UNE CORRECTION POSSIBLE du devoir de contrôle n°1 $3^{ème}$ Sc Techniques de Me Karboul du 01 /11 / 14

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1 (6 pts)

A)

1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ la réponse exacte est **a) $D_f = \mathbb{R}$** voici l'explication

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, 1 + x^2 \neq 0$ par suite $D_f = \mathbb{R}$

2) $g(x) = \sqrt{5-2x}$ la réponse exacte est **b) $D_g = \mathbb{R}\left]-\infty\,, \frac{5}{2}\right]$** voici l'explication

$x \in D_g \Leftrightarrow 5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow D_g = \mathbb{R}$

3) $h(x) = \frac{x}{|x|+1}$ la réponse exacte est **b) h est une fonction impaire** voici l'explication

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $|x| + 1 > 0$ alors $|x| + 1 \neq 0$ alors $D_h = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$ $h(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -h(x)$ alors h est une fonction impaire

B) Soit $k(x) = |5 - 2x| + x\,;\; x \in \mathbb{R}$

1) $5 - 2x = 0$ alors $x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$	$+$	0	$-$
$\lvert 5-2x \rvert$	$5-2x$		$-5+2x$

si $x \in \left]-\infty\,, \frac{5}{2}\right]$ $k(x) = |5-2x| + x = 5 - 2x + x = 5 - x$

si $x \in \left[\frac{5}{2}\,, +\infty\right[$ $k(x) = |5-2x| + x = -5 + 2x + x = 3x - 5$

conclusion $k(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x \in \left]-\infty\,, \frac{5}{2}\right] \\ 3x - 5 & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}\,, +\infty\right[\end{cases}$

2) $k(0) = 5$ $k\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$ $k(4) = 7$

La représenter graphique de k est

la réunion de deux demi-droites

3) $k(x) = 4$ $x = 1$ ou $x = 3$ $S_{\mathbb{R}} = \{1\,, 3\}$

Exercice 2 (5 pts)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^3 + 3x + 5 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ \frac{\sqrt{2-x}-1}{x^2-1} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{3x^2-5}{2x^4+x^2+1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 - 2x^3 + 3x + 5 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 5 = 5$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2-x}-1}^{\sqrt{3}-1}}{\underbrace{x^2-1}_{0^-}} = -\infty$$

$x^2 - 1 = 0 \quad x = -1 \quad$ ou $\quad x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{2-x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \lim_{x\to1^-} \frac{-x+1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-1}{\left(\underbrace{x+1}_{2}\right)\left(\underbrace{\sqrt{2-x}+1}_{2}\right)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\overbrace{3x^2-5}^{-2}}{\underbrace{2x^4+x^2+1}_{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5}{2x^4+x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x^2} = 0$$

Exercice 3 (5 pts)

a) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) = -\frac{127\pi}{4} + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \quad = -\frac{(31\times4+3)\pi}{4} + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{-31\times4\pi-3\pi}{4} + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} = -31\pi - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$= -31\pi - \frac{3\pi}{4} - \pi + \pi + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$= -32\pi - \frac{3\pi}{4} + \pi + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + \pi + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

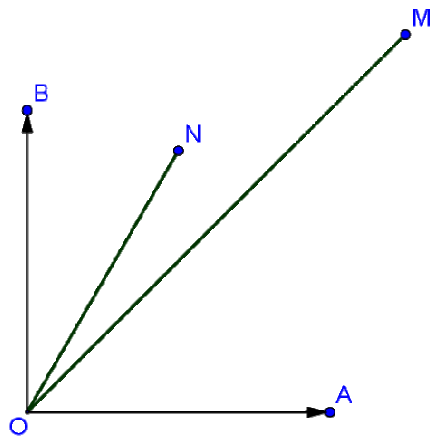
$$= \frac{\pi}{4} + k2\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{ON}}\right) = \frac{49\pi}{3} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{(16\times3+1)\pi}{3} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= 16\pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$



c) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{ON}}\right) + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= -\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{ON}}\right) + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $\left(\widehat{\overrightarrow{ON}\,,\overrightarrow{OB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{ON}\,,\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}\right) + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= -\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{ON}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}\right) + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

<u>Exercice 3</u> (4 pts)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ona :

$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\left[\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right] = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$= \sqrt{3}\cos\left(2\frac{x}{2}\right) - \sin x = \sqrt{3}\left(2cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - \sin x = 2\sqrt{3}\,cos^2\frac{x}{2} - \sin x - \sqrt{3} = f(x)$

2) $f\left(\frac{26\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{26\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{(8\times3+2)\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6} = -2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$f\left(\frac{117\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{117\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{118\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{(19\times6+4)\pi}{6}\right) = 2\cos\left(19\pi + \frac{4\pi}{6}\right)$

$= 2\cos\left(19\pi + \pi - \pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(20\pi - \pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$