

Lycée Pilote Kebili Lycée Pilote B. deTunis	Devoir de Contrôle N°2	M ^r Ammar Bouaila M ^r Trabelsi Chokri
25/ 11 / 2022	Mathématiques	Durée: 45 minutes

Exercice n°1 (4 points) Les questions 1° ; 2 et 3° / sont indépendantes.

1°/ Comparer les nombres a et b tels que $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} - 2$ et $b = \sqrt{35}$

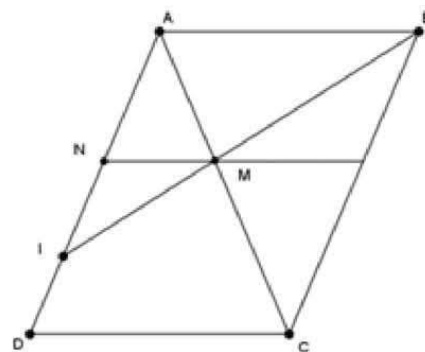
2°/ On donne la somme $S = \frac{2023}{100001} + \frac{2022}{10001} + \frac{2021}{1001} + \frac{2023}{1,00001} + \frac{2022}{1,0001} + \frac{2021}{1,001}$

- a) Soit n un entier naturel. Vérifier que $\frac{1}{1+10^{-n}} + \frac{1}{1+10^n} = 1$
- b) En déduire la valeur de la somme S

3°/ Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.

- N est un point du côté [AD].
- La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe la diagonale [AC] en M
- la droite (BM) coupe la droite (AD) en I.

Montrer que $\frac{NI}{AI} = \frac{AN}{AD}$



Exercice n°2 (8.75 points)

1°/ Soit $a = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{54}^{-1}}{(5\sqrt{3})^{-1}} + \frac{2\sqrt{10} - 10}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ et $b = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{48}}{\sqrt{27}} - \frac{5^{-2}}{\sqrt{5}^{-5}}$

a) Montrer que $a = 5 + 2\sqrt{5}$ et $b = 2 - \sqrt{5}$

b) Montrer que $ab = -\sqrt{5}$

c) Déduire $\sqrt{\frac{a^4 + b^{-6}}{25b^2 + 1}} = -b^{-3}$

2°/ a) Montrer que pour tout réel non nul x ; $\frac{2x-1}{x^2} \leq \frac{2x}{x^2+1}$

c) Comparer alors $\frac{3-2\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$ et $\frac{4-2\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$

b) Ranger dans l'ordre croissant les nombres ; $\frac{2a-1}{a^2}$; $\sqrt{\frac{2a-1}{a^2}}$; $\left(\frac{2a-1}{a^2}\right)^2$ et $\sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}$

Exercice n°3 (7,25 points)

Soit ABCD un parallélogramme.

1°/ a) Placer le point I du segment [AB] telque $AI = \frac{2}{5}AB$

b) Construire en justifiant le point J du segment [CD] telque $\frac{JC}{JD} = \frac{2}{3}$.

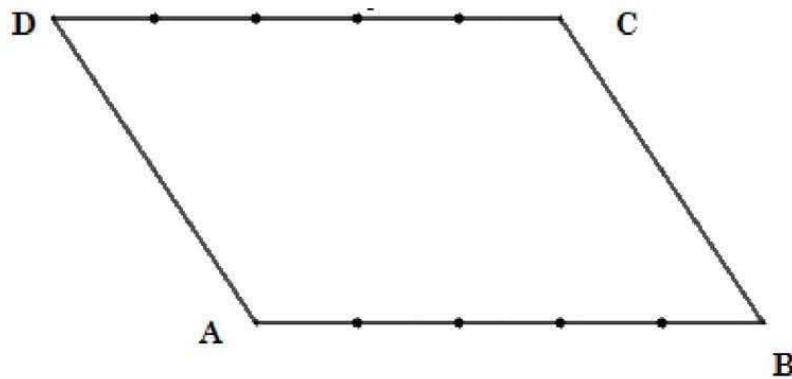
2°/ La droite (AJ) coupe respectivement (BD) en K et (BC) en L

a) Comparer les rapports $\frac{KL}{KA}$ et $\frac{KB}{KD}$.

b) En déduire que $KA^2 = KL \cdot KJ$.

3°/ a) Justifier que $\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5}$.

b) Montrer alors que les droites (AL) et (CI) sont parallèles.



Exercice 1

1/ Pour comparer a et b , on compare $a+2$ et $b+2$

$$a+2 = \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad \text{et} \quad b+2 = \sqrt{35} + 2$$

$$(a+2)^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 = 5 + 2\sqrt{35} + 7 = 12 + 2\sqrt{35}$$

$$(b+2)^2 = (\sqrt{35} + 2)^2 = 35 + 4\sqrt{35} + 4 = 39 + 4\sqrt{35}$$

D'où $a+2 < b+2$, ainsi $a < b$

$$\begin{aligned} 2/a) \quad \frac{1}{1+10^{-n}} + \frac{1}{1+10^n} &= \frac{10^n}{10^n(1+10^{-n})} + \frac{1}{1+10^n} \\ &= \frac{10^n}{10^n+1} + \frac{1}{1+10^n} = \frac{1+10^n}{1+10^n} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad S &= \frac{2023}{100001} + \frac{2022}{10001} + \frac{2021}{1001} + \frac{2023}{1,00001} + \frac{2022}{1,0001} + \frac{2021}{1,001} \\ &= \frac{2023}{1+10^5} + \frac{2022}{1+10^4} + \frac{2021}{1+10^3} + \frac{2023}{1+10^{-5}} + \frac{2022}{1+10^{-4}} + \frac{2021}{1+10^{-3}} \\ &= 2023 \left(\frac{1}{1+10^5} + \frac{1}{1+10^{-5}} \right) + 2022 \left(\frac{1}{1+10^4} + \frac{1}{1+10^{-4}} \right) + 2021 \left(\frac{1}{1+10^3} + \frac{1}{1+10^{-3}} \right) \\ &= 2023 + 2022 + 2021 = 6066 \end{aligned}$$

3/ Dans le triangle ADC :

$$\left. \begin{array}{l} N \in (AD) \\ M \in (AC) \\ (MN) \parallel (DC) \end{array} \right\} \text{D'après Thalès}$$
$$\boxed{\frac{AN}{AD} = \frac{MN}{DC}}$$

Dans le triangle IAB :

$$\left. \begin{array}{l} N \in (AI) \\ M \in (IB) \\ (MN) \parallel (AB) \end{array} \right\} \text{D'après Thalès :}$$
$$\boxed{\frac{IN}{IA} = \frac{MN}{AB}}$$

Comme $DC = AB$ alors on a :

$$\boxed{\frac{IN}{IA} = \frac{AN}{AD}}$$

$$b) a \cdot b = (5 + 2\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5}(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5}(2^2 - \sqrt{5}^2) = 5(4 - 5)$$

$$= \boxed{-\sqrt{5}}$$

$$c) a b = -\sqrt{5} \quad \text{sig } a = -\frac{\sqrt{5}}{b}$$

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^{-6}}{25b^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\left(-\frac{\sqrt{5}}{b}\right)^4 + b^{-6}}{25b^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{25}{b^4} + \frac{1}{b^6}}{25b^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{25b^2 + 1}{b^6}}{25b^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{25b^2 + 1}}{b^6(\cancel{25b^2 + 1})}} = \sqrt{\frac{1}{b^6}} = \sqrt{\frac{1}{(b^3)^2}}$$

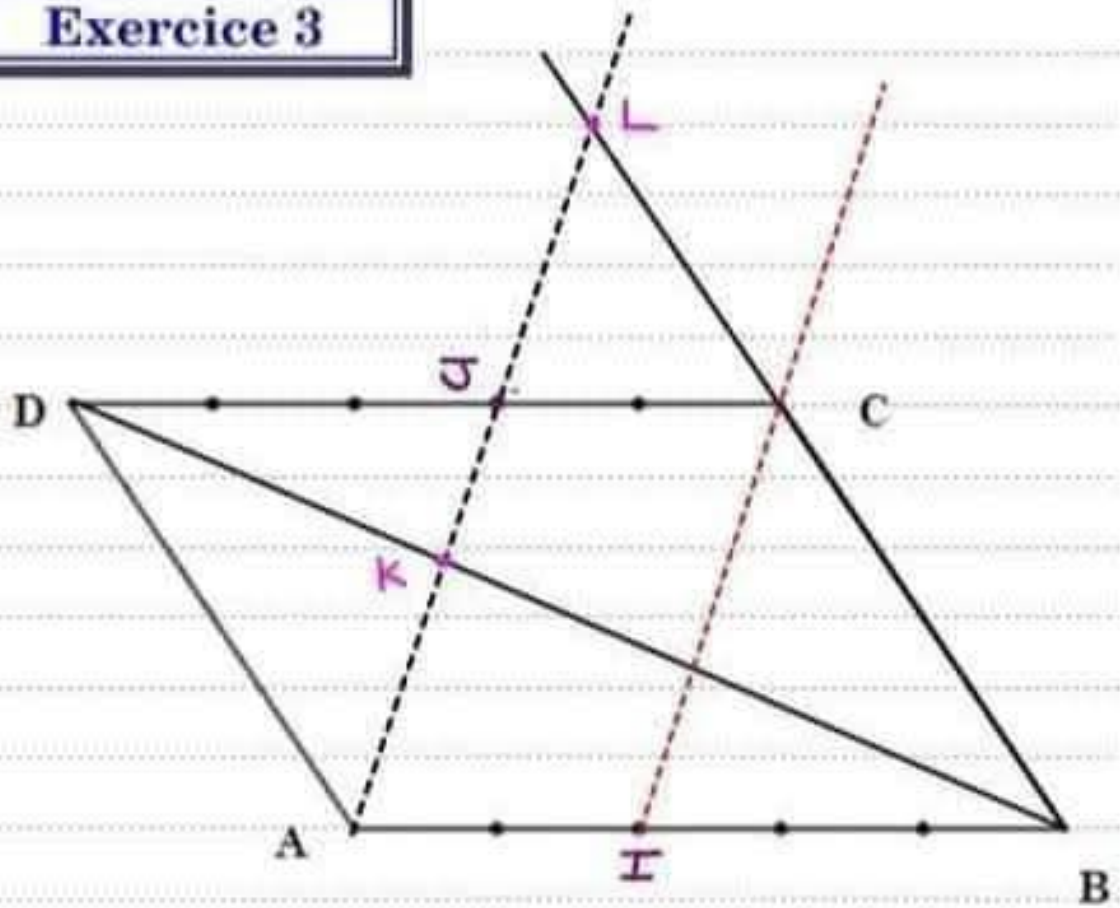
$$= \sqrt{\left(\left(\frac{1}{b}\right)^3\right)^2} = \left|\left(\frac{1}{b}\right)^3\right|$$

Comme $b = 2 - \sqrt{5} < 0$ alors $\left(\frac{1}{b}\right)^3 < 0$

d'où $\left|\left(\frac{1}{b}\right)^3\right| = -\frac{1}{b^3} = -b^{-3}$

D'où le résultat.

Exercise 3



1/a) $AI = \frac{2}{5} AB$

b) $\frac{JC}{JD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3JC = 2JD$

$\Rightarrow 3(DC - DJ) = 2DJ \Rightarrow 3DC - 3DJ = 2DJ$

$\Rightarrow 3DC = 5DJ \Rightarrow DJ = \frac{3}{5} DC$

2/a) (AL) et (BD) se coupent en K

tel que (AD) // (BL) car (AD) // (BC) et L ∈ (BC)

donc d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{KL}{KA} = \frac{KB}{KD} = \frac{BL}{AD} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{KL}{KA} = \frac{KB}{KD}} \quad (1)$$

b) (DB) et (AJ) se coupent en K tel

que (DJ) // (AB), donc d'après le théorème

$$\text{de Thalès : } \frac{KA}{KJ} = \frac{KB}{KD} = \frac{AB}{DJ} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{KA}{KJ} = \frac{KB}{KD}} \quad (2)$$

d'après (1) et (2) on obtient: $\frac{KL}{KA} = \frac{KA}{KJ}$

et par suite $\boxed{KA^2 = KL \cdot KJ}$

3/a) Dans le triangle LAB:

J ∈ (AL), C ∈ (BL) et (CJ) // (AB)

alors d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{LJ}{LA} = \frac{LC}{LB} = \frac{JC}{AB}$$

$$\frac{LC}{LB} = \frac{JC}{AB} = \frac{\frac{2}{3}DC}{AB} = \frac{\frac{2}{5}DC}{DC} = \frac{2}{5}$$

$$\text{alors } 5LC = 2LB$$

$$\text{sig } 5(BL - BC) = 2BL$$

$$\text{sig } 5BL - 5BC = 2BL$$

$$\text{sig } 3BL = 5BC \quad \text{sig } \boxed{\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5}}$$

b) (BL) et (BA) se coupent en B

C ∈ (BL) et I ∈ [BA], comme

$$\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5} = \frac{BI}{BA}, \text{ d'après la réciproque}$$

de Thalès on a $\boxed{(CI) \parallel (AL)}$

$$c) \frac{BC}{BL} = \frac{BI}{BA} = \frac{IC}{AL} = \frac{3}{5}$$

donc BAL est un agrandissement

du triangle BCI à l'échelle $\frac{5}{3}$

also $A_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 A_1$ donc $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$