Correction Pré - Bac

Bac MATH 2021

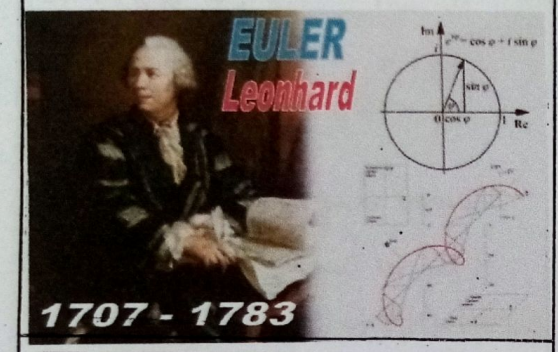
Série établie et Corrigée par :

Mr M. MAAOUIA 98 600 618 - 20 810 290

SOMMAIRE

Exercice N° 01 : 03
Exercice N° 02 : 03
Exercice N° 03 : 05
Exercice N° 04 : 06
Exercice N° 05 : 07
Exercice N° 06 : 08
Exercice N° 07 : 10
Exercice N° 08 : 11
Exercice N° 09 : 13
Exercice N° 10 : 14
Exercice N° 11 : 15
Exercice N° 12 : 16
Exercice N° 13 : 17
Exercice N° 14 : 19
Exercice N° 15 : 19
Exercice N° 16 :..... 20
Exercice N° 17 : 20
Exercice N° 18 : 22
Exercice N° 19 : 23
Exercice N° 20 : 23
Exercice N° 21 : 24
Exercice N° 22 : 25
Exercice N° 23 :. 26
Exercice N° 24 : 27
Exercice N° 25 : 28
Exercice N° 26 : 29
Exercice N° 27 : 30
Exercice N° 28 : 31
Exercice N° 29 : 32
Exercice N° 30 : 34
Exercice N° 31 : 35
Problème N° 01 : 36
Problème N° 01: 37
Problème N° 01: 39
Problème N° 01 : 41
Conseils Pratiques : 44

COMPLEXE



Exercice N° 01 :

$\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$(E) : z^2 - 2e^{i\theta} z + e^{i2\theta} - i = 0$

1) a) $z_0 = 0$ sol de $(E) \Leftrightarrow e^{i2\theta} - i = 0$

$\Leftrightarrow e^{i2\theta} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ or $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

b) $\Delta' = (e^{i\theta})^2 - (e^{i2\theta} - i) = i = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2$

$\Rightarrow \begin{cases} z' = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z'' = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$ $S_{\mathbb{C}} = \{z', z''\}$

2) $A(e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{4}})$ $B(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}})$

a) $z_B = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})} + e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\right]$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})}$

or $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) > 0$

d'où $\boxed{z_B = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})}}$

b) $OABC$ # $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow z_A - z_O = z_B - z_C \Rightarrow z_C = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_C = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \boxed{z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}}}$

c) $OABC$ losange $\Rightarrow OA = OC$

or $OC = |z_C| = 2 \Rightarrow$ il faut que $OA = 2$

or $OA = |z_A| = |e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{4}}|$

$\Leftrightarrow OA = \left|\cos\theta + i\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

$\Leftrightarrow OA = \left|\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta + \frac{1}{2} + \sin^2\theta - \sqrt{2}\sin\theta + \frac{1}{2} = 4$

$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) = 4 \Leftrightarrow$

$\cos\theta + \sin\theta = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \notin]0, \frac{\pi}{2}[$

3) Ensemble des pts B :

on a $z_B = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$

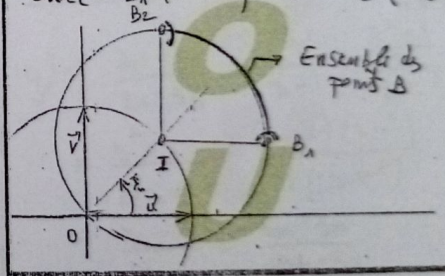
$z_B - e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\theta}$ on pose $I(e^{i\frac{\pi}{4}})$

$\Leftrightarrow z_B - z_I = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} IB = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{IB}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B \in \mathcal{C}(I, 1) \\ \text{et} \\ 0 < (\vec{u}, \overrightarrow{IB}) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Conl : B décrit l'arc $(\overrightarrow{B_1B_2})$ $\{B_1, B_2\}$

avec $B_1(1 + e^{i\frac{\pi}{4}})$ et $B_2(i + e^{i\frac{\pi}{4}})$



Exercice N° 02 :

$A(i)$ $B(-i)$ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, 1)$

$F : M(z) \longmapsto M'(z') \,/\, z' = \frac{z^2 + 1}{z}$

$M'' = S_{(ox)}(M) \Rightarrow z'' = \bar{z}$

1) a) $f(A) = A' \,/\, z_{A'} = \frac{(i)^2 + 1}{i} = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(A) = O}$

• $f(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{(-i)^2+1}{-i} = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(B) = O}$

b) on pose I : invariant par F

$\Leftrightarrow F(I) = I \Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} = z \Leftrightarrow z^2+1 = z^2$

$\Leftrightarrow 1 = 0$: Absurde

$\Rightarrow$ F n'admet pas de points invariants

c) Mq (AB) globalement inv par F

$\Leftrightarrow$ Mq $\forall M(z) \in (AB) \Rightarrow F(M) = M' \in (AB)$

or $M(z) \in (AB) \Leftrightarrow z = i\alpha$

car $(AB) = (O\vec{v})$: axe des imaginaires

$\Rightarrow z' = \frac{(i\alpha)^2+1}{i\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{i\alpha}$

$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{i}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right) = i\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)$

$\Leftrightarrow z' = i\alpha' \in i\mathbb{R} \Rightarrow M' \in (AB)$

Conl : $(AB)\setminus\{O\}$ est globalement invariant par F.

2) a) $z = e^{i\theta} \Rightarrow z' = \frac{(e^{i\theta})^2+1}{e^{i\theta}}$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Leftrightarrow \boxed{z' = 2\cos(\theta)}$

b) $F(z) = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} = 2\cos\theta$

$\Leftrightarrow z^2+1 = 2z\cos\theta \Leftrightarrow$

$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$

$\Rightarrow z' = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$z'' = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

$S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

c) Si M décrit $\mathcal{C}_{(O,1)} \Leftrightarrow OM = 1$

$\Rightarrow z_M = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

d'où $F(z) = 2\cos\theta \Leftrightarrow z_{M'} = 2\cos\theta$

or $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq z_{M'} \leq 2$

alors M' décrit le segment $[I\,J]$ tel que $I(2)$ et $J(-2)$.

3) a) $z' - z = \frac{z^2+1}{z} - z = \frac{\cancel{z^2}+1-\cancel{z^2}}{z}$

$\Leftrightarrow \boxed{z' - z = \frac{1}{z}}$

b) d'où $\begin{cases} |z'-z| = \left|\frac{1}{z}\right| \\ \arg(z'-z) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MM' = \frac{1}{OM} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{MM'}) \equiv (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) [2\pi] \end{cases}$

or $M'' = S_{(Ox)}(M) \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM''})$

d'où $\begin{cases} MM' = \frac{1}{OM} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{MM'}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM''}) [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MM' = \frac{1}{OM} \\ \overrightarrow{MM'} \text{ col à } \overrightarrow{OM''} \text{ et de même sens} \end{cases}$

c) Si $M \in \mathcal{C} \Rightarrow OM = 1$

d'où $MM' = 1 \Rightarrow MM' = MO$

d'autre part : $\overrightarrow{MM'}$ col à $\overrightarrow{OM''}$ et de même sens

et $MM' = 1$, $OM'' = OM = 1$ $\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM''}$ d'où $OMM'M''$ #

on a alors : $\begin{cases} OMM'M'' \# \\ MO = MM' \end{cases} \Rightarrow OMM'M''$ losange

4) a) $\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_B} = \frac{z'}{z+i} = \frac{\frac{z^2+1}{z}}{z+i}$

$= \frac{z^2+1}{z(z+i)} = \frac{\cancel{(z+i)}(z-i)}{z\cancel{(z+i)}}$

$= \frac{z-i}{z} = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_O}$

d'où $\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_B} = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_O} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{OM'}{BM} = \frac{AM}{OM} \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}) [2\pi] \end{cases}$

b) $M \in \Delta$ = méd $[OA] \Rightarrow AM = OM$

$\Leftrightarrow \frac{AM}{OM} = 1$ alors $\frac{OM'}{BM} = 1$

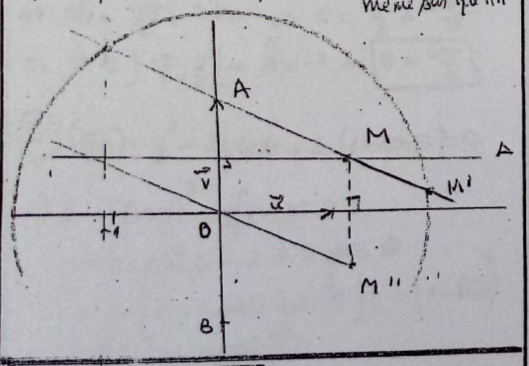
$\Leftrightarrow OM' = BM$

alors $M' \in \mathcal{C}_{(O, BM)}$ ①

d'autre part : $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{OM''}$ et de même sens ②

$\Rightarrow$ on a $M'' = S_{(O,\vec{u})}(M)$

la // à (OM'') passant par M coupe $\mathcal{C}_{(O, BM)}$ en M' / $\overrightarrow{OM''}$ de même sens que $\overrightarrow{MM'}$



Exercice N° 03 :

Ⓐ $A(-1)$ $B(i)$ et $Re'(z_D) \neq 0$

$f : P\setminus\{B\} \longrightarrow P$

$M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{z-i}{\bar{z}+i}$

1) a) Γ : $z' = -1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{\bar{z}+i} = -1$

$\Leftrightarrow z - \cancel{i} = -\bar{z} - \cancel{i} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

$\Leftrightarrow z$ imag pur $\Leftrightarrow M(z) \in (O\vec{v})$

or $M \neq B \Rightarrow \boxed{\Gamma = (O\vec{v}) \setminus \{B\}}$

b) $|z'| = \left|\frac{z-i}{\bar{z}+i}\right| = \frac{|z-i|}{|\overline{z-i}|} = \frac{|z-i|}{|z-i|} = 1$

$\Rightarrow \boxed{|z'| = 1}$ $\forall M \in P\setminus\{B\}$

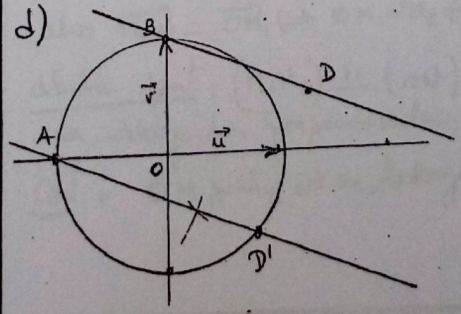
c) Mq $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires

$\frac{aff(\overrightarrow{AM'})}{aff(\overrightarrow{BM})} = \frac{z'+1}{z-i} = \frac{\frac{z-i}{\bar{z}+i}+1}{z-i}$

$= \frac{\cancel{z-i} + \bar{z} + \cancel{i}}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2} = \frac{2Re'(z)}{|z-i|^2}$

$\Rightarrow \frac{aff(\overrightarrow{AM'})}{aff(\overrightarrow{BM})} \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BM}}$

d)



$D \xrightarrow{f} D' \Rightarrow |z_{D'}| = 1$

d'où $OD' = 1 \Leftrightarrow D' \in \mathcal{C}_{(O,1)}$ ①

et $\overrightarrow{AD'}$ colinéaire à $\overrightarrow{BD} \Rightarrow D' \in \Delta$: la // à (BD) passant par A ②

① et ② $\Rightarrow D' \in \Delta \cap \mathcal{C}_{(O,1)}$

or $D' \neq A$ car $z' \neq -1$ car $Re'(z_D) \neq 0$

Conl $\boxed{D' = \Delta \cap \mathcal{C}_{(O,1)} \setminus \{A\}}$

2) $z = e^{i\theta}$ / $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) $e^{i\theta} - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$= e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\frac{e^{i\theta}}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}\right]$

$\Leftrightarrow e^{i\theta} - i = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$

$\Leftrightarrow e^{i\theta} - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

or $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

Conl : $\boxed{e^{i\theta} - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$

• $e^{-i\theta} + i = \overline{\left(e^{i\theta} - i\right)} = \overline{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-i\theta} + i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$

b) $z' = \dfrac{z-i}{\bar{z}+i} = \dfrac{e^{i\theta}-i}{e^{-i\theta}+i}$

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{\cancel{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\cancel{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

c) $\left(e^{i\theta}-i\right)^3 = \left(e^{-i\theta}+i\right)^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{e^{i\theta}-i}{e^{-i\theta}+i}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow (z')^3 = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow e^{i\left(3\theta-\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i0} \Leftrightarrow 3\theta - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi$

$\Leftrightarrow 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$

or $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow k = -1 \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{6}}$

(B) (E_θ) : $z^2 - 2z\cos\theta + 2(1-\sin\theta) = 0$

1) $\Delta' = (\cos\theta)^2 - 2(1-\sin\theta)$

$= 1 - \sin^2\theta - 2 + 2\sin\theta$

$= -\left[1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta\right] = -(1-\sin\theta)^2$

$= \left[i(1-\sin\theta)\right]^2$

$\Rightarrow z' = \cos\theta - i(1-\sin\theta)$

$= (\cos\theta + i\sin\theta) - i = e^{i\theta} - i$

$z'' = \cos\theta + i(1-\sin\theta)$

$= (\cos\theta - i\sin\theta) + i = e^{-i\theta} + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{z', z''\}$

2) $M_1(z_1 = e^{i\theta} - i)$ $M_2(z_2 = e^{-i\theta} + i)$

$N(z_3 = 2\cos\theta)$

a) $\dfrac{aff(\overrightarrow{M_1M_2})}{aff(\overrightarrow{ON})} = \dfrac{z_2 - z_1}{z_N - z_O}$

$= \dfrac{-e^{-i\theta} + i - e^{i\theta} + i}{2\cos\theta} = \dfrac{2i - 2(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2\cos\theta}$

$= \dfrac{2i - 2i\sin\theta}{2\cos\theta} = i\left(\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{aff(\overrightarrow{M_1M_2})}{aff(\overrightarrow{ON})} \in i\mathbb{R}$ d'où

$\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{ON}$ alors :

(M_1M_2) et (ON) sont perpendiculaires

• $aff(\overrightarrow{M_2N}) = z_N - z_{M_2} = 2\cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta + i)$

$= \cos\theta + i\sin\theta - i = e^{i\theta} - i$

$= z_{M_1} - z_O = aff(\overrightarrow{OM_1})$

alors $\overrightarrow{M_2N} = \overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow OM_1NM_2$ ||

d'autre part : $(M_1M_2) \perp (ON)$

$\Rightarrow$ diagonales perpendiculaires

Conl : OM_1NM_2 est un losange

b) Ensemble des pts M_1

on a $z_1 = e^{i\theta} - i$ mq $\Omega(-i)$

$\Rightarrow z_{M_1} - z_\Omega = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

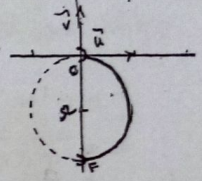
or $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_1}) < \frac{\pi}{2}$

Conl : M_1 decrit Γ' : l'arc $\widehat{(FO)} \setminus \{F, O\}$

du cercle $\mathcal{C}(\Omega, 1)$

avec $z_\Omega = -i$

et $z_F = -2i$



Exercice N° 04 :

(E_θ) : $z^2 - 2(e^{i\theta} - i)z + (e^{i\theta} - i)^2 + e^{i2\theta} = 0$

1) $\Delta' = \cancel{(e^{i\theta} - i)^2} - \left[\cancel{(e^{i\theta} - i)^2} + e^{i2\theta}\right]$

$\Rightarrow \Delta' = -e^{i2\theta} = (ie^{i\theta})^2$

$\Rightarrow z' = e^{i\theta} - i - ie^{i\theta} = (1-i)e^{i\theta} - i$

$z'' = e^{i\theta} - i + ie^{i\theta} = (1+i)e^{i\theta} - i$

$S_{\mathbb{C}} = \{z', z''\}$

2) $A(-i)$ $M(e^{i\theta})$ $M'\left[(1-i)e^{i\theta} - i\right]$

et $M''\left[(1+i)e^{i\theta} - i\right]$

a) Ensemble des points $M(z)$:

on a $z_M = e^{i\theta} \iff \begin{cases} OM = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow$ M décrit le cercle $\mathcal{C}_{(O,1)}$

b) Mq $z'' = iz' - (1+i)$

on a $iz' - (1+i) = i\left[(1-i)e^{i\theta} - i\right] - 1 - i$

$= (1+i)e^{i\theta} \cancel{+1} \cancel{-1} - i = z''$

$\iff \boxed{z'' = iz' - (1+i)}$

c) Ms $A \in$ méd $[M'M'']$

on a $AM' = |z' - z_A| = |(1-i)e^{i\theta}| = \sqrt{2}$

et $AM'' = |z'' - z_A| = |(1+i)e^{i\theta}| = \sqrt{2}$

alors $AM' = AM'' \iff A \in$ méd$[M'M'']$

• $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) = \arg\left(\dfrac{z'' - z_A}{z' - z_A}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{(1+i)\cancel{e^{i\theta}}}{(1-i)\cancel{e^{i\theta}}}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) on a $\begin{cases} AM' = AM'' \\ (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

alors $\boxed{R_{(A, \frac{\pi}{2})}(M') = M''}$

e) $I = M' * M''$

$\Rightarrow z_I = \dfrac{z' + z''}{2} = e^{i\theta} - i$

$\iff z_I = z_M + z_A \iff z_I - z_M = z_A$

$\iff \text{aff}(\overrightarrow{MI}) = \text{aff}(\overrightarrow{OA})$

$\iff \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{OA} \iff \boxed{I = t_{\overrightarrow{OA}}(M)}$

Exercice N° 05 :

1) $z^2 + \bar{z}^2 - 2z(2+i) = 0$

on pose $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

alors (E) : $(x+iy)^2 + (x-iy)^2 - 2(x+iy)(2+i) = 0$

$x^2 + \cancel{2ixy} - y^2 + x^2 - \cancel{2ixy} - y^2 - 4x - 2ix - 4iy + 2y = 0$

$\iff (2x^2 - 2y^2 - 4x + 2y) - 2i(x + 2y) = 0$

$\iff \begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ \text{et} \\ 2x^2 - 2y^2 - 4x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \to x = -2y \Rightarrow (2)$: $6y^2 + 10y = 0$

$\iff 2y(3y+5) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = -\frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{0 ; \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{3}i\right)\right\}$

2) $M(z) \setminus \{0\} \longmapsto M'\left(z' = \dfrac{z^2 + \bar{z}^2}{2z}\right)$

et $N(\bar{z})$

a) Mq OM'N sont alignés

$\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{OM'})}{\text{aff}(\overrightarrow{ON})} = \dfrac{z'}{z_N} = \dfrac{z^2 + \bar{z}^2}{2z\bar{z}} = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{2(x^2+y^2)}$

$= \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \overrightarrow{ON'}$ col a $\overrightarrow{ON}$

d'où O, M' et N sont alignés

b) $\Delta = \{M \in P \,/\, M' = O\}$

$\iff z' = 0 \iff z^2 + \bar{z}^2 = 0$

$\iff 2x^2 - 2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2$

$\iff \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \Delta$ est la réunion des droites $\begin{cases} \Delta_1 : y = x \\ \Delta_2 : y = -x \end{cases}$ privée de O

c) Mq $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OM'}$

$\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{MM'})}{\text{aff}(\overrightarrow{OM'})} = \dfrac{z' - z}{z' - 0} = \dfrac{\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2z} - z}{\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2z}}$

$= \dfrac{\bar{z}^2 - z^2}{z^2 + \bar{z}^2} = \dfrac{-4ixy}{2(x^2 - y^2)}$

$= \left(\dfrac{2xy}{y^2 - x^2}\right)i \in i\mathbb{R}$

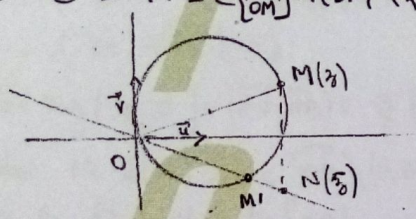
$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OM'}}$

d) Soit $M \in P \setminus \{O\}$ et $N = S_{(O,\vec{u})}(M)$

$\Rightarrow M' \in (ON)$ ①

et $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}_{[OM]}$ ②

① et ② $\Rightarrow M' = \mathcal{C}_{[OM]} \cap (ON) \setminus \{O\}$



e) $A'(2+i) \Rightarrow \dfrac{z_A^2 + \bar{z}_A^2}{2 z_A} = 2+i \Leftrightarrow$

$z_A^2 + \bar{z}_A^2 = 2(2+i) z_A \Leftrightarrow$

$z_A^2 + \bar{z}_A^2 - 2(2+i) z_A = 0$

$\Rightarrow z_A$: solution non nulle de (E)

$\Rightarrow \boxed{z_A = \frac{10}{3} - \frac{5}{3} i}$

• Construction du point A :

on a $\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{AA'}$ car $\overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{MM'}$

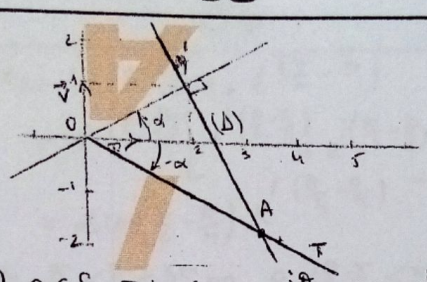
$\Rightarrow A \in \Delta$: la $\perp$ à (OA') passant par A'

or O, A', N : alignés et $N(\bar{z}_A)$

$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) [2\pi]$

$\Rightarrow A \in [OT) \,/\, (\vec{u}, \overrightarrow{OT}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) [2\pi]$

Conl : $A = [OT) \cap \Delta \setminus \{O\}$



3) $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}$

$\Gamma = \{ M(x,y) \in P \,/\, 2(y^2 - x^2) = 1 - \sqrt{1+8x^2} \}$

a) $z' = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2e^{i\theta}} = \dfrac{\cancel{2}\cos(2\theta)}{\cancel{2}e^{i\theta}} = \cos(2\theta) e^{-i\theta}$

• Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[\Rightarrow z' = \cos(2\theta) e^{-i\theta}$

• Si $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow z' = -\cos(2\theta) e^{i(\pi - \theta)}$

• Si $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z' = 0$: pas de forme Exp.

b) $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[\Rightarrow z' = \cos(2\theta) e^{-i\theta}$

alors $z_k = \dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{\cos(2\theta)} e^{i\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos(2\theta)} + i \dfrac{\sin\theta}{\cos(2\theta)}$

d'où $2[y_k^2 - x_k^2] = 2\left[\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2(2\theta)} - \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2(2\theta)}\right]$

$= \dfrac{-2\cos(2\theta)}{\cos^2(2\theta)} = \dfrac{-2}{\cos(2\theta)}$ (1)

d'autre part :

$1 - \sqrt{1 + 8x_k^2} = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{8\cos^2\theta}{\cos^2(2\theta)}}$

$= 1 - \sqrt{\dfrac{\cos^2(2\theta) + 8\cos^2\theta}{\cos^2(2\theta)}}$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{\cos^2(2\theta) + 8\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]}}{\cos(2\theta)}$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{(\cos(2\theta)+2)^2}}{\cos(2\theta)} = 1 - \dfrac{|\cos(2\theta)+2|}{\cos(2\theta)}$

$= 1 - \dfrac{\cos(2\theta)+2}{\cos(2\theta)} = -\dfrac{2}{\cos(2\theta)}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow 2(y_k^2 - x_k^2) = 1 - \sqrt{1 + x_k^2}$

$\Leftrightarrow k \in (\Gamma)$

Exercice N° 06 :

$A(1)$ $B(2)$ et $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

(E) $iz^2 - 2(i - \cos\theta) z - 2\cos\theta = 0$

1) $\Delta' = (i - \cos\theta)^2 + 2i\cos\theta$

$= -1 - \cancel{2i\cos\theta} + \cos^2\theta + \cancel{2i\cos\theta}$

$= -[1 - \cos^2\theta] = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$

• $z' = \dfrac{i - \cos\theta - i\sin\theta}{i} = 1 - \sin\theta + i\cos\theta$

$\Leftrightarrow z' = 1 + i(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + ie^{i\theta}$

• $z'' = \dfrac{i - \cos\theta + i\sin\theta}{i} = 1 + \sin\theta + i\cos\theta$

$\Leftrightarrow z'' = 1 + i(\cos\theta - i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow z'' = 1 + ie^{-i\theta}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ 1 + ie^{i\theta}, 1 + ie^{-i\theta} \}$

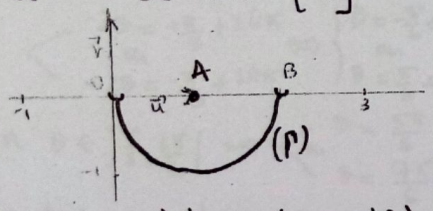
2) $\Gamma = \{M(z) \in P / \arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\}$

$\arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_O}\right)[2\pi]$

$= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$

d'où $\arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

alors M decrit l'arc $\overset{\frown}{OB} \setminus \{O, B\}$ du cercle $\mathcal{C}$ de diametre $[OB]$



3) $M_1(1+ie^{i\theta})$ $M_2(1+ie^{-i\theta})$

a) $z_1 = 1+ie^{i\theta} = 1+e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right]$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

or $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

alors $z_1 = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\pi)}$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4})}}$

• $z_2 = 1+ie^{-i\theta} = 1+e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$= e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right]$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$

or $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0$

d'où $\boxed{z_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}}$

b) • $\frac{z_1-2}{z_1} = \frac{ie^{i\theta}-1}{ie^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta}+i}{e^{i\theta}-i} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$= \frac{\cancel{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right]}{\cancel{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right]}$

$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = -i\cot an\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

or $0 < \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0$

d'où $\boxed{\frac{z_1-2}{z_1} \in i\mathbb{R}_-^*}$

• $\frac{z_2-2}{z_2} = \frac{ie^{-i\theta}-1}{ie^{-i\theta}+1} = \frac{e^{-i\theta}+i}{e^{-i\theta}-i}$

$= \frac{\cancel{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}}\left[e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}\right]}{\cancel{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}}\left[e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} - e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}\right]}$

$\Leftrightarrow \frac{z_2-2}{z_2} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = i\cot an\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

or $\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\Rightarrow \cot an\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < 0$

alors $\boxed{\frac{z_2-2}{z_2} \in i\mathbb{R}_-^*}$

c) $\arg\left[\frac{z_1-2}{z_1}\right] = \arg\left(\frac{z_2-2}{z_2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow M_1$ et M_2 decrivent l'arc (Γ)

d) G : centre de gravité de AM_1M_2

$\Rightarrow z_G = \frac{z_A+z_1+z_2}{3}$

$\Leftrightarrow z_G = \frac{1+1+ie^{i\theta}+1+ie^{-i\theta}}{3}$

$\Leftrightarrow z_G = 1+\frac{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{3}$

$\Leftrightarrow z_G = 1+\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)i$

on pose $G(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3}\cos\theta \end{cases}$

$x_G = 1 \Rightarrow G \in \Delta : x = 1$

$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow -1 \leq \cos\theta < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}\cos\theta < 0$

d'où $y_G \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right[$

Conl : G decrit le segment $[G_1A] \setminus \{A\}$ avec $G_1(1-\frac{2}{3}i)$ et $A(1,0)$

4) a) $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) = \arg\left(\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left[\frac{\cancel{1}+ie^{-i\theta}-\cancel{1}}{\cancel{1}+ie^{i\theta}-\cancel{1}}\right][2\pi]$

$\equiv \arg\left(e^{-i2\theta}\right)[2\pi] \equiv -2\theta\,[2\pi]$

b) $\overrightarrow{AM_1}, M_2$ équilatéral alors

$(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow -2\theta = \pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2\theta = +\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ \theta = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

Conl : Si $\theta \in \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\} \Rightarrow$ le triangle AM_1M_2 est équilatéral

Exercice N° 07 :

$A(e^{i\theta})$ $B(e^{-i\theta})$ $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f : M(z) \longmapsto M'(z') / z' = \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$

1) f existe ssi $2z \neq 2\cos\theta$

$\Leftrightarrow z \neq \cos\theta$ or $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z \notin]0, 1[$

d'où le domaine de f est le plan P privé du segment $[OI]$ tel que $I(1)$ y compris O et I

Conl : $D_f = (P \setminus [OI]) \cup \{O, I\}$

2) a) $\Omega(z)$: invariant par $f \Leftrightarrow$

$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta} = z \Leftrightarrow z^2 - 1 = 2z^2 - 2z\cos\theta$

$\Leftrightarrow \boxed{z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0}$ (E)

b) $\Delta' = (\cos\theta)^2 - 1 = -\sin^2\theta$

$\Delta' = (i\sin\theta)^2$

$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} = z_A$

$z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} = z_B$

$S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

3) a) $\frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \frac{\frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta} - e^{i\theta}}{\frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta} - e^{-i\theta}}$

$= \frac{z^2 - 1 - 2e^{i\theta}z + (2\cos\theta\, e^{i\theta})}{z^2 - 1 - 2e^{-i\theta}z + (2\cos\theta\, e^{-i\theta})}$

$= \frac{z^2 - 2e^{i\theta}z + (1+e^{i2\theta}) - 1}{z^2 - 2e^{-i\theta}z + (1+e^{-i2\theta}) - 1}$

$\Leftrightarrow \frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \frac{z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{i2\theta}}{z^2 - 2e^{-i\theta}z + e^{-i2\theta}}$

$\Leftrightarrow \frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \frac{(z - e^{i\theta})^2}{(z - e^{-i\theta})^2} = \left[\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right]^2$

b) d'où $\begin{cases} \left|\frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}}\right| = \left|\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right|^2 \\ \text{et} \\ \arg\left(\frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}}\right) \equiv 2\arg\left(\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right)[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B}\right| = \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right|^2 \\ \text{et} \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B}\right) \equiv 2\arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right)[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi] \end{cases}$

4) a) si M décrit $\mathcal{C}_{[AB]} \setminus \{A, B\}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + 2k\pi$

d'où M' décrit le segment $[AB] \setminus \{A, B\}$

b) $\mathcal{C} \cap (O\vec{u}) = \{E, F\}$

or $(O\vec{u}) = \text{med}[AB]$ car $A(e^{i\theta})$ $B(e^{-i\theta})$

d'où les triangles EAB et FAB

sont rectangles et isocèles en E et F

alors $EA = EB$ et $FA = FB$

si on pose $E' = f(E)$ et $F' = f(F)$

$\{E,F\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow E' \in [AB]$ et $F' \in [AB]$

et $\frac{E'A}{E'B} = \left(\frac{EA}{EB}\right)^2 = 1 \Rightarrow E' \in$ méd$[AB]$

$\Rightarrow E' \in (O\vec{u})$

et $\frac{F'A}{F'B} = \left(\frac{FA}{FB}\right)^2 = 1 \Rightarrow F' \in (O\vec{u})$

d'où $\{E', F'\} = [AB] \cap (O\vec{u}) = \{SL\}$

avec $SL = A * B$

Conl: $f(E) = f(F) = SL = A * B$

5) $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\arg\left(\left(\frac{2z - 1 - i\sqrt{3}}{2z - 1 + i\sqrt{3}}\right)^2\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

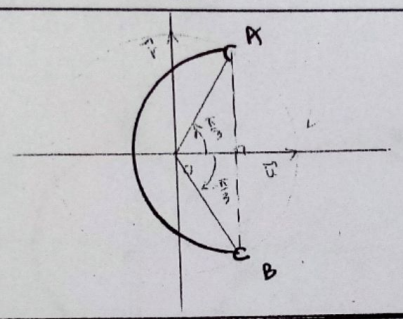
$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{z - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}\right)^2 = \arg\left[\frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right]^2$

$= \arg\left(\frac{z' - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z' - e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_{M'} - z_B}\right) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$\Rightarrow M'$ décrit l'arc $(\overrightarrow{AB}) \setminus \{A, B\}$

du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$



Exercice N° 08 : $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

(E). $z^2 - (e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2)z - i + 2e^{i\alpha} = 0$

1) a) Si $z = e^{i\alpha} \Rightarrow e^{i2\alpha} - (e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2)e^{i\alpha} - i + 2e^{i\alpha} =$

$e^{i2\alpha} - e^{i2\alpha} + i - 2e^{i\alpha} - i + 2e^{i\alpha} = 0 \ \forall \alpha$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\alpha}$ est une solution de (E)

b) $S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Leftrightarrow$

$e^{i\alpha} + z_2 = e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2$

$\Leftrightarrow \boxed{z_2 = 2 - ie^{-i\alpha}}$

c) $-i\bar{z}_1 + 2 = -ie^{-i\alpha} + 2 = z_2$

alors $\boxed{z_2 = -i\bar{z}_1 + 2}$

2) $A(1)$ $B(i)$ $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

$\varphi : M(z) \mapsto M'(z') \ / \ z' = -i\bar{z} + 2$

a) Mq φ : Symétrie glissante

$M(z) \xmapsto{S(O\vec{u})} M_1(\bar{z}) \xmapsto{R(O, -\frac{\pi}{2})} M_2(-\bar{z}) \xmapsto{t_{2\vec{u}}} M'(z')$

$\Rightarrow \varphi = t_{2\vec{u}} \circ R(O, -\frac{\pi}{2}) \circ S(O\vec{u})$

alors φ : composée de 2 déplacements et d'1 anti déplacement

$\Rightarrow \varphi$: anti déplacement < sym orth / sym glissante

• L'ensemble des pts invariants par φ :

$\varphi(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow -i\bar{z} + 2 = z$

$\Leftrightarrow -i(x - iy) + 2 = x + iy$

$\Leftrightarrow (2 - y) - ix = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = x \\ y = -x \end{cases}$

(1) + (2) : $2 = 0$ Absurde $\Rightarrow \varphi$ n'admet pas de points invariants

$\Rightarrow \varphi$: Symétrie glissante dont la forme réduite s'écrit

$\varphi = t_{\vec{w}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{w}}$

$\varphi \circ \varphi = t_{2\vec{w}}$

$M(z) \xmapsto{\varphi} M'(z') \xrightarrow{\varphi} M''(z'')$

avec : $\begin{cases} z' = -i\bar{z} + 2 \\ z'' = -i(\overline{z'}) + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow z'' = -i(\overline{-i\bar{z} + 2}) + 2 = -i(iz + 2) + 2$

$z'' = z + 2 - 2i$

d'où $t_{2\vec{w}} : z'' = z + 2(1-i)$

$\Leftrightarrow z'' - z = 2(1-i) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = 2\vec{w}$

alors $aff(\vec{w}) = 1 - i = aff(\overrightarrow{BA})$

d'autre part

$\varphi(B) = B' \,/\, z_{B'} = -i(\bar{z}_B) + 2$

$\Leftrightarrow z_{B'} = -i(-i) + 2 = 1 = z_A$

$\Rightarrow \varphi(B) = A \Leftrightarrow B \neq A \in \Delta$ et $\Delta \,//\, (AB)$

Δ la $//$ à (AB) passant par $A \neq B$

alors $\Delta = (BA)$

Concl : $\boxed{\varphi = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BA)}}$

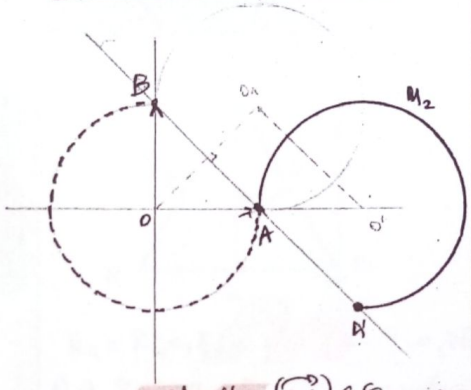
b) Ensemble des points M_1 :

on a $z_{M_1} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$

or $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) \leq 2\pi$

d'où M_1 décrit l'arc $(\overset{\frown}{BA})$ du cercle $\mathcal{C}_{(O,1)}$ car $z_B = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_A = 1 = e^{i2\pi}$

c) Ensemble des points M_2 :



on a : M décrit l'arc $(\overset{\frown}{BA}) \subset \mathcal{C}_{(O,1)}$

or $M' = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BA)}(M)$

d'où $(\overset{\frown}{BA}) \subset \mathcal{C}_{(O,1)} \xrightarrow{S_{(BA)}} (\overset{\frown}{AB}) \subset \mathcal{C}_{(O_1,1)}$

avec $O_1 = S_{(BA)}(O)$

et $(\overset{\frown}{AB}) \subset \mathcal{C}_{(O_1;1)} \xrightarrow{t_{\overrightarrow{BA}}} (\overset{\frown}{A'A}) \subset \mathcal{C}_{(O',1)}$

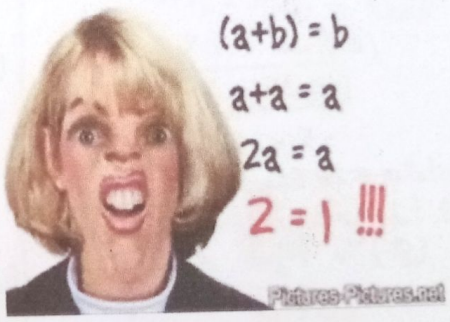
avec $A' = t_{\overrightarrow{BA}}(A) \Rightarrow A'(2-i)$

et $O' = t_{\overrightarrow{BA}}(O_1) \Rightarrow O'(2)$

Concl : Si M_1 décrit $(\overset{\frown}{BA}) \subset \mathcal{C}_{(O,1)}$

$\Rightarrow M_2$ décrit $(\overset{\frown}{A'A}) \subset \mathcal{C}_{(O',1)}$

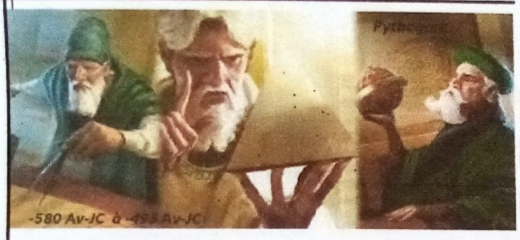
avec $A'(2-i)$ et $O'(2)$

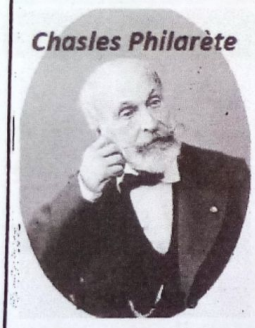


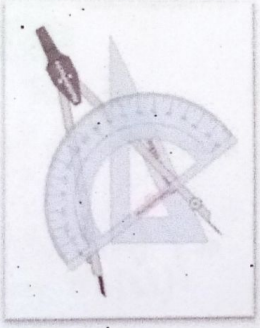
tu auras ton BAC

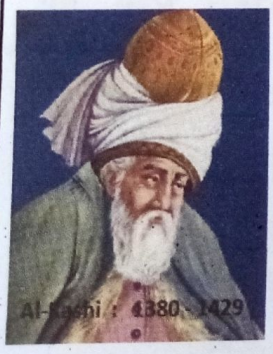
super BAC

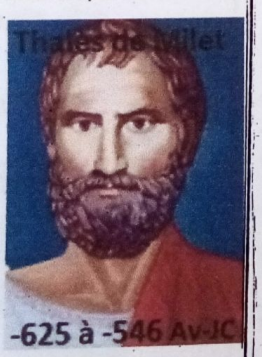
Géométrie Plane



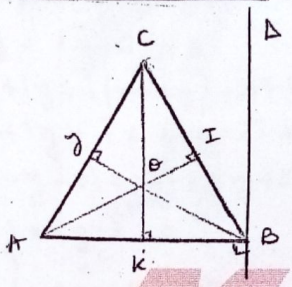








Exercice N° 09 :



$R_1 = R(C, \frac{\pi}{3})$ et $R_2 = R(O, \frac{2\pi}{3})$

1) a) • $S_{\Delta_1} = R_1 \circ S_{(OC)}$: anti déplacement

$C \xrightarrow{S(OC)} C \xrightarrow{R_1} C \Rightarrow C \in \Delta_1$

$B \xrightarrow{S(OC)} A \xrightarrow{R_1} B \Rightarrow B \in \Delta_1$

$\Rightarrow \boxed{\Delta_1 = (CB)}$

• $S_{\Delta_2} = S_{(OC)} \circ R_2$: anti déplacement

$O \xrightarrow{R_2} O \xrightarrow{S(OC)} O \Rightarrow O \in \Delta_2$

$A \xrightarrow{R_2} B \xrightarrow{S(OC)} A \Rightarrow A \in \Delta_2$

$\Rightarrow \boxed{\Delta_2 = (OA)}$

b) on a $S_{\Delta_1} = R_1 \circ S_{(OC)} \Rightarrow R_1 = S_{\Delta_1} \circ S_{(OC)}$

et $S_{\Delta_2} = S_{(OC)} \circ R_2 \Rightarrow R_2 = S_{(OC)} \circ S_{\Delta_1}$

$\Rightarrow R_1 \circ R_2 = S_{\Delta_1} \circ \cancel{S_{(OC)}} \circ \cancel{S_{(OC)}} \circ S_{\Delta_1}$

$= S_{(CB)} \circ S_{(OA)} = S_I$

car $(CB) \perp (OA)$ en I

conclusion : $\boxed{R_1 \circ R_2 = S_I}$

2) • $R_3 = S_\Delta \circ S_{(BC)} = R(B, -\frac{\pi}{3})$

car $\Delta \cap (BC) = \{B\}$

$2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \Delta}) = 2[(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA}, \Delta})]$

$= 2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

• $R_3 \circ R_1 = S_\Delta \circ \cancel{S_{(BC)}} \circ \cancel{S_{(BC)}} \circ S_{(OC)}$

$= S_\Delta \circ S_{(OC)} = t_{2\overrightarrow{KB}}$

car $\Delta // (OC) \perp (AB)$

$\Rightarrow \boxed{R_3 \circ R_1 = t_{\overrightarrow{AB}}}$

3) $f = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1$

a) f est la composée de 3 rotations de centres différents et dont la somme des angles est $(-\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow f = R(\Omega, -\frac{\pi}{3})$

or $A \xrightarrow{R_1} B \xrightarrow{R_3} B \xrightarrow{R_1^{-1}} A$

$\Rightarrow f(A) = A \Rightarrow A$: centre de f

d'où $\boxed{f = R(A, -\frac{\pi}{3})}$

b) $f = R(A, -\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1 = R(A, -\frac{\pi}{3})$

or $R_3 \circ R_1 = t_{\overrightarrow{AB}}$

$\Rightarrow R_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = R(A, -\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \boxed{t_{\overrightarrow{AB}} = R_1 \circ R(A, -\frac{\pi}{3})}$

c) $R_{(A,\frac{\pi}{3})} : M \longrightarrow M'$

$R_1 : M \longrightarrow M''$

Mq $ABM''M'$ est un #

on a $M' \xrightarrow{R_{(A,-\frac{\pi}{3})}} M \xrightarrow{R_1} M''$

$\Rightarrow R_1 \circ R_{(A,-\frac{\pi}{3})}(M') = M''$

$\Leftrightarrow t_{\vec{AB}}(M') = M'' \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{M'M''}$

d'où $\boxed{ABM''M' \text{ est un } \#}$

Exercice N° 10 :

$A(2-\frac{1}{2}i)$ $z_B = \frac{5}{2}$

$f : M(z) \longmapsto M'(z') \ / \ z' = i\bar{z} - 2i + 3$

1) Mq f : isometrie

Soit $\left.\begin{array}{l} M_1(z_1) \xrightarrow{f} M'_1(z'_1) \\ M_2(z_2) \xrightarrow{f} M'_2(z'_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

Mq $M'_1M'_2 = M_1M_2 \neq 0$

or $\left.\begin{array}{l} z'_1 = i\bar{z}_1 - 2i + 3 \\ \text{et } z'_2 = i\bar{z}_2 - 2i + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = |i\bar{z}_2 - \cancel{2i} + \cancel{3} - i\bar{z}_1 + \cancel{2i} - \cancel{3}|$

$= |i(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$

$\Rightarrow f$ conserve les distances

d'où f est une isometrie

• Mq f : n'admet pas de point inv.

on suppose que I : invariant $\Rightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow z = i\bar{z} - 2i + 3$

$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) - 2i + 3$

$\Leftrightarrow x + iy = ix + y - 2i + 3$

$\Leftrightarrow (x - y - 3) + i(-x + y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ \text{et} \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases}$

$(1) + (2) : -1 = 0$ Absurde

$\Rightarrow f$ n'admet pas de points invariant

2) $M(z) \xrightarrow{f} M'(z') \xrightarrow{f} M''(z'')$

avec $\begin{cases} z' = i\bar{z} - 2i + 3 \\ z'' = i\overline{z'} - 2i + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z'' = i\left[\overline{i\bar{z} - 2i + 3}\right] - 2i + 3$

$\Leftrightarrow z'' = i\left[-iz + 2i + 3\right] - 2i + 3$

$\Leftrightarrow z'' = z - 2 + 3i - 2i + 3$

$\Leftrightarrow z'' - z = 1 + i = z_{\vec{w}}$

$\Leftrightarrow aff(\vec{MM''}) = aff(\vec{w}) \Leftrightarrow \vec{MM''} = \vec{w}$

$\left.\begin{array}{l} \text{alors } M'' = t_{\vec{w}}(M) \\ \text{or } f \circ f(M) = M'' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \circ f = t_{\vec{w}}}$

3) $T = t_{-\frac{1}{2}\vec{w}}$ $g = T \circ f$

a) $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{T} A''$

telque $z_{A'} = i\bar{z}_A - 2i + 3$

$= i(2 + \frac{1}{2}i) - 2i + 3 = \frac{5}{2}$

$z_{A''} = z_{A'} - \frac{1}{2}aff(\vec{w})$

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(1 + i) = 2 - \frac{1}{2}i = z_A$

$\Rightarrow T \circ f(A) = A \Leftrightarrow \boxed{g(A) = A}$

$B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{T} B''$

$z_{B'} = i\bar{z}_B - 2i + 3 = \frac{5}{2}i - 2i + 3$

$= 3 + \frac{1}{2}i$

$\Rightarrow z_{B''} = z_{B'} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{2} = z_B$

$\Rightarrow T \circ f(B) = B \Leftrightarrow \boxed{g(B) = B}$

Nature de g :

g : composée de 2 isometries

$\Rightarrow g$ est une isometrie qui fixe A et B $\Rightarrow$ $g = Id_P$ ou $g = S_{(AB)}$

or $O \xrightarrow{f} O' \xrightarrow{T} O''$

avec $z_{O'} = i\bar{z}_O - 2i + 3 = 3 - 2i$

$z_{O''} = z_{O'} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \neq 0$

$\Rightarrow g(O) = O'' \neq O \Leftrightarrow O$: n'est pas invariant

alors $g \neq Id_P$

Conl : $\boxed{g = S_{(AB)}}$

b) $g = T \circ f \Leftrightarrow f = T^{-1} \circ g$

or $T^{-1} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}} \Rightarrow f = t_{\frac{1}{2}\vec{w}} \circ g$

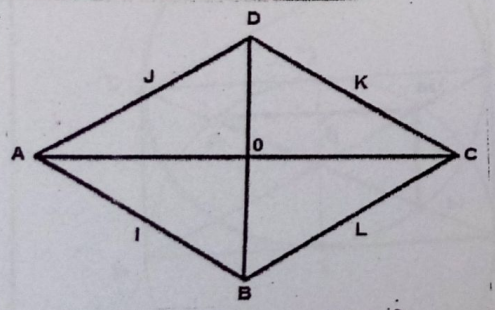
$\Leftrightarrow f = t_{\frac{1}{2}\vec{w}} \circ S_{(AB)}$

comme $aff(\vec{AB}) = z_B - z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = aff(\frac{1}{2}\vec{w})$

$\Rightarrow \boxed{f = t_{\vec{AB}} \circ S_{(AB)}}$

f est donc la symétrie glissante d'axe (AB) et de vecteur $\vec{AB}$

Exercice N° 11 :



1) a) Mq $\exists!$ antidépl. $f : \begin{matrix} A \to B \\ B \to D \end{matrix}$

on a ABCD losange $\Rightarrow AB = AD$

or $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \Rightarrow ABD$ équilatéral

d'où $AB = BD \neq 0$ alors il existe un unique antidéplacement $f : \begin{matrix} A \to B \\ B \to D \end{matrix}$

b) on suppose que $f = S_\Delta \Rightarrow f \circ f = Id_P$

or $f \circ f(A) = D \Leftrightarrow Id_P(A) = D \neq A$ Absurde

$\Rightarrow f$ symétrie glissante dont la forme réduite s'écrit $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

$\Rightarrow f \circ f = t_{2\vec{u}} : A \to D \Leftrightarrow 2\vec{u} = \vec{AD}$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AD} = \vec{IO}$ car $\begin{cases} I = A * B \\ O = B * D \end{cases}$

d'autre part $\left.\begin{matrix} f(A) = B \Rightarrow A * B = I \in \Delta \\ f(B) = D \Rightarrow B * D = O \in \Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = (IO)$

Conl : $\boxed{f = t_{\vec{IO}} \circ S_{(IO)}}$

2) a) Mq $\exists!$ antidépl $g : \begin{matrix} A \to D \\ J \to K \end{matrix}$

on a $J = A * D \Rightarrow AJ = \frac{1}{2} AD$

$AD = DC = 2DK \Rightarrow AJ = DK \neq 0$

alors il existe unique antidépl. $g : \begin{matrix} A \to D \\ J \to K \end{matrix}$

b) mad $[AD] = (BJ)$ et mad $[JK] = (BD)$ $\Big\}$ $(BJ) \neq (BD)$

$\Rightarrow g$ n'est pas symétrie orthogonale

or g : antidépl $\Rightarrow g$ symétrie glissante dont la forme réduite s'écrit :

$g = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ / $\vec{u}$: dir de Δ

or $g(A) = D \Rightarrow A * D = J \in \Delta$

d'où $J \xrightarrow{S_\Delta} J \xrightarrow{t_{\vec{u}}} K$ d'où $\vec{JK} = \vec{u}$

et Δ : la // à (JK) passant par J $\Rightarrow \Delta = (JK)$

Conl : $\boxed{g = t_{\vec{JK}} \circ S_{(JK)}}$

3) a) Mq $\exists!$ antidépl $h : \begin{matrix} B \to D \\ C \to B \end{matrix}$

on a $BC = BA = BD \neq 0$

$\Rightarrow \exists!$ antidépl $h : \begin{matrix} B \to D \\ C \to B \end{matrix}$

b) On suppose que $h = S_\Delta \Rightarrow h \circ h = Id_P$

or $h \circ h(C) = D \Leftrightarrow Id_P(C) = D \neq C$ Abs.

$\Rightarrow h \neq S_\Delta$ $\Big\}$ $\Rightarrow h$ symétrie glissante

or h : antidépl

dont la forme réduite s'écrit :

$h = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ t_{\vec{v}}$

$\Rightarrow h \circ h = t_{2\vec{v}} : C \to D \Leftrightarrow 2\vec{v} = \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{CD} = \vec{LO}$ car $\begin{cases} L = C * B \\ O = D * B \end{cases}$

et $h(C) = B \Rightarrow C * B = L \in \Delta$
$h(B) = D \Rightarrow B * D = O \in \Delta$ $\Big\} \Rightarrow \Delta = (LO)$

Conl : $\boxed{h = t_{\vec{LO}} \circ S_{(LO)}}$

4) $\varphi = f^{-1} \circ h$

a) $B \xrightarrow{h} D \xrightarrow{f^{-1}} B$

$L \xrightarrow{h} O \xrightarrow{f^{-1}} I$

car $I \xrightarrow{S_{(IO)}} I \xrightarrow{t_{\vec{IO}}} O$

$\Rightarrow f(I) = O \Leftrightarrow f^{-1}(O) = I$

Conl : $\boxed{\varphi(B) = B}$ et $\boxed{\varphi(L) = I}$

b) $\varphi = f^{-1} \circ h$: composée de 2 antidéplacement $\Rightarrow \varphi$ est un déplacement

$\Rightarrow \varphi = Id_P$ ou $\varphi = R$

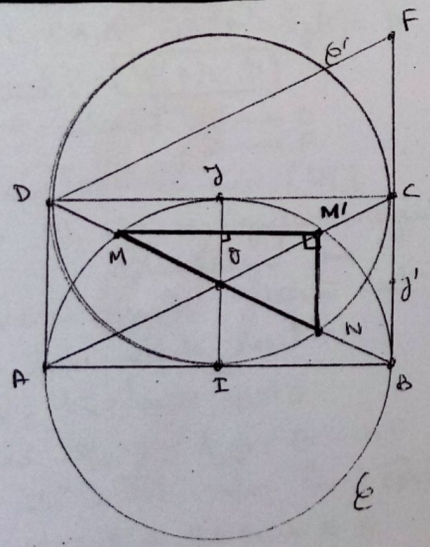
or $\varphi(L) = I = L \neq$ $\varphi \neq Id_P$

Conl : $\varphi = R_{(B,\alpha)}$ car B : invariant

avec $\alpha = (\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{BI}) \equiv 2(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{2\pi}{3}$

Conl : $\boxed{\varphi = R(B, \frac{2\pi}{3})}$

Exercice N° 12 :



1) $AI = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD = CJ \neq 0$

$\Rightarrow$ il existe un unique déplacement φ qui envoi $A \to C$, $I \to J$

• $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CJ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi [2\pi]$

car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

d'où φ est une symétrie centrale

or $\varphi(A) = C \Rightarrow A \neq C = O$: centre

Conl : $\boxed{\varphi = S_O}$

2) $\mathcal{E}$ = cercle de diamètre $[AB]$

$\mathcal{E}'$ = cercle de diamètre $[CD]$

a) Mq $\varphi(M) = N$

$M \in \mathcal{E}_{[AB]} \cap (BD)$

φ : conserve le contact $\Rightarrow$

$\varphi(M) \in \varphi(\mathcal{E}_{[AB]}) \cap \varphi((BD))$

or $\varphi(\mathcal{E}_{[AB]}) = \mathcal{E}_{[CD]} = \mathcal{E}'$

et $\varphi((BD)) = (BD)$ globalement inv

$\Rightarrow \varphi(M) \in \mathcal{E}' \cap (BD) = \{N, D\}$

or $\varphi(B) = D$, φ : bijective $\Rightarrow \varphi(M) \neq D$

Conl : $\boxed{\varphi(M) = N}$

b) Déduisons que $(M'N) // (BC)$

$M' = S_{(IJ)}(M) \Rightarrow (IJ) = med[MM']$

$\Rightarrow OM = OM'$

or $\varphi(M) = N \Rightarrow OM = ON$ $\Rightarrow$

ainsi $OM = OM' = ON$ $\Rightarrow$

$O = M + N$

le triangle $MM'N$ est rectangle en M'

alors $(M'N) \perp (M'M)$

or $(MM') \perp (IJ)$

$(IJ) // (BC)$ $\Rightarrow \boxed{(M'N) // (BC)}$

3) a) Soit ψ : application : $A \to C$, $I \to J$, $D \to F$

Montrons que ψ est une isométrie

on a déjà $AI = CJ$ (d'après φ)

et $AD = CB$

$F = S_C(B) \Rightarrow CF = CB$ $\Rightarrow$

$AD = CF \neq 0$ $\Rightarrow$

or $AI = CJ \neq 0$

ψ est une isométrie

et comme A, I et D : non alignés

$\Rightarrow \psi$ est l'unique isométrie : $A \to C$, $I \to J$, $D \to F$

b) Mq ψ antidéplacement :

on a $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CB}) + \pi \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CF}) \ [2\pi]$

alors φ isométrie qui envoi les angles orientés en leur opposés

$\Rightarrow$ φ : unique antidéplacement

c) on pose $\varphi(B) = B'$

d'où $\varphi : A \longrightarrow C$
$I \longrightarrow J$
$B \longrightarrow B'$

Comme φ conserve les milieux et que $I = A * B$ $\Rightarrow$

$J = C * B' \Leftrightarrow B' = S_J(C) = D$

Conclu : $\boxed{\varphi(B) = D}$

• φ : antidépl : $B \longrightarrow D$
$D \longrightarrow F$

$med[BD] \neq med[DF]$

$\Rightarrow$ φ n'est pas symétrie orthogonale

or φ : antidéplacement $\Rightarrow$ φ est une symétrie glissante dont la forme réduite sont :

$\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

d'où $\varphi \circ \varphi = t_{2\vec{u}}$: $B \longrightarrow F$

$\Leftrightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ alors $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$

et $\varphi(B) = D \Rightarrow B * D = O \in \Delta$

$\Rightarrow \Delta$ la // à (BC) passant par O

$\Rightarrow \Delta = (IJ)$

Conclu : $\boxed{\varphi = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}}$

4) $f = \varphi \circ S_{(AD)}$

f étant la composée de 2 antidépl

$\Rightarrow f$ est un déplacement

or $A \xrightarrow{S_{(AD)}} A \xrightarrow{\varphi} C$

et $D \xrightarrow{S_{(AD)}} D \xrightarrow{\varphi} F$

d'où f dépl qui envoi $A \longrightarrow C$
$D \longrightarrow F$

Comme $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}) \equiv 0 \ [2\pi]$

$\Rightarrow f = t_{\vec{u}}$: $A \longrightarrow C \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AC}$

Conclu : $\boxed{f = t_{\overrightarrow{AC}}}$

Exercice N° 13 : $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$(E_\theta) : z^2 - 2\cos(2\theta) z + 2i\sin(2\theta) = 0$

1) a) $(1 - i\sin(2\theta))^2 = 1 - \sin^2(2\theta) - 2i\sin(2\theta)$
$= \cos^2(2\theta) - 2i\sin(2\theta)$

b) $\Delta' = \cos^2(2\theta) - 2i\sin(2\theta)$

$\Rightarrow \Delta' = (1 - i\sin(2\theta))^2$

$z' = \cos(2\theta) + 1 - i\sin 2\theta$
$= 1 + (\cos 2\theta - i\sin 2\theta) = 1 + e^{-i2\theta}$

$z'' = \cos(2\theta) - 1 + i\sin(2\theta)$
$= -1 + [\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)] = -1 + e^{i2\theta}$

$S_\Gamma = \{1 + e^{-i2\theta}, -1 + e^{i2\theta}\}$

2) $I(-1)$ $A(-2)$ $M(e^{i2\theta} - 1)$ $M'(1 + e^{-i2\theta})$

$g : M(z) \longmapsto M'(z')$ / $z' = \bar{z} + 2$

$M(z) \xrightarrow{S(O\vec{u})} M_1(\bar{z}) \xrightarrow{t_{2\vec{u}}} M'(z')$

alors $\boxed{g = t_{2\vec{u}} \circ S_{(O\vec{u})}}$

comme $2\vec{u}$: direction de $(O\vec{u})$

$\Rightarrow g$ est la forme réduite de la symétrie glissante d'axe $(O\vec{u})$ et de vecteur $2\vec{u}$

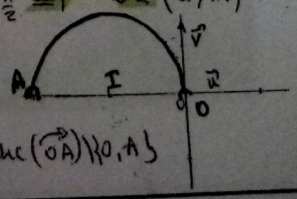
3) a) Ensemble des point $M(z)$.

$z_M = -1 + e^{i2\theta} \Leftrightarrow z_M = z_I + e^{i2\theta}$

$\Leftrightarrow z_M - z_I = e^{i2\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_I| = 1 \\ \arg(z_M - z_I) \equiv 2\theta \ [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} IM = 1 \Rightarrow M \in \mathcal{C}(I, 1) \\ (\vec{u}, \overrightarrow{IM}) \equiv 2\theta \ [2\pi] \end{cases}$

or $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < (\vec{u}, \overrightarrow{IM}) < \pi$



$\Rightarrow M$ decrit l'arc $(\overrightarrow{OA}) \setminus \{O, A\}$

b) $Z_M = -1 + e^{2i\theta} =$

$\overline{Z_M} + 2 = -1 + e^{i2\theta} + 2 = -1 + e^{-i2\theta} + 2$

$= 1 + e^{-i2\theta} = Z_{M'}$

alors $\boxed{M' = g(M)}$

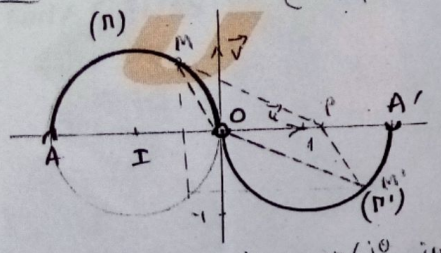
Comme M décrit $\Gamma \Rightarrow M'$ décrit $g(\Gamma) = (\Gamma')$

or $\Gamma = (\overrightarrow{OA}) \setminus \{O, A\}$

$S_{(O\vec{u})}(\Gamma) = (\overrightarrow{AO}) \setminus \{O, A\}$

$t_{2\vec{u}}(S_{O\vec{u}}(\Gamma)) = (\overrightarrow{OA'}) \setminus \{A', O\}$

Conl : M' décrit $(\Gamma)' = (\overrightarrow{OA'}) \setminus \{O, A'(2)\}$



4) a) $Z_{M'} = 1 + e^{-i2\theta} = e^{-i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$\Leftrightarrow Z_{M'} = 2\cos\theta \cdot e^{-i\theta}$

Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\theta > 0$ $\Rightarrow$

$\boxed{Z_{M'} = 2\cos\theta\, e^{-i\theta}}$

b) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg\left(\frac{Z_M}{Z_{M'}}\right) [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg(Z_M) - \arg(Z_{M'}) [2\pi]$

or $Z_M = -1 + e^{i2\theta} = e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

$= 2i\sin\theta \cdot e^{i\theta} = 2\sin\theta \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

d'où $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(Z_M) - \arg(Z_{M'}) [2\pi]$

$\equiv (\theta + \frac{\pi}{2}) + (\theta) [2\pi]$

$\Leftrightarrow \boxed{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]}$

c) O, M, M' : alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = k\pi$

$\Leftrightarrow 2\theta + \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $\Big\}$ $\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

5) a) Z_P ? / $OMPM'$ # $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'P} \Leftrightarrow Z_M - Z_O = Z_P - Z_{M'}$

$\Leftrightarrow Z_P = Z_M + Z_{M'} = \cancel{-1} + e^{i2\theta} + \cancel{1} + e^{-i2\theta}$

$\Leftrightarrow Z_P = e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} = 2\cos(2\theta)$

b) $A_{OMPM'} = 2 A_{OPM}$

dans le triangle OPM, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(Z_M) [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow A_{OPM} = \frac{1}{2} OP \cdot OM \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

$= \frac{1}{2} |2\cos(2\theta)| \cdot |2\sin\theta| \cos(\theta)$

$= |\cos(2\theta) \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta|$

$\Rightarrow A_{OPM} = |\cos(2\theta) \cdot \sin(2\theta)| = |\frac{1}{2}\sin(4\theta)|$

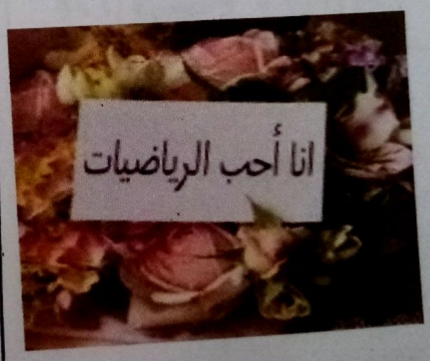
alors $A_{OMPM'} = 2 A_{OPM} = |\sin(4\theta)|$

c) $A_{OMPM'}$ maximale $\Leftrightarrow |\sin(4\theta)| = 1$

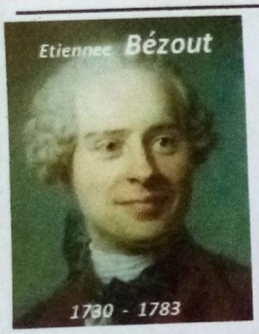
$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \sin(4\theta) = 1 \\ \text{ou} \\ \sin(4\theta) = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right.$

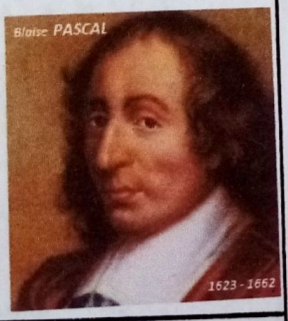
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array} \right.$ or $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{8} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \end{array} \right.$

Conl : Si $\theta \in \{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\} \Rightarrow$ l'aire du parallélogramme $OMPM'$ maximale



Arithmétique





Exercice N° 14 : Q. C. M

1) $x \equiv 1\,[4] \Leftrightarrow x = 1+4k$

alors $x^2 = (1+4k)^2 = 1+8k+16k^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 1+8(k+2k^2) \Leftrightarrow x = 1+8k'$

alors $x^2 \equiv 1\,[8]$

d'où $\boxed{\text{Vrai}}$

2) 17 : premier et 17 ne divise pas 2012

$\Rightarrow$ d'après Fermat :

$2012^{16} \equiv 1\,[17]$

alors $2012^{32} \equiv 1\,(17) \Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$

3) $7^3 = 343 \equiv 1\,[9]$

$\Rightarrow 7^{3n} \equiv 1\,(9) \Leftrightarrow 7^{3n} - 1 \equiv 0\,[9]$

$\Rightarrow$ 9 divise $(7^{3n}-1) \Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$

4) $35 \equiv 1\,[17] \Rightarrow 35^{2006} \equiv 1\,[17]$

alors $2 \times 35^{2006} \equiv 2\,[17]$ ①

et $84 \equiv -1\,[17] \Rightarrow 84^{2007} \equiv -1\,[17]$

d'où $-3 \times 84^{2007} \equiv 3\,[17]$ ②

① + (2) : $2 \times 35^{2006} - 3 \times 84^{2007} \equiv 5\,[17]$

$\Rightarrow \boxed{\text{Faux}}$

Exercice N° 15 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) on a déjà $2^n \equiv 0\,[2]$ et $6^n \equiv 0\,[2]$

$3 \equiv 1\,[2] \Rightarrow 3^n \equiv 1\,[2] \Rightarrow 3^n - 1 \equiv 0\,[2]$

Conf : $U_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0\,[2]$

2) n : pair $\Rightarrow n = 2p$

$\Rightarrow U_n = 2^{2p} + 3^{2p} + 6^{2p} - 1$

$\Leftrightarrow U_n = (2^2)^p + (3^2)^p + (6^2)^p - 1$

$\Leftrightarrow U_n = 4^p + 9^p + 36^p - 1$

or $4^p \equiv 0\,[4]$ et $36^p \equiv 0\,[4]$

$9 \equiv 1\,[4] \Rightarrow 9^p \equiv 1\,[4] \Leftrightarrow 9^p - 1 \equiv 0\,[4]$

alors $U_n \equiv 0\,[4]$ si n : pair

3) p : premier tel que $p > 3$

a) p : premier ne divise ni 2 ni 3

$\Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

$\Leftrightarrow 2(2^{p-2}) \equiv 1\,[p]$ et $3(3^{p-2}) \equiv 1\,[p]$

alors $3[2(2^{p-2})] \equiv 3\,[p]$ et $2[3(3^{p-2})] \equiv 2\,[p]$

$\Leftrightarrow 6 \times 2^{p-2} \equiv 3\,[p]$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2\,[p]$

b) Dq $6 \times U_{p-2} \equiv 0 \ [p]$

on a p : ne divise pas 6 et p : premier

$\Rightarrow 6^{p-1} \equiv 1 [p] \Leftrightarrow 6(6^{p-2}) \equiv 1 [p]$

or $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 [p]$

$6 \times 3^{p-2} \equiv 2 [p]$

$6 \times 6^{p-2} \equiv 1 [p]$

Σ : $6 [2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2}] \equiv 6 [p]$

$\Rightarrow 6 (U_{p-2} + 1) \equiv 6 [p]$

$\Rightarrow 6 \cdot U_{p-2} + \cancel{6} \equiv \cancel{6} [p]$

$\Leftrightarrow \boxed{6 \cdot U_{p-2} \equiv 0 [p]}$

c) $\left.\begin{array}{l} p : \text{divise } 6 \cdot U_{p-2} \\ p \wedge 6 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après Gauss p divise U_{p-2}

alors $\boxed{U_{p-2} \equiv 0 [p]}$

4) $N = 499^{69} + 27^{23} + 6^{69} - 4$

on a $499 \equiv 2 [71] \Rightarrow 499^{69} \equiv 2^{69}$

d'où $N \equiv 2^{69} + [(3)^3]^{23} + 6^{69} - 4 [71]$

$\Leftrightarrow N \equiv 2^{69} + 3^{69} + 6^{69} - 1 - 3 [71]$

$\Leftrightarrow N \equiv U_{69} - 3 \ [71]$

or d'après 3°) 71 : premier > 3

$\Rightarrow 71 \mid U_{69} \Leftrightarrow U_{69} \equiv 0 [71]$

d'où $U_{69} - 3 \equiv -3 \ [71]$

$\Leftrightarrow N \equiv 68 [71] \Rightarrow$ le reste est $\boxed{68}$

Exercice N° 16 :

(I) $\begin{cases} a = 5n + 4 \\ b = 3n + 1 \end{cases} / n \in \mathbb{Z}$

1) $\left.\begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 3a - 5b$

or $3a - 5b = 3(5n+4) - 5(3n+1)$

$= \cancel{15n} + 12 - \cancel{15n} - 5 = 7$

$\Rightarrow \boxed{d \text{ divise } 7}$

2) soit $d = a \wedge b \Rightarrow d \mid 7$

$\Leftrightarrow d \in D_7^+ = \{1, 7\}$

$\Rightarrow d = 1$ ou $d = 7$

• Si $d = 7 \Leftrightarrow 7 \mid b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \equiv 0 (7) \Leftrightarrow 3n + 1 \equiv 0 [7]$

$\Leftrightarrow 3n \equiv -1 [7] \Leftrightarrow 6n \equiv -2 [7]$

or $6 \equiv -1 [7] \Leftrightarrow 6n \equiv -n [7]$

d'où $-n \equiv -2 [7] \Leftrightarrow n \equiv 2 [7]$

ainsi : $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } n \equiv 2 [7] \Rightarrow d = 7 \\ \text{Si non} \Rightarrow d = 1 \end{array}}$

3) $\begin{cases} a = 5 \times (2019)^{2020} + 4 \\ b = 3 \times (2019)^{2020} + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow n = (2019)^{2020}$

or $2019 \equiv 3 [7]$

$\Rightarrow (2019)^{2020} \equiv 3^{2020} [7]$

et $3^{2020} = (3^6)^{336} \times 3^4$

et comme $3^6 \equiv 1 [7] \Rightarrow (3^6)^{336} \equiv 1 [7]$

et $3^4 \equiv 4 [7] \Rightarrow 3^{2020} \equiv 4 [7]$

d'où $2019^{2020} \equiv 4 [7] \Leftrightarrow n \equiv 4 [7]$

alors $n \not\equiv 2 [7]$ alors $d \neq 7$

Conl : $\boxed{a \wedge b = 1}$

Exercice N° 17 :

(S) $\begin{cases} n \equiv -4 [19] \\ n \equiv 4 [17] \end{cases}$ | (E) : $19x - 17y = 8$

1) a) on a : $19(4) - 17(4) = 8$

$\Rightarrow (4, 4)$ est une solution particulière de l'équation (E)

d'où $19x - 17y = 19(4) - 17(4)$

$\Leftrightarrow 19(x-4) = 17(y-4)$

or $19 \wedge 17 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss

$19 \mid y-4$ et $17 \mid x-4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 17k \\ \text{et} \\ y-4 = 19k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4+17k \\ y = 4+19k \end{cases}$

Réciproquement,

$19(4+17k) - 17(4+19k) = 8$: vérifié

$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2} = \{(4+17k,\ 4+19k) / k \in \mathbb{Z}\}$

b) • $n \equiv -4\,[19] \Leftrightarrow$ il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $n = -4+19x$ (1)

• $n \equiv 4\,[17] \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4+17y$ (2)

(1) et (2) $\rightarrow -4+19x = 4+17y$

$\Leftrightarrow 19x - 17y = 8$

$\Rightarrow (x,y)$: solution de (E)

c) n : sol de $(S) \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} n = -4+19x \\ \text{et } x = 4+17k \end{array}\right\} \Rightarrow$

$n = -4+19\,[4+17k]$

$\Leftrightarrow n = -4+76+323k$

$\Leftrightarrow \boxed{n = 72+323k} \ / k \in \mathbb{Z}$

2) a) on a : 19 premier et 19 ne divise pas n car $n \equiv -4\,[19] \Rightarrow$ d'après le Théo de Fermat : $n^{18} \equiv 1\,[19]$

$\Leftrightarrow (n^{18})^2 \equiv 1^2\,[19] \Leftrightarrow \boxed{n^{36} \equiv 1\,[19]}$

• $n \equiv 4\,[17] \Leftrightarrow n^2 \equiv 16\,[17] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 \equiv -1\,[17] \Leftrightarrow (n^2)^{18} \equiv (-1)^{18}\,[17]$

$\Leftrightarrow \boxed{n^{36} \equiv 1\,[17]}$

b) $\left.\begin{array}{l} n^{36} \equiv 1\,[19] \Leftrightarrow n^{36}-1 \equiv 0\,[19] \\ n^{36} \equiv 1\,[17] \Leftrightarrow n^{36}-1 \equiv 0\,[17] \end{array}\right\}$

comme $19 \wedge 17 = 1 \Rightarrow$ d'après la conséquence du Gauss : $n^{36}-1 \equiv 0\,[19\times17]$

$\Leftrightarrow n^{36}-1 \equiv 0\,[323] \Leftrightarrow \boxed{n^{36} \equiv 1\,[323]}$

3) a) on a $n \equiv -4\,[19]$

$\Rightarrow n^5 \equiv (-4)^5\,[19] \Leftrightarrow n^5 \equiv -2\,[19]$

$\Leftrightarrow (n^5)^6 \equiv (-2)^6\,[19] \Leftrightarrow \boxed{n^{30} \equiv 7\,[19]}$

et $n \equiv 4\,[17] \Leftrightarrow n^2 \equiv -1\,[17]$

$\Leftrightarrow (n^2)^{15} \equiv (-1)^{15}\,[17] \Leftrightarrow \boxed{n^{30} \equiv 1\,[17]}$

b) $n^{30} \equiv 7\,[19] \Leftrightarrow n^{30} \equiv 7-76\,[19]$

car $76 = 19(-4)$

$\Rightarrow n^{30} \equiv -69\,[19] \Leftrightarrow n^{30}+69 \equiv 0\,[19]$

et $n^{30} \equiv 1\,[17] \Leftrightarrow n^{30} \equiv 1-68\,[17]$

or $-68 \equiv 17(-4) \Rightarrow n^{30} \equiv -69\,[17]$

$\Leftrightarrow n^{30}+69 \equiv 0\,[19]$

on a alors $\begin{cases} n^{30}+69 \equiv 0\,[19] \\ \text{et} \\ n^{30}+69 \equiv 0\,[17] \end{cases}$

Comme $19 \wedge 17 = 1 \Rightarrow n^{30}+69 \equiv 0\,[19\times17]$

$\Leftrightarrow n^{30}+69 \equiv 0\,[323]$

alors 323 : divise $(n^{30}+69)$

4) a) on a $2010 \equiv 72\,[323]$

$\Rightarrow 2010$ est une solution de (S)

b) on sait que si n : solution de (S)

$\Rightarrow n^{36} \equiv 1\,[323]$

et comme 2010 sol de (S)

$\Rightarrow (2010)^{36} \equiv 1\,[323]$

$\Rightarrow \left[(2010)^{36}\right]^{56} \equiv 1^{56}\,[323]$

d'où $2010^{2016} \equiv 1\,[323]$ (1)

et $2010 \equiv 72\,[323] \Rightarrow 2010^2 \equiv 16\,[323]$

$2010^3 \equiv 383\,[323]$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2010^5 \equiv 21\,[323] \\ \text{or } 2010^{2016} \equiv 1\,[323] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2010^{2021} \equiv 21\,[323]}$

c) $2010^{2022} = (2010)(2010^{2021}) \equiv 72\times21\,[323]$

Conl : $\boxed{2010^{2022} \equiv 220\,[323]}$

Exercice N° 18 :

1) a) $4 \equiv 1[3] \Rightarrow \boxed{4^n \equiv 1[3]}$

b) $\left.\begin{array}{l} 29 : \text{premier} \\ 29 \wedge 4 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après Fermat $\boxed{4^{28} \equiv 1[29]}$

c) $\left.\begin{array}{l} 4^0 \equiv 1[17] \\ 4^1 \equiv 4[17] \\ 4^2 \equiv 16[17] \\ 4^3 \equiv 13[17] \\ \hline 4^4 \equiv 1[17] \end{array}\right\} \Rightarrow 4^n \equiv \begin{cases} 1[17] & \text{si } n = 4p \\ 4[17] & \text{si } n = 4p+1 \\ 16[17] & \text{si } n = 4p+2 \\ 13[17] & \text{si } n = 4p+3 \end{cases}$

d) • Si $n = 28 \Rightarrow 4^{28} \equiv 1[3] \Rightarrow$
$4^{28} - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow 3$ divise $(4^{28}-1)$

• Si $n = 28 = 4p \Rightarrow 4^{28} \equiv 1[17]$
$\Leftrightarrow 4^{28} - 1 \equiv 0[17] \Rightarrow 17$ divise $(4^{28}-1)$

• $4^{28} \equiv 1[29] \Rightarrow 4^{28} - 1 \equiv 0[29] \Rightarrow$
29 divise $(4^{28}-1)$

alors $\{3, 17, 29\}$: 3 diviseurs premiers qui divisent $(4^{28}-1)$

2) $x^{35} \equiv 2[97]$

a) on suppose que $x \wedge 97 \neq 1$
or 97 : premier $\Rightarrow 97 \mid x$
d'où $x \equiv 0[97] \Rightarrow x^{35} \equiv 0[97]$
absurde car $x^{35} \equiv 2[97]$
Concl : $\boxed{x \wedge 97 = 1}$

b) $\left.\begin{array}{l} 97 : \text{premier} \\ 97 \wedge x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après Fermat $\boxed{x^{96} \equiv 1[97]}$

on a : $x^{35} \equiv 2[97]$
$\Rightarrow (x^{35})^{11} \equiv 2^{11}[97] \Leftrightarrow x^{385} \equiv 2^{11}[97]$
or $x^{96} \equiv 1[97] \Rightarrow (x^{96})^4 \equiv 1[97]$
$\Leftrightarrow x^{384} \equiv 1[97]$
d'où $\left.\begin{array}{l} x^{385} \equiv x[97] \\ \text{or } x^{385} \equiv 2^{11}[97] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x \equiv 2^{11}[97]}$

c) $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2^{11}[97] \\ 2^{11} = 2048 \equiv 11[97] \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv 11[97]$
alors 11 est le reste modulo 11 de x

3) $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \sum_{k=0}^{n} 5^k$

a) $\left.\begin{array}{l} 5^0 \equiv 1[7] \\ 5^1 \equiv 5[7] \\ 5^2 \equiv 4[7] \\ 5^3 \equiv 6[7] \\ 5^4 \equiv 2[7] \\ 5^5 \equiv 3[7] \\ 5^6 \equiv 1[7] \end{array}\right\} \Rightarrow 5^n \equiv \begin{cases} 1[7] & \text{si } n = 6p \\ 5[7] & \text{si } n = 6p+1 \\ 4[7] & \text{si } n = 6p+2 \\ 6[7] & \text{si } n = 6p+3 \\ 2[7] & \text{si } n = 6p+4 \\ 3[7] & \text{si } n = 6p+5 \end{cases}$

b) $S_n = \sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{1 - 5^{n+1}}{1-5} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$
alors $\boxed{4S_n = 5^{n+1} - 1}$

c) $4S_n \equiv a[7] \Rightarrow 2(4S_n) \equiv 2a[7]$
$\Leftrightarrow 8S_n \equiv 2a[7]$
or $8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8S_n \equiv S_n[7]$ $\Rightarrow$
$4S_n \equiv a[7] \Rightarrow S_n \equiv 2a[7]$

Réciproquement : Si $S_n \equiv 2a[7]$
$\Rightarrow 4S_n \equiv 8a[7]$
or $8a \equiv a[7]$ $\Rightarrow 4S_n \equiv a[7]$

Concl : $\boxed{4S_n \equiv a[7] \Leftrightarrow S_n \equiv 2a[\ ]}$

d) $4S_{2021} = 5^{2022} - 1$
or $2022 = 337 \times 6 \Rightarrow 5^{2022} \equiv 1[7]$
d'où $5^{2022} - 1 \equiv 0[7]$
$\Leftrightarrow 4S_{2021} \equiv 0[7]$ d'où $S_{2021} \equiv 0[7]$

Concl : Le reste modulo 7 de S_{2021} est 0

YES WE CAN
BY SSIMZZ

Exercice N° 19 :

1) $10 \equiv 1 [9] \Rightarrow 10^{11} \equiv 1 [9]$

$\Rightarrow \boxed{10^{11} - 1 \equiv 0 [9]}$

et $10^{24} \equiv 1 [9] \Rightarrow \boxed{10^{24} - 1 \equiv 0 [9]}$

2) $11m - 24m = 1$

a) $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) =$

$= \cancel{10^{11n}} - 1 - \cancel{10^{24m+1}} + 10 = 9$

car $24m+1 = 11n$

Conl : $\boxed{(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9}$

b) $10^{11n} - 1 = (10^{11} - 1)[(10^{11})^{n-1} + (10^{11})^{n-2} + \dots + (10^{11}) + 1]$

$\Rightarrow 10^{11n} - 1 = (10^{11} - 1) . k$

$\Rightarrow \boxed{(10^{11} - 1) \text{ divise } (10^{11n} - 1)}$

c) $10^{11n} - 1 = (10^{11} - 1) N$

de même $10^{24m} - 1 = (10^{24} - 1) M$

et comme $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

$\Rightarrow (10^{11} - 1) N - (10^{24m} - 1) M = 9$

d) $\left.\begin{array}{l} d \mid 10^{11} - 1 \Rightarrow d \mid 10^{11n} - 1 \\ d \mid 10^{24} - 1 \Rightarrow d \mid 10^{24m} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

alors $d \mid (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$

$\Leftrightarrow \boxed{d \mid 9}$

e) d'après 1°) $\left.\begin{array}{l} 9 \mid 10^{24} - 1 \\ \text{et } 9 \mid 10^{11} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

9 divise $(10^{24} - 1) \wedge (10^{11} - 1)$ ①

or $(10^{24} - 1) \wedge (10^{11} - 1)$ divise 9 ②

① et ② $\rightarrow \boxed{(10^{24} - 1) \wedge (10^{11} - 1) = 9}$

Exercice N° 20 :

1) $6x - 7y = 1$ (E)

$6 \times 6 - 7 \times 5 = 1 \Rightarrow (6,5)$ sol de (E)

$\Rightarrow 6x - 7y = 6(6) - 7(5)$

$\Leftrightarrow 6(x-6) = 7(y-5)$

$6 \wedge 7 = 1 \Rightarrow$ d'après Gauss $\begin{cases} x - 6 = 7k \\ y - 5 = 6k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 7k \\ y = 5 + 6k \end{cases}$

Réciproque : $6(6+7k) - 7(5+6k) = 1$

$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2} = \{(6+7k ; 5+6k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) (S) $\begin{cases} n \equiv 1 [6] \\ n \equiv 2 [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 + 6x \\ n = 2 + 7y \end{cases}$

d'où $1 + 6x = 2 + 7y$

$\Leftrightarrow 6x - 7y = 1$ (E)

$\Rightarrow (x,y)$ sol de (E) $\Rightarrow x = 6 + 7k$

alors $n = 1 + 6(6 + 7k) = 37 + 42k$

$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{37 + 42k / k \in \mathbb{Z}\}$

Conl : n sol de (S) $\Leftrightarrow n \equiv 37 [42]$

b) $1969 = 46 \times 42 + 37 \Rightarrow 1969 \equiv 37 [42]$

$\Rightarrow 1969$: solution de (S)

• $1969 \equiv 37 [42] \Rightarrow 1969^3 \equiv 1 [42]$

d'où $(1969)^{3^{671}} \equiv 1 [42]$

alors $\boxed{1969^{2013} \equiv 1 [42]}$

3) a) (E') : $6x - 7y = 5$

$6(2) - 7(1) = 12 - 7 = 5$

$\Rightarrow (2,1)$: solution particulière de (E')

b) (E') : $6x - 7y = 6(2) - 7(1)$

$\Leftrightarrow 6(x-2) = 7(y-1)$

$6 \wedge 7 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 7k \\ y - 1 = 6k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = 1 + 6k \end{cases}$

Récip : $6(2+7k) - 7(1+6k) = 5$ vérifié

$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2+7k, 1+6k) / k \in \mathbb{Z}\}$

3) (x,y) sol de (E') et $d = x \wedge y$

a) $\left.\begin{array}{l} d \mid x \\ d \mid y \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 6x - 7y \Leftrightarrow d \mid 5$

$\Rightarrow d \in D_5 = \{1, 5\}$

Conl : $\boxed{d = 1}$ ou $\boxed{d = 5}$

b) (x, y) : sol de (E') / $d = 1$

$\Rightarrow$ il faut que $y \neq 0 [5]$

$\Leftrightarrow 1 + 6k \neq 0 [5] \Leftrightarrow 6k \neq -1 [5]$

$\Leftrightarrow k \neq 4 [5]$

d'où les solutions de (E') tel que $d = 1$

sont : $\{(2+7k, 1+6k) / k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \neq 4+5p\}$

c) $d = 5 \Rightarrow y = 0 [5] \Leftrightarrow$

$1 + 6k \equiv 0 [5] \Leftrightarrow 6k \equiv -1 [5]$

$\Leftrightarrow k = 4 [5] \Rightarrow k = 4 + 5p$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 7(4+5p) \\ y = 1 + 6(4+5p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 + 35p \\ y = 25 + 30p \end{cases}$

$\Rightarrow$ les solutions de (E') tel que $d = 5$

sont : $\{(30 + 35p ; 25 + 30p) / p \in \mathbb{Z}\}$

5) $\begin{cases} 6a - 7b = 5 & (1) \\ a \wedge b = 5 & (2) \\ a \vee b = 150 \end{cases}$

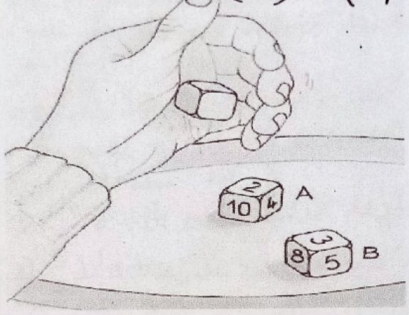
(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = 30 + 35p \\ b = 25 + 30p \end{cases}$

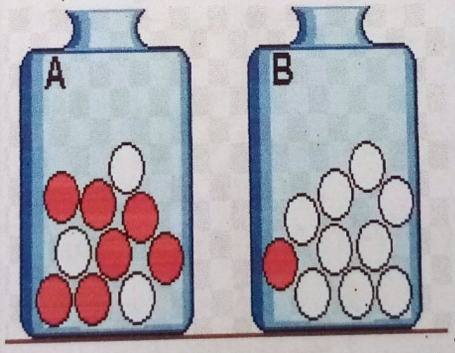
or $ab = (a \wedge b) \cdot (a \vee b)$

$\Leftrightarrow ab = 5 \times 150 = 750$

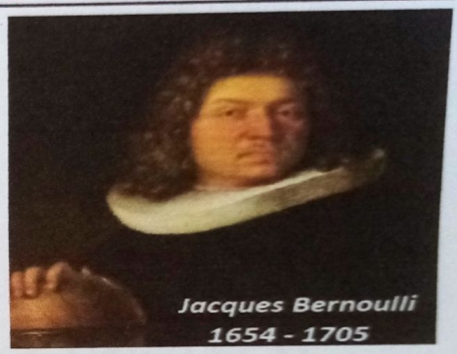
$\Leftrightarrow (30 + 35p)(25 + 30p) = 750$

$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow (a, b) = (30, 25)$





Probabilité



Exercice N° 21 :

200 Romans
- 150 policiers → 40% Français
- 50 Romantiques → 70% Français

1) Le lecteur choisisse un roman policier

$\Rightarrow P_1 = \frac{150}{200} = 0,75 \Rightarrow \boxed{b}$

2) Le lecteur choisisse un écrivain Français sachant qu'il a choisi policier

$\Rightarrow P_2 = 40\% = 0,4 \Rightarrow \boxed{c}$

3) Le lecteur choisisse un roman policier issue d'un écrivain Français

$\Rightarrow P_3 = P(P \cap F) = P(P) \cdot P(F | P)$

$= \frac{3}{4} \times 0,4 = 0,3 \Rightarrow \boxed{c}$

4) Le lecteur choisisse un écrivain français

$\Rightarrow P_4 = P(F) = P(P \cap F) + P(R \cap F)$

$= P(P) \cdot P(F|P) + P(R)\, P(F|R)$

$= \frac{3}{4} \times 0{,}4 + \frac{1}{4} \times 0{,}7$

$P_4 = 0{,}475 \Rightarrow \boxed{c}$

5) Le lecteur ait choisit un Policier sachant que l'écrivain est Français

$\Rightarrow P_5 = P(P|F) = \frac{P(P \cap F)}{P(F)} = \frac{P_3}{P_4}$

$\Rightarrow P_5 = \frac{0{,}3}{0{,}475} = \frac{12}{19} \Rightarrow \boxed{c}$

6) Le lecteur est venu 20 fois

S : le lecteur a choisi au moins une fois un roman Policier

$\bar{S}$: le lecteur n'a choisi aucune fois un roman Policier

$\Rightarrow P(\bar{S}) = [P(\bar{R})]^{20} = \left(\frac{1}{4}\right)^{20} = (0{,}25)^{20}$

d'où $P_6 = 1 - P(\bar{S})$

$\Rightarrow P_6 = 1 - (0{,}25)^{20}$ $\boxed{a}$

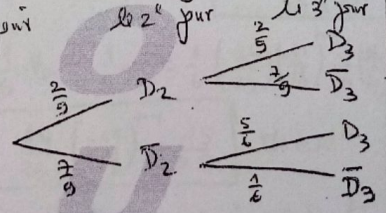
Exercice N° 22 :

Le 1er jour, la ville est délestée

- Si un jour est délestée $\Rightarrow$ la proba pour qu'elle soit délestée le lendemain est $\frac{2}{9}$
- Si elle n'est pas délestée un jour $\Rightarrow$ la proba qu'elle soit délestée le lendemain est $\frac{5}{6}$

D_n : "la ville est délestée le jour n"

1) a) L'arbre de probabilité relatif aux 3 premiers jours



b) Soit l'evenement :

A : la ville est délestée les 3 jours

$\Rightarrow A = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

$\Rightarrow P(A) = P(D_1) \cdot P(D_2|D_1) \cdot P(D_3|D_2)$

$\Rightarrow P(A) = 1 \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9}$

Conc : $\boxed{P(A) = \frac{4}{81}}$

1) X : le Nbre de fois où la ville est délestée les 3 premiers jours

a) $X = 2 \Leftrightarrow (D_1 \cap D_2 \cap \bar{D}_3) \cup (D_1 \cap \bar{D}_2 \cap D_3)$

$\Rightarrow P(X=2) = P(D_1) \cdot P(D_2|D_1) \cdot P(\bar{D}_3|D_2)$
$+ P(D_1) \cdot P(\bar{D}_2|D_1) \cdot P(D_3|\bar{D}_2)$

alors $P(X=2) = \left(1 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9}\right) + \left(1 \times \frac{7}{9} \times \frac{5}{6}\right)$

$\Leftrightarrow P(X=2) = \frac{14}{81} + \frac{35}{54} = \frac{133}{162}$

b) $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

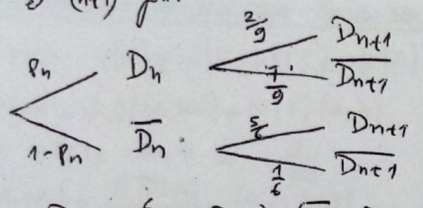
- $P(X=1) = P(D_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3)$
$= P(D_1) \cdot P(\bar{D}_2|D_1) \cdot P(\bar{D}_3|\bar{D}_2)$
$= 1 \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{54} = \frac{21}{162}$
- $P(X=2) = \frac{133}{162}$
- $P(X=3) = P(A) = \frac{4}{81} = \frac{8}{162}$

d'où la loi de proba de X est :

$x = x_i$	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{162}$	$\frac{133}{162}$	$\frac{8}{162}$	1

2) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_{n+1} = \frac{-11}{18} P_n + \frac{5}{6}$

L'arbre de probas relatif aux n^e et $(n+1)^e$ jour :



d'où $D_{n+1} = (D_n \cap D_{n+1}) \cup (\overline{D_n} \cap D_{n+1})$

Comme $(D_n \cap D_{n+1})$ et $(\overline{D_n} \cap D_{n+1})$ sont 2 évènements incompatibles $\Longrightarrow$

$P(D_{n+1}) = P(D_n \cap D_{n+1}) + P(\overline{D_n} \cap D_{n+1})$

$\Leftrightarrow P(D_{n+1}) = P(D_n) \cdot P(D_{n+1}|D_n) + P(\overline{D_n}) \cdot P(D_{n+1}|\overline{D_n})$

$\Leftrightarrow P_{n+1} = (P_n)\left(\frac{2}{9}\right) + (1-P_n)\left(\frac{5}{6}\right)$

$\Leftrightarrow P_{n+1} = P_n\left(\frac{2}{9} - \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6}$

Conl : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P_{n+1} = \frac{-11}{18} P_n + \frac{5}{6}}$

3) $V_n = 6P_n + \alpha$

a) V_n suite géo $\rightarrow V_{n+1} = qV_n$

or $V_{n+1} = 6P_{n+1} + \alpha = 6\left[\frac{-11}{18} P_n + \frac{5}{6}\right] + \alpha$

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{-11}{3} P_n + 5 + \alpha$

or $P_n = \frac{V_n - \alpha}{6}$

$\Longrightarrow V_{n+1} = \frac{-11}{3}\left(\frac{V_n - \alpha}{6}\right) + 5 + \alpha$

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{-11}{18} V_n + \left(\frac{29}{18}\alpha + 5\right)$

d'où V_n SG $\Leftrightarrow \frac{29}{18}\alpha + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{-90}{29}}$

Conl : Si $\alpha = \frac{-90}{29} \Rightarrow V_n$ est une suite géo de raison $q = \frac{-11}{18}$ et du 1er terme $V_1 = 6P_1 + \alpha$

or $P_1 = 1 \Rightarrow V_1 = 6 - \frac{90}{29} = \frac{84}{29}$

b) $V_n = V_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{V_n = \frac{84}{29}\left(\frac{-11}{18}\right)^{n-1}}$

$P_n = \frac{1}{6} V_n - \frac{1}{6}\alpha = \frac{1}{6}\left(\frac{84}{29}\right)\left(\frac{-11}{18}\right)^{n-1} - \frac{1}{6}\left(\frac{90}{29}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{P_n = \frac{14}{29}\left(\frac{-11}{18}\right)^{n-1} + \frac{15}{29}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Soit S : "les habitants suivent le match sans débordage"

$\Rightarrow P(S) = \overline{P_{20}} = 1 - P_{20}$

$\Leftrightarrow P(S) = 1 - \left(\frac{14}{29}\right)\left(\frac{-11}{18}\right)^{19} - \frac{15}{29}$

$\Rightarrow P(S) \simeq 0{,}483$

$\boxed{P(S) = 48{,}3\%}$

Exercice N° 23 :

- 80% : respectent le panneau "STOP"
- 30% de ceux qui ne le respectent pas ont eu un accident
- 95% de ceux qui le respectent n'ont pas eu d'accident

R : l'automobiliste a respecté

A : l'automobiliste a eu un accident

1) a) • $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 80\% = 0{,}2$

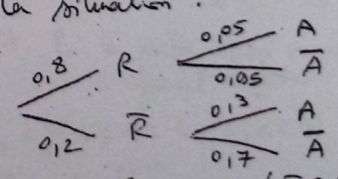
• $A|\overline{R}$: il a eu un accident sachant qu'il n'a pas respecté le panneau

$\Rightarrow P(A|\overline{R}) = 30\% = 0{,}3$

• $\overline{A}|R$: il n'a pas eu d'accident sachant qu'il a respecté le panneau

$\Rightarrow P(\overline{A}|R) = 95\% = 0{,}95$

b) L'arbre de probas reflétant la situation :



d'où $A = (R \cap A) \cup (\overline{R} \cap A)$

Comme $(R \cap A)$ et $(\overline{R} \cap A)$: incompatibles

$\Rightarrow P(A) = P(R)\cdot P(A|R) + P(\bar{R})\cdot P(A|\bar{R})$

$\Rightarrow P(A) = (0,8)(0,05) + (0,2)(0,3)$

$\Rightarrow P(A) = 0,1 = \frac{1}{10}$

2) $P(\bar{R}|A) = \frac{P(\bar{R}\cap A)}{P(A)} = \frac{(0,2)(0,3)}{0,1} = 0,6$

3) 8 automobilistes arrivent à ce carrefour

On considère la variable aléatoire :

Y : le Nbre d'accident provoqué par ces 8 automobilistes

on a alors
1) répétition indépendants
2) chaque voiture < Succès : a eu accident ; Echec : n'a pas eu d'accident
3) $P(A)$: reste constante

$\Rightarrow Y$: obéit à la loi binomiale de paramètres : $n = 8$ et $p = P(A) = 0,1$

d'où $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

$P(X = k) = C_8^k (0,1)^k (0,9)^{8-k}$

a) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (0,9)^8$

b) $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$= (0,9)^8 + C_8^1 (0,1)(0,9)^7 + C_8^2 (0,1)^2 (0,9)^6$

$= (0,9)^6 \left[(0,9)^2 + 8(0,1)(0,9) + C_8^2 (0,1)^2\right]$

$\Leftrightarrow P(Y \leq 2) \simeq 0,962$

4) durant Juin : 32 000 voitures passent par ce carrefour

Le nombre moyen d'accident en Juin

$N = (32000)\cdot P(A) = 3200.$

Exercice N° 24 :

14% présentent le défaut D_1

10% présentent le défaut D_2

4% présentent les défauts D_1 et D_2

D_1 : L'appareil présente le défaut D_1

D_2 : " " " D_2

1) on sait que $P(D_1) = 0,14$ et $P(D_2) = 0,1$ et $P(D_1 \cap D_2) = 0,04$

or $P(D_1)\cdot P(D_2) = (0,14)(0,1) = 0,014$

$P(D_1 \cap D_2) = 0,04$

d'où $P(D_1 \cap D_2) \neq P(D_1)\cdot P(D_2)$

alors D_1 et D_2 : ne sont pas indépendants

2) $P(D_2|D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = \frac{0,04}{0,14} = \frac{2}{7}$

3) L'appareil est défectueux s'il a au moins 1 défaut $\Leftrightarrow D_1 \cup D_2$

$\Rightarrow P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

$\Rightarrow P(D) = (0,14) + (0,1) - (0,04) = 0,2 = \frac{1}{5}$

4) Le commerçant reçoit n appareils

X : le nombre d'appareils défectueux

a) on a :
1) répétition indépendants
2) chaque appareil < Succès : D ; Echec : $\bar{D}$
3) $P(D)$: reste constante

$\Rightarrow X$: obéit à la loi binomiale de paramètres n et $p = P(D) = \frac{1}{5}$

d'où la loi de probabilité de X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$P(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$

b) $E(X) = np = n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{n}{5}$

$V(X) = np(1-p) = n\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4n}{25}$

c) Soit P_n : la proba d'avoir au moins 1 appareil défectueux

$\Rightarrow P_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$\Rightarrow P_n = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$

. $P_n \leq 50\% \Rightarrow 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,5$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,5 = \frac{1}{2}$

$\ln \nearrow \Rightarrow n \ln\left(\frac{4}{5}\right) \geq -\ln 2$

d'où $n \leq \frac{-\ln 2}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 3,106$

d'où le nombre maximal qu'il doit commander est $\boxed{n = 3}$

Exercice N° 25 :

$\boxed{\begin{matrix} 2V \\ 3J \end{matrix}}$ $\xrightarrow{\text{simult}}$ 2 boules

Urne

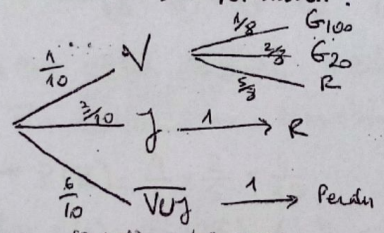
- s'il obtient 2 couleurs différentes $\Rightarrow$ Perdu
- s'il tire 2 boules jaune $\Rightarrow$ remboursé
- s'il tire 2 boules vertes, il fait tourner une roue de chance et il gagne $\begin{cases} 100^d \\ 20^d \\ \text{remboursé} \end{cases}$

- V : le joueur tire 2 boules vertes
- J : " " " " jaunes
- R : " " est remboursé
- G_{100} : " " a reçu 100^d
- G_{20} : " " a reçu 20^d

1) a) $P(V) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

$P(J) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

b) L'arbre de la probabilité qui modélise la situation :



c) $R = (R \cap V) \cup (R \cap J)$

$\Rightarrow P(R) = P(V) \cdot P(R|V) + P(J) \cdot P(R|J)$

$= \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{3}{10} \times 1\right) = \frac{29}{80}$

2) X : le gain algébrique du joueur

a) $X(\Omega) = \{-m, 0, 20-m, 100-m\}$

a) • $P(X = -m) = P(\overline{V \cup J}) = 1 - P(V) - P(J)$

$= \frac{6}{10} = 0,6 = \frac{48}{80}$

• $P(X = 0) = P(R) = \frac{29}{80}$

• $P(X = 20-m) = P(V) \cdot P(G_{20}|V) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{8} = \frac{2}{80}$

• $P(X = 100-m) = P(V) \cdot P(G_{100}|V) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$

d'où la loi de proba de X est :

$X = x_i$	$-m$	0	$20-m$	$100-m$	Σ
$P(X = x_i)$	$\frac{48}{80}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{1}{80}$	1
$x_i P(x_i)$	$\frac{-48m}{80}$	0	$\frac{40-2m}{80}$	$\frac{100-m}{80}$	$\frac{140-51m}{80}$

b) $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \frac{140 - 51m}{80}$

c) L'organisateur gagne de l'argent lorsque $E(X) < 0 \Rightarrow$ le jeu est perd

d'où $140 - 51m < 0 \Leftrightarrow$

$51m > 140 \Leftrightarrow m > \frac{140}{51}$

$\Leftrightarrow \boxed{m > 2,745}$

3) G : le joueur est soit remboursé soit il gagne.

et $P(G) \geq \frac{1}{2}$

L'urne contient $\boxed{\begin{matrix} 2V \\ nJ \end{matrix}}$

$\Rightarrow P(V) = \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{1}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

$P(J) = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$

$\overline{G}$: le joueur perd $\Leftrightarrow$ le joueur tire 1 boule J et 1 boule V

$\Rightarrow P(\overline{G}) = \frac{C_2^1 C_n^1}{C_{n+2}^2} = \frac{2n}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$

$\Leftrightarrow P(\overline{G}) = \frac{4n}{(n+2)(n+1)}$

alors $P(G) = 1 - \frac{4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$

$P(G) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2} > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(n^2-n+2) > n^2+3n+2$

$\Leftrightarrow 2n^2-2n+4 > n^2+3n+2$

$\Leftrightarrow n^2-5n+2 > 0$

$\Delta = 25-8 = 17$

$n' = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \simeq 0,44$

$n'' = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \simeq 4,56$

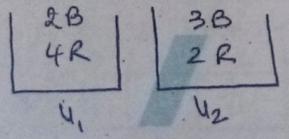
n	0		n'		n''		$+\infty$
n^2-5n+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme $n \geq 2 \Rightarrow$ pour que $P(G) > \frac{1}{2}$ il faut que $n > n'' \simeq 4,56$

alors $n \geq 5$

Conl : Pour que $P(G) > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ la valeur minimal de boules jaune est 5

Exercice N° 26 :



on tire 1 boule de U_1 et 1 boule de U_2

1) • A : obtenir 2 boules même couleur

$\Rightarrow$ A : obtenir BB ou RR

$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\right) = \frac{7}{15}$

• B : obtenir au moins 1 Blanche

$\overline{B}$: n'obtenir aucune B $\Leftrightarrow$ obtenir RR

$\Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{4}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

alors $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

b) • S : obtenir R de U_1 sachant qu'on a obtenir 2 couleurs différentes

$\Leftrightarrow$ S : obtenir R de U_1 et B de U_2

$\Rightarrow P(S) = \frac{4}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

2) X : le nombre de boules Blanches obtenues

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

• $X=0$: obtenir RR

$\Rightarrow P(X=0) = \frac{4}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

• $X=1$: obtenir RB ou BR

$\Rightarrow P(X=1) = \frac{4}{6}\times\frac{3}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

• $X=2$: obtenir BB

$\Rightarrow P(X=2) = \frac{2}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{15}$

d'où la loi de proba de X est :

$X=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{15}$	1
$x_i\,P(X=x_i)$	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{14}{15}$
$(x_i)^2 P(X=x_i)$	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{12}{15}$	2

b) $E(X) = \sum x_i P(X=x_i) = \frac{14}{15}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - \left(\frac{14}{15}\right)^2$

$\Leftrightarrow V(X) = \frac{254}{225}$

3) on répète l'épreuve 5 fois

on considère la variable aléatoire

Z : le nombre de fois où "A" réalisé

on a alors
- répétition indépendante
- Chaque épreuve : succès : A réalisé ; échec : $\overline{A}$ réalisé
- P(A) : reste constante

$\Rightarrow$ Z : obéit à la loi binomiale de paramètres $n=5$, $p = P(A) = \frac{7}{15}$

d'où $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(Z=k) = C_5^k \left(\frac{7}{15}\right)^k \left(\frac{8}{15}\right)^{5-k}$

• $P(F) = P(Z=3) = C_5^3 \left(\frac{7}{15}\right)^3 \left(\frac{8}{15}\right)^2$

• G : obtenir $\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,A\,A$

$\Rightarrow P(G) = P(\overline{A})\cdot P(A)\times 1 = \left(\frac{8}{15}\right)^3 \left(\frac{7}{15}\right)$

• H : au plus 2 fois A $\Leftrightarrow Z \leq 2$

$\Rightarrow P(H) = P(Z \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2)$

$\Rightarrow P(H) = C_5^0\left(\frac{8}{15}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{7}{15}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^4 + C_5^2\left(\frac{7}{15}\right)^2\left(\frac{8}{15}\right)^3$

$\Rightarrow P(H) = \left(\frac{8}{15}\right)^3\left[\left(\frac{8}{15}\right)^2 + 5\left(\frac{7}{15}\right)\left(\frac{8}{15}\right) + 10\left(\frac{7}{15}\right)^2\right]$

II) on tire 1 boule de U_1

* Si B on la garde et on tire 1 boule de U_1
* Si R on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise 2 boules de U_2

Y : le nombre de boules Blanches obtenues au cours de cette Epreuve.

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

• pour $Y=0$: obtenir R de U_1 et 2R de U_2

$\Rightarrow P(Y=0) = \frac{4}{6} \times \left(\frac{3}{6} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{15}$

• pour $Y=1$: obtenir R de U_1 et (R B) de U_2 ou B de U_1 puis R de U_1

$\Rightarrow P(Y=1) = \frac{4}{6} \times 2\left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{15}$

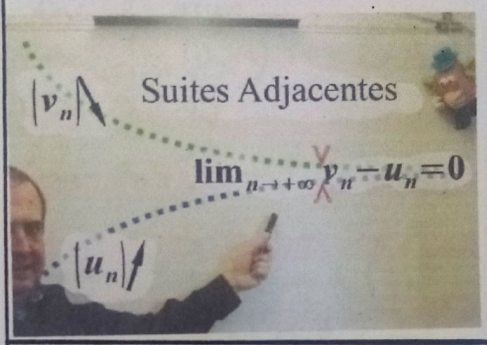
• pour $Y=2$: obtenir B de U_1 puis B de U_1 ou R de U_1 et 2B de U_2

$\Rightarrow P(Y=2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{15}$

d'où la loi de proba de Y est :

$Y=y_i$	0	1	2	Σ
$P(Y=y_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

Suites Réelles



Exercice N° 27 :

1) $U_0 = \frac{1}{2}$; $U_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{U_n^2+1}$

a) M.q $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$

pour $n=0$, $U_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$: vérifié

supposons $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$ vrai

Mq $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$

En effet : $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le U_n^2 \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \le 1 + U_n^2 \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{U_n^2+1} \le \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{5} \le \frac{-1}{1+U_n^2} \le -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{7}{10} \le \frac{3}{2} - \frac{1}{1+U_n^2} \le 1$

d'où $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$

Conclu : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{\frac{1}{2} \le U_n \le 1}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{U_n^2+1} - U_n$

$= \frac{3(U_n^2+1) - 2 - 2U_n(U_n^2+1)}{2(U_n^2+1)}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n^2 - 2U_n^3 - 2U_n + 1}{2(U_n^2+1)}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(-2U_n^2 + U_n - 1)}{2(U_n^2+1)}$

c) on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $-2U_n^2 + U_n - 1 < 0$ car $\Delta = 1 - 8 < 0$

et $U_n \le 1 \Rightarrow U_n - 1 \le 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n \ge 0 \Leftrightarrow U_n \nearrow$

et U_n majorée par 1 $\Rightarrow$ U_n convergente et converge vers l

Détermination de l :

on pose $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

on a alors $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_n \text{ converge vers } l \in [\frac{1}{2}, 1] \\ f \text{ cont sur } [\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow l$ est la solution de l'équation

$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{l^2+1} = l \Leftrightarrow$

$3(l^2+1) - 2 = 2l(l^2+1)$

$\Leftrightarrow 2l^3 - 3l^2 + 2l - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (l-1)(2l^2 - l + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} l - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{l = 1} \\ \text{ou} \\ 2l^2 - l + 1 = 0 \quad \Delta = -7 < 0 \Rightarrow \text{pas de solution} \end{cases}$

conclu $\boxed{U_n \text{ converge vers } 1}$

2) a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1}-1| \leq \frac{4}{5}|U_n-1|$

on a $U_n \leq 1 \Rightarrow |U_{n+1}-1| = 1-U_{n+1}$

et $|U_n-1| = 1-U_n$

d'où $|U_{n+1}-1| - \frac{4}{5}|U_n-1| = (1-U_{n+1}) - \frac{4}{5}(1-U_n)$

$= \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{U_n^2+1}\right) + \frac{4}{5}U_n$

$= \frac{-13}{10} + \frac{1}{U_n^2+1} + \frac{4}{5}U_n \Leftrightarrow$

$= \frac{-13(U_n^2+1)+10+8U_n(U_n^2+1)}{10(U_n^2+1)}$

$= \frac{8U_n^3 - 13U_n^2 + 8U_n - 3}{10(U_n^2+1)}$

$= \frac{(U_n-1)(8U_n^2-5U_n+3)}{10(U_n^2+1)} \leq 0$

car $U_n - 1 \leq 0$ car $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

et $8U_n^2 - 5U_n + 3 > 0$

car $\Delta = 25 - 96 = -71 < 0$

$\Rightarrow |U_{n+1}-1| \leq \frac{4}{5}|U_n-1|$

b) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_n-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

pour $n=0$, $|U_0-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^0$ vérifiée

supp que $|U_n-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ vraie

Mq $|U_{n+1}-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

En effet : $|U_{n+1}-1| \leq \frac{4}{5}|U_n-1|$ ①

et $|U_n-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\rightarrow |U_{n+1}-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{|U_n-1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

c) $\frac{4}{5} \in]-1,1[\Rightarrow \lim \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

d'où $\lim \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} (U_n - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim U_n = 1}$

3) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(1-U_k)$

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n}(1-U_k) - \sum_{k=0}^{n-1}(1-U_k)$

$= 1 - U_n \geq 0 \Rightarrow S_n \nearrow$

• on a $1 - U_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^k$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(1-U_k) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^k$

$\Leftrightarrow S_n \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}\right]$

$\Leftrightarrow S_n \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}}\right]$

$\Leftrightarrow S_n \leq \frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \leq \frac{5}{2}$

alors $S_n \nearrow$ et majorée par $\frac{5}{2}$

d'où S_n est convergente

Exercice N° 28 :

1) $G(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) = G(\sqrt{\tan x})$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

2) on pose $g(t) = \frac{t}{1+t^4}$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow G$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de g qui s'annule en 0

on a alors $\begin{cases} 1)\ G \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ 2)\ G'(x) = g(x) = \frac{x}{1+x^4} \\ 3)\ G(0) = 0 \end{cases}$

$F(x) = G(\sqrt{\tan x})$

or $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

et $\sqrt{\tan x} \in]0, +\infty[\subset \mathbb{R} = D_G \subseteq \mathcal{C}$

$\rightarrow F$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$F'(x) = (\sqrt{\tan x})' \cdot G'(\sqrt{\tan x}) =$

$= \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{\sqrt{\tan x}}{1+(\sqrt{\tan x})^4} = \frac{1}{2}$

b) $F'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x + k$

or $\left.\begin{array}{l} F(0) = G(0) = 0 \\ F(0) = k \end{array}\right\} \Rightarrow k = 0$

Concl : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x}$

• $\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt = G(1) = G(\sqrt{\tan \frac{\pi}{4}})$

$= F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$

2) a) $J = \int_0^1 \frac{t^5}{(1+t^4)^2}\,dt = \int_0^1 t^2\left(\frac{t^3}{(1+t^4)^2}\right)dt$

on pose $u(t) = t^2 \longrightarrow u'(t) = 2t$

$v'(t) = \frac{t^3}{(1+t^4)^2} \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+t^4}\right)$

$\Rightarrow J = \left[\frac{-t^2}{4(1+t^4)}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt$

$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi - 2}{16}}$

3) $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,dt$

a) Mq $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$

on a $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t^4 \leq 1$

d'où $1 \leq 1+t^4 \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$ or $t^{4n+1} \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^{4n+1}}{1+t^4} \leq t^{4n+1}$

alors $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,dt \leq \int_0^1 t^{4n+1}\,dt$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{t^{4n+2}}{4n+2}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}}$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{4n+2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim I_n = 0}$

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{4n+5} + t^{4n+1}}{1+t^4}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{4n+1}\cancel{(t^4+1)}}{\cancel{(1+t^4)}}\,dt$

$= \left[\frac{1}{4n+2} t^{4n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{4n+2}$

$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1}{4n+2}}$

• pour $n=0$, $I_1 + I_0 = \frac{1}{2}$

or $I_0 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

• pour $n=1$: $I_2 + I_1 = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{6} - I_1 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+2}$

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = \frac{\pi}{8} + (-1)^n I_{n+1}$

• Pour $n=0$, $S_0 = \frac{(-1)^0}{2} = \frac{1}{2}$

et $S_0 = \frac{\pi}{8} + I_1 = \cancel{\frac{\pi}{8}} + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ vérifiée pour $n=0$

• Supp que $S_n = \frac{\pi}{8} + (-1)^n I_{n+1}$ vrai

• Dq $S_{n+1} = \frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} I_{n+2}$

en effet : $S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)+2}$

$\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{\pi}{8} + (-1)^n I_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)+2}$

$= \frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{4(n+1)+2} - I_{n+1}\right]$

or $I_{n+2} + I_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)+2}$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} \cdot I_{n+2}$

conc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{S_n = \frac{\pi}{8} + (-1)^n I_{n+1}}$

b) on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$I_{n+1} \geq 0 \Rightarrow -I_{n+1} \leq (-1)^n I_{n+1} \leq I_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - I_{n+1} \leq \frac{\pi}{8} + (-1)^n I_{n+1} \leq \frac{\pi}{8} + I_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - I_{n+1} \leq S_n \leq \frac{\pi}{8} + I_{n+1}$

or $\lim_{+\infty} I_{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim S_n = \frac{\pi}{8}}$

Exercice N° 29 : $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$ $D_{f_n} = [1, +\infty[$

1)a) dérivabilité de f_n en 1^+ : $f_n(1) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \lim_{1^+} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)x^n} = \lim_{1^+} \frac{\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}}{x^n\sqrt{x-1}}$

$= \frac{\sqrt{1}}{0^+} = +\infty \Rightarrow f_n$ n'est pas $\underline{d}$ en 1^+

et $\mathcal{C}_n$ admet en $(1,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

b) f_n $\underline{d}$ sur $]1, +\infty[$ car $\ln x > 0$.

$f'_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right)x^n - nx^{n-1}\sqrt{\ln x}}{x^{2n}} = \frac{\frac{x^{n-1}}{2\sqrt{\ln x}} - nx^{n-1}\sqrt{\ln x}}{x^{2n}}$

$= \frac{x^{n-1} - 2nx^{n-1}(\ln x)}{2x^{2n}\sqrt{\ln x}} = \frac{x^{n-1}(1 - 2n \cdot \ln x)}{2x^{2n}\sqrt{\ln x}}$

$\Leftrightarrow f'_n(x) = \frac{1 - 2n\ln x}{2x^{n+1} \cdot \sqrt{\ln x}}$

on résoud $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2n \cdot \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2n}}$

x	1		$e^{\frac{1}{2n}}$		$+\infty$
f_n'	‖	$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2ne}}$	↘	0

$\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n} = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\frac{\ln x}{x^{2n}}} = 0$

$\cdot\ f_n(e^{\frac{1}{2n}}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2ne}}$

c) Positions de $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{n+1}} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$

$= \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{n+1}}(1-x) = f_{n+1}(x)(1-x)$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geq 0$

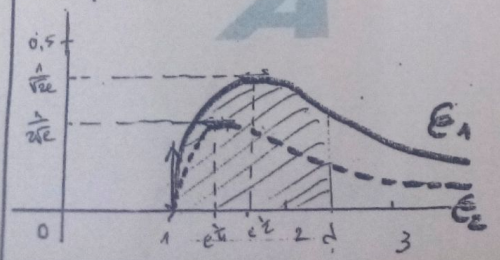
$\Rightarrow$ le signe $[f_{n+1} - f_n] = \text{signe}[1-x] \leq 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_{n+1}$ est toujours située au dessous de $\mathcal{C}_n$.

d) on a $y=0$: Asymptote horizontale à $\mathcal{C}_n$

$\cdot\ S_1(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$: extrémé de $\mathcal{C}_1$

$\cdot\ S_2(e^{\frac{1}{4}}, \frac{1}{2\sqrt{e}})$: extrémé de $\mathcal{C}_2$



2) $A(\alpha) = \int_1^\alpha f_1(x)dx = \int_1^\alpha \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

$= \int_1^\alpha \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^\alpha$

$= \left[\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}\right]_1^\alpha = \frac{2}{3}\ln\alpha\sqrt{\ln\alpha}$ (ua)

3) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{1+\frac{k}{2n}}$

a) $0 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+\frac{k}{2n} \leq 1+\frac{n-1}{2n}$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1+\frac{k}{2n} \leq \frac{3}{2}-\frac{1}{2n} \leq \sqrt{e}$ (1)

et $1 \leq k+1 \leq n \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2n} \leq 1+\frac{k+1}{2n} \leq \frac{3}{2} \leq \sqrt{e}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \left[1+\frac{k}{2n}, 1+\frac{k+1}{2n}\right] \subset [1, \sqrt{e}]$

$f_1 \nearrow$ sur $[1, \sqrt{e}]$ d'où $1+\frac{k}{2n} \leq x \leq 1+\frac{k+1}{2n}$

$\Rightarrow f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \leq f_1(x) \leq f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$

d'où $\int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)dx \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x)dx \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)dx$

$\Leftrightarrow f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)\left[x\right]_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x)dx \leq f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)\left[x\right]_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x)dx \leq \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)}$

b) on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{1+\frac{k}{2n}}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{\cancel{2n}}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\cancel{2n}\cdot\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{2n+k}$

$= S_n - \frac{\sqrt{\ln(\frac{3}{2})}}{3n} = S_n - \frac{1}{2n}\frac{\sqrt{\ln(\frac{3}{2})}}{\frac{3}{2}}$

$= S_n - \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right)$

et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)$

$= \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{1+\frac{k}{2n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{2n+k}$

$= S_n - \frac{\cancel{\sqrt{\ln 1}}}{2n} = S_n$

et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} f_1(x)dx = A\left(\frac{3}{2}\right)$

alors en utilisant la sommation de l'inégalité de 3°) a) on obtient

$\boxed{S_n - \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq A\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n}$

c) on a déjà $A\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$ (1)

et $S_n - \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq A\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow S_n \leq A\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right)$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n \leq A\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right)}$

d) $f_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}}$: cte $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim S_n = A\left(\frac{3}{2}\right)$

or d'après 2) $A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

$\Rightarrow \boxed{\lim S_n = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$

معادلة الخوارزمي الرائعة

سُئل الخوارزمي عالم الرياضيات عن الإنسان فأجاب :

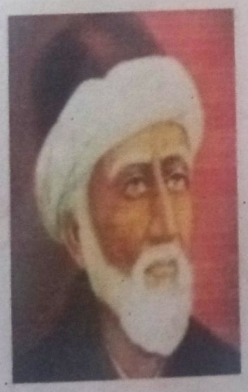
إذا كان الإنسان ذا اخلاق فهو =1

وإذا كان الإنسان ذا جمال فأضِف الى الواحد صفراً =10

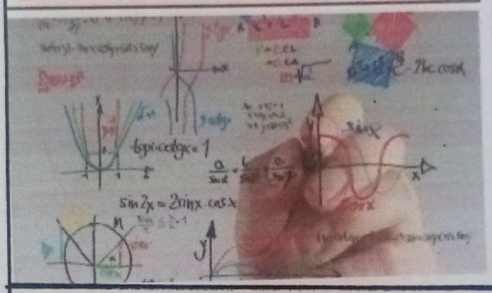
وإذا كان ذا مال ايضاً فأضِف صفراً آخر =100

وإذا كان ذا حسب ونسب فأضِف صفراً آخر =1000

فإذا ذهب العدد واحد وهو الاخلاق ذهبت قيمة الإنسان وبقيت الأصفار

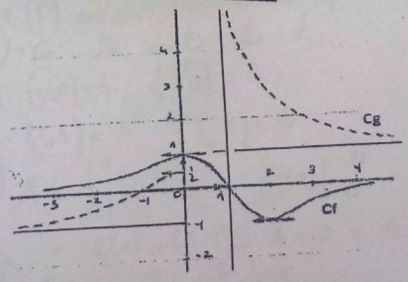


ANALYSE



Lecture Graphique

Exercice N° 30 :



1) a) $f(]-\infty,2[) =]0,1]$

b) $h = g \circ f$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) \in [-1,0]$

et g est définie sur $[-1,0]$

$\Rightarrow h$ est définie sur $[1,+\infty[$

2) $h(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{2\}$

3) • $h(1) = g(f(1)) = g(0) = \frac{1}{2}$

• $h'(2) = ?$

on a $h'(x) = (g \circ f(x))' = f'(x) \cdot g'(f(x))$

$\Rightarrow h'(2) = f'(2) \cdot g'[f(2)]$

$= 0 \cdot g'(-1) = 0$

• $\lim\limits_{+\infty} h(x) = \lim\limits_{+\infty} g[f(x)] = \lim\limits_{0^-} g(x) = \frac{1}{2}$

4) h existe ssi f existe et $f(I) \subset D_g$

$\Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$ et $D_g =]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$

$\Rightarrow$ il faut que $f(x) \in]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$

$\Rightarrow x \in [1,+\infty[$

• $h'(x) = f'(x) \cdot g'[f(x)]$

on résoud sur $[1,+\infty[$ $h'(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ ou $g'[f(x)] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

si $x \in [1,+\infty[$, $f(x) \in [-1,0]$

$g \nearrow$ sur $[-1,0] \Rightarrow g'(f(x)) > 0$

$\Rightarrow \text{Sgn}[h'] = \text{Sgn}[f'(x)]$

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ $\frac{1}{n}$	0	$\nearrow$ $\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$

• $h(1) = g[f(1)] = g(0) = \frac{1}{2}$ $h(2) = g(f(2)) = g(-1) = 0$

5) (E) : $n\,h(x) = 1$ / $n \geq 3$

a) (E) : $h(x) = \frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{3}]$ car $n \geq 3$

- si $x \in]1,2[$, h est strict $\searrow$ et $\frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow$ il existe un unique $a_n \in]1,2[$ / $h(a_n) = \frac{1}{n}$
- si $x \in]2,+\infty[$, h est strict $\nearrow$ et $\frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow$ il existe un unique $b_n \in]2,+\infty[$ / $h(b_n) = \frac{1}{n}$

Conl : (E) admet exactement 2 solutions telle que $1 < a_n < 2 < b_n$

b) $h(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $h(a_n) = \frac{1}{n}$

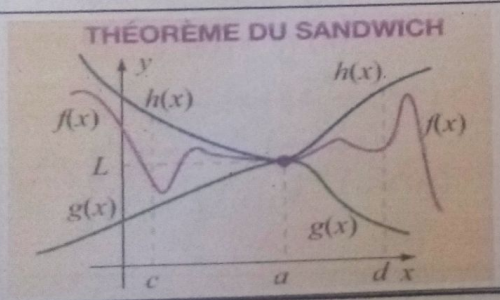
or $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(a_{n+1}) < h(a_n)$

or $h \searrow$ sur $]1,2] \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ d'où $\boxed{a_n \nearrow}$

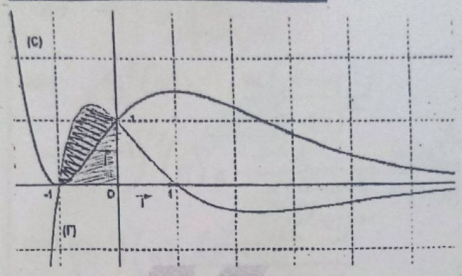
et $h \nearrow$ sur $[2,+\infty[\Rightarrow b_{n+1} < b_n \Rightarrow \boxed{b_n \searrow}$

c) • $a_n \nearrow$ majorée par 2 $\Rightarrow a_n$ convergente

• $b_n \searrow$ minorée par 2 $\Rightarrow b_n$ convergente



Exercice N° 31 :



1) Lorsque (Γ) coupe l'axe des abscisses la courbe $\mathcal{C}$ admet un extrémum $\Rightarrow (\Gamma)$ est la courbe de f' et $\mathcal{C}$ la courbe de f.

2) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$

$f(-1) = 0$ $f'(-1) = 0$

3) $A = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = [f(x)]_{-1}^{0}$

$= f(0) - f(-1) = 1 - 0 = 1$

II) $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$

1) a) $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \cdot e^{-x}\,dx$

on pose $u(x) = (x+1)^2 \longrightarrow u'(x) = 2(x+1)$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$\Rightarrow I = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} (x+1) e^{-x}\,dx$

on pose $u(x) = x+1 \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$\Rightarrow J = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$

$= \left[-(x+1)e^{-x} - e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

d'où $I = \left[-(x+1)^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

$\Leftrightarrow I = \left[-(x^2+4x+5)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

$\boxed{I = -5 + 2e}$

b) $A' = \int_{-1}^{0} [f'(x) - f(x)]\,dx$

$= \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

$= 1 - (-5 + 2e) \Rightarrow \boxed{A = 6 - 2e}$

2) $g(x) = f(x)$ si $x \in [1,+\infty[$

a) f est strict $\searrow$ sur $[1,+\infty[\Rightarrow$ g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[)$ sur $]0, 4e^{-1}] = J$

b) on pose $h(x) = g(x) - x$

$h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ car $g \searrow$

x	1		α		$+\infty$
h'		$-$	0	$-$	
h	$4e^{-1}-1$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

$h(1) = g(1) - 1 = 4e^{-1} - 1$

$\lim_{+\infty} h(x) = -\infty$

h est strict. croissante sur $[1,+\infty[\Rightarrow h$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty, 4e^{-1}-1]$

or $0 \in]-\infty, 4e^{-1}-1] \Rightarrow$ il existe un unique $\alpha \in]1,+\infty[\,/\, h(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow g(\alpha)-\alpha=0 \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$

or $h(1,41) = g(1,41)-1,41 \simeq .. > 0$

$h(1,42) = g(1,42)-1,42 \simeq .. < 0$

$\Rightarrow h(1,41)\cdot h(1,42) < 0 \Rightarrow$

$\boxed{1,41 < \alpha < 1,42}$

c) on a g dérivable en $\alpha \in]1,+\infty[$ et $g'(\alpha)=0 \Rightarrow g^{-1}$ est dérivable en $g(\alpha)=\alpha$

$(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(\alpha))}$

or $g(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow g^{-1}(\alpha)=\alpha$

$\Rightarrow g'[g^{-1}(\alpha)] = g'(\alpha)$

or $f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}(-x^2+1)$

$\Rightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha) = e^{-\alpha}(-\alpha^2+1)$

or $g(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \dfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}$

$\Rightarrow g'(\alpha) = \dfrac{\alpha(1-\alpha^2)}{(\alpha+1)^2}$

$\Rightarrow (g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{(\alpha+1)^2}} = \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\alpha^2)}$

$\Leftrightarrow (g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)}$

$\Rightarrow \boxed{(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}}$

Problèmes

Problème N° 1 :

(A) $f(x) = \dfrac{1}{1-xe^{-x}}$ $\quad I = \int_0^1 f(x)\,dx$

1) on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $xe^{-x} \le e^{-1}$

on pose $u(x) = xe^{-x}$ $\quad D_u = \mathbb{R}$

$u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

- $\lim\limits_{-\infty} u(x) = \lim\limits_{-\infty} xe^{-x} = -\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} u(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

e^{-1} : maximum absolu $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) \le e^{-1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{xe^{-x} \le e^{-1}}$

- f existe ssi $1-u(x) \neq 0$

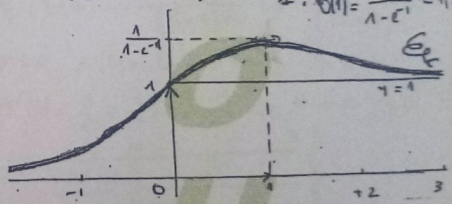
$\Leftrightarrow u(x) \neq 1$ toujours vrai car $u(x) \le e^{-1} < 1$

$\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{(1-u(x))^2} = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{1-e^{-1}}$	$\searrow$	1

- $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{1-u(x)} = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1-u(x)} = 1$
- $f(1) = \frac{1}{1-e^{-1}} \simeq 1,58$



3) d'après le TV on a $\forall x \ge 0$, $1 \le f(x) \le \frac{1}{1-e^{-1}}$

$\Leftrightarrow \boxed{1 \le f(x) \le \frac{e}{e-1}}$

$\Rightarrow \int_0^1 1\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \frac{e}{e-1}\,dx$

$\Leftrightarrow [x]_0^1 \le I \le \frac{e}{e-1}[x]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{1 \le I \le \frac{e}{e-1}}$

(B) $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1)a) $J_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\Rightarrow J_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow J_1 = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^1 \Leftrightarrow J_1 = 0+1 \Rightarrow \boxed{J_1 = 1}$

b) $H(x) = (ax^2+bx+c)e^{-2x}$ $\triangleq$ fon $\mathbb{R}$

$H'(x) = (2ax+b)e^{-2x} - 2(ax^2+bx+c)e^{-2x}$

$= \left[-2ax^2 + (2a-2b)x + (b-2c)\right]e^{-2x}$

$H'(x) = h(x) = x^2e^{-2x} \Rightarrow$ par identif :

$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a-2b = 0 \\ b-2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2}\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{H(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}$ primitive de $h(x)$

• $J_2 = \int_0^1 x^2e^{-2x}dx = \int_0^1 h(x)dx = \left[H(x)\right]_0^1 = H(1) - H(0)$

$\Rightarrow J_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2} - \left(0+0-\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow J_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2} \Rightarrow \boxed{J_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{e^2}\right)}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$

a) $1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \dots + x^ne^{-nx} = \sum_{k=0}^{n} (xe^{-x})^k$

$= \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}} = \frac{1 - x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}$

$\Leftrightarrow 1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \dots + x^ne^{-nx} = \frac{1}{1-xe^{-x}} - \frac{x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}$

$\Leftrightarrow 1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \dots + x^ne^{-nx} = f(x) - x^{n+1}e^{-(n+1)x} \cdot f(x)$

$\Rightarrow \int_0^1 1dx + \int_0^1 xe^{-x}dx + \int_0^1 x^2e^{-2x}dx + \dots + \int_0^1 x^ne^{-nx}dx =$

$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$

$\Leftrightarrow 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n = I - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)}f(x)dx$

$\Leftrightarrow U_n = I - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)}f(x)dx$

$\Leftrightarrow \boxed{I - U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx}$

c) Rq $0 \le \frac{x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}} \le \frac{1}{e^n(e-1)}$

on a $0 \le xe^{-x} \le e^{-1} \Rightarrow 0 \le x^{n+1}e^{-(n+1)x} \le e^{-(n+1)}$

$\Leftrightarrow 0 \le x^{n+1}.e^{-(n+1)x} \le \frac{1}{e^{n+1}}$

pour $x \ge 0$; $1 \le f(x) \le \frac{e}{e-1}$ $\Rightarrow$

Produit : $\boxed{0 \le \frac{x^{n+1}.e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}} \le \frac{1}{e^n(e-1)}}$

d) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}dx \le \frac{1}{e^n(e-1)}\int_0^1 dx$

$\Leftrightarrow \boxed{0 \le I - U_n \le \frac{1}{e^n(e-1)}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n(e-1)} = 0 \Rightarrow \lim(I - U_n) = 0$

or I : constante $\Rightarrow \boxed{\lim U_n = I}$

Conl : $\boxed{U_n \text{ Converge vers } I}$

3) on a $0 \le I - U_n \le \frac{1}{e^n(e-1)}$

pour $n = 2 \Rightarrow 0 \le I - U_2 \le \frac{1}{e^2(e-1)}$

$\Leftrightarrow \boxed{U_2 \le I \le U_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}}$

• on a $\frac{1}{e^2(e-1)} \le 5.10^{-2}$

$\Rightarrow I \simeq U_2$ à 5.10^{-2} près

or $U_2 \simeq 1 + J_1 + J_2 = 1 + 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{e^2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{U_2 \simeq \frac{9}{4} - \frac{5}{4e^2}}$ à 5.10^{-2} près

Problème N° 2 :

$f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0,1[$

$f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

(A) 1) on a $\forall t \in]0,1[$, $\ln t \neq 0$

$\Rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ pour $]0,1[$

$f'(t) = \frac{\ln t - \frac{1}{t}(t-1)}{(\ln t)^2} = \frac{\ln t - 1 + \frac{1}{t}}{(\ln t)^2}$

on pose $A(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$ $D_A =]0,1[$

$A'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} < 0$ $\forall t \in]0,1[$

t	0		1
$A'(t)$		$-$	
$A(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim_{0^+} A(t) = \lim_{0^+}\left[\ln t - 1 + \frac{1}{t}\right] = \lim_{0^+}\left(\frac{(t\ln t) - t + 1}{t}\right)$ ($t\ln t \to 0$)

$= \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{t\to1^-} A(t) = \lim_{1^-}\left[\ln t - 1 + \frac{1}{t}\right] = 0$

$\Rightarrow \forall t \in]0,1[$ $A(t) > 0 \Rightarrow f'(t) > 0$

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1

• $\lim\limits_{0^+} f(t) = \lim\limits_{0^+} \frac{t-1}{\ln t} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

• $\lim\limits_{1^-} f(t) = \lim\limits_{1^-} \frac{t-1}{\ln t} = \lim\limits_{1^-} \frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}} = \frac{1}{1} = 1$

2) <u>$\mathcal{D}$ de f en 0^+</u>.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{0^+} \frac{\frac{x-1}{\ln x}}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{x-1}{x\ln x}$

$= \frac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow f$ n'est pas $\mathcal{D}$ en 0^+ et $\mathcal{C}_f$ admet en $O(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3) a) On a, $\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$, $0 \le \frac{1}{1-u} - (1+u) \le 2u^2$

on a $\frac{1}{1-u} - (1+u) = \frac{1-(1+u)(1-u)}{1-u} = \frac{u^2}{1-u}$

or $0 \le u \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le -u \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1-u \le 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \le \frac{1}{1-u} \le 2$

alors $0 \le \frac{u^2}{1-u} \le 2u^2$

d'où $\forall u \in [0, \frac{1}{2}]$; $\boxed{0 \le \frac{1}{1-u} - (1+u) \le 2u^2}$

b) on a $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $0 \le \frac{1}{1-t} - (1+t) \le 2t^2$

pour $0 \le u \Rightarrow 0 \le \int_0^u \left[\frac{1}{1-t} - (1+t)\right] dt \le \int_0^u 2t^2 dt$

$\Rightarrow 0 \le \left[-\ln(1-t) - \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)\right]_0^u \le \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^u$

$\Rightarrow \boxed{0 \le -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \le \frac{2}{3}u^3}$

c) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ / $x \in]0,1]$

$\Rightarrow g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$; $g(1) = \frac{1}{f(1)} = 1$

or $0 \le -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \le \frac{2}{3}u^3$

$\Leftrightarrow u + \frac{u^2}{2} \le -\ln(1-u) \le \frac{2}{3}u^3 + u + \frac{u^2}{2}$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}u^3 - u - \frac{u^2}{2} \le \ln(1-u) \le -u - \frac{u^2}{2}$

d'où $-u\left[+\frac{2}{3}u^2 + 1 + \frac{1}{2}u\right] \le \ln(1-u) \le -u\left(1 + \frac{1}{2}u\right)$

on pose $x = 1-u \Leftrightarrow u = 1-x$

si $u \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$\Rightarrow (x-1)\left[\frac{2}{3}(1-x)^2 + 1 - \frac{1}{2}(x-1)\right] \le \ln x \le (x-1)\left[1 - \frac{1}{2}(1-x)\right]$

$x-1 < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}(1-x) \le \frac{\ln x}{x-1} \le \frac{2}{3}(1-x)^2 + 1 - \frac{1}{2}(x-1)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(1-x) \le \frac{\ln x}{x-1} - 1 \le \frac{2}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(x-1)$

d'où $-\frac{1}{2}(1-x) \le g(x) - 1 \le \frac{2}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(x-1)$

• <u>$\mathcal{D}$ de g en 1^-</u>.

pour $x \in]\frac{1}{2}, 1[\Rightarrow x - 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{2}{3}(1-x) + \frac{1}{2} \le \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \le -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{3}(1-x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow g$ est $\mathcal{D}$ en 1^- et $g'(1) = -\frac{1}{2}$

d) on a $g(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{g(x)}$

Comme g $\mathcal{D}$ en 1 et $g'(1) \neq 0$

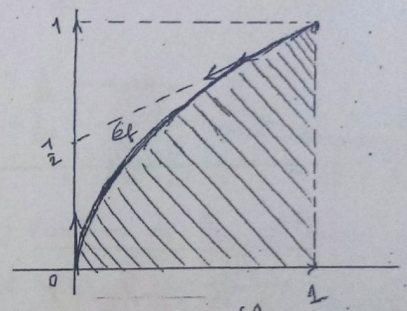
$\Rightarrow \boxed{f \text{ est } \mathcal{D} \text{ en } 1}$

• $f'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-g'(1)}{(g(1))^2}$

$\Leftrightarrow f'(1) = \frac{-(-\frac{1}{2})}{1^2} \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = \frac{1}{2}}$

4) T_1: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$



B) $\forall x \in]0,1]$; $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

1) $k(x) = J(x^2) - J(x)$ / $x \in]0,1]$

a) on a $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ $\mathcal{D}$ sur $]0,1] \Rightarrow J$ $\mathcal{D}$ sur $]0,1]$

et $x \mapsto x^2$ $\mathcal{D}$ sur $]0,1]$ et $x^2 \in]0,1] = D_J$

$\Rightarrow k$ $\mathcal{D}$ sur $]0,1]$ et $J'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

$k'(x) = [J(x^2)]' - [J(x)]' = 2x \cdot J'(x^2) + J'(x)$

$= 2x \cdot \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow k'(x) = \frac{-2f(x^2)}{x} + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left[f(x) - 2f(x^2)\right]$

b) $f(x) - 2f(x^2) = \frac{x-1}{\ln x} - 2\left(\frac{x^2-1}{\ln(x^2)}\right)$

$= \frac{x-1}{\ln x} - \frac{\cancel{2}(x^2-1)}{\cancel{2}\ln x} = \frac{\cancel{x-1} - \cancel{x^2+1}}{\ln x}$

$\Rightarrow f(x) - 2 \cdot f(x^2) = -x\left(\frac{x-1}{\ln x}\right) = -x f(x)$

c) $f(t) - 2f(t^2) = -t f(t)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{t}\left[f(t) - 2f(t^2)\right] = f(t) = k'(t)$

$\Rightarrow \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 t k'(t)\,dt = [k(t)]_x^1$

$\Leftrightarrow I(x) = [k(x) - \underbrace{k(1)}_{=0}] = J(x^2) - J(x)$

$\Rightarrow I(x) = \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$

$\Leftrightarrow \boxed{I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt} = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$

2) $\varphi(t) = \ln(-\ln t)$ / $t \in]0,1[$

a) $\forall t \in]0,1[\Rightarrow t > 0$ et $-\ln t > 0$

$\Rightarrow \varphi(t)$ s'V $\triangleq$ sur $]0,1[$

$\varphi'(t) = \frac{-\frac{1}{t}}{-\ln t} = \frac{1}{t\ln t}$

b) $\int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{t\ln t} = \int_{x^2}^{x} -\varphi'(t)\,dt = [-\varphi(t)]_{x^2}^{x}$

$= -\varphi(x^2)$ $\varphi(x) = \ln(-\ln x^2) - \ln(-\ln x)$

$= \ln\left[\frac{-2\ln x}{-\ln x}\right] = \ln 2 \Rightarrow \boxed{\int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{t\ln t} = \ln 2}$

3) $0 < t \le x < 1 \Rightarrow \ln t \le \ln x < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln x} \le \frac{1}{\ln t} \le 0 \Rightarrow 0 \le -\frac{1}{\ln t} \le -\frac{1}{\ln x}$

Comme $x^2 < x \Rightarrow 0 \le \int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{\ln t} \le \int_{x^2}^{x} -\frac{1}{\ln x}\,dt$

$\Leftrightarrow 0 \le -\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \le -\frac{1}{\ln x}[t]_{x^2}^{x}$

$\Leftrightarrow 0 \le \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \le \frac{x^2 - x}{\ln x} \le \frac{-x}{\ln x}$

$\Rightarrow \boxed{0 \le \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \le \frac{-x}{\ln x}}$

4) $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt = \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} + \underbrace{\int_{x^2}^{x} \frac{-dt}{t\ln t}}_{\ln 2}$

or $\frac{x}{\ln x} \le \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \le \frac{-x}{\ln x}$

$\Rightarrow \frac{x}{\ln x} + \ln 2 \le I(x) \le -\frac{x}{\ln x} + \ln 2$

Comme $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} I(x) = \ln 2}$

5) a) $I - I(x) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$

b) on a d'après A1) $0 \le f(t) \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^x 1\,dt$

$\Leftrightarrow \boxed{0 \le I - I(x) \le x}$

c) $\lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow \lim_0 (I - I(x)) = 0$

$\Rightarrow I = \lim_{0^+} I(x) \Rightarrow \boxed{I = \ln 2}$

Problème N° 3 :

$f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ $D_f = [1, +\infty[$

A1) 1) a) $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\triangleq$ sur $[1, +\infty[$

$f_1'(x) = \frac{(\frac{1}{x})x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$

$\Leftrightarrow f_1'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

on résout. $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

x	1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f_1'		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

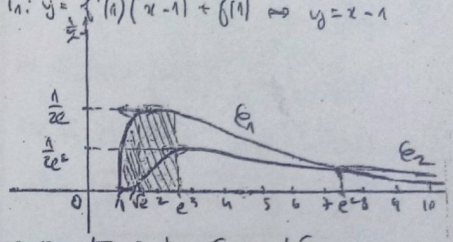
$f_1(1) = 0$

$f_1(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$

$\lim_{+\infty} f_1(x) = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

$\Rightarrow$ D: $y = 0$ Asym Horiz en $+\infty$

T_1: $y = f_1'(1)(x-1) + f_1(1) \Leftrightarrow y = x - 1$



2) Position de $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$:

Et $\varphi(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) =$

$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} - \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{(\ln x)^{n+1} - (n+1)(\ln x)^n}{(n+1)!\,x^2}$

$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{(\ln x)^n}{(n+1)!\,x^2}[\ln x - (n+1)]$

$\varphi(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = n+1 \Leftrightarrow x = e^{n+1} \\ \text{ou } \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$

x	1		e^{n+1}		$+\infty$
$\varphi(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position de $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapp à $\mathcal{C}_n$	$=$	$\mathcal{C}_n$ / $\mathcal{C}_{n+1}$	$=$	$\mathcal{C}_{n+1}$ / $\mathcal{C}_n$	

3) Variation de f_n : $f_n \triangleq$ sur I

$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\frac{n(\frac{1}{x})(\ln x)^{n-1} \cdot x^2 - 2x(\ln x)^n}{x^{2n}}$

$f_n'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1}}{n!\,x^{2n-1}}(n - 2\ln x)$

$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1 \\ n-2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{n}{2}} \end{cases}$

x	1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_n'	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(e^{\frac{n}{2}})$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2} = 0$

$f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln(e^{\frac{n}{2}}))^n}{(e^{\frac{n}{2}})^2} = \frac{1}{n!}\frac{(\frac{n}{2})^n}{e^n}$

$\Leftrightarrow f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

(B) 1) On $n \in \mathbb{N}^*$, f_n' s'annulle en $(e^{\frac{n}{2}})$ et change de signe de $+ \to -$ $\Rightarrow f_n$ admet un maximum en $e^{\frac{n}{2}}$ egal à

$f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{n}{2e}\right]^n = y_n$

2) $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{\cancel{x^2}}}{\frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{\cancel{x^2}}}$

$= \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{(\ln x)^n} = \frac{\ln x}{n+1}$

3) $y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{n+1}{2e}\right]^{n+1}$

or $\frac{1}{2}f_n(e^{\frac{n+1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n!}\cdot\frac{(\ln(e^{\frac{n+1}{2}}))^n}{e^{n+1}}\right]$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^n\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{n+1}$

Conl : $\boxed{y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n(e^{\frac{n+1}{2}})}$

• f_n $\searrow$ sur $[e^{\frac{n}{2}}, e^{\frac{n+1}{2}}] \subset [e^{\frac{n}{2}}, +\infty[$

$\Rightarrow f_n(e^{\frac{n+1}{2}}) \leq f_n(e^{\frac{n}{2}}) = y_n$

or $y_{n+1} = \frac{1}{2}f(e^{\frac{n+1}{2}}) \leq \frac{1}{2}y_n$

4) Mq $\forall n \geq 1$ $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}y_1$

pour $n=1$, $y_1 \leq y_1$ vérifié

supp que $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}y_1$ vrai

Dm $y_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n y_1$

en effet : $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}y_1$

d'où $\frac{1}{2}y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n y_1$

or $y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n y_1$

Conl : $\forall n \geq 1$, $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot y_1$

or $y_1 = \frac{1}{2e} \Rightarrow 0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot e^{-1}$

$\frac{1}{2} \in]-1,1[\Rightarrow \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim y_n = 0}$

$\boxed{C}$ $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$

1) on a $\forall x \geq 1$, $0 \leq f_n(t) \leq y_n$: maximum

$\Rightarrow \int_1 0 \leq \int_1^x f_n(t)dt \leq \int_1^x y_n dt$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n(x) \leq y_n[t]_1^x$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n(x) \leq (x-1)y_n$

2) $I_1(x) = \int_1^x f_1(t)dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$

on pose $u(t) = \ln t \longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2} \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow I_1(x) = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$\Leftrightarrow I_1(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x = \left[\frac{\ln x - 1}{x} + 1\right]$

alors $\boxed{I_1(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}}$

$A = \int_1^e f_1(x)dx = I_1(e) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$

$\Rightarrow A = \left(1 - \frac{2}{e}\right)$ ua

or $1\,ua = \|\vec{i}\|\cdot\|\vec{j}\|\ cm^2 = 10\ cm^2$

$\Rightarrow \boxed{A = 10 - \frac{20}{e}\ cm^2}$

3) Mq $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

on a $I_{n+1}(x) = \int_1^x \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2}dt$

on pose $u(t) = \frac{(\ln t)^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}\cdot\frac{(\ln t)^n}{n!}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2} \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow I_{n+1}(x) = \left[-\frac{1}{t}\frac{(\ln t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{n!}\frac{(\ln t)^n}{t^2}dt$

$\Leftrightarrow \boxed{I_{n+1}(x) = -\frac{1}{x}\cdot\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!} + I_n(x)}$

BACHELIER en 2K21
98%
Veuillez patienter...

4) Mq $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}\right]$

pour $n=1$: $I_1(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!}\right]$ vérifiée.

Supposons $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}\right]$

Dp $I_{n+1}(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \dots + \frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]$

en effet : $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{x}\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\Leftrightarrow I_{n+1}(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}\right] - \frac{1}{x}\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\Leftrightarrow I_{n+1}(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]$

Conl : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{\ln x}{1!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}\right]$

5) $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

pour $x = e$ on a $I_n(e) = 1 - \frac{1}{e}\left[1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right]$

$\Leftrightarrow I_n(e) = 1 - e^{-1}[U_n] \Leftrightarrow e^{-1}U_n = 1 - I_n(e)$

$\Leftrightarrow U_n = e\left[1 - I_n(e)\right]$

or $0 \leq I_n(x) \leq (e-1)\, y_n$

$\Rightarrow 0 \leq I_n(e) \leq (e-1)\, y_n$

$\lim_{n\to+\infty} (e-1)\, y_n = 0$ car $\lim y_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n(e) = 0$

d'où $\boxed{\lim U_n = e}$

Problème N° 4 :

(A) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; $D_f =]0, \frac{\pi}{2}]$

1) on a $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$; $\sin x \neq 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,

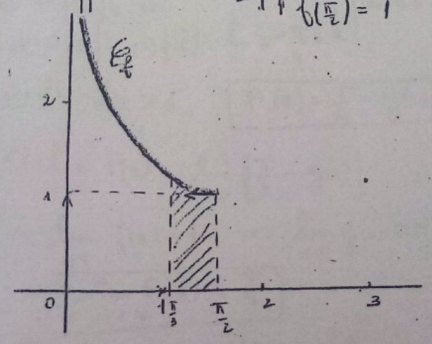
$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \leq 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1

$\lim_{0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow x = 0$: asymptote verticale

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$



2) a) on a $f(x) = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\cdot\sin(\frac{x}{2})\cdot\cos(\frac{x}{2})}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1 + tg^2(\frac{x}{2})}{tg(\frac{x}{2})}\right]$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = \ln\left|tg(\frac{x}{2})\right| + k$

or $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow (\frac{x}{2}) \in]0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow tg(\frac{x}{2}) > 0$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = \ln\left(tg(\frac{x}{2})\right)}$ Primitive de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

b) $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= F(\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{3}) = \ln\left[tg(\frac{\pi}{4})\right] - \ln\left[tg\frac{\pi}{6}\right]$

$\Rightarrow A = \ln[1] - \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \ln(\sqrt{3})$

alors $\boxed{A = \frac{1}{2}\ln(3)}$ (ua)

3) a) f continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$.

b) $g = f^{-1}$

on a $f(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow g(1) = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \Rightarrow g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6})} = 2 \Rightarrow g(2) = \frac{\pi}{6}$

c) on a $\left.\begin{array}{l} f \text{ d sur }]0, \frac{\pi}{2}] \\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g$ est dérivable sur $f(]0, \frac{\pi}{2}]) \setminus \{f(\frac{\pi}{2})\} \Rightarrow$

g est dérivable sur $[1, +\infty[\setminus \{1\}$

d'où g est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{\frac{-\cos[g(x)]}{\sin^2[g(x)]}} = -\frac{\sin^2[g(x)]}{\cos[g(x)]}$

or $f[g(x)] = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin[g(x)]} = x$

$\Leftrightarrow \sin[g(x)] = \frac{1}{x}$

et $\cos^2[g(x)] = 1 - \sin^2[g(x)] = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} > 0$

$\Rightarrow |\cos[g(x)]| = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

or $g(x) \in]0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos[g(x)] \geq 0$

d'où $|\cos[g(x)]| = \cos[g(x)] = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

d'où $g'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \frac{-1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

Conl : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\boxed{g'(x) = \frac{-1}{x.\sqrt{x^2-1}}}$

(B) $H(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}\, dt$

$F(x) = H(\ln x) \quad / x \in]1, +\infty[$

1) a) on pose $h(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

h s'ssi $e^{2t}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{2t} > 1$

$\Leftrightarrow t > 0 \rightarrow h$ s'ssi $]0, +\infty[$

d'où H est la primitive de $h(t)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $\ln\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ on a : $\begin{cases} 1)\ H \text{ s'ssi }]0, +\infty[\\ 2)\ H'(x) = h(x) \\ 3)\ H(\ln\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$

or $F(x) = H(\ln x)$

Comme $x \mapsto \ln x$ s'ssi $]1, +\infty[$ et que $(\ln x) \in]0, +\infty[= D_H$

$\Rightarrow F$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

$F'(x) = [H(\ln x)]' = \frac{1}{x}.H'(\ln x)$

$\Leftrightarrow F'(x) = \frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{e^{2\ln x}-1}} = \frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{e^{\ln x^2}-1}}$

$\Leftrightarrow \boxed{F'(x) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}} \quad \forall x > 1$

d'où $F'(x) = -g'(x)$

b) $F(x) = -g(x) + k$

or $F(\sqrt{2}) = 0$

et $F(\sqrt{2}) = -g(\sqrt{2}) + k = -\frac{\pi}{4} + k$ $\Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$

Conl : $\forall x > 1$, $\boxed{F(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)}$

c) • $\lim_{+\infty} F(x) = \lim_{+\infty} \left[\frac{\pi}{4} - g(x)\right]$

or $\lim_{0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{+\infty} g(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}}$

• $\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[\frac{\pi}{4} - g(x)\right]$

or $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = \frac{\pi}{4}$

d'où $\boxed{\lim_{x \to 1^+} F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}}$

2) $\begin{cases} G(x) = F(x) \text{ si } x > 1 \\ G(1) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 1^+} G(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = -\frac{\pi}{4} = G(1)$

$\Rightarrow G$: prolonge F par continuité en 1^+

b) $T = \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \frac{F(x) - (-\frac{\pi}{4})}{x - 1}$

$= \frac{\frac{\pi}{4} - g(x) + \frac{\pi}{4}}{x - 1} = -\frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1}$

on pose $x = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(x) = g(x)$

$\Rightarrow T = -\frac{t - \frac{\pi}{2}}{f(t) - 1} = \frac{-1}{\left(\frac{f(t) - f(\frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}}\right)}$

• $\lim_{x \to 1^+} \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\frac{f(t) - f(\frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}}} = \frac{-1}{0^-}$

$= +\infty$

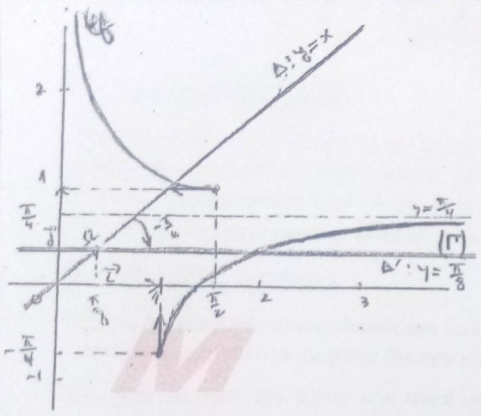
$\Rightarrow G$: n'est pas dérivable en 1^+ et (Γ) admet en $(1, -\frac{\pi}{4})$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

c) $D_G = D_F \cup \{1\} = [1, +\infty[$

$G'(x) = F'(x) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}} > 0$

x	1		$+\infty$
G'	‖	$+$	
G	$-\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{4}$

$\lim_{+\infty} G(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$: Asymptote en $(+\infty)$



3) Montrons que $(\Gamma) = R(\mathcal{C}_f)$

on a Γ : Symbole de G

or $G(x) = F(x) = \frac{\pi}{4} - g(x) = \frac{\pi}{4} - f^{-1}(x)$

or $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_\Delta(\mathcal{C}_f)$ ① / $\Delta : y = x$

on pose $\varphi(x) = -f^{-1}(x)$

$\Rightarrow \mathcal{C}_\varphi = S_{(O\vec{i})}(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ ②

et comme $G(x) = \frac{\pi}{4} - g(x) = \varphi(x) + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (\Gamma) = t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}}(\mathcal{C}_\varphi)$ ③

①, ② et ③ $\longrightarrow$

$(\Gamma) = t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}} \circ S_{(O\vec{i})} \circ S_\Delta(\mathcal{C}_f)$

on pose $\Delta' : y = \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}} = S_{\Delta'} \circ S_{(O\vec{i})}$

$\Rightarrow t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}} = S_{\Delta'} \circ S_{(O\vec{i})}$

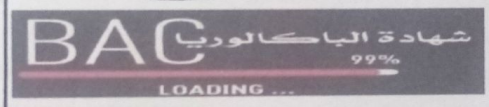
$\Rightarrow t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}} \circ S_{(O\vec{i})} \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ \underbrace{S_{(O\vec{i})} \circ S_{(O\vec{i})}}_{Id\,P} \circ S_\Delta$

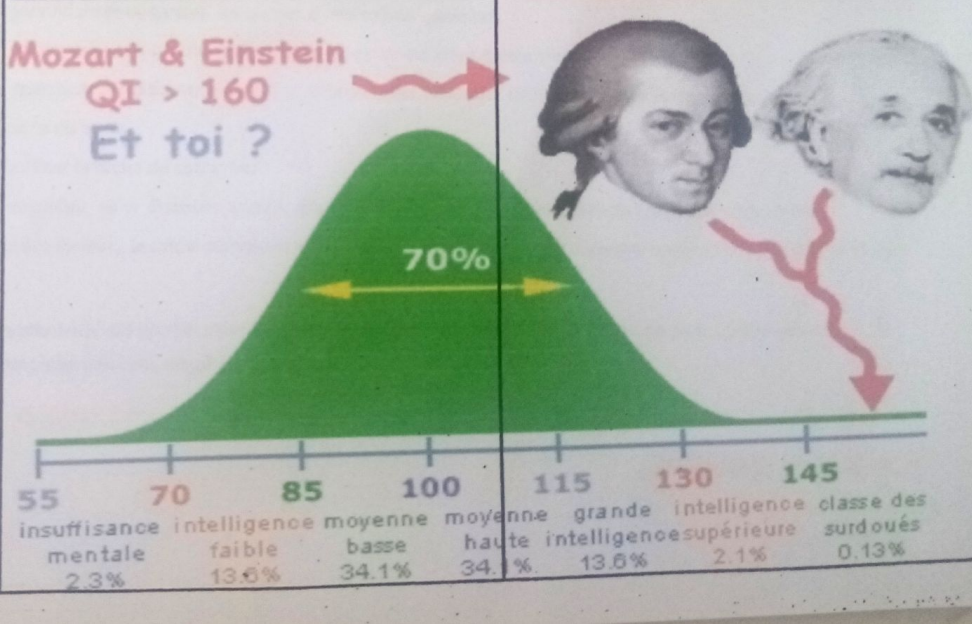
$\Leftrightarrow t_{\frac{\pi}{4}\vec{j}} \circ S_{(O\vec{i})} \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ S_\Delta = R(\Omega, \alpha)$

avec $\Omega = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow \Omega\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$

et $\alpha = 2(\widehat{\Delta, \Delta'}) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Conl : $\boxed{\Gamma = R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}(\mathcal{C}_f)}$ / $\Omega\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$





Conseils Pratiques

Admis BAC 2021

I – Au début de l'épreuve :

1) Lire *lentement* tout le sujet et souligner dans chacun des exercices les données importantes
2) Faire l'exercice 1 sur une feuille à part, l'exercice 2 sur une autre feuille , etc...
3) Traiter immédiatement tout ce qui vous paraît " facile " en commençant par l'exercice qui comporte les questions les plus classiques.
4) Le temps de chaque exercice sera calculé en fonction du barème à raison de *12 mn* maximum *par point*

II – Pendant l'épreuve :

1) Certaines questions vous demanderont une recherche au brouillon, mais vous n'avez pas le temps de faire une rédaction détaillée au brouillon. Prenez au brouillon simplement des notes ou les dérivées non immédiates ou les encadrements non évidents etc...
2) Si vous ne savez pas traiter une question , *laissez un espace* et continuez tout en supposant que le résultat est acquis.
3) Sachez vous *arrêter* dès que les calculs deviennent trop importants. La réponse à une question ne dépasse pas une dizaine de lignes.
4) Les questions d'un même exercice ne sont pas indépendantes et surtout les parties d'une même question
5) La question qui commence par " En déduire ..." doit avoir pour solution une déduction de ce qui vient d'être traité.
6) Avant de passer à la question suivante, *relire* la question précédente et vérifier si vous avez répondu textuellement à ce qu'il demande.
7) Encadrer votre réponse en respectant les notations du texte.
8) *Espacer* suffisamment votre écriture afin de faciliter la tâche du correcteur
9) Rédiger correctement avec des explications appropriées, sans discours inutile, énoncer brièvement les théorèmes de cours que vous utilisez.
10) N'oubliez pas qu'une calculatrice aide à retrouver des limites, le calcul complexe ou même des intégrales etc ... mais elle ne remplace pas la justification

En fin,

Vérifier que vos résultats sont *logiques* : une probabilité est un réel $\in[0 ; 1]$; une aire est un réel positif, une fonction ne peut croître vers $-\infty$ ou décroître vers $+\infty$, le module d'un nombre complexe n'est pas négatif, un vecteur n'est jamais égal à son affixe ; etc...

Avec tous mes souhaits de réussite,

BONNE CHANCE