

- 1) $(t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)})^{-1} = (S_{(AC)})^{-1} \circ (t_{\overline{AC}})^{-1} = S_{(AC)} \circ t_{\overline{CA}}$ et $S_{\Delta} \circ S_{(AC)} = t_{\overline{AB}}$ car $\Delta // (AC)$
 $\Rightarrow (t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta}) \circ (t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)})^{-1} = t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} \circ S_{(AC)} \circ t_{\overline{CA}} = t_{\overline{BC}} \circ t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{CA}} = t_{\overline{0}} = id_P$
 $\Rightarrow t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)} \Rightarrow \text{vrai}$
Ou bien : $t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{BA+AC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ t_{\overline{BA}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)}$ car $\text{don } t_{\frac{1}{2}\overline{BA}}(\Delta) = (AC)$
- 2) $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \circ h_{(A,2)} = r_{(A,\pi)} \circ h_{(A,2)} = h_{(A,-2)} \Rightarrow \text{vrai}$
- 3) f est une isométrie qui fixe A et B donc $f = id_P$ ou $f = S_{(AB)}$ d'où $f^{-1} = id_P$ ou $f^{-1} = S_{(AB)}$
 $\bullet f = id_P \Rightarrow f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{\Delta}$
 $\bullet f = S_{(AB)} \Rightarrow f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{(AB)} \circ \overbrace{S_{\Delta} \circ S_{(AB)}}^{(AB) \perp \Delta} = \overbrace{S_{(AB)} \circ S_{(AB)}}^{id_P} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta}$
 Donc $f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f = S_{\Delta} \Rightarrow \text{faux}$

Exercice n°2

1) a) figure 1

b) $I \neq D$ et $D \neq K$ donc il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K

c) Soit k le rapport de g on a : $k = \frac{DK}{ID} = \frac{|z_K - z_D|}{|z_D - z_I|} = \frac{|3i - 2i|}{|2i - 1 - i|} = \frac{|i|}{|-1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) IDO est un triangle rectangle et isocèle direct en I , on sait que $g(I) = D$ et $g(D) = K$

$\Rightarrow g(IDO) = DKg(O)$ est un triangle rectangle et isocèle indirect en D d'où $g(IDO) = DKC$

2) a) $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$, on a $g(IDO) = DKC$ donc $g(O) = C \Rightarrow b = 1 + 2i$

$$g(D) = K \Rightarrow 3i = a \times 2i + b \Rightarrow 3i = -2ia + 1 + 2i \Rightarrow -1 + i = -2ia \Rightarrow a = \frac{-1+i}{-2i} = -\frac{1+i}{2}$$

$$\text{Donc } z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + 1 + 2i$$

$$\text{b) } z_{\Omega} = \frac{a \times \bar{b} + b}{1 - |a|^2} = \frac{a \times \bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

$$\bullet a \times \bar{b} + b = -\frac{1}{2}(1+i)(1-2i) + 1 + 2i = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

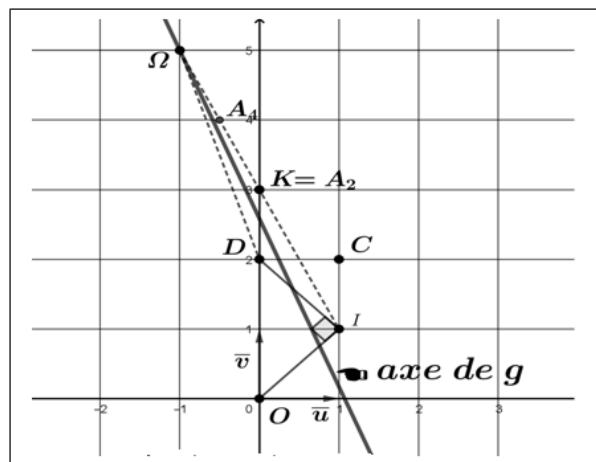
$$\bullet 1 - |a|^2 = 1 - \left| -\frac{1}{2}(1+i) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Il en résulte que $z_{\Omega} = -1 + 5i$

$$\text{c) } \frac{z_{\Omega} + z_I}{2} = \frac{-1 + 5i + 1 + i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$\Rightarrow K$ est le milieu du segment $[\Omega I]$

d) l'axe de g porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{I\Omega D}$



3) a) $g = \overbrace{h'_{(\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_{\Delta}}^{\text{forme réduite}} = S_{\Delta} \circ h'_{(\frac{1}{\sqrt{2}})} \Rightarrow g \circ g = h'_{(\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ \overbrace{S_{\Delta} \circ S_{\Delta}}^{id_P} \circ h'_{(\frac{1}{\sqrt{2}})} = h_{(\frac{1}{2})}$, (h' homothétie)

$$\text{b) } A_0 = I \Rightarrow A_2 = h(A_0) = h(I) \Rightarrow \overline{\Omega A_2} = \frac{1}{2} \overline{\Omega I} \Rightarrow A_2 = K$$

$$A_4 = h(A_2) = h(K) \Rightarrow \overline{\Omega A_4} = \frac{1}{2} \overline{\Omega K} \Rightarrow \overline{\Omega A_4} = \frac{1}{2} \overline{\Omega K} \Rightarrow A_4 \text{ est le milieu du segment } [\Omega K]$$

$$\text{c) } A_2 = h(A_0) \text{ et } A_4 = h(A_2) \Rightarrow \overline{A_2 A_4} = \frac{1}{2} \overline{A_0 A_2} \Rightarrow A_2 A_4 = \frac{1}{2} A_0 A_2$$

$$A_4 = h(A_2) \text{ et } A_6 = h(A_4) \Rightarrow \overline{A_4 A_6} = \frac{1}{2} \overline{A_2 A_4} \Rightarrow A_4 A_6 = \frac{1}{2} A_2 A_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_0 A_2$$

$$A_6 = h(A_4) \text{ et } A_8 = h(A_6) \Rightarrow \overline{A_6 A_8} = \frac{1}{2} \overline{A_4 A_6} \Rightarrow A_6 A_8 = \frac{1}{2} A_4 A_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 A_0 A_2$$

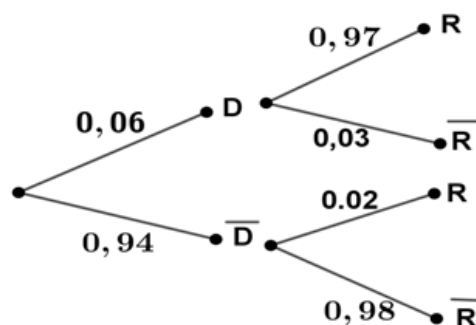
$$\text{En général : } A_{2n-2} A_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} A_0 A_2$$

$$S_n = A_0 A_2 + A_2 A_4 + A_4 A_6 \dots + A_{2n-2} A_{2n} = A_0 A_2 + \frac{1}{2} A_0 A_2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} A_0 A_2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) A_0 A_2 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} IK \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \times IK = 2\sqrt{5}$$

Exercice n°3

1)



2) a) $p(D \cap \overline{R}) = 0,06 \times 0,03 = 0,0018$

b) $p(\overline{D} \cap R) + p(D \cap \overline{R})$
 $= 0,94 \times 0,02 + 0,0018 = 0,0206$

3) $p(\overline{R}) = p(\overline{D} \cap \overline{R}) + p(D \cap \overline{R})$
 $= 0,94 \times 0,98 + 0,0018 = 0,923$

- 4) Soit X l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est accepté au cours de trois contrôles X suit une loi binomiale de paramètre $p = 0,923$ et $n = 3$

$$p(X = k) = C_3^k (0,923)^k \times (0,077)^{3-k} \quad \text{Avec } k \in \{0,1,2,3\}$$

a) $p_1 = p(X = 2) = C_3^2 (0,923)^2 \times (0,077)^{3-2} = 3(0,923)^2 (0,077)$

b) $p_2 = p(X = 1) + p(X = 0) = C_3^1 (0,923)^1 \times (0,077)^{3-1} + C_3^0 ((0,923)^0 \times (0,077)^{3-0})$
 $= 3(0,923) \times (0,077)^2 + (0,077)^3 = 0,0169$

Exercice n°4

1) a) $\overrightarrow{N_{P_1}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{N_{P_2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{-11} \Rightarrow P_1$ et P_2 sont sécants

b) $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{pour } x = t \in \mathbb{R} \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow 7t - 13y = 1 \\ 2z = -4t + 11y \end{cases}$

2) $7 \times 2 - 13 \times 1 = 14 - 13 = 1$

$7x - 13y = 7 \times 2 - 13 \times 1 \Leftrightarrow 7(x - 2) = 13(y - 1)$

$\Leftrightarrow 13 \text{ divise } 7(x - 2) \text{ et } 7 \wedge 13 = 1 \text{ donc d'après lemme de Gauss}$

$13 \text{ divise } (x - 2) \text{ Ainsi } x - 2 = 13k ; k \in \mathbb{Z} \text{ par suite } x = 2 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$

$7 \cdot (13k) = 13(y - 1) \Leftrightarrow 7k = y - 1 \Leftrightarrow y = 1 + 7k, k \in \mathbb{Z}$

Conclusion $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 13k, 1 + 7k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

3) a) (S) : $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow 7x - 13y = 1 \\ (2) \Rightarrow 2z = -4x + 11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases}$

Réciproquement $\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z + 4x - 11y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow 3x - 2y - 2z = 1 \\ 2z + 4x - 11y = 0 \end{cases}$
 (ou bien par équivalence)

b) $\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 13k ; y = 1 + 7k \text{ et } 2z = 3 + 25k ; k = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$

Donc $M(15 + 26p, 8 + 14p, 14 + 25p) ; p \in \mathbb{Z}^*$

Exercice n°5

- 1) a) ****** $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 0[$
 $x \mapsto v(x) = e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où $g = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
****** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0
 g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$
 b) $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = g(x) \Rightarrow g$ est paire
 Donc la courbe $\mathcal{C}$ de g admet $(0, \overline{y})$ comme axe de symétrie

- 2) a) On pose $X = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{X} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{X}}$, $X \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}}\right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} (\sqrt{-X} e^{\frac{X}{2}}) = 0 \Rightarrow g_d'(0) = 0$$

$\mathcal{C}$ admet une demi tangente horizontale au point O par raison de symétrie (g est paire) $g'(0) = 0$
 D'où g est dérivable en 0

- b) ****** $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 0[$
 $x \mapsto v(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

****** Pour tout $x \neq 0$ on a : $g'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{g(x)}{x^3}$

- c) g est paire $\Rightarrow$ on étudie g sur $[0, +\infty[$ $g'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	0	1

- d) g est continue et strictement décroissante sur

$$[0, +\infty[\text{ et } f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{+\infty} f\right] = [0, 1[$$

$\Rightarrow g$ Réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$

e) $y \in]0, +\infty[$, $x \in]0, 1[$ $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \ln x$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2\ln x} = y^2$ or $g^{-1}(x) = y \in]0, +\infty[$ et $g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$

D'où $\forall x \in [0, 1[$: $g^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{2\ln x}}$

- 3) a) Pour tout $x \neq 0$ on a : $g''(x) = \frac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{x^3 \frac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$

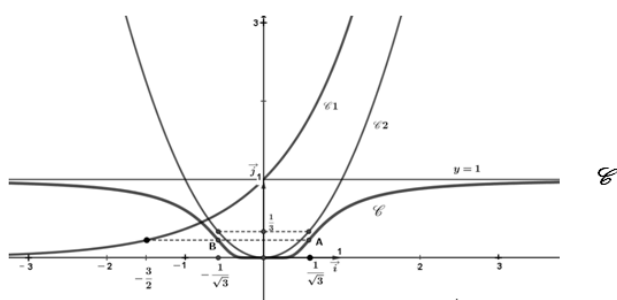
le signe de $g''(x)$ est celui de $(1 - 3x^2)$, on a $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$ s'annule deux fois et change de signe donc $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexions

$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
<i>Signe de $g''(x)$</i>	$-$	0	$+$	0	$-$

- b)



- 4) $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = g^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

- 5) a) $V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt = \pi \int_0^n g^2(t) dt \Rightarrow$ comme g est continue et positive l'intervalle $[0, n]$

Alors : $V(n)$ est le volume (en unité de volume) engendré par rotation de la courbe $\mathcal{C}$ au tour de l'axe des abscisses

b) $\pi \int_0^n f(t) dt - \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt = \pi \left(\int_0^n f(t) dt - \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt\right) = \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt \geq 0$
 $\Rightarrow V(n) \geq \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt$

c) ****** f est croissante sur $[0, +\infty[$; $t \geq \sqrt{n} \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{n}) \Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \geq \pi f(\sqrt{n}) \int_{\sqrt{n}}^n dt$
 $\Rightarrow V(n) \geq \pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \Rightarrow V(n) \geq \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1)$

****** $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} V(n) = +\infty$

- d) pour tout réel t de $[0, +\infty[$ $g(t) \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 \Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n 1 dt$

$$\Rightarrow V(n) \leq \pi(n - \sqrt{n}) \leq \pi n$$

e) $\pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi f(\sqrt{n})\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{V(n)}{n} \leq \pi$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \underbrace{f(\sqrt{n})}_{1} \left(1 - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n}}_0}\right) = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n} = \pi$$