Exercice 4 : (7 points)

Soit OAB un triangle équilatéral et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et passant par A . On désigne par I le point défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. a) Montrer que I est la barycentre des pondérés $(A,1)$ et $(B,-3)$. Faire une figure.

   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BO}$.

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $2\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MO}$.

   a) Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$.

   b) Construire $O'=f(O)$ puis $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par f.

3. Soit (Δ) la parallèle à la droite (AB) passant par O. (Δ) coupe $(\mathscr{C}')$ en D et E tel que $D\in[OE]$.

   a) Montrer que $f((AB))=\Delta$.

   b) Montrer que f(B) = D et f(A) = E.

   c) On appelle H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et H' le projeté orthogonal de O' sur la droite (DE).

   Montrer que OH = O'H'.

Lycée IBN KHALDOUN - RADES	CLASSE : $2^{ème}$ Sciences 2
DEVOIR DE SYNTHESE N°1	EPREUVE : **MATHEMATIQUES**
Mr ABIDI Farid	Durée : 2h — Date : 11-12-2009

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » aux propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. L'équation $-x^2 + 2009x + 10^{10} = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes x_1 et x_2 vérifiant $x_1 + x_2 = 2009$
2. Pour tout x réel, $-2x^2 + 3x - 4 \geq 0$.
3. (-2) est un zéro du polynôme $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 10$.
4. A étant un chiffre. Alors le nombre 1a23a0748 est divisible par 11.
5. Si le nombre 341• est divisible par 2 et 4 alors le chiffre • est 6 .
6. Soit a et b deux chiffres. Alors le nombre 1100 a + 1925 b est divisible par 11 et 25.

Exercice 2: (5 points)

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

   b) Factoriser alors $2x^2 + 5x + 3$ sous la forme $(ax + b)(x + c)$.

2. Soit f la fonction a variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{4}{2x^2 + 5x + 3} + \dfrac{x + 5}{2x + 3}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

   b) Etudier le signe de f(x).

   c) Résoudre l'inéquation f(x) > 0.

Exercice 3 : (5 points)

n désigne un entier naturel. On pose $a = 2n + 1$ et $b = n + 3$.

1. a) Calculer $2b - a$.

   b) Montrer que dans $\mathbb{N}$: si d divise a et b alors d = 1 ou d = 5.

2. a) Montrer que si 5 divise a et b alors 5 divise n – 2.

   b) Démontrer que si 5 divise n – 2 alors 5 divise a et b .

3. Déterminer alors toutes les valeurs de n pour lesquelles 5 divise a et b.

Correction

Exercice 1 :

1. Vrai. ; 2. Faux. ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Vrai

Exercice 2:

1. a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+5x+3=0$:

On a : $2-5+3=0$ donc les racines sont : -1 et $-\dfrac{3}{2}$.

b) Pour tout x réel, $2x^2+5x+3=2(x+1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=(x+1)(2x+3)$.

2. Soit f la fonction a variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{4}{2x^2+5x+3}+\dfrac{x+5}{2x+3}$.

a) f(x) existe $\Leftrightarrow 2x^2+5x+3\neq 0$ et $2x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -\dfrac{3}{2}$.

Donc l'ensemble de définition de f est $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2},-1\right\}$.

b) Réduisons f(x) au même dénominateur. Le dénominateur commun de f(x)
$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$.
Il en résulte que pour tout x de D,

$$f(x)=\frac{4}{(x+1)(2x+3)}+\frac{x+5}{2x+3}=\frac{4+(x+1)(x+5)}{(x+1)(2x+3)}=\frac{x^2+6x+9}{(x+1)(2x+3)}=\frac{(x+3)^2}{(x+1)(2x+3)}.$$

Dressons le tableau de signe de f(x) :

x	$-\infty$		-3		$-\dfrac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$(x+3)^2$		+	0	+		+		+	
$2x^2+5x+3$		+		+		-		+	
f(x)		+	0	+		-		+	

c) L'ensemble de solutions de l'inéquation f(x) > 0 est $\left]-\infty,-3\right[\cup\left]-3,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$.

Exercice 3 :

1. a) $2b-a=2(n+3)-(2n+1)=2n+6-2n-1=5$.

   b) Si d divise a et b alors d divise $(-1)a+2b=2b-a=5$. Or les seuls diviseurs de 5 sont 1 et 5. Par conséquent $d=1$ et $d=5$.

2. a) si 5 divise a et b alors 5 divise $a-b=n-2$.

   b) 5 divise $n-2$ équivaut à il existe un entier q tel que $n-2=5q$ d'où $n=5q+2$.

Or $a=2n+1=2(5q+2)+1=10q+5=5(2q+1)$ donc 5 divise a.

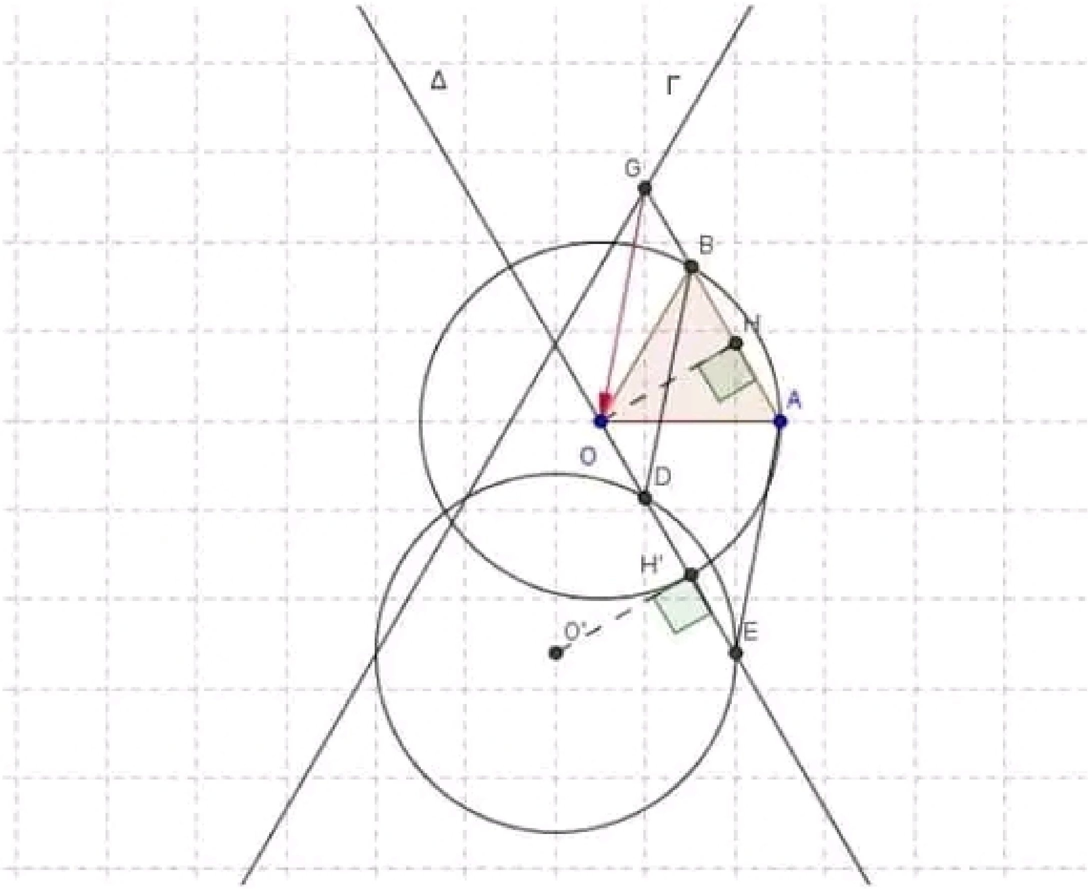
De plus $b=n+3=(5q+2)+3=5q+5=5(q+1)$ donc 5 divise b.

3. 5 divise a et b équivaut à 5 divise $n-2$ équivaut à il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que $n=5q+2$.

Ainsi, les valeurs de n pour lesquelles 5 divise a et b sont :

$5\times0+2=2$, $5\times1+2=7$, $5\times2+2=12$, $5\times3+2=17$,...

Exercice 4 :



1. a) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ équivaut à $2\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ équivaut à $2\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}$ équivaut à $\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ équivaut à $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ ou encore $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$. Par conséquent, G est la barycentre des pondérés $(A,1)$ et $(B,-3)$.

   b) On sait que pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$.

   D'autre part, $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BO}$ équivaut à $-2\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BO}$.

   Il en résulte que l'ensemble (Γ) des points M tels que $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BO}$ est la parallèle à la droite (BO) passant par G.

4. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M′ tel que $2\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MO}$.

   a) $2\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MO}=-2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MO}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MO}\right)=2\overrightarrow{GO}$. D'où $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{GO}$.

   Par suite , f est la translation de vecteur $\overrightarrow{GO}$.

   b) $O'=f(O)$ équivaut à $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{GO}$ ou encore O′ est le symétrique de G par rapport à O.

   $(\mathscr{C}')=f(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O′ et de même rayon que le cercle $(\mathscr{C})$.

5. (Δ) la parallèle à la droite (AB) passant par O coupe $(\mathscr{C})$ en D et E tel que $D\in[OE]$.

   a) f((AB)) est la parallèle à la droite (AB) passant par f(G) = 0 donc $f\left((AB)\right)=\Delta$.

   b) On sait que la droite (AB) coupe le cercle en A et B donc $f\left((AB)\right)=\Delta$ coupe le cercle $(\mathscr{C}')$ en f(A) et f(B). Comme $G\in[AG]$ alors $f(G)\in f\left([AG]\right)=[f(A)O]$.

   Par suite, f(B) = D et f(A) = E.

   c) On appelle H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et H′ le projeté orthogonal de O′ sur la droite (DE).

Posons f(H) = H″ ,

(OH) est la perpendiculaire à la droite (AB) en H donc f((OH)) = $(O'H'')$ est la perpendiculaire à (Δ) en f(H) = H″. Or $(O'H')$ est la perpendiculaire à la droite (Δ) en H′, par conséquent, $H''=H'$.

On a ainsi : f(O) = O′ et $f(H)=H'$ donc OH = O′H′.