RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription | | | | | | |

✻✻✻✻✻

Le sujet comporte cinq pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2) Vérifier que $a^3 \equiv a\ (mod\ 6)$.

3) **a/** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a\ (mod\ 6)$.

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{2n} \equiv a^2\ (mod\ 6)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0\ (mod\ 6), \\ x^3y^2 \equiv 1\ (mod\ 6). \end{cases}$

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, le point O est le milieu du segment $[BC]$ et les triangles AEB et ACF sont équilatéraux directs.

1) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Montrer que $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$.

2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a/ Montrer que $S([BE]) = [CF]$.

b/ Les droites (BE) et (CF) se coupent en un point Ω.
Montrer que les points A, O et Ω sont alignés.

3) Soit f un déplacement qui envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[CF]$.

a/ Montrer que $f = r_1$ ou f est la rotation r_2 d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω.

b/ Construire le point $A' = r_2(A)$ et montrer que $ACA'F$ est un losange.

4) Soit g l'antidéplacement qui envoie B sur F et E sur C.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Montrer que $g(A) = A'$.

c/ Soit I le milieu du segment $[BE]$ et $J = g(I)$. Montrer que $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$.

Exercice 3 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

1) a/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+z+\frac{1}{3}=0$.
   On note z_1 et z_2 les solutions avec $Im(z_1)>0$.

   b/ Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe , A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Δ est la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C.
   Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1.

3) Soit D le point d'affixe $z_D=\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

   a/ Vérifier que $z_D=z_1^3$.

   b/ Montrer que $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$.

   c/ Construire le point D.

4) Soit $z\in\mathbb{C}$.
   Montrer que $\left(z^2+z\in\mathbb{R}\right)$ équivaut à $\left(z\in\mathbb{R}\ \text{ou}\ Re(z)=-\frac{1}{2}\right)$.

5) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{\,1\,\}$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3.

   a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

   b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe α .
   Construire, en justifiant, le point Q d'affixe α^3.

Exercice 4 (7.5 points)

Partie A

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x$.

α et β sont les réels tels que $g(\alpha)=1$ et $g(\beta)=\frac{1}{2}$.

1) En utilisant le graphique,

   a/ donner le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g,

   b/ résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x)<\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad g(x)<1.$$

2) Montrer que $\alpha>\frac{1}{2}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(x) - \left(g(x)\right)^2$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ Calculer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter le résultat.

c/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4) **a/** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g'(x)\left(\dfrac{1}{2} - g(x)\right)$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a/ Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_0^{\alpha} xe^{2x}dx$.

b/ En déduire que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Partie B

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} \left(g(x)\right)^n dx$.

1) **a/** Montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\alpha}{n+1}$.

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2) **a/** Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(x)\right)^n dx \leqslant J_n$.

b/ Montrer que $\dfrac{1}{n}\left[g\left(\alpha - \dfrac{1}{n}\right)\right]^n \leqslant J_n \leqslant 1$.

c/ Justifier que $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

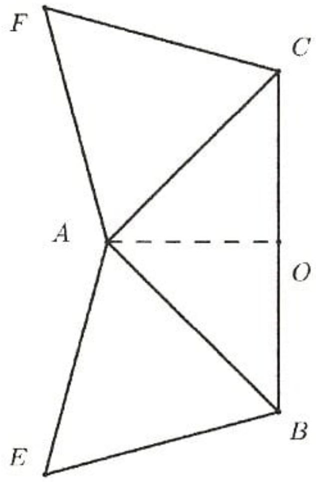
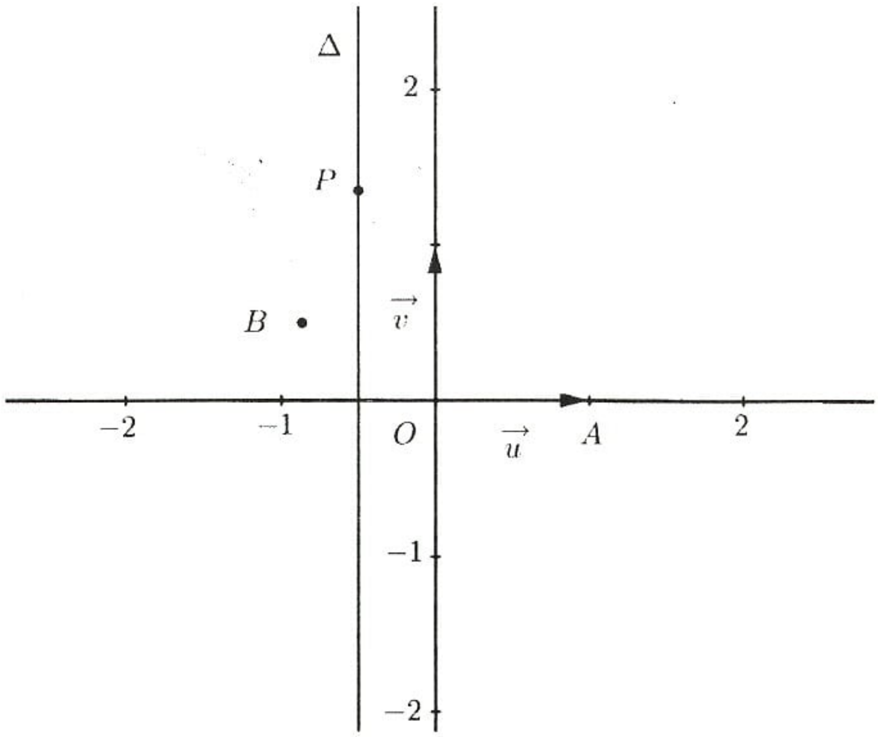


Figure 2



Ne rien écrire ici

Figure 3