Lycée de Kairouan
Classe: 4ème Techniques

Mathématiques

Ens:Abdessattar El-Faleh
Année Scolaire:2021-2022

fonctions Logarithme

Exercice 1:

1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

- a) $f_1(x) = \ln(x-2)$
- b) $f_2(x) = \ln(3-x)$
- c) $f_3(x) = \ln(x^2+1)$
- d) $f_4(x) = \ln(4-x^2)$
- e) $f_5(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)\ln(x-3)}$
- f) $f_6(x) = \sqrt{\ln(x)}$
- g) $f_7(x) = \ln(3x+1) + \ln(x-2)$
- h) $f_8(x) = \ln(x^2+3x+5) + \ln(-x)$
- i) $f_9(x) = \frac{x+\ln(x^2-1)}{(x-5)\ln(x-4)}$
- j) $f_{10}(x) = \ln(-2x+4)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

- a) $\ln(x+3) = 2$
- b) $\ln(-3x+5) = 0$
- c) $\ln(x-1) = \ln(2x+5)$
- d) $\ln(x+1) = 4$
- e) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(-x+3)$
- f) $\ln(2x+1) - \ln(x+4) = -2$
- g) $\ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = 0$
- h) $\ln^2(x) - 3\ln(x) - 4 = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

- a) $\ln(x) < \ln(2)$
- b) $\ln(5x-3) \geqslant \ln(-x+2)$
- c) $\ln(x^2+3x-4) \leq 0$
- d) $\ln(1-x^2) > 0$

Exercice 2:

1 Calculer les limites suivantes:

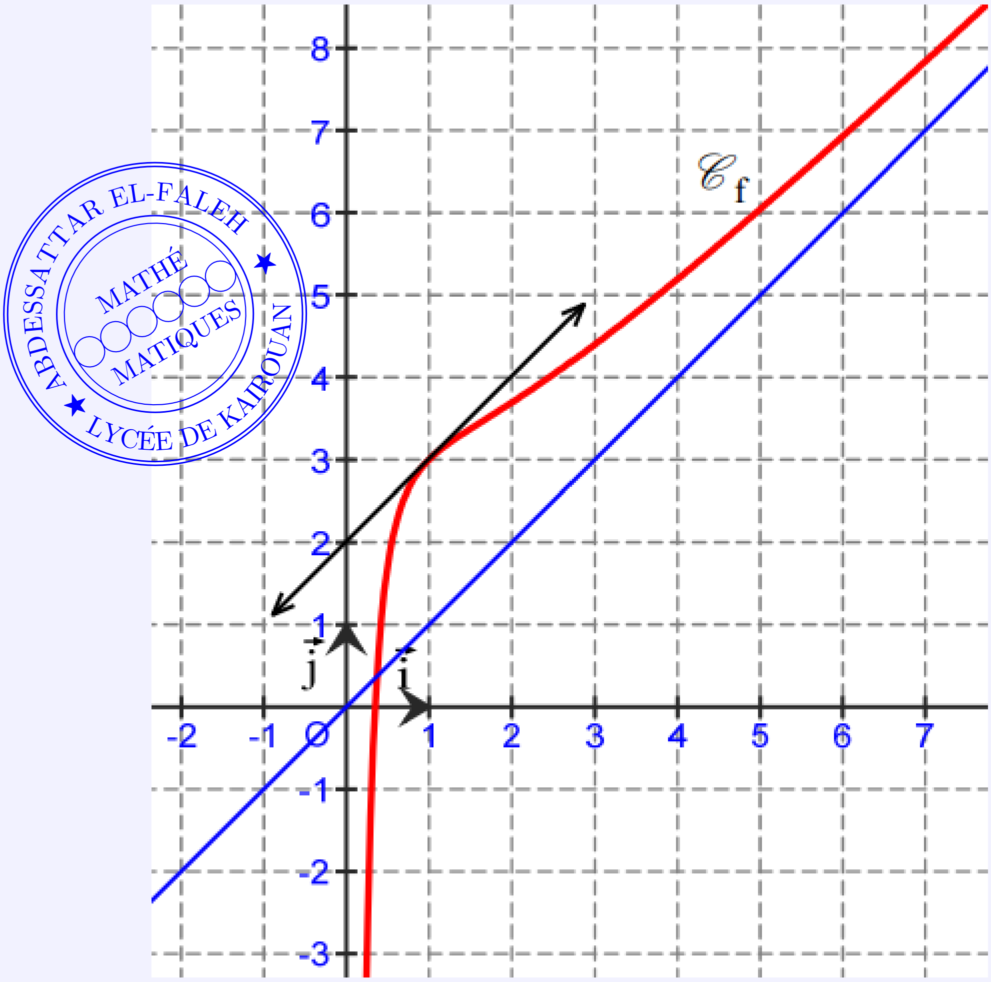
- a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [x^2 + \ln(x)]$
- b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
- c) $\lim\limits_{x\to0^+} (x+1)\ln(x)$
- d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

2 Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées:

- a) $f(x) = \ln(3x+1)$
- b) $g(x) = x^2 + \ln(x^2-9)$
- c) $h(x) = \ln(3x^2-5x+2) + 2$
- d) $k(x) = \ln(\frac{x-2}{x+1})$
- e) $l(x) = \ln(x^4+1)$
- f) $\phi(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}$

Exercice 3:

On donne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1. Déterminer graphiquement:

   a. D_f
   b. $f(1)$
   c. $f'(1)$
   d. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
   e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
   f. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$
   g. Le tableau de variation de f

2. Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle I que l'on précisera.

3. On admet que $f(x) = x + \frac{a}{x} + b\frac{\ln(x)}{x}$ $\quad (a; b) \in \mathbb{R}^2$

   a. Calculer $f'(x)$
   b. En déduire l'expression de $f(x)$

4. a. Montrer que f admet une primitive F sur D_f
   b. Déterminer la primitive de F tel que $F(1) = 2$

Exercice 4:

Soit $f(x) = x^2 + \ln(x)$

1. Déterminer D_f
2. Dresser le tableau de variation de f
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

Exercice 6:

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

1. Déterminer D_f
2. a. Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a: $f(3-x) = f(x)$
   b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ on précisons l'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 7:

1. Soit $g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$
   a. Déterminer D_g
   b. Dresser le tableau de variation de g
   c. En déduire le signe de $g(x)$
2. Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x-1)$
   a. Dresser le tableau de variation de f
   b. Montrer que le point $I(2; 0)$ est un point d'inflexion pour $(\mathscr{C}_f)$
   c. Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point I
   d. Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite $(D) : y = x$
   e. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   b. Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(1+e)$
   c. Tracer $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_f)$

Exercice 8:

Soit $f(x) = \ln(\frac{x-1}{3-x})$

1. Déterminer D_f
2. Montrer que le point $A(2;0)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle I que l'on précisera.
5. Prouver que $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ admet un centre de symétrie que l'on précisera.
6. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 9:

-I-

Soit $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln(x)$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de g
2. Dresser le tableau de variations de g
3. Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$

-II-

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2}$

1. a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
   b) En déduire le tableau de variations de f
2. a) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
   b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (Δ)
   c) Montrer qu'il existe un point A de $(\mathscr{C}_f)$ où la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en ce point est parallèle à (Δ)

Exercice 10:

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 2\ln(x)$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

3.
   a. Dresser le tableau de variations de g
   b. Calculer $g(1)$
   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β tel que $\alpha \in]3.5, 3.6[$
   d. En déduire le signe de $g(x)$ et celui de $g(\frac{1}{x})$

4. Soit $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + x^2 \ln(x) & \text{si } \; x > 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}$

   a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   c. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$
   d. Dresser le tableau de variations de f
   e. Montrer que $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$
   f. En déduire un encadrement de $f(\frac{1}{\alpha})$

5. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ sur $[0, 3]$

Exercice 11:

-I-

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln(x)$.

1.
   a. Calculer: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   b. Étudier les variations de $\mathbf{g}$.

2.
   a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $0,27 < \alpha < 0,28$
   b. Déduire le signe de $g(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

-II-

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est continue à droite en 0 .

c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Tracer $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 12:

-I-

Soit $g(x) = x - \ln(x)$; $x \in]0,+\infty[$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) a) Dresser le tableau de variations de g

b) En déduire que $g(x) \geqslant 1$, $\forall x \in]0,+\infty[$

-II-

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que f est continue sur D_f

3) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)+1}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

5) a) Montrer que $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{[x-\ln(x)]^2}$; $x \in]0,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de f

6) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(1;0)$

7) Tracer $(\mathscr{C}_f)$

Exercice 13:

Soit $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, +\infty[$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2.
   a. Vérifier que $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, +\infty[$
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3.
   a. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$
   b. Dresser le tableau de variations de f
   c. Soit g la restriction de f à $]0, 1]$
      i. Montrer que g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera
      ii. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 2[$
      iii. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 14:

-I-

Soit $g(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$, $x \in [0, +\infty[$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2. Dresser le tableau de variations de g

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]3.8, 4[$

4. En déduire le signe de $g(x)$

-II-

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2. Montrer que f est continue en 0^+

3. Étudier la dérivabilité de f en 0^+. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

4. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$

5 Montrer que pour tout réel strictement positif $\boldsymbol{x}$, on a: $\boldsymbol{f'(x) = \frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}}$

6 Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$

7 Tracer $(\mathscr{C}_{\boldsymbol{f}})$ dans un même repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$