السابعة أساسي

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

الطرق العملية لإيجاد ق.م.أ لعددين صحيحين طبيعيين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموعة القواسم:

مثال: أوجد مجموعة قواسم العددين 72 و 56
ثم استنتج ق م أ (56 ؛ 72)

الحل: لنا:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \times 3^2$

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$56 = 2^3 \times 7^1$

و

فإن:

* D_{72}?

+ قواسم 2^3 هي: $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ أي 8, 4, 2, 1

+ قواسم 3^2 هي: $3^2, 3^1, 3^0$ أي 9, 3, 1

جدول بيتاغور:

8	4	2	1	×
8	4	2	1	1
24	12	6	3	3
72	36	18	9	9

فإن: $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

* D_{56}?

+ قواسم 2^3 هي: $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ أي 8, 4, 2, 1

+ قواسم 7^1 هي: $7^1, 7^0$ أي 7 و 1

جدول بيتاغور:

8	4	2	1	×
8	4	2	1	1
56	28	14	7	7

فإن: $D_{56} = \{1, 2, 4, 8, 7, 14, 28, 56\}$

وبالتالي:

$D_{56} \cap D_{72} = \{1; 2; 4; 8\}$

فإن: ق م أ (72 ، 56) = 8

أستاذ الرياضيات عبدالعزيز بن مرزوق

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

السابعة أساسي

الطريقة الثانية: بواسطة التفكيك إلى جذاء عوامل أولية

مثال: أوجد ق م أ (126 ، 180)

الحل:

لدينا:

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

إذن:

$126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

وبالتالي:

$ق\,م\,أ(180, 126) = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

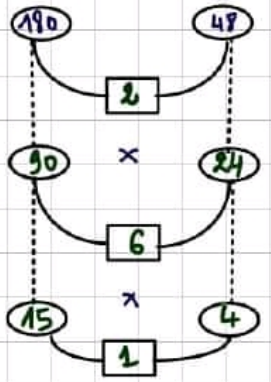
العامل المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين هو جذاء العوامل الأولية المشتركة لهما مع إعطاء كل منها أصغر دليل

الطريقة الثالثة: طريقة المخطط

مثال: باستعمال طريقة المخطط أوجد ق م أ (180 ، 48)

الحل:

لإيجاد ق م أ نتبع المخطط التالي:



وبالتالي:

$ق\,م\,أ(48, 180) = 2 \times 6 \times 1 = 12$

السابعة أساسي

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

1) القسمة الإقليدية:

* تعريف:

هي عملية يراد بها قسمة عدد صحيح طبيعي a يسمى المقسوم على عدد صحيح طبيعي غير منعدم b يسمى القاسم ينتج عنها خارج القسمة q والباقي r ويشترط في الباقي أن يكون أصغر من القاسم.

أي:

المقسوم ← a	b ← القاسم
الباقي ← r	q ← خارج القسمة

ونكتب: $a = b \times q + r$ حيث $r < b$ (الباقي أصغر من القاسم)

* في القسمة الإقليدية يكون الباقي أصغر من القاسم.

مثال:

أجب من الكتابات التالية تمثل قسمة إقليدية للعدد 174 على 16:

أ/ $174 = 16 \times 9 + 30$; ب/ $174 = 16 \times 10 + 14$

أ/ الكتابة $174 = 16 \times 9 + 30$ لا تمثل قسمة إقليدية للعدد 174 على 16 لأن الباقي 30 أكبر من القاسم

ب/ في الكتابة $174 = 16 \times 10 + 14$ تمثل قسمة إقليدية للعدد 174 على 16 لأن الباقي 14 أصغر من القاسم 16

أستاذ الرياضيات
عبدالعزيز بن مرزوق

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

السابعة أساسي

ملاحظة :

معرفة عدد قواسم عدد صحيح طبيعي دون البحث عنها يكفي تفكيك العدد إلى جداء عواملة الأوّليّة ومن ثمّ نقوم بضرب دليل قوة كلّ عامل أوّلي بعد إضافة 1 لكلّ عامل

مثال: حدّد عدد قواسم العدد : $A = 2^2 \times 5 \times 27$

لدينا : $A = 2^2 \times 5^1 \times 3^3$

وبالتالي عدد قواسم العدد A هو :

$(2+1) \times (1+1) \times (3+1)$

$= 3 \times 2 \times 4$

$= 24$

وبالتالي العدد A له 24 قاسمًا.

8) القاسم المشترك الكبر لعددين صحيحين طبيعيين:

تعريف:

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو أكبر قاسم مشترك لهذين العددين ونرمز له بـ :

ق.م.أ(a, b)

ملاحظة:

إذا كان القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين يساوي 1 نقول أن هذين العددين أوليان فيما بينهما

مثال:

* لدينا : $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$ ، $D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$

$D_{28} \cap D_{15} = \{1\}$

إذن : ق م أ(15, 28) = 1 أي 15 و 28 أوليان فيما بينهما.

السابعة أساسي

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

الطرق العملية لإيجاد الم.م.ا لعددين صحيحين طبيعيين

الطريقة الأولي: بالتفكيك إلى جذاء عوامل

مثال: أوجد م.م.أ (90 ، 168)

$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$

$(168, 90)$ أ م م $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$= 8 \times 9 \times 35$

$= 72 \times 35$

$= 2520$

لدينا:

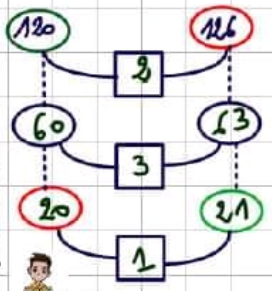
168	2	90	2
84	2	45	3
42	2	15	3
21	3	5	5
7	7	1	
1			

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة بينهما مع إعطاء أكبر دليل قوة لكل منها.

الطريقة الثانية: طريقة المخطط

مثال: أوجد م م أ $(126, 120)$ باستعمال طريقة المخطط.

نعتبر المخطط التالي



إذن:

$(126, 120)$ أ م م $= 120 \times 21 = 126 \times 20$

$= 2520$

$(21, 20)$ أ م م $= 20 \times 21$

$= 420$

$(42, 36)$ أ م ف $= 12$

$(12, 36)$ أ م م $= 36$ مضاعف لـ 12 وبالتالي

ملاحظات:

- إذا كان a قاسما لـ b فإن: (b, a) أ م م $= a \times b$
- إذا كان a مضاعفا لـ b فإن: (b, a) أ م م $= a$ و (b, a) أ م ف $= b$

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

ملاحظة:

* إذا كان عددًا صحيحًا لا آخر فإنه يقبل القسمة عليها
أي: إذا كان a قاسمًا لـ b فإن: b = ق × a (ق ∈ ℤ)

9) المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين:

* يكون عددًا صحيحًا طبيعيًا مضاعفًا لعدد صحيح طبيعي آخر مخالف للصفر إذا كان هذا الأخير قاسمًا للأول.

مثال:

* لدينا: 56 = 8 × 7 إذن العدد 56 مضاعف للعددين 8 و 7.
* العددان 5 و 3 قاسمان للعدد 15 إذن 15 مضاعف للعددين 5 و 3.
* لنكون مجموعة مضاعفات العدد 12 الأصغر من 100:

$\Pi_{12} = \{0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$

يكون عدد صحيح طبيعي مضاعفًا مشتركًا لعددين صحيحين طبيعيين إذا كان مضاعفًا لكل منهما.

* المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين a و b المخالفين للصفر هو أصغر مضاعف مشترك مخالف للصفر لهذين العددين ونرمز إليه بـ م م أ (a ; b)

مثال:

* مضاعفات العدد 4 هي:

$\Pi_4 = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; \ldots\}$

مضاعفات العدد 5 هي:

$M_5 = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; \ldots\}$

المضاعفات المشتركة للعددين 4 و 5 هي:

$\Pi_4 \cap \Pi_5 = \{0; 20; 40; 60; 80; \ldots\}$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين 4 و 5 هو: (المضاعف الأصغر)

م م أ (5 ; 4) = 20

مادة الرياضيات عبدالعزيز بن مرزوق

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

السابعة أساسي

4) قابلية القسمة على 25 :

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلاً للقسمة على 25 إذا كان العدد المتكون من رقم آحاده وعشراته قابلاً للقسمة على 25 أي: 100 أو 25 أو 50 أو 75 .

وباقي قسمته على 25 هو نفس باقي قسمة العدد المتكون من رقم آحاده وعشراته على 25 .

مثال: أكمل تعمير الجدول التالي:

العدد	$\overline{76}$	$\overline{8307}$	$\overline{133456725}$	$\overline{9805722}$
باقي قسمته على 4	0	3	1	0
باقي قسمته على 25	1	7	0	22

تمرين تطبيقي:

حدد الرقمين a و b لكي يصبح العدد $B=\overline{x27y}$ قابلاً للقسمة على $\overline{4}$ و $\overline{9}$ في آن واحد (مقدماً جميع الحلول الممكنة)

لدينا: $B=\overline{x27y}$:

قابلية القسمة على 4 : $B=\overline{x272}$ | $B=x276$

قابلية القسمة على 9 : $B=7272$ | $B=3276$

وبالتالي الإمكانيات هي: $\{7272 ; 3276\}$

السابعة اساسي

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

2) قواسم عدد صحيح طبيعي:

تعريف: يكون عدد صحيح طبيعي b مخالفاً للصفر قاسماً للعدد الصحيح الطبيعي a إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b يساوي 0.

ملاحظة:
* في هاته الحالة نقول أن b هو قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b أو a يقبل القسمة على b.
* 1 هو قاسم لكل عدد صحيح طبيعي.
* كل عدد صحيح طبيعي مخالف للصفر هو قاسم لنفسه و للصفر.

مثال:
* العدد 5 هو قاسم للعدد 105 أو 105 هو مضاعف للعدد 5.
* 1 هو قاسم للعدد 91.
* 91 هو قاسم لنفسه.

لنتذكر:
* يكون عدد صحيح طبيعي قابلاً للقسمة على 2 إذا كان رقم آحاده زوجي أي 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.
* يكون عدد صحيح طبيعي قابلاً للقسمة على 5 إذا كان رقم آحاده 0 أو 5.
* يكون عدد صحيح طبيعي قابلاً للقسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 3.
* يكون عدد صحيح طبيعي قابلاً للقسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9.

3) قابلية القسمة على 4:

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلاً للقسمة على 4 إذا كان العدد المتكون من رقم آحاده وعشراته قابلاً للقسمة على 4.

وباقي قسمته على 4 هو نفس باقي قسمة العدد المتكون من رقم آحاده وعشراته على 4.

السابعة أساسي

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

5) الأعداد الأولية :

تعريف: العدد الأولي هو عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على 1 وعلى نفسه.

ملاحظة:
* 1 هو ليس عدد أولي.
* 2 هو العدد الزوجي والأولي الوحيد.
* لإثبات أن عدد ما ليس أوليا يكفي أن نجد له قاسما مخالفا لواحد ولنفسه.

مثال: علل لماذا كل عدد من الأعداد التالية ليس أوليا:
28 ; 124 ; 94 ; 57 ; 1035 .

* 28 ليس أوليا لأنه يقبل القسمة على 4 و 7
* 124 ليس أوليا لأنه يقبل القسمة على 2
* 94 ليس أوليا لأنه يقبل القسمة على 2
* 57 ليس أوليا لأنه يقبل القسمة على 3
* 1035 ليس أوليا لأنه يقبل القسمة على 5

الأعداد الأولية الأصغر من 100 (غربال إراتستان)

{ 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 }

6) تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جذاء عوامل:

* كل عدد صحيح طبيعي غير أولي مخالف للصفر ولواحد يقبل تفكيكا إلى جذاء عوامل أولية.

تمرين تطبيقي: ما هي من بين المقترحات التالية تلك التي تعبر عن تفكيك إلى جذاء عوامل أولية:

* 12×27 : لا تعبر عن تفكيك إلى جذاء عوامل أولية
* $61 \times 5 \times 13$: تعبر تفكيكا إلى جذاء عوامل أولية
* 93×17 : لا تعبر تفكيكا إلى جذاء عوامل أولية
* $5 \times 5 \times 29$: تعبر عن تفكيك إلى جذاء عوامل أولية
* 47×3 : تعبر عن تفكيك إلى جذاء عوامل أولية

الأستاذ: عبدالعزيز بن مرزوق

قواسم عدد صحيح طبيعي ومضاعفاته

السابعة أساسي

الطريقة العملية لتفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جذاء عوامل أولية :

مثال: تفكيك إلى جذاء عوامل أولية العدد 144

لنا:

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

إذن: $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

ونكتب: $144 = 2^4 \times 3^2$

7) ايجاد مجموعة قواسم عدد صحيح طبيعي:

+ لإيجاد مجموعة قواسم عدد صحيح طبيعي نقوم بتفكيكه إلى جذاء عوامل أولية والتي من خلالها نقوم بجدول بيتاغور لاستنتاج القواسم.

مثال: أوجد مجموعة قواسم العدد 48 : D_{48}

لنا:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

إذن: $48 = 2^4 \times 3^1$

عدد القواسم: $(4+1)\times(1+1) = 5 \times 2 = 10$

+ قواسم 2^4 هي: $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ أي 16, 8, 4, 2, 1

* قواسم 3^1 هي: $3^1, 3^0$ أي 3 و 1

حسب جدول بيتاغور:

16	8	4	2	1	x
16	8	4	2	1	1
48	24	12	6	3	3

$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$

عدد القواسم هو 10 قواسم