

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2021	Session principale
	Epreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

* * * * *

N° d'inscription

Le sujet comporte quatre pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe, $OABC$ est un rectangle de centre I tel que

$OC = 1$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}$ [2π] et D le point du segment $[OA]$ tel que $OD = OC$.

- 1) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur I et D sur B .
b/ Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.
c/ On note Ω le centre de f . Construire Ω .
 - 2) Soit g l'antidéplacement qui envoie O sur I et D sur B .
a/ Montrer que g est une symétrie glissante.
b/ Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$.
Les droites (JK) et (OA) se coupent au point E .
Montrer que $g(E) = J$.
c/ En déduire que $g = S_{(JK)} \circ t_{EJ}^{-1}$.
 - 3) a/ Montrer que $f^{-1} \circ g = S_{(OA)}$. En déduire que $f(E) = J$.
b/ Comparer OE et OJ . En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.
- Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$.
On note z_I , z_J et z_K les affixes respectives des points I , J et K .
- 4) a/ Justifier que $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
b/ Montrer que $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$.
c/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK})$.
 - 5) Soit M un point de la droite (JK) . On désigne par N le symétrique de M par rapport à (OA) et par P l'image de M par g .
a/ Soit r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Montrer que $r(M) = N$.
b/ En déduire que $f(N) = P$.

Exercice 2 (4 points)

1) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$.

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021} .

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1 + n(x-1) \pmod{100}.$$

2) Vérifier que 21 est un élément de E .

3) Soit x un élément de E .

a/ Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$.

b/ En déduire que $x \equiv 1 \pmod{10}$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+10q)^n \equiv 1 + 10nq \pmod{100}$.

5) Déterminer l'ensemble E .

Exercice 3 (6 points)

1) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

c/ Dresser le tableau de variation de φ .

d/ Tracer la courbe (\mathcal{C}) , en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

2) Soit φ_n la fonction définie sur $]-n, +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \frac{1 + \ln(x+n)}{x+n}$.

On désigne par (\mathcal{C}_n) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a/ En remarquant que $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, montrer que (\mathcal{C}_n) est l'image de (\mathcal{C}) par une translation que l'on précisera.

b/ Tracer (\mathcal{C}_1) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3) Soit h_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$.

a/ Montrer que pour tout $x \geq 1$, $h_n(x) < 0$.

b/ Montrer que pour tout x de $]0, 1[$, $h'_n(x) < 0$.

c/ En déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution α_n et vérifier que $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$.

4) a/ Montrer que $n+1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$.

b/ Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

d/ Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$. En déduire la valeur de ℓ .



Exercice 4 (4.5 points)

1) Soit F et H les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}} dt \text{ et } H(x) = \frac{4}{e} - 2(1 + \sqrt{x}) e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner $F'(x)$.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = H(x)$.

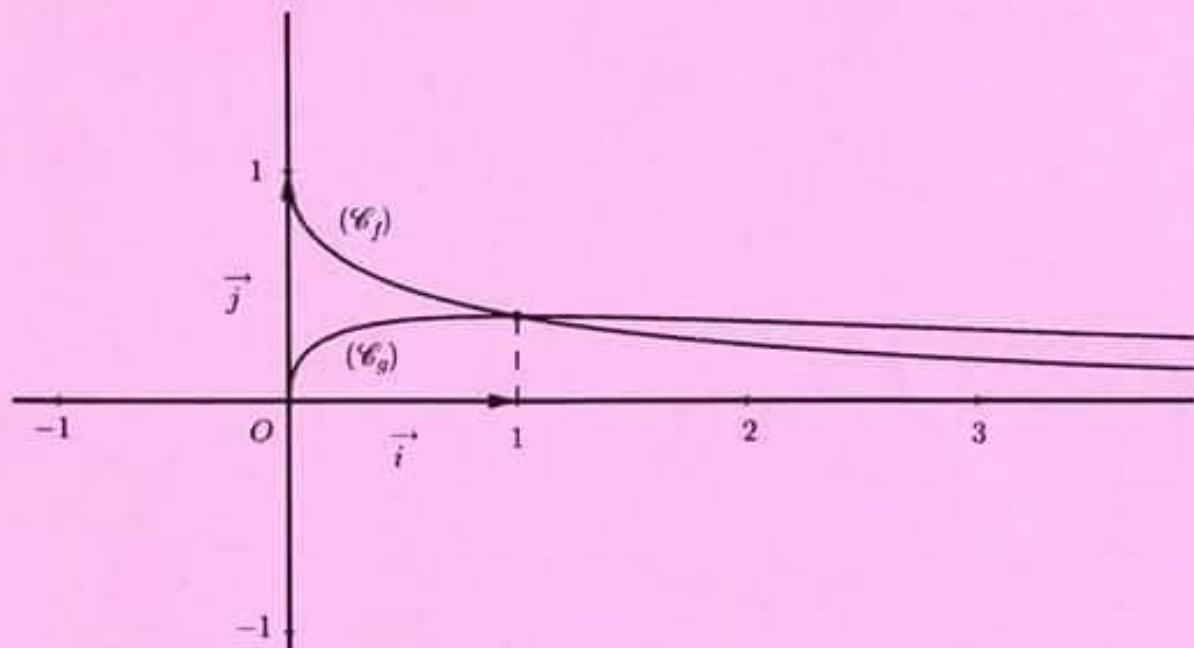
c/ En déduire que $F(0) = H(0)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt$.

a/ En remarquant que pour tout $t > 0$, $\sqrt{t} = \frac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$, pour tout $x > 0$.

b/ Justifier que $G(0) = \frac{2}{e} + 2F(0)$.

3) Ci-dessous on a tracé, dans un repère orthonormé, les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.



Pour tout $\lambda \geq 1$, on désigne par \mathcal{A}_λ l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , (\mathcal{C}_g) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

a/ Montrer que $\mathcal{A}_1 = \frac{6}{e} - 2$.

b/ Montrer que pour tout $\lambda > 1$, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$.

c/ Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom

Date et lieu de naissance :

X -----

Signatures des surveillants

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie

