REPUBLIQUE TUNISIENNE **MINESTERE DE L EDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2021**	**Session principale**	
	Epreuve : **Mathématiques**	**Section :** **Mathématiques**
	Durée : 4 h	**coefficient du l'épreuve: 4**

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x)$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (Unité 1 cm)

Partie I

1. Montrer que la fonction f est impaire.

2. (a) Vérifier que : $(\forall x \in [0, +\infty[)$, $f(x) = \ln x + \ln(3 +\ 3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 9}$ et calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter les résultats.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1+9x^2}}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point 0.

Partie II

On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$, tel que $x \in [0, +\infty[$.

1. Vérifier que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. (a) Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[)$, $g'(x) = \frac{8 - 9x^2}{\sqrt{1+9x^2}(3 + \sqrt{1+9x^2})}$.

   (b) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation sur $[0, +\infty[$.

3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{2\sqrt{2}}{3}, +\infty[$.

   (b) En déduire que $(\forall x \in [\alpha, +\infty[)$: $g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [0, \alpha[$: $g(x) \geq 0$.

4. En déduire la position relative de la courbe C_f et la droite d'équation $y = x$ sur $[0, +\infty[$.

5. Vérifier que : $\sqrt{1+9\alpha^2} = e^\alpha - 3\alpha$.

Partie III

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2. Tracer dans le même repère la courbe (C_f) et (T) et la droite d'équation $y = x$ et la courbe $(C_{f^{-1}})$.
   (On prend $2.8 \leq \alpha \leq 2.9$)

3. Déterminer $f^{-1}(x)$.

Partie IV

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 4$.

1. Montrer par récurrence que $(n \in \mathbb{N})$, $\alpha \leq U_n \leq 4$.

2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie V

1. Vérifier que $x \longmapsto \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$ est une fonction primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

2. A l'aide d'une integration par parties montrer que $\int_0^\alpha \ln(\sqrt{1+9x^2}+3)dx = \alpha^2 + \alpha + \frac{1-e^\alpha}{3}$.

3. Déterminer en fonction de α l'aire de la partie limitée entre la courbe (C_f) et la droite $y = x$ et les droiteq d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

4. En déduire en fonction de α l'aire de la partie limitée par (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ et les droite d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère une triangle ABC et on désigne par a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.
Partie I

1. Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$.
   Dans la suite O est le centre du cercle cicrconscrit au triangle ABC.

2. (a) Soit $w = \overline{b}c - b\overline{c}$. Montrer que w est imaginaire.

   (b) Vérifier l'égalité $(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = w$. En déduire que $\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{|b-c|^2}$ et le nombre complexe $\frac{b+c}{b-c}$ est imaginaire.

3. Soit H le point d'affixe $(a+b+c)$.

   (a) Exprimer en fonction de b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

   (b) Prouver que si $b+c \neq 0$ alors $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Que peut- on dire du triangle ABC dans le cas où $b + c = 0$?

   (c) En admettant que : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Que représente le point H pour le triangle ABC?

Partie II
Soit l'équation dans $\mathbb{C}$, $(E_\theta)\ :\ z^2 + 2i(1-e^{i\theta})z + 4e^{i\theta}$, $\theta \in]0, \pi[$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) on notera z_0 et z_1 les solutions de cette équation.

   (b) Soit $Z = z_0 + z_1$. Vérifier que $Z = 2i(-1+e^{i\theta}$ puis déterminer la forme exponentielle de Z.

   (c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z lorsque décrit $]0, \pi[$.

2. On prend $a = -2i$, $b = \sqrt{3} - i$ et $c = 2ie^{i\theta}$, $\theta \in]0, \pi[$.

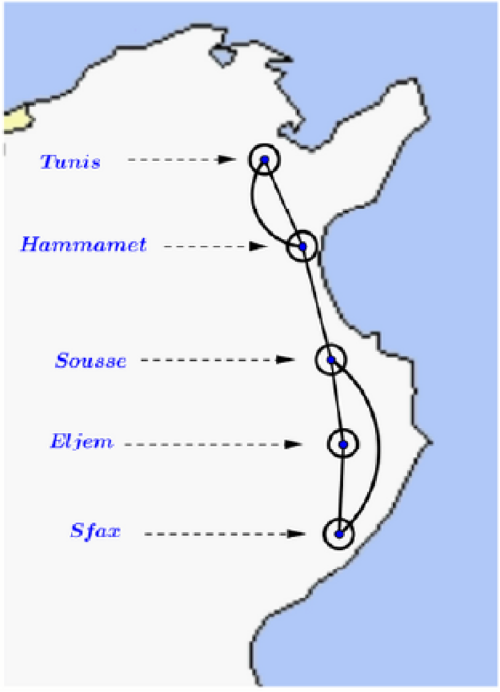
   (a) Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})i}$.

   (b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (c) Déterminer l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3

Lors des journées de la haute saison touristique, l'autoroute qui relie Tunis à Hammamet est surchargée. Il est donc conseillé de prendre une autre route (GP1) entre Tunis et Hammamet afin d'éviter les éventuels « bouchons » autoroutiers.



De Sousse à Sfax des automobilistes ne prennent pas l'autoroute mais choisissent la route (GP1) qui passe par El jem pour visiter l'amphithéâtre ou pour faire des marchés.
L'autoroute est représentée par les lignes droites.
La (GP1) est représentée par les lignes courbées.
Les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet entre Tunis et Sfax a donné que :

- 40% des automobilistes ayant suivi la (GP1) qui relie Tunis à Hammamet, 30% prennent la route (GP1) entre Sousse et Sfax ;
- parmi les automobilistes n'ayant pas suivi la (GP1) qui relie Tunis à Hammamet, 60% prennent la (GP1) entre Sousse et Sfax. On note les évènements

T « l'automobiliste prend la (GP1) qui relie Tunis à Hammamet » et
S « l'automobiliste prend la (GP1) entre Sousse et Sfax »

1°) a) L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.
Recopier et compléter cet arbre.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement $\overline{T} \cap \overline{S}$ est égale **0,24**.

c) Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisit pas la (GP1) entre Sousse et Sfax.

d) Un automobiliste a pris la (GP1) entre Sousse et Sfax.
Quelle est la probabilité qu'il est déjà passé la (GP1) reliant Tunis à Hammamet.

2°) On désigne les temps en heures de parcours suivants :

- Tunis-Hammamet (Par autoroute) : **1,5**
- Tunis- Hammamet (GP1) : **1**
- Hammamet- Sousse (par GP1) : **1**
- Sousse- Sfax (par autoroute) : **1,5**
- Sousse-Sfax (par GP1) : **2,5**

a) Calculer les temps de parcours entre Tunis et Sfax, selon la route choisie.

b) Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire égale à la durée du trajet pour se rendre de Tunis et Sfax selon la route choisie.

Temps en heures x_i	**3,5**	**4**		
Probabilité P_i		**0,24**		

c) Calculer La durée moyenne en heures du trajet TunisSfax.

Exercice 4

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle OAB rectangle en O tel que : $OB = 2OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; On note I et J les milieux respectifs des segments $[OB]$ *et* $[AB]$.

1°) a) Montrer qu'il existe une seule rotation *f* telle que $f(O) = \mathrm{I}$ *et* $f(A) = B$.

b) Donner l'angle de *f* et construire son centre Ω.

2°) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note $g = f \circ R^{-1}$.

a) Déterminer $g(O)$, puis caractériser g.

b) En déduire que $f = t_{\overrightarrow{O\mathrm{I}}} \circ R$.

3°) Soient $C = R(\mathrm{I})$ et D l'image de O par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Vérifier que $O\mathrm{I}DC$ est un carré direct.

b) Déterminer $(f \circ f)(O)$.

c) Caractériser $f \circ f$ et en déduire que Ω est le centre du carré $O\mathrm{I}DC$.

4°) Caractériser $S_{(AB)} \circ S_{(J\Omega)} \circ S_A$.

5°) Soient $h = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(OA)}$ *et* $\varphi = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OA)}$.

a) Caractériser φ.

b) En déduire que *h* est une symétrie glissante que l'on caractérisera.