se développe sur la face interne de cette dernière par influence électrostatique totale (figure 2.32).

Un champ électrique $\vec{E}$ de direction radiale prend naissance en tout point M dans l'espace entre les deux sphères. La détermination de ce champ à une distance l du centre des sphères s'effectue par application du théorème de Gauss (figure 2.32).

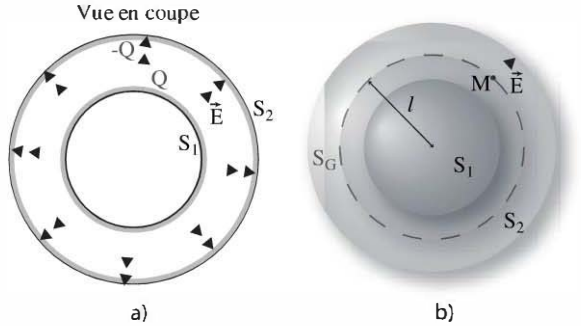


Figure 2.32

Compte tenu de la symétrie de révolution de la distribution de la charge, le choix comme surface de Gauss S_G d'une sphère de rayon l concentrique de S_1 et S_2 s'impose naturellement. Le flux du champ à travers cette surface de Gauss s'explicite sous la forme :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \oiint_{S_G} E ds = E(M) \oiint_{S_G} ds$$

$$= E(M) 4\pi l^2$$

La charge enfermée à l'intérieur de S_G correspond à la charge portée par la sphère S_1. Par suite, l'application du Théorème de Gauss conduit à $E(M)4\pi l^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon}$ d'où l'on déduit l'expression du champ : $E(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon l^2}$. La circulation de ce champ entre les deux sphères permet d'exprimer la tension u_{12} entre la sphère S_1 et la sphère S_2 :

$$u_{12} = \int_{L_{12}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl}_{12} = \int_{l_1}^{l_2} E dl$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon l^2} \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{l^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} \right)$$

2. L'expression de la capacité du condensateur est égale à : $C = \dfrac{Q}{u_{12}} = 4\pi\varepsilon \left(\dfrac{l_2 l_1}{l_2 - l_1} \right)$.

2.13 1. La circulation d'un courant électrique dans le bobinage est à l'origine de l'apparition en tout point M intérieur du tore d'un champ magnétique $\vec{B}$ orthoradial (figure 2.33).

La détermination de ce champ à une distance l du centre du tore s'effectue par application du théorème d'Ampère. Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe du tore, de la distribution de courant, le choix comme contour d'Ampère C_A d'un cercle de rayon l centré sur l'axe s'impose naturellement.

La circulation du champ le long de ce contour d'Ampère s'explicite sous la forme :

$$\oint_{C_A} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_{C_A} B dl = B(M) \oint_{C_A} dl$$

$$= B(M) 2\pi l$$

Le contour d'Ampère enlace les N spires du bobinage, chacune d'entres elles étant parcourue

Copyright © 2007 Dunod.

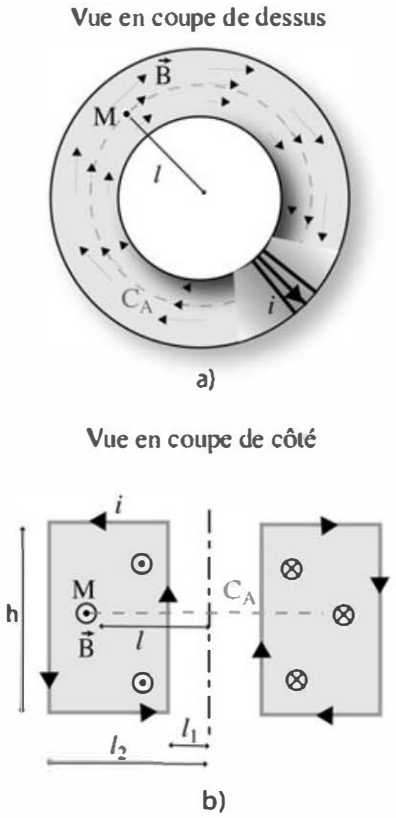


Figure 2.33

par un courant d'intensité i, l'application du Théorème d'Ampère conduit donc à $B(M)2\pi l$, $= \mu Ni$, d'où l'on déduit l'expression du champ : $B(M) = \dfrac{\mu Ni}{2\pi l}$. La surface portée par l'intégralité du bobinage correspond à l'ensemble des surfaces portées par les spires, soit NS où S correspond à la surface portée par une spire.

Le flux à travers la surface portée par le bobinage est donc égal à : $\phi = N \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n} ds$. Le choix du système de coordonnées s'arrêtera sur un système de coordonnées cartésiennes, le plus adapté au domaine d'intégration rectangulaire que constitue une spire (figure 2.34).

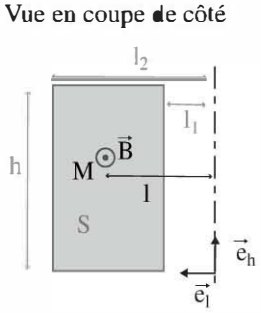


Figure 2.34

Par suite, le flux s'exprime sous la forme suivante :

$$\phi = N \int_0^h \int_{l_1}^{l_2-l_1} B(M) dl\, dh$$

$$= N \int_0^h \int_{l_1}^{l_2-l_1} \frac{\mu Ni}{2\pi l} dl\, dh = \frac{\mu i N^2}{2\pi} h \int_{l_1}^{l_2-l_1} \frac{dl}{l}$$

$$= \frac{\mu i N^2}{2\pi} h \ln\left(\frac{l_2 - l_1}{l_1}\right)$$

2. L'expression du coefficient d'auto-induction de l'inductance constituée du bobinage est égale à : $L = \dfrac{\phi}{i} = \dfrac{\mu N^2}{2\pi} h \ln\left(\dfrac{l_2 - l_1}{l_1}\right)$.

CHAPITRE 3

RÉVISIONS

3.1 Tension et courant doivent être orientés dans des sens opposés en convention récepteur et dans le même sens en convention générateur.

3.2 Un dipôle actif modélise un phénomène électromoteur traduisant une conversion d'énergie électrique. Un dipôle passif ne modélise qu'une dissipation d'énergie électrique.

3.3 Lors d'une séquence de fonctionnement, le point de fonctionnement d'un dipôle réversible en courant peut passer d'un quadrant où ($p = ui > 0$) à celui où ($p = ui < 0$). Il passera ainsi d'un comportement « générateur » à un comportement « récepteur » d'énergie électrique. Dans ce contexte, la convention choisie pour caractériser le dipôle importe peu. Néanmoins, une fois définie, celle-ci doit être conservée pendant toute la séquence de fonctionnement ; seul un changement de signe sur la puissance traduira une inversion de comportement.

3.4 Un dipôle passif possède une caractéristique graphique qui passe par l'origine. Celle-ci ne peut donc être présente dans deux quadrants côte à côte et ne correspond donc pas à la caractéristique graphique d'un dipôle réversible.

3.5 La caractéristique d'un dipôle linéaire passif est une droite (aspect linéaire) qui passe par l'origine (aspect passif).

Copyright © 2007 Dunod.

3.6 Dans une association parallèle, les dipôles sont soumis à la même tension, les courants se divisant dans chaque élément. Dans une association série, les dipôles sont parcourus par le même courant, les tensions se répartissant aux bornes de l'élément.

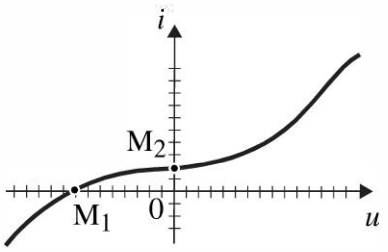
3.7 Un quadripôle est pleinement défini par quatre caractéristiques graphiques. La caractéristique d'entrée exprime le lien entre les grandeurs d'entrée (u_e et i_e) et celle de sortie entre les grandeurs de sortie (u_s et i_s). La caractéristique de transfert traduit l'influence de l'entrée sur la sortie ; la caractéristique de réaction exprime l'influence de la sortie sur l'entrée.

EXERCICES

3.8 Une pile est le siège d'un phénomène électrochimique à l'origine d'une force électromotrice, susceptible de fournir de l'énergie électrique à un circuit : il lui est associé un dipôle actif.
Une ampoule sous tension produit, certes, de l'énergie lumineuse, mais pour ce faire consomme de l'énergie électrique pour porter à incandescence son filament. Il lui est donc associé un dipôle passif.
Un moteur assure la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique à travers un processus de conversion électromécanique, caractérisé par une force électromotrice. Il lui est donc associé un dipôle actif. Ce processus réversible permet au moteur utilisé en dynamo de fournir de l'énergie électrique quand on l'entraîne mécaniquement.

3.9 La caractéristique 3.48a correspond à la caractéristique d'un dipôle passif, symétrique et linéaire. Le dipôle associé modélise le comportement de tout composant électrique réalisé à partir d'un conducteur ohmique (résistance électrique, ampoule...).
La caractéristique 3.48b correspond à la caractéristique d'un dipôle actif, réversible en tension et en courant, et non linéaire. Le dipôle associé modélise le comportement d'une photodiode qui assure la génération d'un courant électromoteur par conversion photoélectrique.
La caractéristique 3.48c correspond à la caractéristique d'un dipôle actif, réversible en courant et linéaire. Le dipôle associé modélise, par exemple, le comportement d'une batterie. La force électromotrice engendrée résulte d'une conversion électrochimique.
La caractéristique 3.48d correspond à la caractéristique d'un dipôle passif, non symétrique et non linéaire. Le dipôle associé modélise le comportement d'une diode Zener.
La caractéristique 3.48e correspond à la caractéristique d'un dipôle passif, symétrique et non linéaire. Le dipôle associé modélise le comportement d'un DIAC.
La caractéristique 3.48f correspond à la caractéristique d'un dipôle passif, symétrique et linéaire. Le dipôle associé modélise le comportement d'un interrupteur en position ouverte, qui interdit le passage du courant quelque soit la tension qui règne à ses bornes.

3.10 Lorsque le dipôle fonctionne à vide $i = 0$, le point de fonctionnement se situe donc en M_1 (figure 3.52) dont l'abscisse correspond à la tension à vide : $U_v = -8$ V.
Lorsque le dipôle fonctionne en court-circuit $u = 0$, le point de fonctionnement se situe donc en M_2 (figure 3.52) dont l'ordonnée correspond au courant de court-circuit : $I_{cc} = 20$ mA.



Courant : 10 mA/div Tension : 1 V/div

Figure 3.52

3.11 a) Les règles de l'association série imposent $i = i_1 = i_2$ et $u = u_1 + u_2$. Les relations caractéristiques des résistors s'expriment sous la forme $u_1 = R_1 i_1$ et $u_2 = R_2 i_2$ (figure 3.53a)
La relation caractéristique du dipôle équivalent s'exprime donc sous la forme : $u = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i$. Cette relation caractéristique décrit le comportement électrique d'un résistor de résistance $R_1 + R_2$ (figure 3.53b).

b) Les règles de l'association série imposent $i = i_1 = i_2$ et $u = u_1 + u_2$. Les relations caractéristiques des inductances s'expriment sous la forme $u_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt}$ et $u_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt}$ (figure 3.54a)
La relation caractéristique du dipôle équivalent

Copyright © 2007 Dunod.

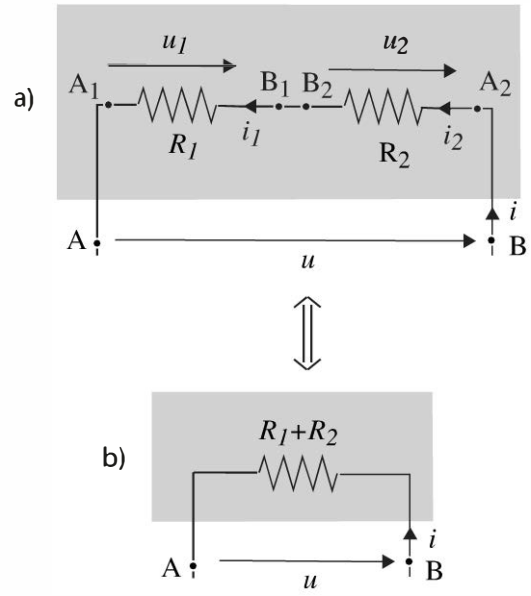


Figure 3.53

s'exprime sous la forme : $u = L_1\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt}$ $= (L_1 + L_2)\dfrac{di}{dt}$. Celle-ci décrit le comportement électrique d'une inductance de coefficient d'induction $L_1 + L_2$ (figure 3.54b).

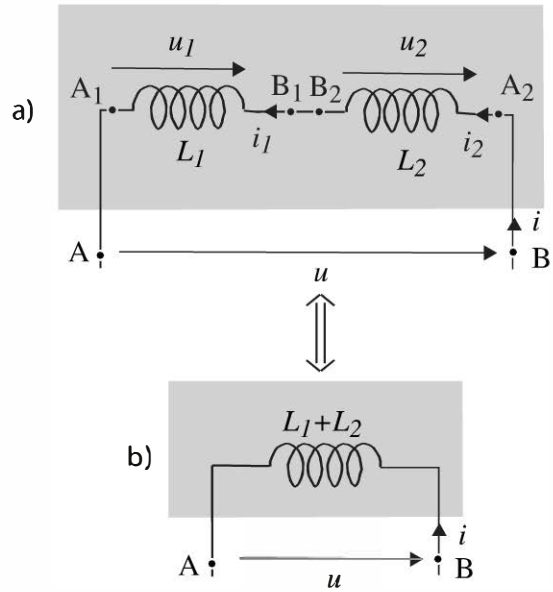


Figure 3.54

c) Les règles de l'association série imposent $i = i_1 = i_2$ et $u = u_1 + u_2$. Une dérivation par rapport au temps de cette dernière relation conduit à : $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d(u_1 + u_2)}{dt} = \dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{du_2}{dt}$. Les relations caractéristiques des condensateurs sont $i_1 = C_1\dfrac{du_1}{dt}$ et $i_2 = C_2\dfrac{du_2}{dt}$ (figure 3.55a)

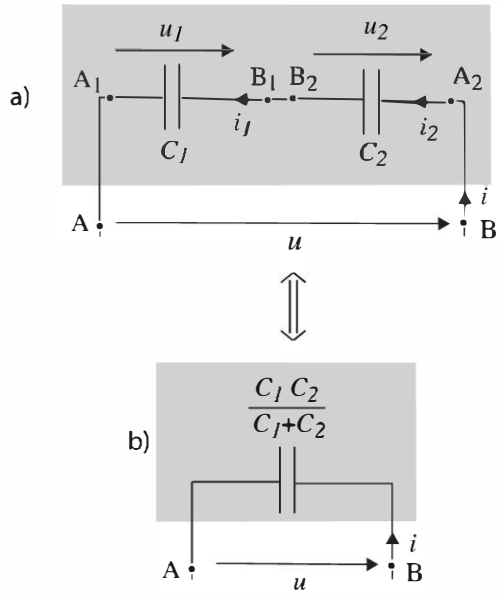


Figure 3.55

Par suite, la relation caractéristique du dipôle équivalent s'exprime sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} = i\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = i\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

Exprimée sous la forme $i = \left(\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)\dfrac{du}{dt}$. Elle décrit le comportement électrique d'un condensateur de capacité $\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ (figure 3.55b).

3.12 a) Les règles de l'association parallèle imposent $u = u_1 = u_2$ et $i = i_1 + i_2$. Les relations caractéristiques des résistors s'expriment sous la forme $u_1 = R_1 i_1$ et $u_2 = R_2 i_2$ (figure 3.56a).
Par suite, la relation caractéristique du dipôle équivalent s'exprime sous la forme :

$$i = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = u\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = u\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)$$

Exprimée sous la forme $u = \left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) i$, elle décrit le comportement électrique d'un résistor de résistance $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (figure 3.56b).

Copyright © 2007 Dunod.

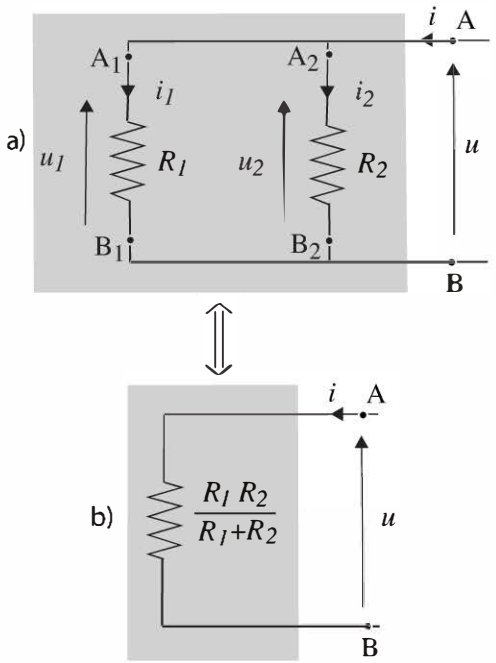


Figure 3.56

b) Les règles de l'association parallèle imposent $u = u_1 = u_2$ et $i = i_1 + i_2$. Une dérivation par rapport au temps de cette dernière relation conduit à : $\frac{di}{dt} = \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$.
Les relations caractéristiques des inductances s'expriment sous la forme $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$ et $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$ (figure 3.57a).
Par suite, la relation caractéristique du dipôle équivalent s'exprime sous la forme :

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_1}{L_1} + \frac{u_2}{L_2} = u\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = u\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}\right)$$

Exprimée sous la forme $u = \left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right)\frac{di}{dt}$, elle décrit le comportement électrique d'une inductance de coefficient d'induction $\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ (figure 3.57b).
c) Les règles de l'association parallèle imposent $u = u_1 = u_2$ et $i = i_1 + i_2$. Les relations caractéristiques des condensateurs s'expriment sous la forme $i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt}$ et $i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}$ (figure 3.58a).

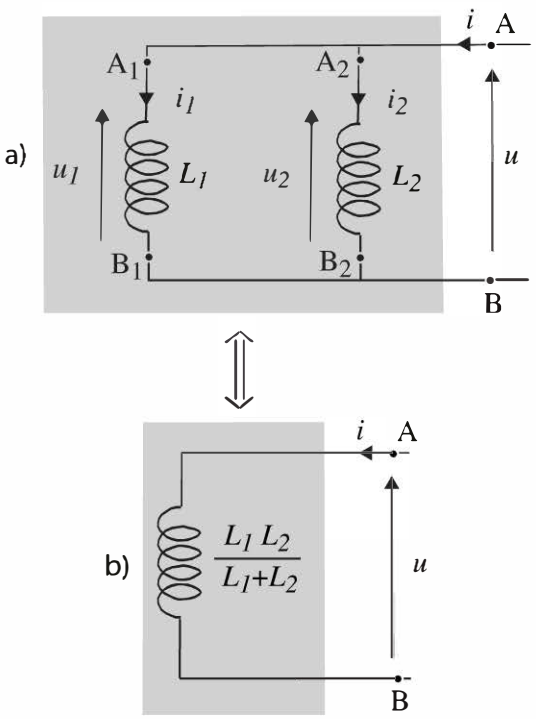


Figure 3.57

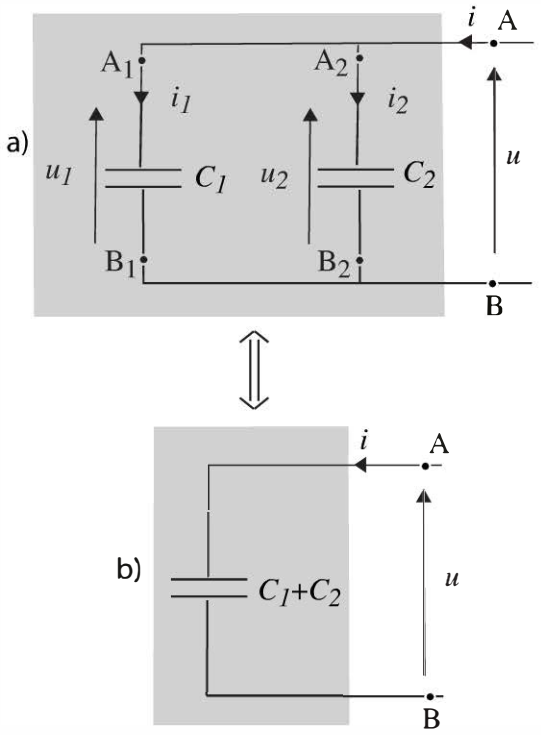


Figure 3.58

Par suite, la relation caractéristique du dipôle équivalent s'exprime sous la forme : $i = C_1 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{du}{dt}$. Cette relation décrit le comportement électrique d'un condensateur de capacité $C_1 + C_2$ (figure 3.58b)

Copyright © 2007 Dunod.

3.13 L'association représentée des deux diodes (figure 3.59a) peut être assimilée à l'association de dipôles D_{AB} et D_{BC} dont les caractéristiques respectives sont représentées (figure 3.59b).

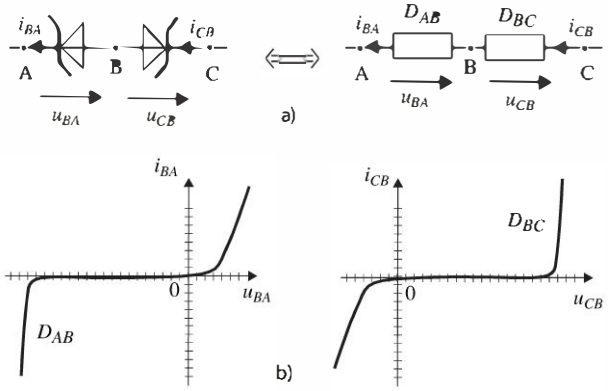


Figure 3.59

Le dipôle D_{AC} équivalent à l'association de D_{AB} et D_{BC} (figure 3.60), doit être parcouru par un courant $i = i_{AB} = i_{CB}$ lorsqu'il est soumis à une tension $u = u_{BA} + u_{CB}$.

Après avoir tracé, sur le plan électrique, les caractéristiques graphiques associées à D_{AB} et D_{BC}, on effectue, pour différentes valeurs de i, la somme des tensions correspondantes sur chaque caractéristique. La résultante constitue la caractéristique graphique associée à D_{AC} (figure 3.60).

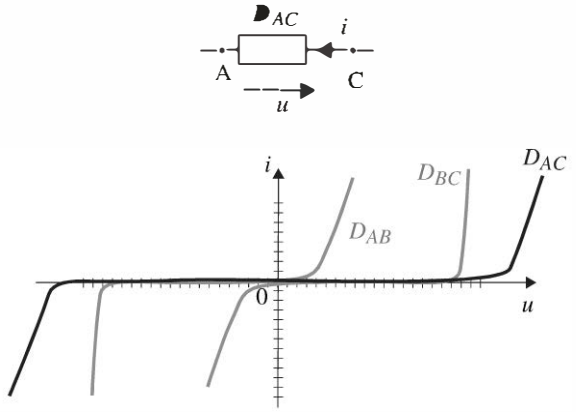


Figure 3.60

3.14 1. Les règles de répartition des courants exprimées aux points A et B (figure 3.61) donnent respectivement $i_e = i_1 + i_3$ et $i_s = i_2 - i_1$. La règle de répartition des tensions exprimée entre les points A, B et C donne $u_e = u_1 + u_s$.

Enfin, les lois d'Ohm exprimées pour les résistances R_1, R_2 et R_3 s'expriment de la manière suivante : $u_1 = R_1 i_1$, $u_s = R_2 i_2$ et $u_e = R_3 i_3$ qui replacées dans l'expression de i_e et i_s donnent :

$$i_e = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_e}{R_3} \text{ et } i_s = \frac{u_s}{R_2} - \frac{u_1}{R_1}.$$

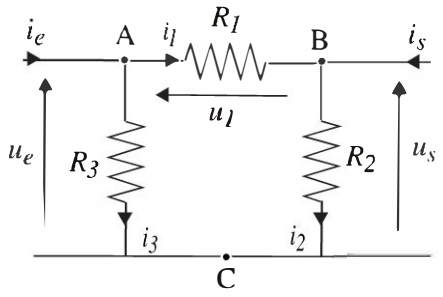


Figure 3.61

En tenant compte du fait que : $u_1 = u_e - u_s$, on obtient finalement :

$$\begin{cases} i_e = \dfrac{u_e - u_s}{R_1} + \dfrac{u_e}{R_3} = u_e \dfrac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} - u_s \dfrac{1}{R_1} \\ i_s = \dfrac{u_s}{R_2} - \dfrac{u_e - u_s}{R_1} = -u_e \dfrac{1}{R_1} + u_s \dfrac{R_1 + R_2}{R_2 R_1} \end{cases}$$

La relation caractéristique d'entrée est donc du type $i_e = a_e u_e + b_e$ en posant : $a_e = \dfrac{R_1 + R_3}{R_1 R_3}$ et $b_e = -\dfrac{u_s}{R_1}$. Il lui correspond un réseau de droites (figure 3.62a) de pente constante a_e et d'ordonnée à l'origine b_e dépendant de la valeur de u_s.

De même, la relation caractéristique de sortie est du type $i_s = a_s u_s + b_s$ en posant : $a_s = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ et $b_s = -\dfrac{u_e}{R_1}$. Il lui correspond un réseau de droites (figure 3.62b) de pente constante a_s et d'ordonnée à l'origine b_s dépendant de la valeur de u_e.

On peut exprimer la relation caractéristique de transfert sous la forme $i_s = a_t u_e + b_t$ en posant : $a_t = -\dfrac{1}{R_1}$ et $b_t = u_s \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$. Il lui correspond

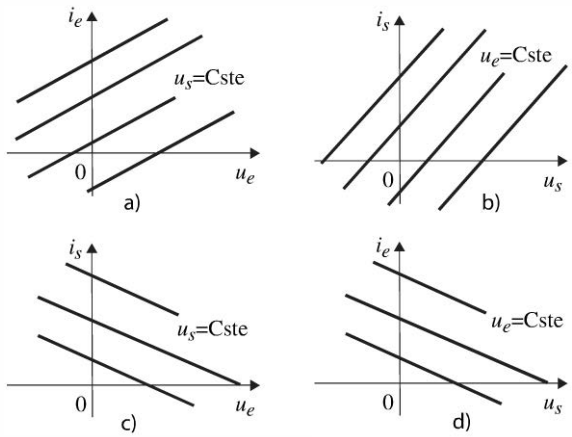


Figure 3.62

Copyright © 2007 Dunod.

un réseau de droites (figure 3.62c) de pente constante a_t et d'ordonnée à l'origine b_t dépendant de la valeur de u_s.
De même, la relation caractéristique de réaction peut s'exprimer sous la forme $i_e = a_r u_s + b_r$ en posant : $a_r = -\dfrac{1}{R_1}$ et $b_r = u_e \dfrac{R_1 + R_3}{R_1 R_3}$. Il lui correspond un réseau de droites (figure 3.62d) de pente constante a_r et d'ordonnée à l'origine b_r dépendant de la valeur de u_e.

2. Le quadripôle proposé peut être assimilé à l'association en série (figure 3.63) de deux quadripôles du type de ceux étudiés à la première question.
Le quadripôle équivalent présente un courant d'entrée $i_e = i_{e1} = -i_{e2}$ et de sortie $i_s = i_{s1} = -i_{s2}$. La tension en entrée de celui-ci est $u_e = u_{e1} - u_{e2}$ et donne en sortie $u_s = u_{s1} - u_{s2}$.

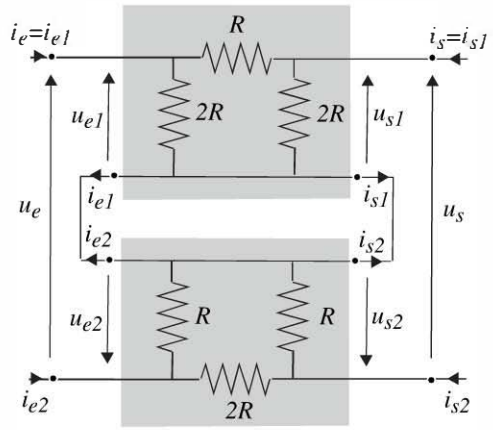


Figure 3.63

En utilisant les relations électriques établies sur le quadripôle en « pi », on peut écrire :
• pour le quadripôle « du haut » :

$$\begin{cases} i_{e1} = u_{e1}\dfrac{3}{2R} - u_{s1}\dfrac{1}{R} \\ i_{s1} = -u_{e1}\dfrac{1}{R} + u_{s1}\dfrac{3}{2R} \end{cases},$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{3}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{s1} \end{bmatrix}$$

• pour le quadripôle « du bas » :

$$\begin{cases} i_{e2} = u_{e2}\dfrac{3}{2R} - u_{s2}\dfrac{1}{2R} \\ i_{s2} = -u_{e2}\dfrac{1}{2R} + u_{s2}\dfrac{3}{2R} \end{cases},$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} i_{e2} \\ i_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2R} & -\dfrac{1}{2R} \\ -\dfrac{1}{2R} & \dfrac{3}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{e2} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

En réalisant deux inversions matricielles, on peut exprimer les tensions en fonction des courants sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{6R}{5} & \dfrac{4R}{5} \\ \dfrac{4R}{5} & \dfrac{6R}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{s1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} u_{e2} \\ u_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3R}{4} & \dfrac{R}{4} \\ \dfrac{R}{4} & \dfrac{3R}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e2} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{e2} \\ -i_{s2} \end{bmatrix}$$

Or :

$$\begin{bmatrix} u_e \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{s1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{e2} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{6R}{5} & \dfrac{4R}{5} \\ \dfrac{4R}{5} & \dfrac{6R}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{s1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{3R}{4} & \dfrac{R}{4} \\ \dfrac{R}{4} & \dfrac{3R}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e2} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{39R}{20} & \dfrac{21R}{20} \\ \dfrac{21R}{20} & \dfrac{39R}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e2} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

qui correspondent aux relations caractéristiques du quadripôle équivalent à l'association :

$$u_e = i_e \frac{39R}{20} + i_s \frac{21R}{20} \text{ et } u_s = i_e \frac{21R}{20} + i_s \frac{39R}{20}$$

CHAPITRE 4

RÉVISIONS

4.1 Pour la modélisation d'un composant électrique, deux approches sont envisageables. L'une cherchant à mettre en adéquation le modèle avec le comportement électrique du composant, il est

Copyright © 2007 Dunod.

alors question de modèle de comportement. L'autre visant à décrire le modèle par les lois physiques gouvernant le composant, on parle dans ce cas de modèle de connaissance.

4.2 L'établissement d'un modèle électrique passe par la définition des conditions d'utilisations du composant électrique étudié, qui constituent le domaine physique dans lequel le modèle proposé correspondra au comportement effectif du composant. Ces conditions d'origine électrique (valeurs limites et vitesses de variations des courants et tensions) ou autres (température...) définissent le domaine de validité du modèle.

4.3 Sur une zone de fonctionnement de faible étendue, la caractéristique graphique statique d'un composant électrique peut être assimilée à une droite. Effectuer une modélisation linéaire consiste à rechercher par interpolation linéaire, la droite correspondant au mieux à la caractéristique sur le domaine de fonctionnement. La caractéristique graphique d'un composant est généralement non linéaire, aussi la validité d'un modèle linéaire est-elle assujettie à un domaine de fonctionnement du composant ne couvrant en général qu'une faible partie de sa caractéristique graphique.

4.4 Les modèles de Norton et de Thévenin correspondent à deux types de modèles linéaires statiques d'un composant électrique, c'est-à-dire assimilant la relation caractéristique de celui-ci à une fonction affine. Dans le cas du dipôle de Norton constitué de l'association parallèle d'un résistor et d'une source de courant, elle est exprimée sous la forme $i = au + b$. Pour le dipôle de Thévenin composé d'une source de tension en série avec un résistor, elle est de la forme $u = ai + b$.

4.5 La détermination de la résistance du modèle linéaire statique passe par la recherche de la pente de la caractéristique graphique assimilée à une droite sur le domaine de fonctionnement. La grandeur électromotrice passe par la recherche de l'ordonnée à l'origine de cette même droite.

4.6 Un condensateur ajouté en parallèle entre les bornes d'un modèle statique, traduit la prise en compte d'un comportement dynamique linéaire de la tension. Une inductance ajoutée en série traduit la prise en compte d'un comportement dynamique du courant.

4.7 À un modèle dynamique linéaire du premier ordre est associée une relation caractéristique différentielle du premier ordre, c'est-à-dire intégrant les dérivées premières de la tension et du courant par rapport au temps.

EXERCICES

4.8 Selon le domaine de fonctionnement de la diode Zener, on peut assimiler les portions de caractéristique graphique $[M_1, M_2]$, $[M_3, M_4]$, $[M_5, M_6]$ à des droites comme représenté figure 4.40.

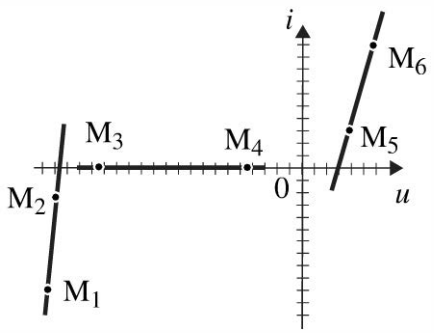


Figure 4.40

Ainsi, sur chaque domaine la relation caractéristique sera du type $i = au + b$. Le modèle de Thévenin associé se présentera sous la forme représentée figure 4.41.

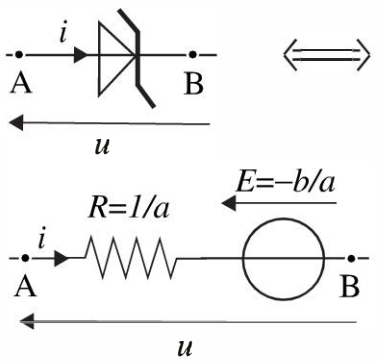


Figure 4.41

– Deux points sont nécessaires pour identifier la relation caractéristique sur le domaine $[M_1, M_2]$: prenons par exemple ($u = -3{,}9$ V, $i = 0$), et ($u = -4{,}2$ V, $i = 70$ mA). La pente $\Delta u/\Delta i = a = 233 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$ donne $R = 1/a = 4{,}3\ \Omega$. L'abscisse à l'origine $u = -b/a = -3{,}9$ V donne $E = -3{,}9$ V. Le dipôle associé à la diode Zener sur le domaine de fonctionnement $[M_1, M_2]$ est représenté figure 4.42.

Copyright © 2007 Dunod.

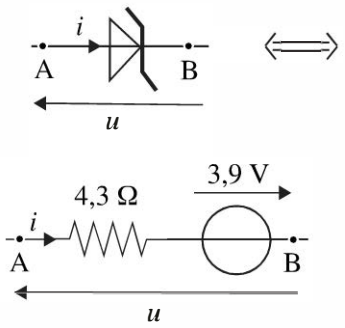


Figure 4.42

– La relation caractéristique sur le domaine $[M_3, M_4]$ correspond à $i = 0\ \forall u$. Ce qui correspond à la relation caractéristique définissant un circuit ouvert. Le dipôle associé à la diode Zener sur le domaine de fonctionnement $[M_3, M_4]$ est représenté figure 4.43.

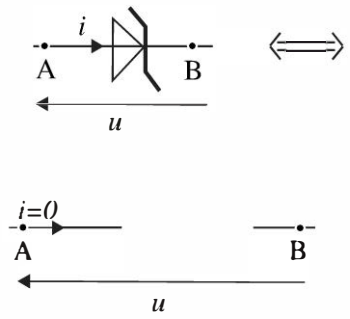


Figure 4.43

– Deux points sont nécessaires pour identifier la relation caractéristique sur le domaine $[M_5, M_6]$: prenons par exemple ($u = 600$ mV, $i = 0$), et ($u = 800$ mV, $i = 35$ mA). La pente $\Delta u/\Delta i = a = 5{,}7\Omega^{-1}$ donne $R = 1/a = 175$ mΩ. L'abscisse à l'origine $u = -b/a = 600$ mV donne $E = 600$ mV. Le dipôle associé à la diode Zener sur le domaine de fonctionnement $[M_5, M_6]$ est représenté figure 4.44.

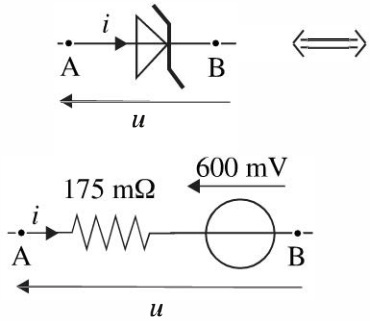


Figure 4.44

4.9 Chaque transistor peut être modélisé entre les bornes de sortie comme une source de courant. En effet, sur le domaine $[M_1, M_2]$, le courant de sortie i_s est indépendant de u_s (figure 4.45).
Le courant électromoteur J généré par cette source de courant est fixé par les grandeurs électriques présentes en entrée.

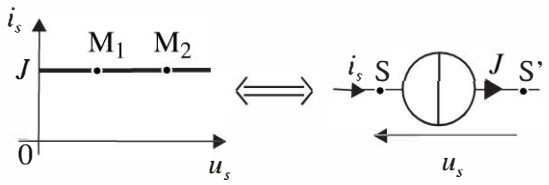


Figure 4.45

Dans le cas du transistor bipolaire, le courant électromoteur est fixé par le courant d'entrée i_e, le transistor est modélisé par une source de courant contrôlée par courant. La loi de variation du courant électromoteur, donnée par la caractéristique de transfert, est linéaire : $J = ki_e$. Dans le cas du MOSFET, le courant électromoteur est fixé par la tension d'entrée u_e, on modélise ainsi ce type de transistor par une source de courant contrôlée par tension. La loi de variation du courant électromoteur, donnée par la caractéristique de transfert, est quadratique : $J = ku_e^2$.

4.10 1. Les résistances R_1 et R_2 traduisent les chutes de tensions dues au passage du courant entre les extrémités du câble. L'une traduit donc la résistance du fil conducteur entre ses extrémités et l'autre la résistance de la tresse. La résistance R_3 figure la résistance « de fuite » de l'isolant traduisant un échange de charges entre les deux éléments conducteurs.
Le condensateur traduit une influence électrostatique entre les deux conducteurs lors de l'application d'une tension entre eux. L'inductance modélise un effet d'auto-induction lors d'une variation de courant dans le circuit constitué des deux conducteurs.
2. La détermination de la résistance d'un résistor cylindrique (section s, longueur l et résistivité ρ), effectuée à titre d'exercice au chapitre 2, a donné $R = \rho l/s$. Cette expression adaptée au modèle de l'âme et de la tresse métallique donne respectivement : $R_1 = \dfrac{\rho_1 l}{\pi r_1^2}$ pour la résistance de l'âme, et

$R_2 = \dfrac{\rho_2 l}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$ pour la résistance de la tresse.

Copyright © 2007 Dunod.

La résistance de fuite de l'isolant R_3, est déterminée en considérant qu'une différence de potentiel existe entre l'âme et la tresse (tension u_{AB}).
Le champ électrique $\vec{E}(M)$ ainsi créé est radial et engendre un courant de densité $\vec{k}(M)$ par un processus de conduction ohmique (figure 4.46).

Vue en coupe transversale

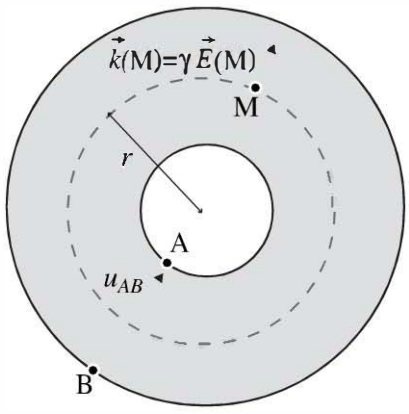


Figure 4.46

En régime stationnaire, l'intensité i_{AB} de ce courant est la même à travers n'importe quelle surface cylindrique longitudinale S (dont la trace est figurée en pointillés) de rayon $r_2 < r < r_3$ et de longueur l.

$$i_{AB} = \iint_S \vec{k}(M)\cdot\vec{n}ds$$

$$= \iint_S \gamma\vec{E}(M)\cdot\vec{n}ds = \gamma\iint_S E(M)ds$$

$$= \gamma 2\pi r l E(M)$$

On en déduit $E(M) = \dfrac{i_{AB}}{\gamma 2\pi r l}$.
Par ailleurs, la tension est liée au champ à travers la relation

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M)\cdot\vec{dl}_{AB}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{i_{AB}}{\gamma 2\pi r l}\cdot dr = \frac{i_{AB}}{\gamma 2\pi l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}.$$

$$= \frac{i_{AB}}{\gamma 2\pi l}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On déduit donc l'expression de la résistance de l'isolant $R_3 = \dfrac{u_{AB}}{i_{AB}} = \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l}$.

La capacité C du câble est déterminée en considérant que l'âme et la tresse sont chargés avec des charges opposées respectives $+Q$ et $-Q$ (figure 4.47). Le champ électrique $\vec{E}(M)$ ainsi créé engendre une différence de potentiel entre âme et tresse (tension u_{AB}).
À l'équilibre électrostatique, les charges sont réparties de manière uniforme, le champ $\vec{E}(M)$ à une direction radiale dans l'isolant.

Vue en coupe transversale

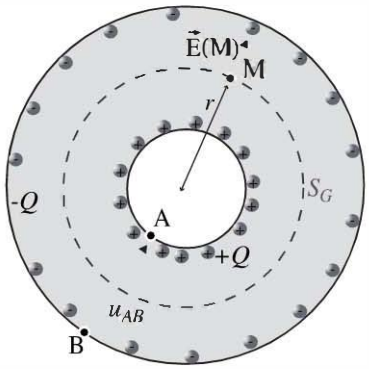


Figure 4.47

L'application du théorème de Gauss sur un cylindre S_G de rayon r ($r_2 < r < r_3$) et de longueur l donne :

$$\frac{Q}{\varepsilon} = \oiint_{S_G}\vec{E}(M)\cdot\vec{n}_{AB}ds$$

$$= \oiint_{2\pi rl} ds = E(M)2\pi rl$$

On en déduit $E(M) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon lr}$. La tension est liée au champ par la relation

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dl}_{AB} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On déduit donc l'expression de la capacité $C = \dfrac{u_{AB}}{Q} = \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\varepsilon l}$.
Le coefficient d'auto-induction L du câble est déterminé en considérant que l'âme et la tresse sont parcourues par des courants électriques d'intensité i. L'âme assure l'acheminement du courant et la tresse le retour de celui-ci. Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ ainsi créé est orthoradial et engendre un flux Φ à travers la surface comprise entre l'âme et la tresse.

Copyright © 2007 Dunod.

L'application du théorème d'Ampère sur un cercle C_A de rayon r ($r_2 < r < r_3$) permet de calculer $\vec{B}(M)$:

$$\mu i = \oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot \vec{dl} = \oint_{C_A} B(M) dl = B(M) 2\pi r$$

On en déduit $B(M) = \dfrac{\mu i}{2\pi r}$. Le flux créé dans le câble est évalué à travers la surface S (surface hachurée) correspondant à une coupe longitudinale de l'isolant sur toute la longueur du câble. figure 4.48

$$\phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot \vec{n} ds = l \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu i}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu i l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu i l}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$$

On en déduit l'expression du coefficient d'auto-induction $L = \dfrac{\Phi}{i} = \dfrac{\mu l}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$.

Vue en coupe longitudinale

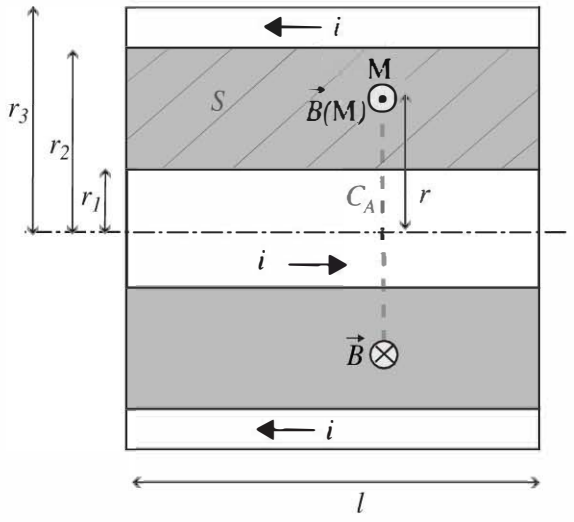


Figure 4.48

CHAPITRE 5

RÉVISIONS

5.1. Les inconnues principales sont les courants dans les branches. À partir de ces derniers, on peut déterminer toutes les tensions dans le circuit électrique – aux bornes des dipôles, mais aussi entre deux points quelconques du circuit – et tous les courants dans les dipôles et les fils d'interconnexion.

5.2. Un nœud rassemble tous les fils de connexion qui ont le même potentiel électrique ; son degré minimal est de trois. La frontière est une ligne fermée qui encercle le nœud en ne coupant que les fils de connexion. Un nœud est forcément relié à la terre pour référencer tous les potentiels des nœuds.

5.3 Une branche est le lien entre deux nœuds distincts. Une branche est constituée soit par un dipôle passif (R, L, C) soit par un dipôle de Thévenin ou Norton soit par une source de tension (E) soit par une association en série des dipôles précédents. Aux extrémités des branches sont les nœuds. La branche généralisée est une association qui permet de générer les associations possibles entre dipôles pour former une branche.

5.4 $ni = n - 1, mi = b - ni, ei = b$.

5.5 La solution du régime libre est la solution de l'équation différentielle sans second membre (où toutes les sources sont éteintes) tandis que la solution du régime forcé est la solution avec second membre (en présence de toutes les sources). La solution du régime libre est toujours transitoire.

5.6 La solution du régime permanent dépend de la nature des sources présentes dans le second membre de l'équation différentielle.

5.7 Le régime transitoire est la phase qui précède le régime permanent et qui est de durée limitée dans le temps. La solution complète, qui englobe régime transitoire et régime permanent, est obtenue à partir de la résolution complète du système d'équations différentielles, fastidieuse à résoudre. Il y a plus simple pour trouver la seule solution en régime permanent.

5.8- Quand il y a deux sources de nature différente (source continue, source sinusoïdale), il y a deux études partielles à réaliser (en RPCC et en RPCA). La solution est la somme des deux solutions temporelles.

EXERCICES

5.9 1. Voir figure 5.49.

2. Voir figure 5.50 : $n = 3, b = 5, m = 6$.

3. $ni = n - 1 = 2, mi = b - ni = 3, ei = b = 5$.

Copyright © 2007 Dunod.

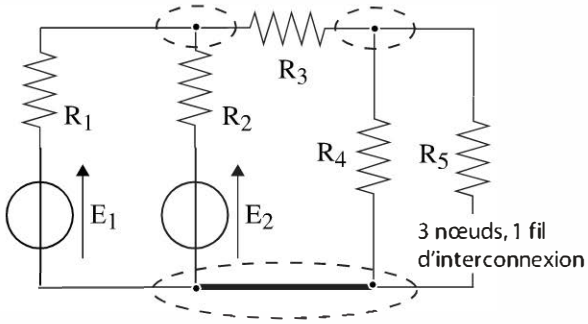


Figure 5.49

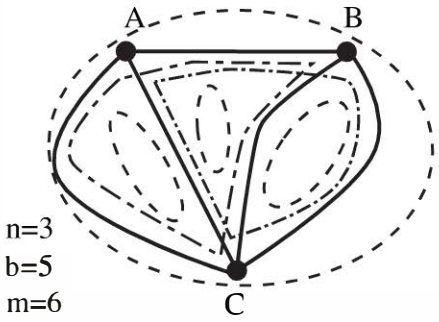


Figure 5.50

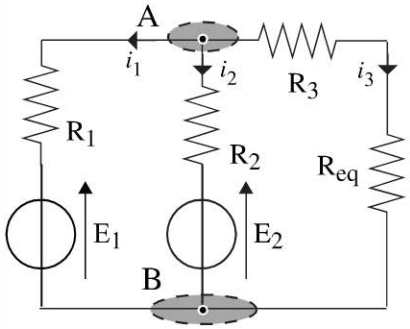


Figure 5.51

4. Voir figure 5.51 : $n = 2$, $b = 3$, $m = 3$, $ni = 1, mi = 2, ei = 3$.

5.10 1. Voir figure 5.52.

2. $-U_{R_2} - U_{R_1} - E_1 - E_3 + U_{R_3} + E_2 = 0$ et $-R_2 I_7 - R_1 I_4 - E_1 - E_3 + R_3 I_1 + E_2 = 0$

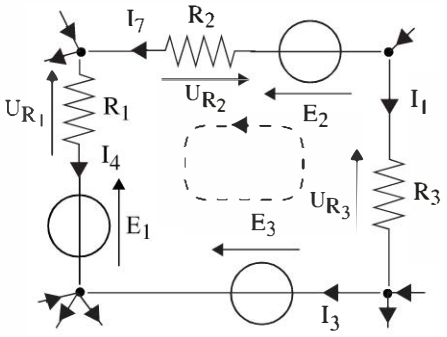


Figure 5.52

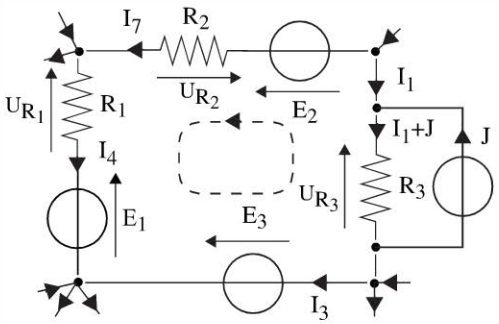


Figure 5.53

5.11 1. Voir figure 5.53.

2. $-U_{R_2} - U_{R_1} - E_1 - E_3 + U_{R_3} + E_2 = 0$

3. $-R_2 I_7 - R_1 I_4 - E_1 - E_3 + R_3(I_1 + J) + E_2 = 0$

5.12. 1. Voir figure 5.54.

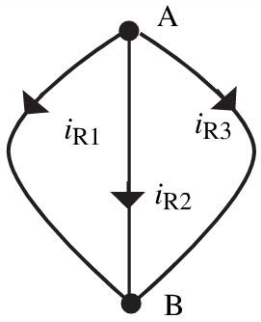


Figure 5.54

2. $n = 2$, $b = 3$, $m = 3$, $ei = 3$, $ni = 1$, $mi = 2$.

3. $n_A : 0 = i_1 + i_2 + i_3$; $n_B : i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Il s'agit de la même équation ; elles ne sont donc pas indépendantes.

4. $m_1 : -V_{R1} - E_1 + E_2 + V_{R2} = 0$

$$\Longrightarrow -R_1 i_1 - E_1 + E_2 + R_2 i_2 = 0 \ ;$$

$m_2 : -V_{R3} + E_2 + V_{R2} = 0$

$$\Longrightarrow -R_3 i_3 + E_2 + R_2 i_2 = 0$$

$m_3 : -V_{R1} - E_1 + V_{R3} = 0$

$$\Longrightarrow -R_1 i_1 - E_1 + R_3 i_3 = 0.$$

On a : $m_1 - m_2 = m_3$; ces 3 équations ne sont pas indépendantes. On prend par exemple : m_1, m_2 et n_B pour former le système d'équations représentatif.

5. Par substitution, on obtient :

$$i_1 = \frac{-(R_2 + R_3)E_1 + R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \ ;$$

$$i_2 = \frac{R_3 E_1 - (R_1 + R_3)E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \ ;$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$i_3 = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

6. $I = i_3$

5.13 La figure 5.46b est différente, car R_4 sépare maintenant J et R_3.

5.14 Le graphe n'a pas changé, donc les courants dans les branches restent identiques ($i_1 = I_1$, $i_2 = I_2$, $i_4 = I_4$, $i_5 = I_5$, $i_6 = I_6$, $i_7 = I_7$). Nous savons que seuls les courants d'interconnexion peuvent changer : la résistance R_3 a franchi le fil d'interconnexion portant $I'3$, d'où $I'3 \neq I_3$.

5.15 1. Figure 5.48a :
a) Toutes les sources sont de même nature, continue ;
b) Le régime permanent continu : RPCC ;
c) une seule étude.

2. Figure 5.48b :
a) Trois natures différentes : continue et sinusoïdale de pulsations 1 000 et 1 500 rad/s ;
b) Le régime de superposition des régimes ;
c) Trois études partielles : RPCC $\Longrightarrow I_0$, RPCA$\omega_1 \Longrightarrow i_1(t)$ puis RPCA$\omega_2 \Longrightarrow i_2(t)$ avec $i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t)$.

CHAPITRE 6

RÉVISIONS

6.1 Dans un schéma électrique équivalent en RPCC, il ne reste que des résistances et des sources continues. L'inductance, qui voit une tension continue nulle, est remplacée par un court-circuit, et un condensateur qui n'est traversé par aucun courant continu, est remplacé par un circuit ouvert. D'autre part, seules les sources qui possèdent une valeur moyenne peuvent générer des courants continus ; la partie variable des sources est éteinte.

6.2 Comme seule la partie continue des sources subsiste – la partie variable des sources étant éteinte –, la source $u(t)$ est remplacée par une source continue $U = U_0$.

6.3 Les lois de Kirchhoff permettent de déterminer tous les courants de branche, quelle que soit la complexité du circuit. Toutefois, comme souvent le circuit est constitué de morceaux de circuits connus, il est judicieux de connaître les résultats s'y référant sous forme de règles ; cela évite de refaire les calculs à chaque fois.

6.4 Ces théorèmes ont pour but principal de remplacer une partie du circuit par un dipôle équivalent de Thévenin ou Norton, soit pour le simplifier ou le modéliser, soit pour calculer rapidement une seule grandeur dans le schéma équivalent.

6.5 Le calcul de la puissance dans un dipôle est par définition obtenu par $p(t) = u(t)i(t)$; il s'agit de la puissance instantanée. En RPCC, seule nous intéresse la partie constante de $p(t)$, définie comme la puissance continue et qui se calcule comme $P = \langle u(t) \rangle$ et qui représente la puissance moyenne de $p(t)$ ($\langle p(t) \rangle$).

EXERCICES

6.6 1. $\begin{cases} e(t) = E = 10\,\text{V} & \text{pour } 0 < t < \alpha T \\ e(t) = 0\,\text{V} & \text{pour } \alpha T < t < T \end{cases}$

$$E_0 = \langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t)dt$$

$$E_0 = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{\alpha T} E dt + \int_{\alpha T}^{T} 0 dt \right\} = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E dt$$
$$= \frac{1}{T} E \int_0^{\alpha T} 1 dt = \frac{E}{T} (\alpha T - 0) = \alpha \cdot E$$

2. Voir figure 6.62.

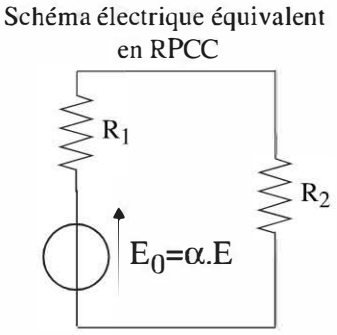


Figure 6.62

6.7 1. 2. et 3. Voir figures 6.63a et b.

4. Voir figure 6.63c.

5. $I_1 + I_2 = I_3$ (1)

(figure 6.63d) $-E_1 + R_1I_1 - R_2I_2 + E_2 = 0$ (2)

(figure 6.63e) $-E_2 + R_2I_2 + (R_3 + R_4)I_3 = 0$ (3)

Copyright © 2007 Dunod.

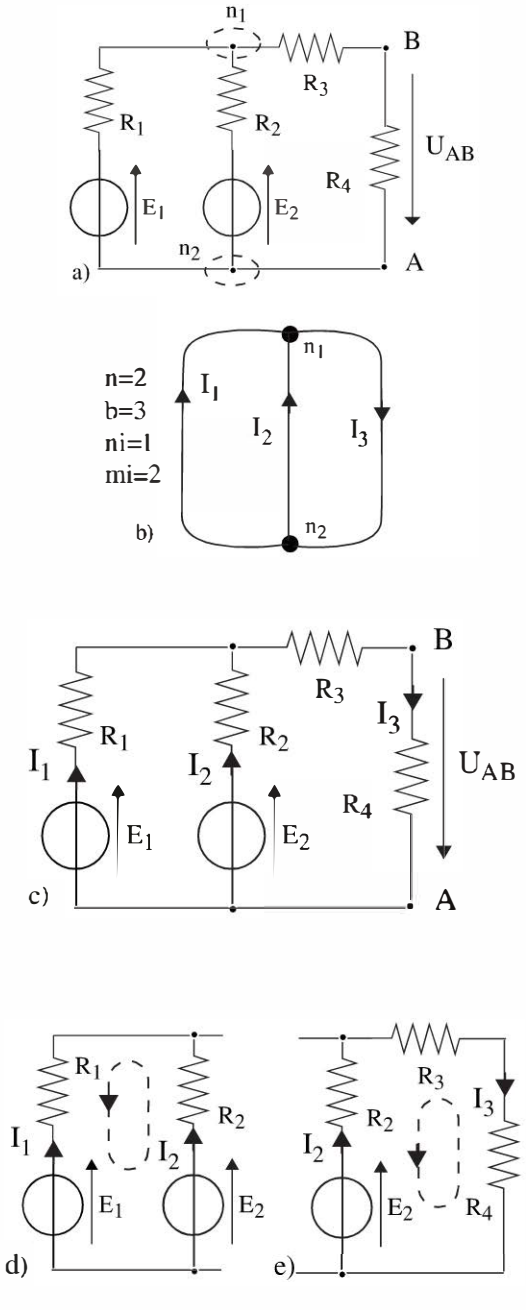


Figure 6.63

6. En reportant 1 dans 2 :

$$I_2 = \frac{E_2 - (R_3 + R_4)I_1}{R_2 + R_3 + R_4} \quad (4),$$

puis en reportant 4 dans 3 :

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3 + R_4) - (R_3 + R_4)E_2}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}} \quad (5),$$

en reportant ensuite 5 dans 4 :

$$\boxed{I_2 = \frac{E_2(R_1 + R_3 + R_4) - (R_3 + R_4)E_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}} \quad (6),$$

et en reportant 6 et 5 dans 1 :

$$\boxed{I_3 = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}}$$

7. $U_{AB} = -R_4I_3 = \dfrac{-R_4(R_2E_1 + R_1E_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}$

8. $U_{AB} = -50$ V

6.8 1. 2. et 3. Voir figure 6.64a.
4. Voir figure 6.64b.

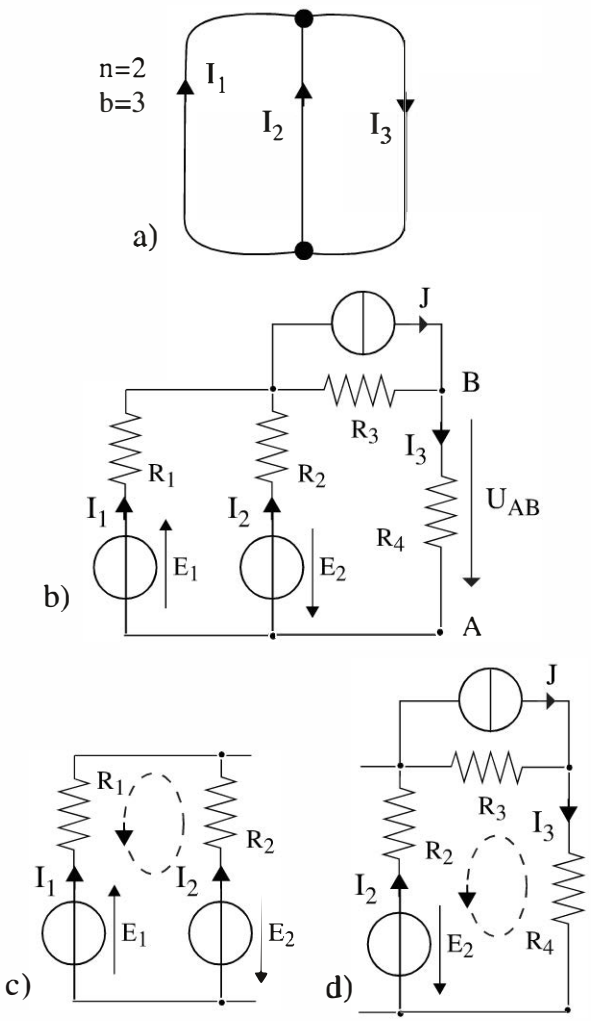


Figure 6.64

5. $I_1 + I_2 = I_3$ (1) ; figures-64c et d :

$-E_1 + R_1I_1 - R_2I_2 - E_2 = 0$ (2) ;

$E_2 + R_2I_2 + R_3(I_3 - J) + R_4I_3 = 0$ (3)

6. $I_1 = \dfrac{E_1(R_2 + R_3 + R_4) + (R_3 + R_4)E_2 + R_2R_3J}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}$

$I_2 = \dfrac{-(R_3 + R_4)E_1 - E_2(R_1 + R_3 + R_4) + R_1R_3J}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}$

Copyright © 2007 Dunod.

$$I_3 = \frac{R_2E_1 - R_1E_2 + (R_1 + R_2)R_3J}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}$$

7. $U_{AB} = -R_4I_3$

$$= \frac{-R_4(R_2E_1 + R_1E_2) - (R_1 + R_2)R_3R_4J}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}$$

8. $U_{AB} = -33$ V

6.9 1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

et donc $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ \bullet & R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix}$

2. $I_1 = \dfrac{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 100 & -100 & 0 \\ 50 & 100 & 100 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 100 & -100 & 0 \\ 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}} = 0{,}834$ A ;

$I_2 = -0{,}167$ A ; $I_3 = -0{,}667$ A

3. La diagonalisation par la méthode du pivot conduit à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 100 & -100 & 0 \\ 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -200 & 100 \\ 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

et enfin : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}834 \\ -0{,}167 \\ 0{,}667 \end{bmatrix}$

6.10 1. $U = U_A - U_B = E/2 - E = -E/2$

2. $I_1 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$ avec : $I_3 = \dfrac{-E}{2} \cdot \dfrac{1}{R_1}$,

$I_4 = \dfrac{-E}{2 \cdot R_2}$, $I_5 = \dfrac{E}{R_3} \Longrightarrow I_1 = \dfrac{5 \cdot E}{4 \cdot R}$;

et $I_3 + I_4 - I_2 = 0 \Longrightarrow I_2 = \dfrac{-3 \cdot E}{4 \cdot R}$

3. $P_{R1} = \dfrac{U_{R1}^2}{R_1} = \dfrac{E^2}{8 \cdot R}$; $P_{R2} = \dfrac{E^2}{4 \cdot R}$;

$P_{R3} = \dfrac{E^2}{2 \cdot R}$ (absorbées car conventions récepteur)

4. $P_1 = E_1 \cdot I_1 = \dfrac{5 \cdot E^2}{4 \cdot R}$;

$P_2 = E_2 \cdot I_2 = \dfrac{-3 \cdot E^2}{8 \cdot R}$ (fournies car conventions générateur)

5. Voir tableau 6.7.

Tableau 6.7

	Puissance **fournie** par les générateurs	Puissance **absorbée** par les récepteurs
E_1	78W	⊠
E_2	− 23,4 W	⊠
R_1	⊠	7,8 W
R_2	⊠	15,6 W
R_3	⊠	31,2 W
	54,6 W	54,6 W

6.11 1. $P_g = \dfrac{E_g^2}{(R_g + R_{CH})}$

2. $U_{CH} = \dfrac{R_{CH}}{(R_g + R_{CH})} \cdot E_g$

$\Longrightarrow P_{CH} = \dfrac{U_{CH}^2}{R_{CH}} = \dfrac{R_{CH}}{(R_g + R_{CH})} \cdot E_g^2$

3. $dP_{CH} = \dfrac{\partial P_{CH}}{\partial R_{CH}} \cdot dR_{CH} + \dfrac{\partial P_{CH}}{\partial R_g} \cdot dR_g + \dfrac{\partial P_{CH}}{\partial E_g} \cdot dE_g$

Copyright © 2007 Dunod.

4. $\dfrac{\partial P_{CH}}{\partial R_{CH}} = \dfrac{\partial (R_{CH} \cdot (R_{CH} + R_g)^{-2} \cdot E_g^2)}{\partial R_{CH}}$

$$= \frac{R_g - R_{CH}}{(R_{CH} + R_g)^3} \cdot E_g^2,$$

P_{CH} est max. si $\dfrac{\partial P_{CH}}{\partial R_{CH}} = 0 \Longrightarrow R_{CH} = R_g$;

$$P_g = \frac{E_g^2}{2 \cdot R_g}$$

6.12 Voir figure 6.65. Modèle valable $[0{,}8A\,;\ 6{,}5A]$.

$E_{TH} = 40$ V (point A) et $R_{TH} = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = 3{,}33\ \Omega$

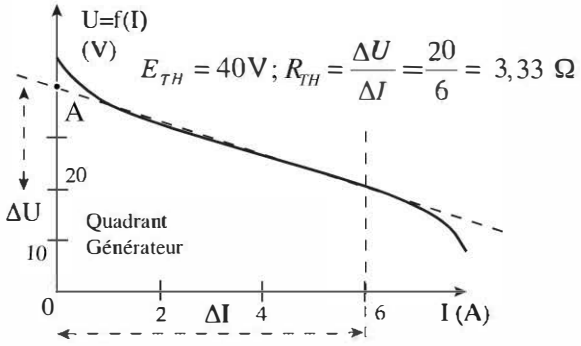


Figure 6.65

6.13 R_{TH} (figure 6.66) vaut :

$$R_{TH} = R_1//R_2// + R_3//R_4.$$

Soit : $R_{TH} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$

$E_{TH} = U_{AB} = U_{AM} - U_{BM}$ (figure 6.67) et en utilisant les relations des ponts diviseurs :

$$U_{AM} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E,\ U_{BM} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E$$

D'où :

$$E_{TH} = \left(\frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4) + R_4 \cdot (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right) E$$

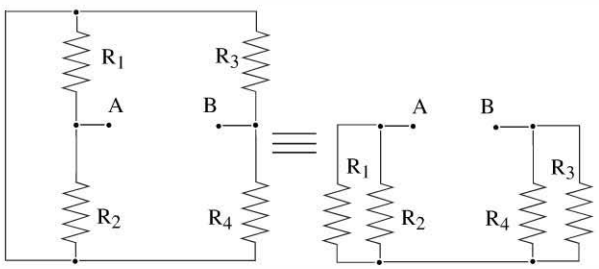


Figure 6.66

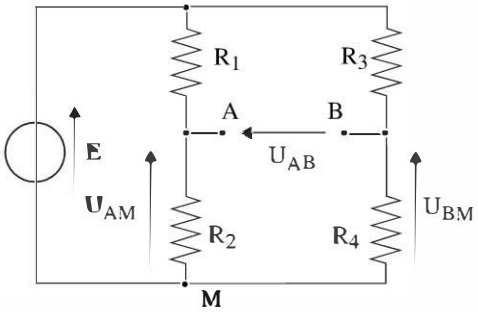


Figure 6.67

6.14 Il y a deux étapes associées au calcul de I, car il y a deux sources indépendantes E et J.

1re étape (figure 6.68) : $I_1 = \dfrac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$ (loi de la maille) ;

2e étape (figure 6.69) : $I_2 = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} J$ (pont diviseur de courant).

$$\Longrightarrow I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} J$$

$$= \frac{E - R_1 \cdot J}{R_1 + R_2 + R_3}$$

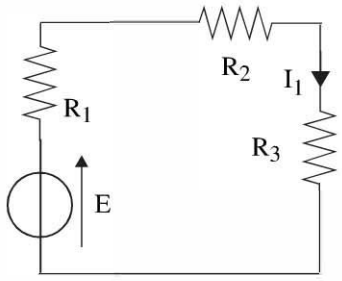


Figure 6.68

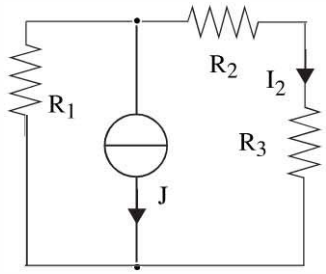


Figure 6.69

CHAPITRE 7

RÉVISIONS

7.1 En RPCA et à fréquence fixe, chaque grandeur est sinusoïdale $s(t) = \widehat{S}\cos(\omega t + \theta)$; l'am-

Copyright © 2007 Dunod.

plitude crête $\widehat{S}$ et la phase à l'origine θ sont, avant résolution, inconnues.

7.2 Le vecteur de Fresnel associé au phaseur $\overline{U}$ tourne à la pulsation ω tandis que le vecteur associé au phaseur réduit $\overline{U}_1$ est fixe ; on a $\overline{U} = \overline{U}_1\sqrt{2}e^{j\omega t}$.

7.3 Les dipôles passifs sont remplacés par des impédances $\overline{Z}$ et les dipôles actifs sinusoïdaux par leurs phaseurs associés $\overline{S}$; les autres sources sont éteintes.

7.4 On détermine la transformée de Laplace, soit par la formule $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ soit à l'aide des tables et des propriétés. La transformée inverse s'obtient soit par la formule $f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} F(p)e^{pt}dp$, soit par la décomposition en fractions partielles et en utilisant les tables, soit encore en utilisant le calcul des résidus.

7.5 Il reste des sources sinusoïdales représentées par leur transformée $S(p)$ et des impédances opérationnelles $Z(p)$. Les C.I. sont annulées.

7.6 L'expression obtenue est la solution équivalente au régime forcé (circuit sans C.I. mais avec toutes les sources) qui contient un terme transitoire et un terme de RPCA.

7.7 Il existe les puissances temporelles : la puissance instantanée (calcul de $v(t)\cdot i(t) = P_0 + p_f(t)$), la puissance moyenne P_0 (représente l'écoulement constant de l'énergie), la puissance fluctuante $p_f(t)$ (non transformée en travail) et les puissances dans le domaine complexe : la puissance complexe $\overline{S} = P + jQ$, la puissance active $P = P_0$, la puissance réactive Q et la puissance apparente $S = |\overline{S}|$. Un mauvais F_p entraîne une forte consommation de Q par rapport à P et donc un courant en ligne important. On y remédie en réalisant une compensation.

EXERCICES

7.8 1. $\overline{S}_1 = 230\sqrt{2}e^{j(628t-60°)}$ $\overline{S}_1 = 230e^{-j60°}$

$\overline{S}_2 = 230e^{j(314t)}$ $\overline{S}_2 = 163$

$\overline{S}_3 = 141e^{j(314t+\frac{\pi}{3})}$ $\overline{S}_3 = 100e^{j\frac{\pi}{3}}$

2. $\arg\left(\dfrac{\overline{S}_2}{\overline{S}_3}\right) = 0 - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

Les pulsations étant différentes, la notion de déphasage n'a pas de sens.

7.9 1.

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_{R1} + \left(\frac{1}{\overline{Z}_{R2}} + \frac{1}{\overline{Z}_C} + \frac{1}{\overline{Z}_L}\right)^{-1}$$

$$= \overline{Z}_{R1} + \frac{\overline{Z}_{R2}\overline{Z}_C\overline{Z}_L}{\overline{Z}_{R2}\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\overline{Z}_L + \overline{Z}_{R2}\overline{Z}_L}$$

$$\overline{Z}_{AB} = \frac{R_1(R_2 + jL\omega) - R_1R_2LC\omega^2 + jR_2L\omega}{R_2(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

$$= A + jB$$

avec

$$A = \frac{R_1R_2^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2(R_1 + R_2)}{R_2^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

$$B = \frac{L\omega R_2^2(1 - LC\omega^2)}{R_2^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

2. $B = \dfrac{L\omega_R R_2^2(1 - LC\omega_R^2)}{R_2^2(1 - LC\omega_R^2)^2 + (L\omega_R)^2} = 0$

$$\Longrightarrow (1 - LC\omega_R^2) = 0 \Longrightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3. $\overline{Z}_{AB} = A$

$$= \frac{R_1R_2^2(1 - LC\omega_R^2)^2 + (L\omega_R)^2(R_1 + R_2)}{R_2^2(1 - LC\omega_R^2)^2 + (L\omega_R)^2}$$

$$= R_1 + R_2 \Longrightarrow P = (R_1 + R_2)I^2$$

$Q = 0$

7.10 1. Voir figure 7.28a.

2. $\overline{E}_1 = 100$ V

$\overline{E}_2 = 50e^{j45°}$ V

$\overline{Z}_R = 50\,\Omega$

$\overline{Z}_L = j50\,\Omega$

$\overline{Z}_C = -j20\,\Omega$

3. Voir figure 7.28b.

4. $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$

$\overline{E}_1 + \overline{Z}_C\overline{I}_1 - \overline{Z}_L\overline{I}_2 + \overline{E}_2 = 0$

$\overline{E}_1 + \overline{Z}_C\overline{I}_1 - \overline{Z}_R\overline{I}_3 = 0$

avec $\overline{I} = \overline{I}_3$

Copyright © 2007 Dunod.

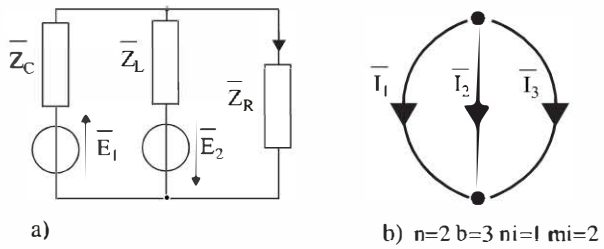


Figure 7.28

5. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{Z}_C & -\overline{Z}_L & 0 \\ \overline{Z}_C & 0 & -\overline{Z}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{E}_1 - \overline{E}_2 \\ -\overline{E}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overline{I}_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \overline{Z}_C & -\overline{Z}_L & -\overline{E}_1 - \overline{E}_2 \\ \overline{Z}_C & 0 & -\overline{E}_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{Z}_C & -\overline{Z}_L & 0 \\ \overline{Z}_C & 0 & -\overline{Z}_R \end{bmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \overline{I}_3 = \frac{\overline{Z}_C(-\overline{E}_1 - \overline{E}_2) + \overline{E}_1(\overline{Z}_L + \overline{Z}_C)}{\overline{Z}_C\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_C}$$

$$\Longrightarrow \overline{I} = \overline{I}_3 = \frac{\overline{Z}_C\overline{E}_1 - \overline{E}_2\overline{Z}_L}{\overline{Z}_C\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_C}$$

$$= \frac{-LC\omega^2\overline{E}_1 - \overline{E}_2}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

avec $\overline{E}_1 = 100e^{j0}$ V ; $\overline{E}_2 = 50e^{j45°}$ V ;

$\overline{Z}_R = 500\ \Omega$; $\overline{Z}_L = j\,50\ \Omega$; $\overline{Z}_L = -j\,20\ \Omega$.

$\Longrightarrow \overline{I} = 0{,}383e^{j\,10{,}9°}$ A ;

$\Longrightarrow i(t) = 0{,}537\cos(10^3 t + 0{,}87°)$ A ;

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U} - \overline{E}_1}{\overline{Z}_C} = 4{,}75e^{-j\,112{,}3°}\ \text{A} ;$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U} + \overline{E}_2}{\overline{Z}_L} = 4{,}69e^{-j\,72{,}3°}$$

6. Voir figure 7.29 :

$P_R = RI^2 = 500 \times 0{,}383^2 \approx 72$ W

	Puissance active consommée	Puissance réactive consommée
E_1	– 180 W	– 439 VAR
E_2	107 W	– 208 VAR
$\overline{Z_R}$	73 W	
$\overline{Z_L}$		1098 VAR
$\overline{Z_C}$		– 451 VAR
	0 W	0 VAR

Figure 7.29

$Q_L = L\omega I_2^2 \approx 1\,098$ VAR

$Q_C = \dfrac{I_2^2}{C\omega} \approx -451$ VAR

$\overline{S}_{E1} = -180 - j\,439$ VA (absorbée)

et $\overline{S}_{E2} = -107 + j\,208$ VA (fournie)

7. On détermine par Millman le phaseur $\overline{U}_{AB}$ puis on déduit le courant : $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}_{AB}}{R}$

$$\overline{U}_{AB} = \frac{\left(\dfrac{\overline{E}_1}{\overline{Z}_L} - \dfrac{\overline{E}_2}{\overline{Z}_C}\right)}{\dfrac{1}{\overline{Z}_C} + \dfrac{1}{\overline{Z}_L} + \dfrac{1}{\overline{Z}_R}}$$

$$= \frac{(\overline{Z}_C\overline{E}_1 - \overline{E}_2\overline{Z}_L)\overline{Z}_R}{\overline{Z}_C\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_C}$$

$$\Longrightarrow \overline{I} = \frac{\overline{Z}_C\overline{E}_1 - \overline{E}_2\overline{Z}_L}{\overline{Z}_C\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_L + \overline{Z}_R\overline{Z}_C}$$

7.11 1. $e(t) - L\dfrac{di(t)}{dt} - u(t) = 0$

$u(t) = R \cdot i_3(t)$

$C\dfrac{du(t)}{dt} = i_2(t)$

$i(t) = i_2(t) + i_3(t)$

$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{e(t)}{R} + C\frac{de(t)}{dt}$$

2. Avec $i(0^+) = I_0$, $\dfrac{di(0^+)}{dt} = I_1$, $e(0^+) = E_0$

Copyright © 2007 Dunod.

$$\Longrightarrow \left(LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1\right) I(p) - LC(pI_0 + I_1) - CE_0 = \left(\frac{1 + RC_p}{R}\right) E(p)$$

3. $\Delta(p) \cdot I(p) + G(p) = F(p)$

$$\Delta(p) = LCp^2 + \frac{Lp}{R} + 1$$

$$G(p) = -CE_0 - LC(pI_0 + I_1)$$

$$F(p) = \frac{1 + RCp}{R} E(p)$$

$$\Delta(p) = LCp^2 + \frac{Lp}{R} + 1 = 0$$

$$D^2 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC$$

$$D = 0 \Longrightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$$

Si $R \geqslant R_0$, les deux pôles sont réels $p_{0,1} = \left(-\frac{L}{R} \pm \sqrt{D}\right)/2LC$ et si $R < R_0$, les deux pôles sont conjugués

$$p_{0,1} = \left(-\frac{L}{R} \pm j\sqrt{|D|}\right)/2LC$$

ici $p_{0,1} = -225\ ;\ -1\,775$

4. $$I(p) = \frac{\widehat{E}(1 + RCp)p/RLC}{\left(p^2 + \frac{p}{RC} + \frac{1}{LC}\right)(p^2 + \omega_0^2)}$$

$$I(p) = \frac{\widehat{E}}{RLC}\left\{\frac{A_0}{p - p_0} + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{M_0 p + N_0}{p^2 + \omega_0^2}\right\}$$

$$A_0 = (p - p_0)I(p)]_{p \longrightarrow p_0} = \frac{(1 + RCp_0)p_0}{(p_0 - p_1)(p_0^2 + \omega_1^2)}$$

$$A_1 = (p - p_1)I(p)]_{p \longrightarrow p_1} = \frac{(1 + RCp_1)p_1}{(p_1 - p_0)(p_1^2 + \omega_1^2)}$$

avec $p^2 + \omega_0^2 = (p - j\omega)(p + j\omega)$.

$$(p - j\omega)I(p)]_{p \longrightarrow j\omega} = \frac{M_0 j\omega + N_0}{j2\omega} = \frac{(1 + jRC\omega)j\omega}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}\right)j2\omega}$$

$$\Longrightarrow N_0 = \frac{(RLC\omega)^2}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}$$

et $$M_0 = \frac{R^3LC^2(1 - LC\omega^2)}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}$$

5. $A_0 = -12{,}3 \cdot 10^{-8}$

$A_1 = 3{,}11 \cdot 10^{-8}$

$M_0 = 4{,}59 \cdot 10^{-10}$

$N_0 = 5{,}27 \cdot 10^{-4}$

$$I(p) = \left\{\frac{-0{,}491}{p + 225} + \frac{0{,}124}{p + 1\,174} + \frac{1{,}83 \cdot 10^{-3}p + 2{,}11 \cdot 10^{-3}}{p^2 + 10^6}\right\}$$

$$= \left\{\ldots + \frac{1{,}83 \cdot 10^{-3}p}{p^2 - 10^6} + \frac{2{,}11 \cdot 10^{-3}}{p^2 + 10^6}\right\}$$

$$\Longrightarrow i(t) = \left\{-0{,}491 \cdot 10^{-7}e^{-225t} + 0{,}124e^{-1\,775t} + 2{,}11\cos(10^3t - 90^\bullet)\right\} \text{ A}$$

La solution en RPCA est $i(t)_{t \longrightarrow \infty} = 2{,}11\cos(10^3t - 90^\circ)$.

7.12 1. Voir figure 7.30.

2. $$U(p) = \left(\frac{E(p)}{Z_C(p)} + J(p)\right) \cdot \left(\frac{1}{Z_C(p)} + \frac{1}{Z_L(p)} + \frac{1}{Z_L(p)}\right)^{-1}$$

$$U(p) = \frac{CpE(p) + J(p)}{Cp + \frac{1}{Lp} + \frac{1}{R}} = \frac{LCp^2E(p) + LpJ(p)}{RLCp^2 + Lp + R}$$

3. Voir figure 7.31 avec :

$$J_N(p) = \frac{E(p)}{Z_C(p)} = CpE(p) \text{ et}$$

$$Z_N(p) = \frac{Z_L(p) \cdot Z_C(p)}{Z_L(p) + Z_C(p)} = \frac{L/C}{Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{Lp}{LCp^2 + 1}$$

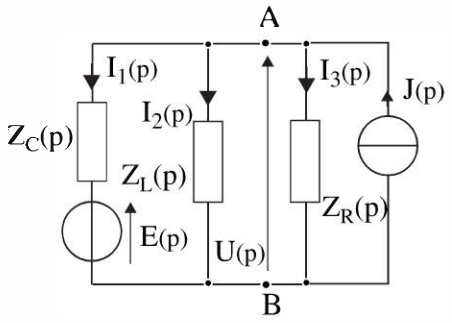


Figure 7.30

Copyright © 2007 Dunod.

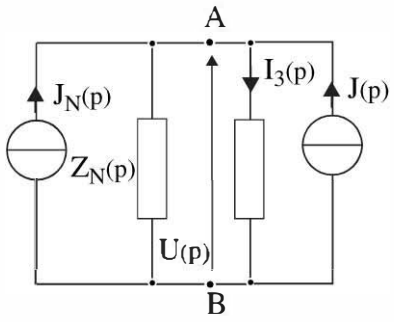


Figure 7.31

4. On regroupe les deux sources $J_{équi.}(p) = J_N(p) + J(p)$ et les deux impédances Z_N et Z_R en //, $Z_{équi.}(p) = \dfrac{Z_N(p) \cdot Z_R(p)}{Z_N(p) + Z_R(p)}$

$$= \frac{R \cdot Lp}{LCp^2 + 1}\left(\frac{Lp}{LCp^2 + 1} + R\right)^{-1}$$

$$= \frac{RLp}{RLCp^2 + Lp + R}$$

$$U(p) = Z_{équi.}(p) \cdot J_{équi.}(p)$$

$$U(p) = \frac{RLp(CpE(p) + J(p))}{RLCp^2 + Lp + R}$$

$$= \frac{RCp^2E(p) + LpJ(p))}{LCp^2 + \dfrac{L}{R}p + 1}$$

7.13 1. Voir figure 7.32.

2. $\overline{Z}_{TH} = \left((\overline{Z}_C // \overline{Z}_L)\right) // \overline{Z}_L$

$$= \left(\frac{\mathrm{j}L\omega}{1 - LC\omega^2}\right) // \overline{Z}_{2R} = \frac{\mathrm{j}2R}{2 + \mathrm{j}}$$

et $\overline{E}_{TH} = \dfrac{\overline{E}/\overline{Z}_L + \overline{J}}{1/\overline{Z}_L + 1/\overline{Z}_C + 1/\overline{Z}_{2R}}$

$$= \frac{4\overline{E} + \mathrm{j}2R\overline{J}}{2 + \mathrm{j}}$$

3. $\overline{I} = \dfrac{\overline{E}_{TH}}{\overline{Z}_{TH} + \overline{Z}_{2R}} = \dfrac{2\mathrm{j}\overline{E} - R\overline{J}}{(1 + 3\mathrm{j})}$

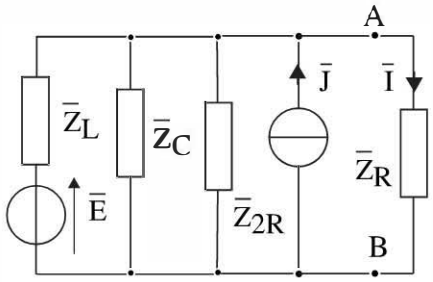


Figure 7.32

CHAPITRE 8

RÉVISIONS

8.1 Le théorème de superposition des sources est utilisé pour l'étude des circuits qui intègrent plusieurs sources de mêmes régimes (soit continues soit sinusoïdales de mêmes fréquences). Le théorème de superposition des régimes est de portée plus vaste, car il permet l'étude des circuits linéaires ayant plusieurs sources, de régimes différents.

8.2 Les dipôles actifs sont des sources périodiques décomposables en série de Fourier ou des sources de fréquences différentes – une source continue est vue comme une source à fréquence nulle –.

8.3 La série de Fourier d'une source périodique qui contiendrait une infinité de termes induit une infinité d'études partielles ; ce qui est impossible à réaliser pratiquement. Toutefois, souvent il existe une récurrence des expressions partielles, permettant la détermination de l'expression générale.

8.4 La transformée de Laplace attribue une expression mathématique à des sources périodiques quelconques. Ce qui permet ensuite l'étude opérationnelle du circuit qui détermine l'expression de la solution.

8.5 Non, si les signaux sont de fréquences différentes, il n'y a pas de puissance active absorbée mais uniquement une puissance fluctuante. Les signaux doivent être de même fréquence ou tous les deux continus.

8.6 Les spectres doivent au moins avoir des raies de mêmes fréquences. La superposition des spectres doit entraîner la superposition d'au moins une raie.

EXERCICES

8.7 1. $E_{10} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e(t)dt = 0$, car $e(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ;

2. $E = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^2(t)dt} = \sqrt{\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} e^2(t)dt}$

avec : $\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} e^2(t)dt = \dfrac{4\widehat{E}^2}{T}\displaystyle\int_0^{T/4}\left(\frac{4}{T}t\right)^2 dt$

$$= \frac{64\widehat{E}^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4} = \frac{64\widehat{E}^2}{T^3} \cdot \frac{T^3}{3 \times 64} = \frac{\widehat{E}^2}{3}$$

$$E = \sqrt{\frac{\widehat{E}^2}{3}} = \frac{\widehat{E}^2}{\sqrt{3}}$$

Copyright © 2007 Dunod.

3. $a_n = 0$; $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T e(t)\cos(n\omega t)dt$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} e(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{4\widehat{E}}{T}\left(\int_0^{T/4}\left(\frac{4}{T}t\right)\sin(n\omega t)dt + \int_{T/4}^{T/2}\left(2-\frac{4}{T}t\right)\sin(n\omega t)dt\right)$$

$$b_n = \frac{4\widehat{E}}{T}\left(\int_0^{T/4}\left(\frac{4}{T}t\right)\sin(n\omega t)dt - \int_{T/4}^{T/2}\left(\frac{4}{T}t\right)\sin(n\omega t)dt + 2\int_{T/4}^{T/2}\sin(n\omega t)dt\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{4}{T}t\right)\sin(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\left(\int_{t_1}^{t_2} t\sin(n\omega t)dt\right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(\left[\frac{-t\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_{t_1}^{t_2}\right)$$

$$b_n = \frac{16\widehat{E}}{T^2}\left(\left[\frac{-t\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_0^{T/4}\right) - \frac{16\widehat{E}}{T^2}\left(\left[\frac{-t\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_{T/4}^{T/2}\right) + \frac{4\widehat{E}}{T}\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/4}^{T/2}$$

$$b_n = \frac{16\widehat{E}}{T^2}\left(\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{(n\omega)^2}\right) - \frac{16\widehat{E}}{T^2}\left(\frac{-T\cos(n\pi)}{2n\omega} - \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{(n\omega)^2}\right) - \frac{8\widehat{E}}{T}\frac{\cos(n\pi)}{n\omega}$$

$$b_n = \frac{32\widehat{E}}{T^2}\left(\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{(n\omega)^2}\right) = \frac{8\widehat{E}}{n^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{8\widehat{E}}{n^2\pi^2}\ (n \text{ impaire})$$

$$\Longrightarrow e(t) = \frac{8\widehat{E}}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((2m+1)\omega t)}{(2m+1)^2} = \frac{8\widehat{E}}{\pi^2}\left(\cos(\omega t) + \frac{\cos(3\omega t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega t)}{5^2}\right)$$

8.8 1. Voir figure 8.30.

2. $V_0 = E_1 + E_{10} = E_1 = 100$ V

3. Voir figure 8.31.

4. $\overline{V}_1 = \dfrac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_C + \overline{Z}_L}\overline{E}_{10}$

avec $a_1 = 0$ et

$$b_1 = -\frac{T\widehat{E}}{4\omega} + \frac{\widehat{E}}{\omega^2} = \widehat{E}\frac{(4-2\pi)}{4\omega^2} < 0$$

$$\Longrightarrow \overline{E}_{10} = \frac{8\widehat{E}}{\pi^2} \simeq 81{,}3 \text{ V} ;$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{E}_{10}}{1 - LC\omega^2} = \frac{81{,}3}{0{,}5} = 162{,}6 \text{ V}$$

5. $v(t) = 100 + 162{,}6\cos(1\,000t)V$

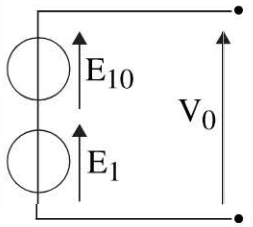


Figure 8.30

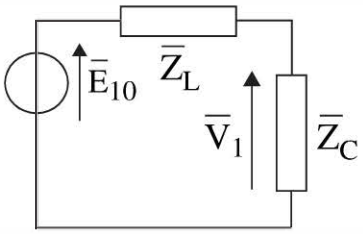


Figure 8.31

8.9 1. $J_0 = \dfrac{1}{T}\left(\displaystyle\int_0^{\alpha T} 2J dt + \int_{\alpha T}^{T} -J dt\right)$

$$= \frac{2J\alpha T - J(T-\alpha T)}{T} = (3\alpha - 1)J$$

2. $J_e = \sqrt{\dfrac{1}{T}\left(\displaystyle\int_0^{\alpha T}(2J)^2 dt + \left(\int_{\alpha T}^{T} J^2 dt\right)\right.}$

$$= \frac{(2J)^2\alpha T + J^2(T-\alpha T)}{T} = J\sqrt{(3\alpha+1)}$$

3. $a_n = \dfrac{2}{T}\left(\displaystyle\int_0^{\alpha T} 2J\cos(n\omega t)dt + \int_{\alpha T}^{T} -J\cos(n\omega t)dt\right)$

$$a_n = \frac{2}{T}\left\{2J\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{\alpha T} - J\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\alpha T}^{T}\right\}$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$a_n = \frac{2J}{n\omega T}\{2\sin(n\omega\alpha T) - \sin(n\omega T)\}$$

$$\xrightarrow{\omega T = 2\pi} a_n = \frac{2J}{n\pi}\sin(2n\alpha\pi)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\alpha T} 2J\sin(n\omega t)dt + \int_{\alpha T}^{T} -J\sin(n\omega t)dt\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left\{2J\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{\alpha T} - J\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\alpha T}^{T}\right\}$$

$$b_n = \frac{2J}{n\omega T}\{2 - 3\cos(n\omega\alpha t) + \cos(n\omega t)\}$$

$$\xrightarrow{\omega T = 2\pi} b_n = \frac{3J}{n\pi}(1 - \cos(2n\alpha\pi)$$

$$\Longrightarrow \widehat{J}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$= \frac{J}{n\pi}\sqrt{13 - 18\cos(2\pi n\alpha) + 5\cos^2(2n\pi\alpha)}$$

$$\text{et } \tan(\varphi_n) = \frac{3(1 - \cos(2n\alpha\pi))}{2\sin(2n\alpha\pi)}$$

8.10 1. Voir figure 8.32.

2. On a $I_0 = J_0 = (3\alpha - 1)J$ et $V_0 = E$.

3. Voir figure 8.33.

4. À partir du diviseur de courant, on obtient :

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_C}\overline{J}_1 = \frac{1}{1 - LC\omega^2}\overline{J}_1$$

avec $|\overline{I}_1| = 0{,}1|\overline{J}_1|$

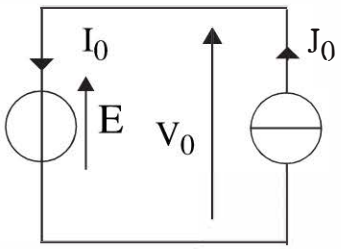


Figure 8.32

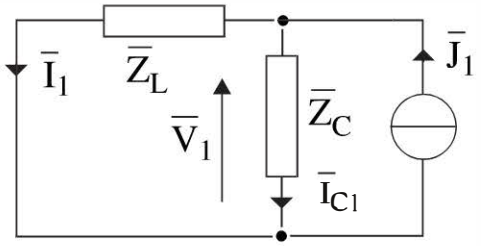


Figure 8.33

$$|\overline{I}_1| = \left|\frac{1}{1 - LC\omega^2}\right||\overline{J}_1| \Rightarrow |1 - LC\omega^2| = 10$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 = 11$$

D'autre part

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{Z}_L \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_C}\overline{J}_1 = \frac{JL\omega}{1 - LC\omega^2}\overline{J}_1$$

avec $|\overline{V}_1| = 0{,}05\overline{V}_0 = 0{,}05E$

$$|\overline{V}_1| = \left|\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right||\overline{J}_1| \Rightarrow 0{,}05E = \frac{L\omega}{10}\widehat{J}_1$$

avec $\widehat{J}_1 = \frac{6J}{\pi} \Rightarrow L = \frac{\pi E}{18\omega J}$

5. $LC\omega^2 = 11 \Rightarrow C = \frac{198J}{\pi\omega E}$

6. Le 2e harmonique I_2 n'existe pas, car il n'existe pas de 2e harmonique dans $j(t)$; le 3e harmonique est $|\overline{I}_3| = \left|\frac{1}{1 - LC(3\omega)^2}\right||\overline{J}_3| = \frac{J}{49\pi}$

$\Rightarrow \frac{|\overline{I}_3|}{|\overline{I}_1|} = \frac{10}{294} = 3{,}4\,\%$. Le 3e harmonique est d'amplitude très faible par rapport au fondamental. Les amplitudes des harmoniques suivants le seront encore beaucoup plus. Les harmoniques sont donc sans influence sur la valeur de $i(t)$. Le dimensionnement « au premier harmonique » de L et C est donc largement suffisant.

8.11 1. Voir figure 8.34 ; avec la règle du pont diviseur :

$$V_0 = \frac{R/2}{R + R/2}E = \frac{E}{3}$$

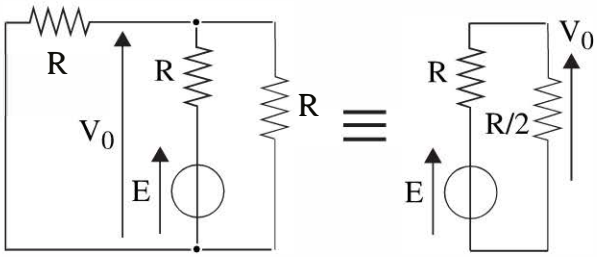


Figure 8,34

2. Voir figure 8.35 ; avec la règle de Millman :

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{E}/(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)}{\frac{1}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_R} + \frac{2}{\overline{Z}_R} + \frac{1}{\overline{Z}_C}}$$

Copyright © 2007 Dunod.

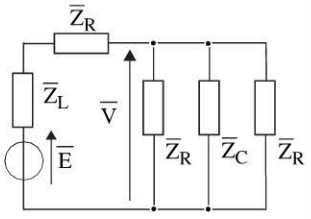


Figure 8.35

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{Z}_C\overline{Z}_R\overline{E}}{\overline{Z}_C\overline{Z}_R + 2(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{Z}_C + (\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{Z}_R}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{R\overline{E}}{3R - LCR\omega^2 + j\omega(R^2C + 2L))}$$

3. $V_0 = \dfrac{10}{3} = 3{,}33$ V,

$$\overline{V}_1 = \frac{10e^{j314t}}{2 + j3} = 2{,}77e^{j(314t - 56°)} \text{ V}$$

$$\Longrightarrow v(t) = 3{,}33 + 2{,}77\cos(314t - 56°)V$$

8.12 1. Trois études, car deux sources continues (RPCC), une source de pulsation ω (RPCA) et une autre source de pulsation 2ω (RPCA).

2. a) En RPCC : voir figure 8.36a.

$$V_0 = \frac{\dfrac{E_0}{R} + \dfrac{E}{R}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R}} = \frac{E_0 + E}{3} \text{ et } I_0 = \frac{V_0}{R}$$

b) En RPCA : voir figure 8.36b.

On forme un dipôle de Thévenin équivalent à l'ensemble J, Z_L, Z_R et E (à gauche des bornes A et B) qui devient $\overline{E}_{TH} = \overline{Z}_L\overline{J} + \overline{E}_1$ et $\overline{Z}_{TH} = \overline{Z}_L + \overline{Z}_R$; puis avec Millman :

$$\overline{V}_1 = \frac{\dfrac{\overline{E}_{TH}}{\overline{Z}_{TH}}}{\dfrac{2}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_C} + \dfrac{1}{\overline{Z}_{TH}}} \text{ et } \overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_R}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{\overline{Z}_C\overline{Z}_R(\overline{Z}_L\overline{J} + \overline{E}_1)}{2(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)\overline{Z}_C + \overline{Z}_R(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R) + \overline{Z}_C\overline{Z}_R}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{jRL\omega\widehat{J}e^{j(\omega t + \beta)} + R\widehat{E}_1e^{j(\omega t + \alpha_1)}}{(3R - LCR\omega^2) + j\omega(2L + R^2C))}$$

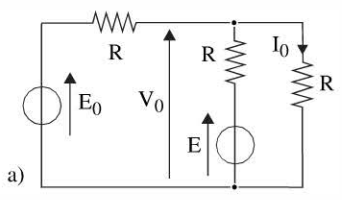


Figure 8.36

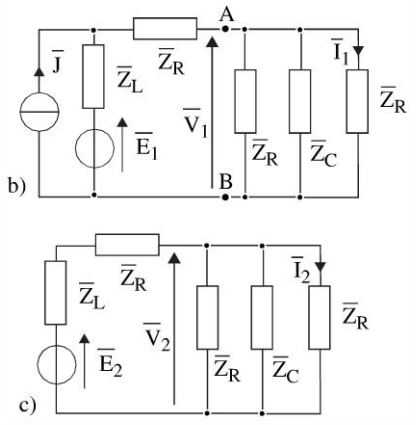


Figure 8.36 (suite)

$$\text{et } \overline{I}_1 = \frac{jL\omega\widehat{J}e^{j(\omega t + \beta)} + \widehat{E}_1e^{j(\omega t + \alpha_1)}}{(3R - LCR\omega^2) + j\omega(2L + R^2C)}$$

c) À partir de la règle de Millman (figure 8.36c) :

$$\overline{V}_2 = \frac{\dfrac{\overline{E}_2}{(\overline{Z}_L + \overline{Z}_R)}}{\dfrac{2}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_C} + \dfrac{1}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_R}} \text{ et } \overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_R} ;$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\widehat{E}_2e^{j(2\omega t + \alpha_2)}}{(3R - 4LRC\omega^2) + j2\omega(2L + R^2C)}$$

3. $i(t) = -1{,}7 + 1{,}6\cos(628t - 49{,}2°)$
$+1{,}39\cos(1256t - 11{,}3°)$ A

8.13 1. Le motif de base étant une arche de sinusoïde (figure 8.37), construite par la soustraction de 2 sinusoïdes (une décalée de $T/2$), la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \frac{\widehat{E}\omega}{p^2 + \omega^2} + e^{-\frac{T}{2}p}\frac{\widehat{E}\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\widehat{E}\omega}{p^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-\frac{T}{2}p}\right)$$

2. $e_T(t)$ est une répétition de récurrence $T/2$, d'où (figure 8.38) :

$$E_T(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-\frac{T}{2}p}} = \frac{\widehat{E}\omega}{p^2 + \omega^2}\left(\frac{1 + e^{-\frac{T}{2}p}}{1 - e^{-\frac{T}{2}p}}\right)$$

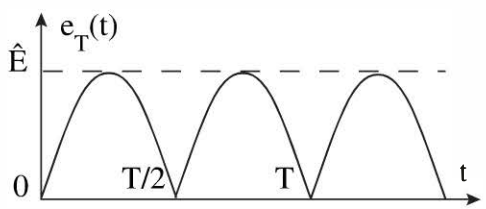


Figure 8.37

Copyright © 2007 Dunod.

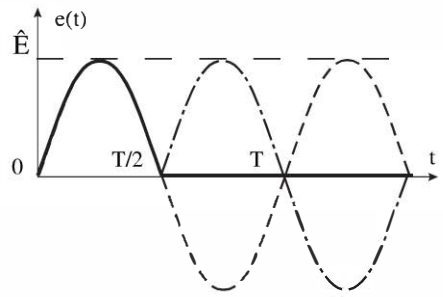


Figure 8.38

8.14 1. Voir figure 8.39.

2. Sur une période et avec la règle de Millman :

$$V(p)=\frac{\dfrac{E(p)}{R}+\dfrac{v_C(0^+)}{pZ_C}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{Z_C}}=\frac{E(p)+RCv_C(0^+)}{1+RCp}$$

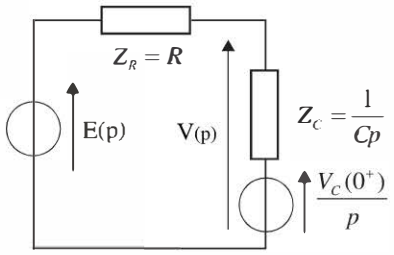


Figure 8.39

$$V(p)=\frac{\dfrac{\omega\widehat{E}}{RC}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right)}{(1/RC+p)(p^2+\omega^2)}+\frac{v_C(0^+)}{(1/RC+p)}$$

$$V(p)=\left(\frac{A}{(p+1/RC)}+\frac{Mp+N}{(p^2+\omega^2)}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right)+\frac{v_C(0^+)}{p+1/RC}$$

$$=X(p)\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right)+\frac{v_C(0^+)}{p+1/RC}$$

$$A=(p+1/RC)X(p)]_{p\to -1/RC}=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}$$

$$\frac{-\mathrm{j}\omega M+N}{-2\mathrm{j}\omega}=(p+\mathrm{j}\omega)X(p)]_{p\to -\mathrm{j}\omega}=\frac{\omega\widehat{E}}{-2\mathrm{j}\omega(1-\mathrm{j}RC\omega)}$$

$$\Rightarrow(-\mathrm{j}\omega M+N)(1-\mathrm{j}RC\omega)=\omega\widehat{E}$$

$$\Rightarrow N=\frac{\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\text{ et }M=\frac{-RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}$$

On obtient alors la décomposition suivante :

$$V(p)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\left(\frac{1}{(p+1/RC)}+\frac{-p+1/RC}{(p^2+\omega^2)}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}\right)+\frac{v_C(0^+)}{p+1/RC}$$

3. Le terme $1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}$ indique que l'original du motif de base est constitué d'une somme des deux termes décalés de $T/2$, $x(t)$ et $x(t-T/2)$, et s'y rajoute un troisième terme $v_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ lié à la C. I.

$$X(p)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\left(\frac{1}{(p+1/RC)}+\frac{-p+1/RC}{(p^2+\omega^2)}\right)\text{ implique :}$$

$$x(t)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+\frac{1}{RC\omega}\sin(\omega t)-\cos(\omega t)\right)$$

$$=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}-\frac{\widehat{E}}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t+\theta)$$

avec $\tan(\theta)=1/RC\omega$ d'où :

$$v(t)=x(t)\Gamma(t)+x(t-T/2)\Gamma(t-T/2)+v_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

4. On élimine le régime transitoire en posant $v(0^+)=v(T)$:

$$\Rightarrow x(0)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}-\frac{\widehat{E}}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\theta)+v_C(0^+)$$

$$\Rightarrow x(T)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}-\frac{\widehat{E}}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega T+\theta)+v_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}$$

$$x(T)=\frac{RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}-\frac{\widehat{E}}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\theta)+v_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}$$

$$v(0^+)=v(T)\Rightarrow v_C(0^+)=\frac{-RC\omega\widehat{E}}{1+R^2C^2\omega^2}$$

Copyright © 2007 Dunod.

8.15 1. À partir de l'équation de nœud, on a $i_2(t) = i_1(t) - i_e(t)$, d'où son spectre à la figure 8.40a (un signe « – » correspond à un ajout de $\pm 180°$ sur la phase) ; $i_C(t) = i_2(t) - i_3(t)$, spectre figure 8.40b.

2. Par définition, il n'y a pas de puissance active dans l'inductance L et le condensateur C (ils ne chauffent pas) ; dans les résistances, les puissances actives valent :

- R_1 : $I_1 = \sqrt{I_{10}^2 + I_{11}^2} = \sqrt{100 + 25} = 11{,}2$ A ; $P_{R1} = R_1 I_1^2 = 125$ W
- R_2 : $I_2 = \sqrt{I_{21}^2 + I_{22}^2 + I_{23}^2} = \sqrt{100 + 100 + 6{,}25} = 15$ A ; $P_{R1} = R_2 I_2^2 = 450$ W
- R_3 : $I_1 = \sqrt{I_{31}^2} = 5$ A, $P_{R3} = R_3 I_3^2 = 250$ W

3. Dans la source E_1 : $P_{E1} = I_{10} E_1 = 500$ W

4. Puissance fournie par $e(t)$:

$$P_e = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} - P_{E1} = 325 \text{ W} .$$

Sa puissance continue

$$P_{eC} = -I_{e0} E_{20} = -10 \times (-20) = 200 \text{ W} ;$$

d'où sa puissance harmonique

$$P_{eh} = P_e - P_{eC} = 125 \text{ W}$$

5. On ne peut pas reconstituer le spectre de $e(t)$, car même en connaissant la puissance de chacune des raies, on ne peut déduire que la valeur du produit $E_{2i}\cos(\alpha_{2i} - \beta_{ei})$.

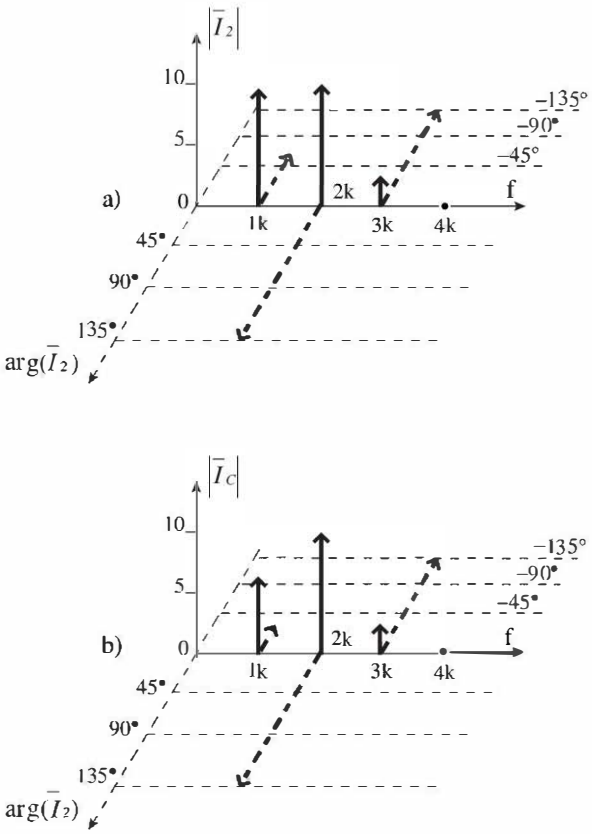


Figure 8.40

CHAPITRE 9

RÉVISIONS

9.1 L'impédance (ou l'admittance) d'un dipôle varie avec la fréquence.

9.2 Un dipôle est capacitif lorsque son impédance possède une partie imaginaire négative. On a alors un déphasage (de sa tension par rapport au courant) qui est négatif ($\varphi < 0$). De même, la puissance réactive du quadripôle est négative.

9.3 En général, un quadripôle se modélise par deux dipôles liés (dépendants), car il existe une liaison par les grandeurs issues de l'entrée et de la sortie. L'expression de l'entrée intègre une grandeur de sortie et vice versa.

9.4 La modélisation complexe est judicieuse lorsque les signaux sont en régime permanent et sinusoïdal.

9.5 La différence principale entre ces deux diagrammes est que dans Bode par rapport à Nyquist, les tracés du gain et de la phase se font avec deux dessins.

9.6 Le gain (en tension ou en courant) s'exprime par $G(\omega) = 20\log_{10}\left(|\overline{H}(j\omega)|\right)$ et le déphasage par $\varphi(\omega) = \arg\left(|\overline{H}(j\omega)|\right)$.

9.7 La pulsation de coupure à – 3 dB est la pulsation pour laquelle la valeur du gain est 3 dB en dessous du gain maximum. Une fréquence de cassure est l'intersection entre deux asymptotes.

9.8 Le lieu d'Evans montre les pôles et les zéros d'une fonction opérationnelle $H(p)$ (impédance ou transmittance) tirée du circuit.

9.9 On est seulement capable de tracer la fonction complexe $\overline{H}(j\omega)/K$, en effectuant des calculs de longueurs et de déphasages.

Copyright © 2007 Dunod.

EXERCICES

9.10 1. Voir figure 9.64a.

2. Avec $\overline{Z}_X = jX$, on a $\overline{Z}_{équi} = R + j(L\omega + X)$ figure 9.64b ; d'où : $\dfrac{L\omega + X}{R} = \tan(-30°) \Rightarrow$

$X = R\tan(-30°) - L\omega = 10(-0{,}58) - 31{,}4$

$= -37{,}2\ \Omega$

3. $\overline{Z}_X = -j37{,}2\ \Omega$, on peut imaginer un condensateur (réactance négative) pour modèle, d'où :

$$\overline{Z}_X = -j37{,}2\ \Omega = -j\frac{1}{C\omega}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{37{,}2 \times 314} = 85\ \mu F$$

4. La résonance se produite lorsque $|jL\omega_R| = L\omega_R = |jX| = \dfrac{1}{C\omega_R} \Rightarrow \omega_R^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$\Rightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{0{,}1 \times 85 \times 10^{-6}}} = 341\ \text{rad/s}$$

5. a. Voir figure 9.65.

b. $I = \dfrac{230}{10} = 23\ A$

c. $Q = 0$, $P = \dfrac{U^2}{R} = 4\,840\ W$

et $S = P = 4\,840\ V.A.$

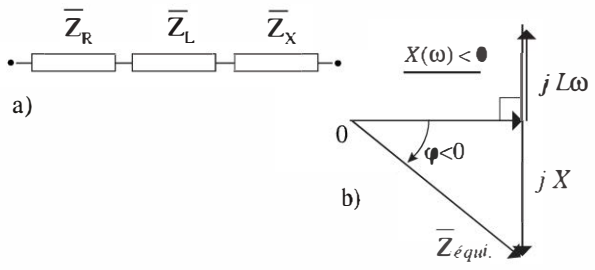


Figure 9.64

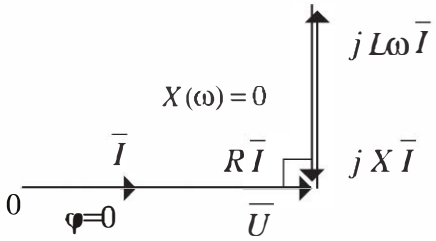


Figure 9.65

9.11 1. $\overline{Y}_{équi} = \overline{Y}_{C0} + \overline{Y}_S$

avec $\overline{Y}_S = \left(R + j\left(\dfrac{LC_1\omega^2 - 1}{C_1\omega}\right)\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \overline{Y}_{équi} = jC_0\omega + \frac{C_1\omega}{RC_1\omega + j(LC_1\omega^2 - 1)}$$

2.

$$\overline{Y}_{équi} = \frac{jC_0\omega\left((RC_1\omega)^2 + (LC_1\omega^2 - 1)^2\right) + (C_1\omega)(RC_1\omega + j(1 - LC_1\omega^2))}{(RC_1\omega)^2 + (LC_1\omega^2 - 1)^2}$$

$$\overline{Y}_{équi} = \frac{RC_1^2\omega^2}{(RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2} + j\omega\left(\frac{(1 - LC_1\omega^2)C_1 + \left((RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2\right)C_0}{(RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2}\right)$$

$$G(\omega) = \frac{RC_1^2\omega^2}{(RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2}$$

et

$$X(\omega) = \frac{(1 - LC_1\omega^2)C_1\omega + \left((RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2\right)C_0\omega}{(RC_1\omega)^2 + (1 - LC_1\omega^2)^2}$$

Avec R négligeable : $G(\omega) = 0$ et

$$X(\omega) = \frac{C_1\omega + (1 - LC_1\omega^2)C_0\omega}{(1 - LC_1\omega^2)}$$

3. La plus forte valeur correspond au dénominateur qui tend vers zéro (avec un numérateur $\neq 0$) ; on pose donc

$$(1 - LC_1\omega_s^2)^2 = 0 \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{1}{LC_1}$$

4. La plus faible valeur impose

$$C_1\omega_p + (1 - LC_1\omega_p^2)C_0\omega_p = 0$$

avec $(1 - LC_1\omega_p^2)^2 \neq 0 \Rightarrow \omega_p^2 = \dfrac{C_0 + C_1}{C_0C_1L}$

5. $X(\omega) = LC_0C_1\omega\dfrac{\dfrac{1}{LC_0} + \dfrac{1}{LC_1} - \omega^2}{(1 - LC_1\omega^2)}$

$$= \omega(C_1 + C_0)\frac{1 - \dfrac{C_1C_0}{C_1 + C_0}L\omega^2}{(1 - LC_1\omega^2)} ;$$

$$\Rightarrow \overline{Y}_{équi} = jK\omega\frac{1 - \omega^2/\omega_p^2}{1 - \omega^2/\omega_s^2}$$

avec $K = C_1 + C_0$; $\omega_p > \omega_s$

Copyright © 2007 Dunod.

6. Pour $\omega \simeq \omega_p$:

$$\overline{Y}_{équi} = \frac{jK\omega_p}{1-\omega_p^2/\omega_s^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)$$

$$= \frac{jK\omega_p}{1-\omega_p^2/\omega_s^2}\left(1-\left(1+\frac{\omega-\omega_p}{\omega_p}\right)^2\right)$$

on pose $\Delta\omega = \omega_p - \omega$

$$\Rightarrow \overline{Y}_{équi} = \frac{jK\omega_p}{1-\omega_p^2/\omega_s^2}\left(1-\left(1-2\frac{\Delta\omega}{\omega_p}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right)^2\right)\right)$$

d'où : $\overline{Y}_{équi} \approx 2\frac{jK\omega_p}{1-\omega_p^2/\omega_s^2}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right) \longrightarrow 0$

Pour $\omega \simeq \omega_s$:

$$\overline{Y}_{équi} = jK\omega\frac{1-\omega^2/\omega_p^2}{1-\omega^2/\omega_s^2}$$

$$= jK\omega\frac{1-\omega_s^2/\omega_p^2}{1-\left(1+\frac{\omega-\omega_s}{\omega_s}\right)^2}$$

$$= jK\omega\frac{1-\omega_s^2/\omega_p^2}{-\left(2\frac{\omega-\omega_s}{\omega_s}\right)^2}$$

on pose $\Delta\omega = \omega_s - \omega$

$$\Rightarrow \overline{Y}_{équi} = jK\omega\frac{1-\omega_s^2/\omega_p^2}{1-\left(1-\frac{\Delta\omega}{\omega_s}\right)^2}$$

$$= jK\omega\frac{1-\omega_s^2/\omega_p^2}{2\frac{\Delta\omega}{\omega_s}}$$

(On sait que $\omega_p > \omega_s$ et donc $1-\omega_s^2/\omega_p^2 > 0$)

Lorsque $\omega \to \omega_s^-$ alors $\Delta\omega > 0 \Rightarrow \overline{Y}_{équi} \to \infty$

Lorsque $\omega \to \omega_s^+$ alors

$$\Delta\omega < 0 \Rightarrow \overline{Y}_{équi} \to -\infty$$

La courbe est tracée figure 9.66.

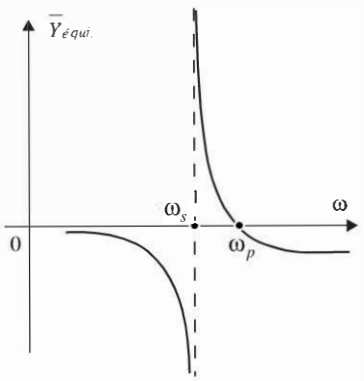


Figure 9.66

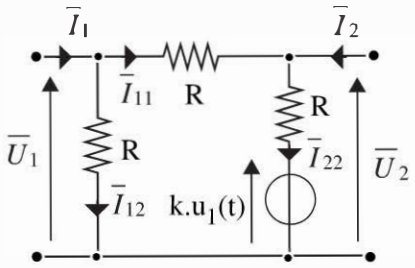


Figure 9.67

9.12 1. On a les équations (figure 9.67) :

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_{11} + \overline{I}_{12},\ \overline{I}_{12} = \frac{\overline{U}_1}{R},\ \overline{I}_{11} = \frac{\overline{U}_1 - \overline{U}_2}{R}$$

$$\Rightarrow \overline{I}_1 = \frac{2}{R}\overline{U}_1 - \frac{1}{R}\overline{U}_2\ ;\ \overline{Y}_{11} = \frac{2}{R} \text{ et } \overline{Y}_{12} = -\frac{1}{R}$$

De la même façon, on obtient à partir de

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_{22} - \overline{I}_{11} \text{ et } \overline{I}_{22} = \frac{\overline{U}_1 - k\overline{U}_1}{R},$$

$$\overline{Y}_{21} = -\frac{(k+1)}{R} \text{ et } \overline{Y}_{22} = \frac{2}{R}\ ;$$

$$\text{d'où : } \overline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{(k+1)}{R} & \frac{2}{R} \end{bmatrix}$$

$$2.\ \overline{Z} = \overline{Y}^{-1} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{1}{\det(\overline{Y})}\begin{bmatrix} \frac{2}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{(k+1)}{R} & \frac{2}{R} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \det(\overline{Y}) = \left(\frac{2}{R}\right)^2 - \frac{k+1}{R^2}$$

$$\text{d'où : } \overline{Z} = \begin{bmatrix} \frac{2R}{3-k} & \frac{R}{3-k} \\ \frac{(k+1)R}{3-k} & \frac{2R}{3-k} \end{bmatrix}$$

9.13 1. Les équations sont (figure 9.68) :

$$\overline{U}_1 = R_1\overline{I}_1 + \frac{\overline{I}_1}{jC_2\omega} + \left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right)(\overline{I}_1 + \overline{I}_2),$$

$$\overline{U}_2 = \left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right)(\overline{I}_1 + \overline{I}_2)$$

D'où :

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega} & R_2 + \frac{1}{jC_1\omega} \\ R_2 + \frac{1}{jC_1\omega} & R_2 + \frac{1}{jC_1\omega} \end{bmatrix}$$

Copyright © 2007 Dunod.

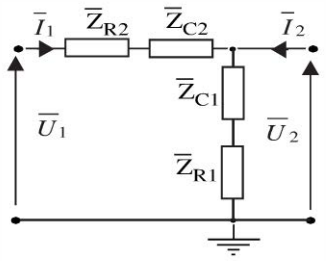


Figure 9.68

Q est passif, on a bien $\overline{Z}_{21} = \overline{Z}_{12}$;

2. On utilise le tableau de passage (tableau 9.1) ; il faut calculer $\det(\overline{Z})$

$$\det(\overline{Z}) = \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega}\right)\left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right) - \left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right)^2$$

$$\det(\overline{Z}) = \left(R_1R_2 + R_2^2 + \frac{R_2}{jC_2\omega} + \frac{R_2}{jC_1\omega}\right) + \left(\frac{R_1 + R_2}{jC_1\omega} + \frac{1}{-C_1C_2\omega^2} + \frac{1}{-C_1^2\omega^2}\right) - R_2^2 + \frac{1}{(C_1\omega)^2} - \frac{2R_2}{jC_1\omega}$$

$$\det(\overline{Z}) = \frac{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1}{C_1C_2\omega^2}$$

$$\overline{Y} = \overline{Z}^{-1} \Rightarrow \overline{Y} = \frac{1}{\det(\overline{Z})}\begin{bmatrix} R_2 + \frac{1}{jC_1\omega} & -\left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right) \\ -\left(R_2 + \frac{1}{jC_1\omega}\right) & R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{-jC_2\omega(jC_1\omega R_2 + 1)}{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1} & \frac{jC_2\omega(jC_1\omega R_2 + 1)}{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1} \\ \frac{jC_2\omega(jC_1\omega R_2 + 1)}{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1} & \frac{-(R_1 + R_2)C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1 + C_2)}{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1} \end{bmatrix}$$

Avec le tableau, on obtient

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} \frac{R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1R_2 + R_1C_2) - 1}{-(R_1 + R_2)C_1C_2\omega^2 + j\omega(C_1 + C_2)} & 1 \\ -1 & \frac{jC_1\omega}{jR_2C_1\omega + 1} \end{bmatrix}.$$

3. Les schémas sont présentés aux figures 9.69a, b, c.

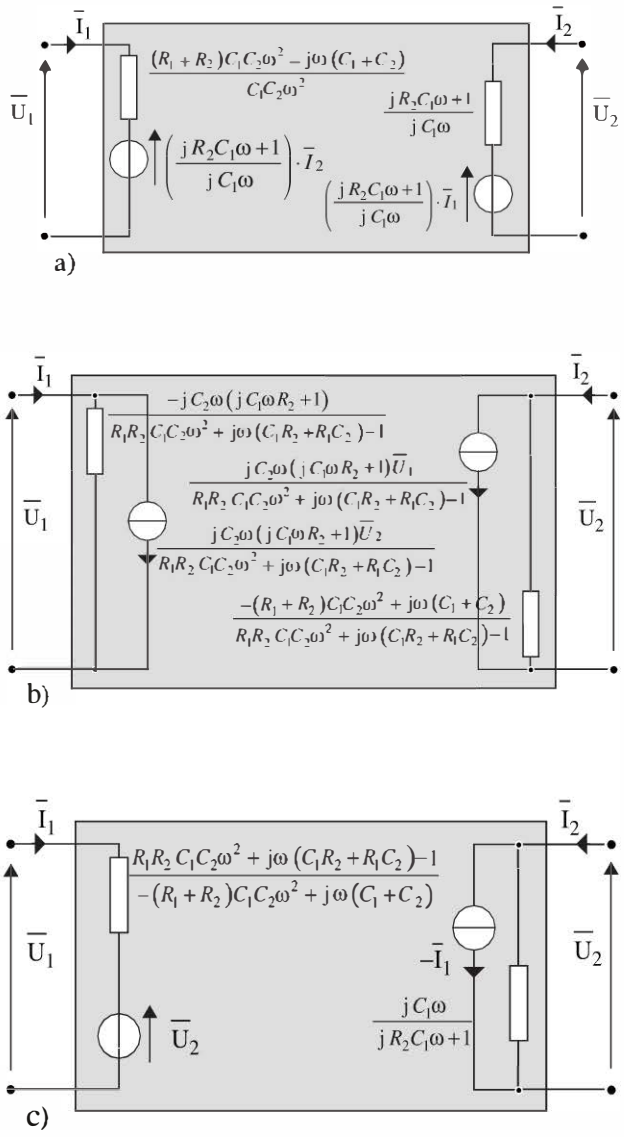


Figure 9.69

Copyright © 2007 Dunod.

9.14 1. $\overline{I}_2 = 0$ car $\overline{Z}_{ch} \to \infty$;

$$\overline{T}_u(j\omega) = \frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \frac{\overline{Z}_L}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_C + \overline{Z}_R}$$

$$\Rightarrow \overline{T}_u(j\omega) = \frac{LC(j\omega)^2}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

2. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

3. $G(\omega) = 20\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$$-20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow G(\omega) = 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$-10\log_{10}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 ;$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \arctan\left(\frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

4. a) $\omega \dashrightarrow 0$:

$$G(0) \dashrightarrow 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -40\log_{10}\omega_0$$

$$+40\log_{10}\omega = A + 40X,$$

avec $X = \log_{10}\omega$; c'est l'équation d'une droite croissante de pente 40 dB/déc. passant par le point $(0\,\text{dB}, \omega = \omega_0)$; d'autre part $\varphi(0) = 180°$;

b) $\omega \dashrightarrow \infty$:

$$G(\infty) \dashrightarrow 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

$$= 0 \text{ dB}$$

et $\varphi(\infty) = \pi - \arctan\left(\dfrac{2m\omega_0}{-\omega}\right) = 0$;

c) ω_{cas} impose $-40\log_{10}\omega_0 + 40\log_{10}\omega = 0$ dB $\Rightarrow \omega_{cas} = \omega_0$;

5. On recherche les tangentes horizontales :

$$\frac{d|\overline{T}_u(j\omega)|}{d\omega} = 0 ;$$

$$\Rightarrow \frac{d|\overline{T}_u(j\omega)|}{d\omega} =$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = 0 ;$$

posons $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, on a alors :

$$\Rightarrow \frac{d|\overline{T}_u(j\omega)|}{d\omega} =$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{X^2}{\sqrt{\left(1 - X^2\right)^2 + (2mX)^2}}\right)$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1 - X^2}{X^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2m}{X}\right)^2}}\right) = 0$$

(avec $X \neq 0$) ; $\Rightarrow 2\left(\dfrac{1}{X^2} - 1\right)\left(\dfrac{-2}{X^3}\right) - \dfrac{8m}{X^3} = 0$

$\Rightarrow X = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2m^2}}$ qui existe si $m \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2m^2}}$

9.15 1. On a $\overline{I}_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \overline{U}_1 = \overline{Z}_{11} - \overline{I}_1 \\ \overline{U}_2 = \overline{Z}_{21} - \overline{I}_1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \overline{T}_u(j\omega) = \dfrac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = \dfrac{\overline{Z}_{21}\overline{I}_1}{\overline{Z}_{11}\overline{I}_1} = \dfrac{\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{11}}$ d'où, à partir des résultats de l'exercice 9.13 :

$$\overline{T}_u(j\omega) = \frac{\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{11}} = \frac{R_2 + \dfrac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega} + \dfrac{1}{jC_1\omega}}$$

$$\overline{T}_u(j\omega) = \frac{\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{11}}$$

$$= \frac{jC_2C_1\omega R_2 + C_2}{j(R_1 + R_2)C_1C_2\omega + (C_1 + C_2)}$$

$$= K\frac{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)} ;$$

d'où : $\omega_0 = \dfrac{1}{C_1R_2} = 10^5$ rad/s,

$$\omega_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2(R_1 + R_2)} = 10891 \text{ rad/s}$$

et $K = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}9$.

Copyright © 2007 Dunod.

2. C'est une fonction du 1er ordre, qui admet une seule pulsation de cassure :

$$G_0(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

et $\varphi_0(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Quand $\omega \ll \omega_0$ alors $G_0(0) = 20\log_0(1) = 0$ dB et $\varphi_0(0) = \arctan(0) = 0°$

Quand $\omega \gg \omega_0$ alors

$G_0(\omega) \dashrightarrow -20\log_0\omega_0 + 20\log_0\omega = A + 20X$, qui est une droite croissante de pente 20 dB/déc. et qui passe par $(0\,\text{dB}, \omega = \omega_0)$;

$\varphi_0(\omega) \dashrightarrow \arctan(\infty) = 90°$

À la pulsation de cassure : $A + 20X = 0$ dB

$\Rightarrow \omega_{cass} = \omega_0$

3. Les expressions du gain et du déphasage sont opposées aux expressions précédentes. On obtient alors : $G_1(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$,

$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Quand $\omega \ll \omega_1$ alors $G_1(\omega) = 0$ dB et $\varphi_1(0) = 0°$. Quand $\omega \gg \omega_1$ alors

$G_1(\omega) \dashrightarrow 20\log_0\omega_0 - 20\log_0\omega = B - 20X$, qui est une droite décroissante de pente -20 dB/déc. et qui passe par $(0\,\text{dB}, \omega = \omega_1)$;

$\varphi_1(\omega) \dashrightarrow -\arctan(\infty) = -90°$

À la pulsation de cassure : $B - 20X = 0$ dB

$\Rightarrow \omega_{cass1} = \omega_1$

4. $\overline{T}_u(j\omega) = K \cdot \overline{T}_0(j\omega) \cdot \overline{T}_1(j\omega)$

$$\Rightarrow G(\omega) = 20\log_{10}\left(K|\overline{T}_0(j\omega)| \cdot |\overline{T}_1(j\omega)|\right)$$

$$G(\omega) = 20\log_{10}(K) + 20\log_{10}\left(|\overline{T}_0(j\omega)|\right)$$

$$+20\log_{10}\left(|\overline{T}_1(j\omega)|\right) = G_K + G_0(\omega + G_1(\omega)$$

Pour tracer le diagramme asymptotique du gain, il suffit de sommer les tracés précédents (figure 9.70) et d'ajouter la constante $G_K = -0{,}9$ dB. On obtient la même conclusion pour le déphasage (figure 9.71) puisque : $\varphi(\omega) = \arg(\overline{T}_u(j\omega))$

$= \arg\left(\overline{T}_0(j\omega) \cdot \overline{T}_1(j\omega)\right)$

$= \arg(\overline{T}_0(j\omega)) + \arg(\overline{T}_1(j\omega))$

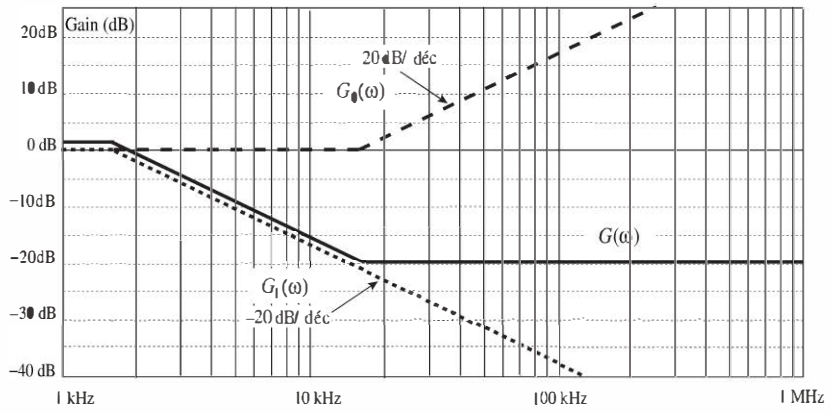


Figure 9.70

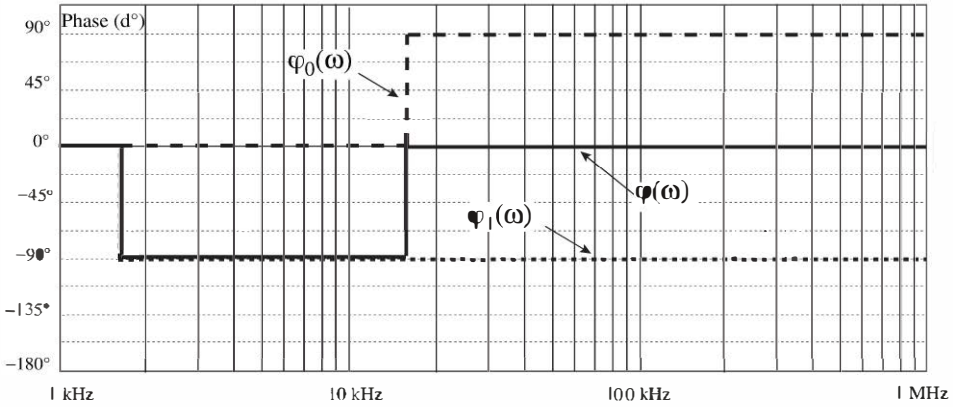


Figure 9.71

Copyright © 2007 Dunod.

9.16 1. Avec la règle du pont diviseur :

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{LC}(p)}{Z_{LC}(p) + R}$$

$$= \frac{Lp/(1 + LCp^2)}{Lp/(1 + LCp^2) + R} = \frac{Lp}{R + Lp + LCRp^2}$$

2. $$H(p) = \frac{L}{R} \frac{p}{\left(1 + \frac{L}{R} p + LCp^2\right)}$$

$$= A \frac{p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec $A = \frac{L}{R}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

3. $1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0$

$\Rightarrow p_{10,11} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$ avec $m < 1$, d'où :

$$H(p) = A\omega_0^2 \frac{p}{(p - p_{10})(p - p_{11})}$$

$$= K \frac{(p - z_0)}{(p - p_{10})(p - p_{11})}$$

avec $K = \frac{1}{RC}$, $z_0 = 0$

4. On représente un zéro au point O et deux pôles aux points symétriques P_{10} et P_{11} (figure 9.72).

5. Sachant que $H(p) = \frac{k|\overrightarrow{\bullet M}|}{|p_{10}\overrightarrow{M}| \cdot |p_{11}\overrightarrow{M}|}$, on mesure alors les différentes longueurs, à partir de la figure 9.73 et on obtient pour $\omega = \omega_0$:

$$H(\omega_0) = 10\frac{1}{(0{,}52) \times (1{,}94)} = 9{,}91,$$

$G(\omega_0) = 19{,}9$ dB et $\varphi(\omega_0) = 90° - 15° - 74° = 1°$

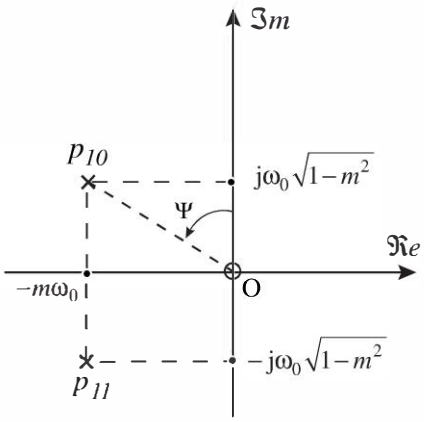


Figure 9.72

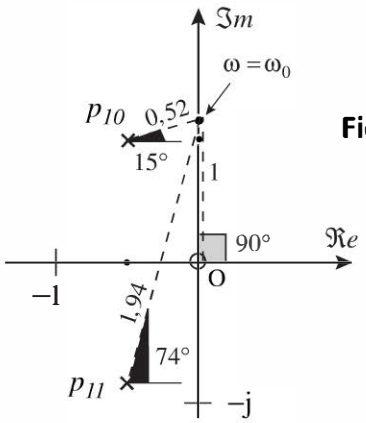


Figure 9.73

9.17 1.

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{BLRp}{R + ABLp + LCRp^2}$$

$$H(p) = \frac{BLp}{1 + \frac{ABL}{R} p + LCp^2}$$

$$= A \frac{p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec $A = BL$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{AB}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$;

$$H(p) = K \frac{(p + z_0)}{(p + p_{10})(p + p_{11})}$$

avec $K = \frac{B}{C}$, $z_0 = 0$ et

$p_{10,11} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$

2. $K = 1$, $\omega_0 = 1$, $m = \frac{1}{2}$,

$p_{10,11} = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Voir figure 9.74.

3. A dans l'intervalle $]0, 2] \Rightarrow m$ dans l'intervalle $]0, 1]$; le lieu s'écarte alors suivant les branches de la figure 9.74.

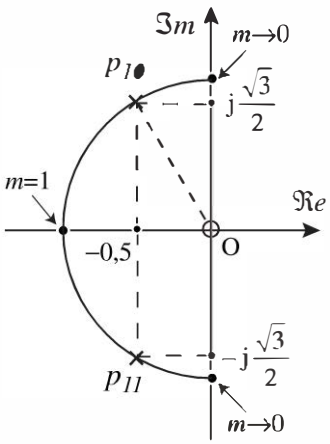


Figure 9.74

Copyright © 2007 Dunod.

CHAPITRE 10

RÉVISIONS

10.1. Les circuits électriques sont analysés en régime transitoire, lorsque :
- le circuit possède des interrupteurs qui commutent. À chaque commutation, le graphe devient différent et les grandeurs électriques tendent vers d'autres solutions permanentes, qu'il faut rechercher ;
- la mise sous tension d'un circuit électrique génère des valeurs de courants et de tensions différentes du régime permanent ; il y a alors une phase transitoire ;
- les dipôles sources du circuit électrique admettent des discontinuités.

10.2. Le régime permanent, qui se répète indéfiniment, s'oppose au régime transitoire qui s'évanouit avec le temps. Le régime libre est le *RT* d'un circuit sans ses dipôles actifs (seule l'énergie initiale stockée conduit les grandeurs électriques à évoluer) tandis que le régime forcé est le *RT* du circuit muni de tous ses dipôles, mais sans énergie initiale stockée.

10.3 Les C.I. sont d'une très grande importance, car elles sont à la base de la solution transitoire du régime libre.

10.4 Quel que soit l'ordre du système et une fois le système mis sous forme matricielle, la solution s'écrit :

$$i(t) = e^{A(t-t_0)} i(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B(\tau) d\tau .$$

10.5 Un état est d'une manière générale une grandeur qui stocke de l'énergie. Dans un circuit électrique, les états sont les tensions des condensateurs ou les courants dans les inductances. Il y a l'équation d'état qui décrit l'évolution des états du circuit et l'équation de sortie qui présente les grandeurs recherchées dans le circuit.

10.6 La solution d'état est :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau .$$

10.7 La modélisation opérationnelle a l'avantage de simplifier la résolution d'un système d'équations différentielles, toujours présent en *RT*.

10.8 Les dipôles passifs sont remplacés par leurs équivalents (tableau 10.2) et les dipôles actifs $s(t)$ par leur transformée de Laplace $S(p)$.

EXERCICES

10.9 1. $\frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R}$

2. $\frac{L}{R}\frac{di_h(t)}{dt} + i_h(t) = 0$; d'où $\frac{di_h(t)}{i_h(t)} = -\frac{L}{R}dt$

$\Rightarrow \ln(i_h(t)) = \int -\frac{R}{L}dt + K \Rightarrow i_h(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$

3. $i(t) = K(t)e^{-\frac{R}{L}t}$, d'où en injectant dans l'équation homogène

$$L\frac{dK(t)}{dt}e^{-\frac{R}{L}t} + K(t)\left[L\left(-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) + Re^{-\frac{R}{L}t}\right] = E$$

avec $L\left(-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) + Re^{-\frac{R}{L}t} = 0$, car $e^{-\frac{R}{L}t}$ est solution de l'équation homogène. On obtient

$$L\frac{dK(t)}{dt}e^{-\frac{R}{L}t} = E \quad \Rightarrow K(t) = \int \frac{Ee^{\frac{R}{L}t}}{L}dt + k$$

(où k est une constante) d'où une solution $K(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}$ $(k = 0)$. Une solution particulière est donc :

$$i_1(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}$$

4. La solution générale de l'équation différentielle est $i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$ qui, avec $i(0) = i_0$

$\Rightarrow i(0) = K + \frac{E}{R} = i_0$ d'où

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i_0 e^{-\frac{R}{L}t};$$

voir figure 10.25.

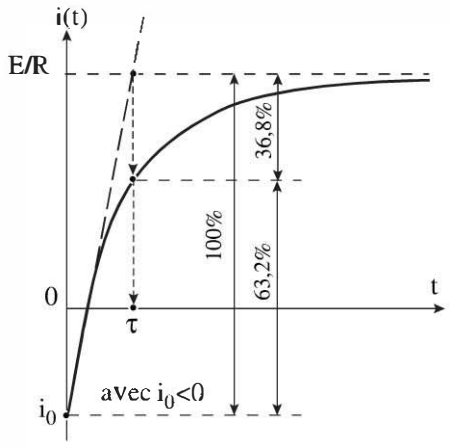


Figure 10.25

Copyright © 2007 Dunod.

10.10 1. Voir figure 10.26.

2. Les équations du circuit sont :

$E - v_C(t) - v_{R1}(t) = 0$, $v_{R1}(t) - v_{R2}(t) = 0$, $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$; d'où l'équation différentielle (avec $i_1(t) = C dv_C(t)/dt$) :

$\frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2}\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = 0$; l'équation est du 1er ordre ; c'était prévisible, car une seule inertie (le condensateur C).

3. L'équation différentielle est une équation homogène ; la solution générale de l'équation homogène (1er ordre) est $i_h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$; pas de recherche de solution particulière, car l'équation différentielle est homogène ; la solution complète est (avec $i_1(0) = A = i_{10}$) $i_1(t) = i_{10}e^{-\frac{t}{RC}}$;

4. $v_{R1}(t) = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_1(t) = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_{10}e^{-\frac{t}{RC}}$

$= v_0e^{-\frac{t}{RC}}$ et $v_C(t) = E - v_{R1}(t) = E - v_0e^{-\frac{t}{RC}}$

5. Voir figure 10.27.

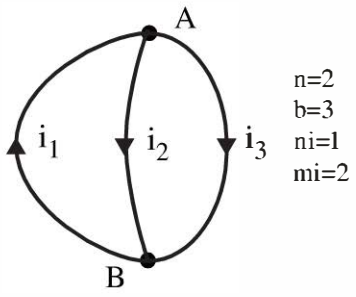


Figure 10.26

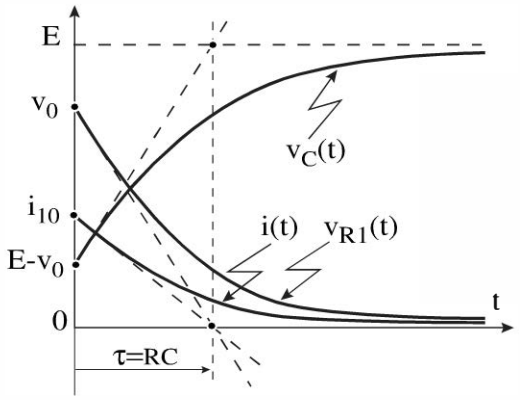


Figure 10.27

10.11 1. Les équations sont :

$i(t) = i_{C2}(t) + i_{R2}(t)$,

$-e(t) + v_{C2}(t) + v_{C1}(t) + v_{R1}(t) = 0$,

$v_{C2}(t) - R_2i_{R2}(t) = 0$, avec en plus

$v_{R1}(t) = R_1i(t)$, $i(t) = i_{C1}(t) = C_1\frac{dv_{C1}(t)}{dt}$,

$$i_{C2}(t) = C_2\frac{dv_{C2}(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_2C_1 + R_2C_2 + R_1C_1}{R_1C_1R_2C_2}\right)\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{i(t)}{R_1C_1R_2C_2} = 0$$

2. En posant $i(t) = s_1$ et $di(t)/dt = s_2$, on obtient le système d'équations sous forme canonique :

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = s_2 \\ \frac{ds_2}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}s_1 - \left(\frac{R_2C_1 + R_2C_2 + R_1C_1}{R_1C_1R_2C_2}\right)s_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = AS(t) + B(t)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1C_1R_2C_2} & -\frac{R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } s_0(0) = \begin{bmatrix} i(0) \\ i'(0) \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $s_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

4. Pour résoudre le système d'équations, il faut calculer e^{At}. Il faut alors déterminer la matrice de passage P, puis la matrice diagonale D ; on calcule donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 à partir du polynôme :

$\det(A - \lambda I_d) = (3 + \lambda)\lambda + 1$

$= \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$;

$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} < 0$

On calcule les deux vecteurs $V_{1,2}$ à partir de la relation $(A - \lambda_i I_d)V_i = 0$, soit :

Copyright © 2007 Dunod.

$$(A-\lambda_1 I_d)\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 1\\ -1 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x_1\ ;\ V_1=\begin{bmatrix}2\\ -3+\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I_d)\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1\\ -1 & \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x_2\ ;\ V_2=\begin{bmatrix}2\\ -3-\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3+\sqrt{5} & -3-\sqrt{5}\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}\frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix},$$

$$e^{Dt}=\begin{bmatrix}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} & 0\\ 0 & e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Pe^{Dt}P^{-1}=\frac{-1}{4\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\ -3+\sqrt{5} & -3-\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} & 0\\ 0 & e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3-\sqrt{5} & -2\\ 3-\sqrt{5} & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-(3+\sqrt{5})e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}+(3-\sqrt{5})e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} & \\ 2e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}-2e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} & \\ -2e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}+2e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} & \\ (3-\sqrt{5})e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}-(3+\sqrt{5})e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} & \end{bmatrix}$$

Comme $B(\tau)=[0\quad 0]^{Tr}$ et $\varphi_0=[0\quad \sqrt{5}]^{Tr}$, la solution est alors égale à :

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}i(t)\\ \frac{di(t)}{dt}\end{bmatrix}=e^{At}\varphi_0$$

$$\Rightarrow i(t)=e^{\frac{-3}{2}t}\left(e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t}-e^{\frac{-\sqrt{5}}{2}t}\right)$$ qui tend vers 0 quand $t\to\infty$.

10.12. 1. L'équation différentielle est du 1er ordre car une seule inertie (le condensateur).

2. $X(t)=v_C(t)$

3. On a : $v_c(t)+(R_1+R_2)i(t)=R_2J$,

$$i(t)=\frac{-v_C(t)+R_2J}{R_1+R_2}=C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dX(t)}{dt}=\frac{dv_C(t)}{dt}=\frac{i(t)}{C}$$

$$=-\frac{v_C(t)}{(R_1+R_2)C}+\frac{R_2J}{(R_1+R_2)C}$$

$$=AX(t)+BU(t)$$

avec $U(t)=J$, $A=\frac{-1}{(R_1+R_2)C}$ et

$$B=\frac{R_2}{(R_1+R_2)C}$$

4. $v(t)=R_2i(t)=R_2\left(\frac{-v_C(t)+R_2J}{R_1+R_2}\right)$

$$\Rightarrow Y(t)=CX(t)+DU(t),$$

avec $Y(t)=v(t)$, $C=\frac{-R_2}{R_1+R_2}$ et

$$D=\frac{R_2^2}{R_1+R_2}$$

5. $X(t)=e^{A(t-t_0)}X_0+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau$

avec $e^{A(t-t_0)}X_0=e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}v_{C0}$ et

$$e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau$$

$$=e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\int_{t_0}^{t}e^{\frac{\tau}{(R_1+R_2)C}}\frac{R_2}{(R_1+R_2)C}Jd\tau$$

$$=R_2J\left(1-e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\right)\Rightarrow$$

Copyright © 2007 Dunod.

$$X(t) = e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} v_{C0} + R_2 J\left(1 - e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\right)$$

et $v(t) = Y(t) = R_2 e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\left(\frac{R_2 J - v_{C0}}{R_1 + R_2}\right)$

10.13 1. Voir figure 10.28.

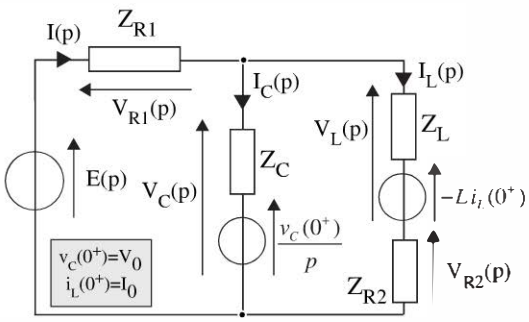


Figure 10.28

2. Propriétés du graphe :
$n = 2, b = 3 \Rightarrow ni = 1, mi = 3$; d'où :
$I(p) = I_C(p) + I_L(p)$,
$V_{R1}(p) - E(p) + V_C(p) = 0$,
$V_{R1}(p) - E(p) + V_{R2}(p) + V_L(p) = 0$;
avec pour les quadripôles :

$V_{R1}(p) = R_1 I(p)$, $V_{R2}(p) = R_2 I_L(p)$,

$V_L(p) = L\left(pI(p) - i(0^+)\right)$,

$I_C(p) = C\left(pV_C(p) - v_C(0^+)\right)$. Le vecteur d'état est donné par :

$X(t) = [i_L(t) \quad v_C(t)]^{Tr}$. En développant les équations, on obtient :

$$pI_L(p) - i(0^+) = \frac{-R_2 I_L(p) + V_C(p)}{L} ;$$

$$pV_C(p) - v_C(0^+) = \frac{-R_1 I_L(p) - V_C(p) + E(p)}{R_1 C} ;$$

d'où :

$pX(p) - X_0 = AX(p) + BE(p)$;

$$X_0 = \begin{bmatrix} i_L(0^+) \\ v_C(0^+) \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix}$$

D'autre part : $I(p) = \frac{-V_C(p) + E(p)}{R_1}$ et

$I_C(p) = -I_L(p) - \frac{V_C(p) - E(p)}{R_1}$, d'où :

$Y(p) = CX(p) + DE(p)$;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1/R_1 \\ -1 & -1/R_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ 1/R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$E(p) = \frac{\omega \widehat{E}}{p^2 + \omega^2}$$

10.14 1. Voir figure 10.29.

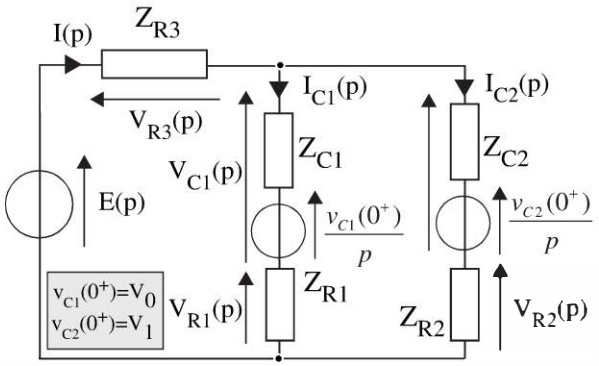


Figure 10.29

2. $ni = 1$; $mi = 2$: $I(p) = I_{C1}(p) + I_{C2}(p)$,
$V_{R3}(p) - E(p) + V_{R1}(p) + V_{C1}(p) = 0$
$V_{R3}(p) - E(p) + V_{R2}(p) + V_{C2}(p) = 0$ et

$$V_{C1}(p) = Z_{C1} I_{C1}(p) + \frac{v_{C1}(0^+)}{p},$$

$$V_{C2}(p) = Z_{C2} I_{C2}(p) + \frac{v_{C2}(0^+)}{p},$$

$V_{R1}(p) = R_1 I_{C1}(p)$, $V_{R2}(p) = R_2 I_{C2}(p)$,
$V_{R3}(p) = R_3 I(p)$; d'autre part, les vecteurs d'état et de C.I. sont :
$X(t) = [v_{C1}(t) \quad v_{C2}(t)]^{Tr}$,
$X_0 = [v_{C1}(0^+) \quad v_{C2}(0^+)]^{Tr} = [V_1 \quad V_2]^{Tr}$.
En développant les équations, on obtient :
$pX(p) - X_0 = AX(p) + BE(p)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_2+R_3)}{C_1\Delta} & \frac{R_3}{C_1\Delta} \\ \frac{R_3}{C_2\Delta} & \frac{-(R_1+R_3)}{C_2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{C_1\Delta} \\ \frac{R_1}{C_2\Delta} \end{bmatrix} \text{ avec } \Delta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3.$$

3. Sachant que $v_p(t) = v_{C1}(t) - v_{C2}(t)$, l'équation de sortie est $Y(p) = CX(p) + DE(p)$ avec

Copyright © 2007 Dunod.

$C = [1 \quad -1]$ et $D = [0]$. L'application numérique entraîne : $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -1]$, $D = [0]$ et $X_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

La solution d'état est :

$X(p) = (pI - A)^{-1}X_0 + (pI - A)^{-1}BE(p)$

avec : $(pI_d - A) = \begin{bmatrix} p+3 & -1 \\ -2 & p+4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (pI_d - A)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{p+4}{p^2+7p+10} & \dfrac{1}{p^2+7p+10} \\ \dfrac{2}{p^2+7p+10} & \dfrac{p+3}{p^2+7p+10} \end{bmatrix}$$

et donc :

$$(pI_d - A)^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{-p+1}{p^2+7p+10} \\ \dfrac{5p+13}{p^2+7p+10} \end{bmatrix}$$

et $(pI_d - A)^{-1}BE(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{20p+100}{(p^2+7p+10)p} \\ \dfrac{20p+100}{(p^2+7p+10)p} \end{bmatrix}$

d'où :

$$X(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{-p^2+21p+100}{(p^2+7p+10)p} \\ \dfrac{5p^2+43p+37}{(p^2+7p+10)p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{10}{p} - \dfrac{9}{(p+2)} - \dfrac{2}{(p+5)} \\ \dfrac{10}{p} - \dfrac{17}{3(p+2)} + \dfrac{10}{15(p+5)} \end{bmatrix}$$

qui implique :

$$Y(p) = CX(p) + DE(p) = -\frac{10}{3(p+2)} - \frac{40}{15(p+5)};$$

d'où : $v_p(t) = -\dfrac{10e^{-2t}}{3} - \dfrac{40e^{-5t}}{15}$ V

10.15 1. Même figure 10.116.

2. Mêmes équations mais avec $E(p) = \dfrac{\widehat{E}}{p^2+1}$,

d'où : $X(t) = [v_{C1}(t) \quad v_{C2}(t)]^{Tr}$,

$X_0 = [v_{C1}(0^+) \quad v_{C2}(0^+)]^{Tr} = [V_1 \quad V_2]^{Tr}$

$pX(p) - X_0 = AX(p) + BE(p)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-(R_2+R_3)}{C_1\Delta} & \dfrac{R_3}{C_1\Delta} \\ \dfrac{R_3}{C_2\Delta} & \dfrac{-(R_1+R_3)}{C_2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{C_1\Delta} \\ \dfrac{R_1}{C_2\Delta} \end{bmatrix} \text{ avec } \Delta = R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3.$$

3. Même équation de sortie

$Y(p) = CX(p) + DE(p)$ avec $C = [1 \quad -1]$ et $D = [0]$

L'application numérique entraîne :

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -1]$, $D = [0]$ et $X_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$. La solution d'état est :

$X(p) = (pI_d - A)^{-1}X_0 + (pI_d - A)^{-1}BE(p)$

Seule change l'expression :

$(pI_d - A)^{-1}BE(p)$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{20p+100}{(p^2+7p+10)} \dfrac{10}{p^2+1} \\ \dfrac{20p+100}{(p^2+7p+10)} \dfrac{10}{p^2+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{200p+1\,000}{(p^2+7p+10)(p^2+1)} \\ \dfrac{200p+1\,000}{(p^2+7p+10)(p^2+1)} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$X(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{-p^3+p^2-198p+1\,001}{(p^2+7p+10)(p^2+1)} \\ \dfrac{5p^3+13p^2-205p+1\,013}{(p^2+7p+10)(p^2+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{281}{(p+2)} - \dfrac{82}{(p+5)} + \dfrac{-67p+58}{(p^2+1)} \\ \dfrac{127}{(p+2)} - \dfrac{12}{(p+5)} + \dfrac{-46p+74}{(p^2+1)} \end{bmatrix}$$

qui implique :

$$Y(p) = CX(p) + DE(p) = \frac{154}{(p+2)} - \frac{70}{(p+5)} - \frac{21p+16}{(p^2+1)};$$

d'où :

$v_p(t) = 154e^{-2t} - 70e^{-5t} - 26{,}4\cos(t - 37{,}3°)$ V

Copyright © 2007 Dunod.

Index

A

admittance 258
amplitude
  crête 196
  efficace 196
analyse 252
  fréquentielle 252
angle 196
  de déphasage 196
arbre 128
  couvrant 129
association
  des résistances 124
  des signaux 121
  parallèle 70
  série 69
auto-induction 51

B

bande passante 271
bobinage 358, 359
  secondaire 358
borne
  d'entrée 260
  de sortie 260
boucle 131
branche 127

C

C.I. modifiées 146
capacité 129
  électrique 47
caractéristique 64, 76, 77, 360
  d'entrée 76
  de première aimantation 360
  de réaction 77
  de sortie 76
  de transfert 77
  graphique 64
carcasse 359
champ électrique 15
champ électromoteur 40
champ magnétique 25
charge électrique 6
chemin 128
circuit
  magnétique 358, 359
  sélectif 354
coarbre 128
coefficient
  d'auto-induction 52
  de foisonnement 359
compensation 224
  de l'énergie 344
composante fondamentale 153
concentrique 359
condensateur 46, 48
condition initiale 145
conductance 258
conducteur 349
  de terre 349
convention
  générateur 24, 63
  récepteur 24, 63
coupe 129
couplage 359
  magnétique 359
courant
  de Foucault 379
  électrique 8
  électromoteur 40, 42
  magnétisant 361
cycle 361
  d'hystérésis 361

D

décomposition
  en série de Fourier 149
  en fractions partielles 211
déphasage 268
déplacement 138
  des dipôles 138
diagramme
  de Bode 269

Copyright © 2007 Dunod.

de Nyquist 269, 277
diode 382, 385
de redressement 382
Zener 385
dipôle
à réduire 175
actif 62
de Norton 96
de Thévenin 97
électrique 62
équivalent 70
passif 62
distribution électrique 335
domaine de fonctionnement 74

E

échange d'énergie 121
effet 360
d'hystérésis 360
équation
mi 140
ni 140
caractéristique 212, 280
d'état 319
homogène 298
principale 144
éteindre une source de tension 162

F

facteur de puissance 221, 344
ferromagnétique 360
fil
d'interconnexion 130
de connexion 129
de phase 338
de terre 132, 152
électrique 129
flux magnétique 26
force
électrique 14
électromotrice 41
magnétique 25
forme
canonique 312
cartésienne 200
matricielle 167
fréquence 196
de résonance 354
frontière d'un nœud 130

G

gain 268
en décibel 269
linéaire 269
galette
alternée 359
graphe 127
connexe 128
orienté connexe 132
partiel 128

H

harmonique 153

I

impédance
complexe 202
d'entrée 267
de sortie 267
opérationnelle 214
inductance 52
magnétisante 366
influence électrostatique 46
intensité électrique 18
interrupteur 120

L

lieu
d'Evans 282
des pôles 282
des zéros 282
ligne de cassure 137
loi
d'Ohm 124
d'Ohm complexe 202
d'Ohm opérationnelle 214
de Kirchhoff 140
des mailles 140
des nœuds 140

M

maille 128
matrice
d'entrée 319
d'état 319

Copyright © 2007 Dunod.