REPUBLIQUE TUNISIENNE MINESTERE DE L EDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION **2021**	Session principale
	Epreuve : Mathématiques — Section : Sciences expérimentales
	Durée : 3 h — coefficient du l'épreuve: 3

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1

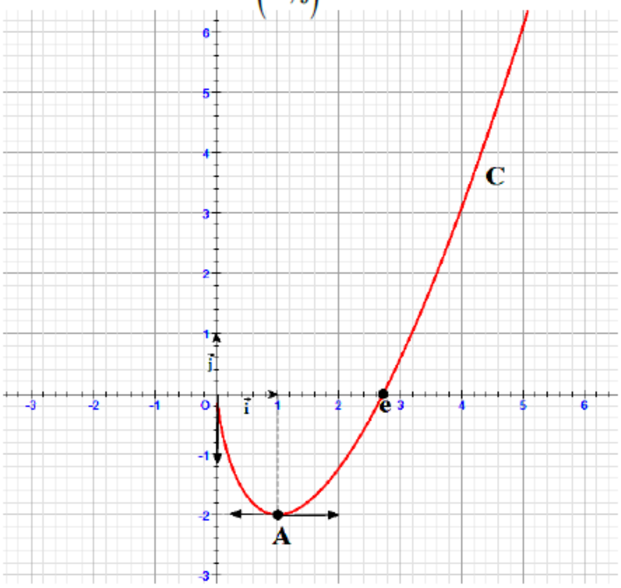
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans la figure ci-dessous :

. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

. $\mathscr{C}$ passe par le point $A(1, -2)$ et admet en ce point une tangente horizontale .

. $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.



(1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer : $g(1)$, $g'(1)$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

b) Résoudre l'inéquation : $g'(x) \geq 0$.

c) Justifier que la restriction h de g à l'intervalle $[1, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera .

(2) On suppose qu'il existe trois réels a , b et c tels que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a :

$$g(x)=ax\ln(x^2)+bx+c$$

On considère la fonction f définie et continue sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=g(x) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) A l'aide de la question **(1) a)** montrer que : $b+c=-2$, $2a+b=0$ et $c=0$.

b) En déduire que : $g(x)=2x\ln(x)-2x$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

(3) a) Vérifier que : $\ln\left(\sqrt{e^3}\right)=\dfrac{3}{2}$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta : y=x$.

c) Sur le même graphique ci-joint , tracer la droite Δ et la courbe représentative (Γ') de h^{-1} .

(4) a) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $\displaystyle\int_e^{\sqrt{e^3}} x\ln x\,dx=\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{4}e^2$.

b) Soit $\mathscr{A}_1$: l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) de h , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=e$ et $x=\sqrt{e^3}$. Prouver que : $\mathscr{A}_1=\dfrac{1}{2}e^2$.

c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par : (Γ) , (Γ') et les axes du repère.

Exercice 2

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-\left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z-4e^{i\frac{\pi}{6}}=0$.

1°) a) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=i\sqrt{2}\;e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) Vérifier que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

c) Trouver alors l'autre solution de z_2 de l'équation (E).

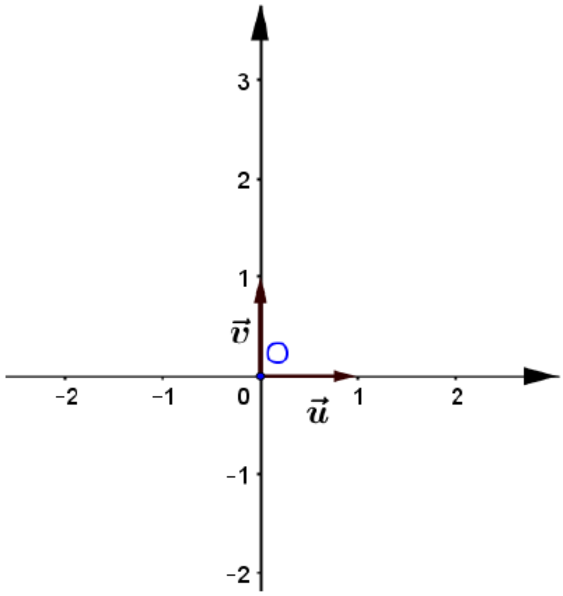
d) Écrire chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A=1+i\sqrt{3}$ et $z_B=-\sqrt{3}+i$.

a) Vérifier que $z_B=iz_A$.

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle.

c) Construire, dans la figure ci-contre, les points A et B.



3°) Soit C le point du plan d'affixe $z_C=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

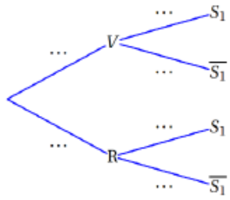
a) Montrer que $OACB$ est un carré.

b) Placer le point C.

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

Exercice 3

Une urne contient trois dés équilibrés, deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (les résultats seront données sous forme de fractions).
On considère les évènements suivants : V « le dé tiré est vert ».
R « le dé tiré est rouge ».
S_1 « on obtient 6 au lancer du dé ».



1°) On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.

a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.

b) Calculer la probabilité $p(S_1)$.

c) Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.

2°) On tire au hasard un dé de l'urne. Pour tout entier naturel n non nul, on lance n fois de suite ce dé.
On désigne par S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n lancés ».

a) Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun de n lancers.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1}$.

c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n_0 \geq n$.