Exercice1

1) $f(x)=x^5-5x^2+2-\frac{3}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^6}{6}-5\frac{x^3}{3}+2x+\frac{3}{x}+k\,,k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+k,k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=(2x-1)(x^2-x-4)^8$

f est continue sur (fonction polynôme)

Donc f admet une primitive F sur

On a : $f(x)=(x^2-x-4)'(x^2-x-4)^8$

Donc $F(x)=\frac{(x^2-x-4)^9}{9}+k,k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$

f Continue sur $[0,\infty[\ \Rightarrow f$ admet une primitive sur $[0,\infty[$ et $f(x)=x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2$

$=x-\sqrt{x}-2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+k\ ;k\in IR$

5) $f(x)=(x^2-1)(x^3-3x+5)$

Posons $U(x)=x^3-3x+5$

On a $U'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

$\Rightarrow x^2-1=\frac{1}{3}U'(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}U'(x)U(x)$

f Continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$

et $F(x)=\frac{1}{3}\frac{U^2(x)}{2}+k,k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}(x^3-3x+5)^2+k,k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\frac{1}{4}\frac{(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

$=\frac{1}{4}\frac{(4x^2+4x+5)'}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\quad=\frac{1}{2}\frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$

Avec $U(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$

Or $4x^2+4x+5>0$ car $\Delta=16-80<0$

(Ou bien: $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$)

Donc $F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2+4x+5})+k;k\in IR_+$

7) $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$

f Fonction rationnelle $\Rightarrow f$ continue sur $Df=\mathbb{R}$

Car : $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$

(Ou bien on a : $\Delta=4-20<0$)

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et on a

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+5)'}{(x^2+2x+5)^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{(U(x))^2}\right)$

Avec $U(x)=x^2+2x+5$

$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)}+k,k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=(2x+1)^3$: f polynôme

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ .Posons $U(x)=2x+1$

On a $U'(x)=2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}U'(x)U(x)^3$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\frac{U(x)^4}{4}+k,k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{U(x)^4}{8}+k,k\in\mathbb{R}$

$=\frac{(2x+1)^4}{8}+k$

9) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$, continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

$F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+k\,,k\in\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\sqrt{x^2-1})$

On a : $x^2-1>0$ pour $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,=I$

Posons $U(x)=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow U'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$x\mapsto U(x)$ est continue sur I et $U(I)=\,]0,+\infty[$

$\cos(X)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{x^2-1})$ est continue sur I.

$x \mapsto \dfrac{x}{U(x)}$ est continue sur I. $\Rightarrow f$ est continue sur I

(Produit de deux fonctions continues).

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur I et f à la forme $x \mapsto U'(x)\times\cos[U(x)]$

$F(x)=\sin(\sqrt{x^2-1})+k, k\in□$.

11) $f(x)=\cos x\sin^3 x$. continue sur □

(Produit de deux fonctions continues sur□).

$f(x)=(\sin x)'(\sin x)^3$.

$F(x)=\dfrac{1}{4}\sin^4 x+k, k\in□$.

12) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1+x^3\right)'}{\sqrt{1+x^3}}$

On a $x^3+1=(x+1)(\underbrace{x^2-x+1}_{\succ 0 \text{ car } \Delta\prec 0})$

$x^3+1\succ 0$ *pour* $x+1\succ 0 \Rightarrow x\succ -1$

Remarque : primitive de $\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ est $2\sqrt{U}+c$.

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur $]-1,+\infty[$ et

$F(x)=\dfrac{1}{3}*2\sqrt{1+x^3}+k, k\in□$.

$F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+k, k\in□$.

Exercice2

$f(x)=4x^3$.

$$x\mapsto\begin{cases}F(x)=x^4+2\rightarrow si(x\geq 0)\\ F(x)=x^4-2\rightarrow si(x<0)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=-2\neq F(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=2\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow F$ n'est pas continue sur □

F est discontinue en $0\Rightarrow F$ est discontinue sur □ $\Rightarrow F$ n'est pas une primitive de f sur□ .

Exercice3

$f(x)=(\cos x)\times(2\sin x-1)$.

f est continue sur □ (produit de deux fonctions continues)

$\Rightarrow f$ admet au moins une primitives sur□ .

On a : $f(x)=(\sin x)'(2\sin x-1)$

$=\dfrac{1}{2}(2\sin x-1)'(2\sin x-1)$

$F(x)=\dfrac{1}{4}(2\sin x-1)^2+k, k\in□$

$F(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{4}(2\sin\dfrac{\pi}{2}-1)^2+k=\dfrac{1}{4}+k=0$

$\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$

Donc $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{4}(2\sin x-1)^2-\dfrac{1}{4}, x\in□}$

Exercice4

$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2, x\in□$

1) on a : $\cos^3 x=\cos x(\cos^2 x)$

$=\cos x(1-\sin^2 x)$

$=\cos x-\cos x\sin^2 x$

$\Rightarrow f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x-3\cos x+2$

$=-\cos x\sin^2 x-2\cos x+2$

2) $f(x)=-(\sin x)'\sin^2 x-2(\sin x)'+2$

$\Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x+2x+k, k\in□$.

$F(-\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{3}(-1)^3-2(-1)+2(-\dfrac{\pi}{2})+k=0$

$=\dfrac{1}{3}+2-\pi+k$

$=\dfrac{7}{3}-\pi+k=0\Rightarrow k=\pi-\dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x+2x+\pi-\dfrac{7}{3}$

Exercice5

$f(x)=5\sin x+3\sin^3 x . x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=5\cos x+9\cos x\sin^2 x.$

$f''(x)=-5\sin x+9(-\sin^3 x+2\cos^2 x\sin x)$

$\Rightarrow 3f(x)+f''(x)=10\sin x+18\sin^2 x\cos x$

$\Rightarrow 3f(x)=-f''(x)+10\sin x+6\times(3\sin x)\sin^2 x$

Passons à la primitive :

$3F(x)=-f'(x)-10\cos x+6\sin^3 x+k, k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{3}f'(x)-\frac{10}{3}\cos x+2\sin^3 x+k, k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow F(x)=-\frac{5}{3}\cos x-3\cos x\sin^2 x-\frac{10}{3}\cos x+2\sin^3 x+k, k\in\mathbb{R}$

Donc on aura :

$\boxed{F(x)=-5\cos x-3\cos x\sin^2 x+2\sin^3 x+k, k\in\mathbb{R}}$

Exercice6

$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^2}, x\in\mathbb{R}-\{1\}$

1) $x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$=x-1+\frac{1}{(x-1)^2}$$

D'où $b=-1$ et $a=c=1$

<u>2éme méthode</u> :

$$ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-3\Rightarrow b=-1 \\ a-2b=3 \\ b+c=0\Rightarrow b=-c=-1 \end{cases}$$

Donc $b=-1$ et $a=c=1$

$$\boxed{\Rightarrow f(x)=x-1+\frac{1}{(x-1)^2}\ \forall x\in IR-\{1\}}$$

2) f continue sur $]1,+\infty[$ donc f admet au moins une primitive F telle que :

$$\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x-1}+k, k\in\mathbb{R}}, x\in]1,+\infty[$$

Exercice7

$f(x)=\sin 3x\times\cos x \qquad x\in\mathbb{R}$

1) On sait que :

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 4x+\sin 2x=2\sin\frac{6x}{2}\cos\frac{2x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\sin 4x+\sin 2x]=\sin 3x\cos x$$

2) f continue sur IR donc f admet une unique primitive F qui s'annule en 0.et on a :

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+k \ et\ F(0)=0$$

Or $F(0)=-\frac{3}{8}+k\Rightarrow k=\frac{3}{8}$

D'où $\boxed{F(x)=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}}, x\in\mathbb{R}$

Exercice8

Partie A :

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}_+$

1) f continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f admet une unique primitive F qui prend la valeur 0 en.0 ;

$$F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}_+$$

2) $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[: K(x)=F(tgx)$

a) Posons $U(x)=tgx$ (fonction tangente)

On a : tgx est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

et $U\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ et F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

K est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$K'(x)=U'(x).F'(U(x))$$
$$=(1+tg^2x)f(tgx)$$
$$=(1+tg^2x)\times\frac{1}{1+tg^2x}=1$$
$$\Rightarrow K'(x)=1;\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

b) */ $K'(x)=1\Rightarrow K(x)=x+k$

Or $K(0)=F(tg0)=F(0)=0$, par suite $k=0$.

Donc $\boxed{K(x)=x}; x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

*/ $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=F\left(tg\dfrac{\pi}{3}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}}$$

*/ $F(1)=F\left(tg\dfrac{\pi}{4}\right)=K\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{F(1)=\frac{\pi}{4}}$$

3) $x\in\mathbb{R}_+ ; U(x)=F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

a/ $x\mapsto g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $g([0,+\infty[)=]0,1]$ .et F dérivable sur $]0,1]\subset\mathbb{R}_+$.

$\Rightarrow F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ Dérivable sur $\mathbb{R}_+$

*/ $x\mapsto h(x)=\dfrac{x}{x+2}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h([0,+\infty[)=[0,1[$ .et F dérivable sur $[0,1[$

Donc $F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :

U est dérivable sur $[0,+\infty[$

$$U'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'\times F'\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{x}{x+2}\right)'\times F'\left(\frac{x}{x+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1+x}\right)'\times f\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{x}{x+2}\right)'\times f\left(\frac{x}{x+2}\right)$$
$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{(1+x)^2+1}+\frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$
$$=-\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{2}{2x^2+4x+4}$$
$$=-\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2+2x+2}=0\Rightarrow\boxed{U'(x)=0; x\in\mathbb{R}_+}$$

b) On a : $U'(x)=0 \Rightarrow U(x)=cte=U(0)$

Or $U(0)=F(1)+F(0)=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$

Donc : $\forall x\in[0,+\infty[: \boxed{U(x)=\frac{\pi}{4}}$

On a : $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=U(1)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}}$

Partie B :

$g(x)=-f(x)$

1) $f(x)=-g(x)$ donc d'après 1) partie A

$(-g(x))$ admet une unique primitive **G** sur $[0,+\infty[$ telle que $G(0)=0$.

Comme F est une primitive de $f=-g$

Alors $-F$ est une primitive de g donc $\boxed{G=-F}$

2) $T(x)=G(cotgx)$

a)*/ $x\mapsto cotgx$ est dérivable pour $x\neq k\pi$; k∈□

Donc dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$cotg\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,+\infty[$ et G dérivable sur $[0,+\infty[$.

D'où T est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/

$$T'(x)=(cotgx)'\times G'(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times g(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times(-f(cotgx))$$
$$=-(1+cotg^2x)\times\frac{-1}{1+cotg^2x}=1$$

Donc $T'(x)=1$

b) $T'(x)=1 \Rightarrow T(x)=x+cte$

Or $T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+cte=G\left(cotg\frac{\pi}{2}\right)=G(0)=0$

$\Rightarrow cte=-\frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{T(x)=x-\frac{\pi}{2}}$; $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/ $G(1)=G\left(cotg\frac{\pi}{4}\right)=T\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{G(1)=-\frac{\pi}{4}}$

*/ $G(\sqrt{3})=G\left(cotg\frac{\pi}{6}\right)=T\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{G(\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}}$

3) on pose $V(x)=G\left(\frac{1}{1+x}\right)+G\left(\frac{x}{x+2}\right)$, $x\in[0,+\infty[$

a) */ $x\mapsto\frac{1}{1+x}=$ h(x) est dérivable sur $]0,+\infty[$

et h $(]0,+\infty[)=]0,1]$ et G dérivable sur $]0,1]$. $\Rightarrow G\left(\frac{1}{1+x}\right)$ Dérivable sur $[0,+\infty[$.

*/ $x\mapsto\frac{x}{x+2}=$ $h_1(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

et h_1 $([0,+\infty[)=[0,1[$ et G dérivable sur $[0,1[$

Donc $G\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion :

V est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$V'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'G'\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{x}{x+2}\right)'G'\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x)^2+1}-\frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2}{2x^2+4x+4}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x^2+2x+2)}=0 \Rightarrow V'(x)=0$$

b)

$$V(0)=G(1)+G(0)=G(1)+=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x)=-\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{1}{4}\right)+G\left(\frac{3}{5}\right)=V(3)=-\frac{\pi}{4}$$

Exercice 9

$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}, x\in\left]0,\pi\right[$

1) $\sin x\neq 0$ et dérivable sur $\left]0,\pi\right[$

$\Rightarrow f$ Dérivable sur $\left]0,\pi\right[$ et $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$

Le signe de f' est celui de $-\cos x$.

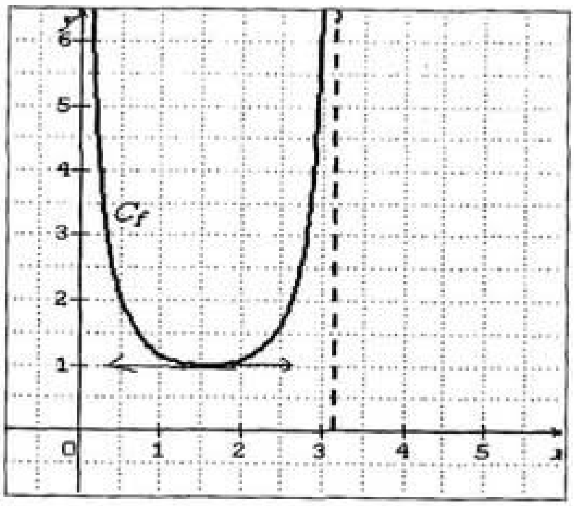
T.V :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^-}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Courbe de f :



2) g la restriction de f à $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $J=g\left(\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[\right)=\left[1,+\infty\right[$.

b) g est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ et

$g'(x)\neq 0, \forall x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[\ \Rightarrow\ g^{-1}$ Dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$.

[g^{-1} Non dérivable a droite en 1 car $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$]

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{-\dfrac{\cos\left(g^{-1}(x)\right)}{\sin^2\left(g^{-1}(x)\right)}}$$

$$=-\frac{\sin^2\left(g^{-1}(x)\right)}{\cos\left(g^{-1}(x)\right)}$$

Or $g\circ\left(g^{-1}\right)(x)=\dfrac{1}{\sin g^{-1}(x)}=x\Rightarrow \sin g^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$

Et on a : $\cos g^{-1}(x)=\sqrt{1-\sin^2 g^{-1}(x)}$

Donc : $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

$$(g^{-1})'(x)=-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=-\frac{1}{x^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}$$

d'où : $(g^{-1})'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},x\in]1,+\infty[$

c) $K(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est continue sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

$\Rightarrow K$ admet une primitive F sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et

$(g^{-1})'(x)=-K(x)\Rightarrow K(x)=-(g^{-1})'(x)$

Donc : $\boxed{F(x)=-g^{-1}(x)+cte}$

Exercice 10

$U(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1},t\in\mathbb{R}$

$g(x)=f\left(\frac{1+tgx}{2}\right),x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1) $x\mapsto\frac{1+tgx}{2}=V(x)$ est dérivable

sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $V\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$

et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) $g'(x)=\left(\frac{1+tgx}{2}\right)'f'\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$

$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\times U\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$

$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\frac{(1+tgx)^2}{4}-2\left(\frac{1+tgx}{2}\right)+1}\right)$

$=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x+2tgx-2-2tgx+2}=1$

$\Rightarrow g(x)=x+b,b\in\mathbb{R}$

Donc g est une application affine (de la forme : $ax+b$)

3) $f(1)-f(0)=?$

On a $tg\frac{\pi}{4}=1$ et $tg(-\frac{\pi}{4})=-1$

Donc $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(1)$ et $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f(0)$

$f(1)-f(0)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)-g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\frac{\pi}{4}+b\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+b\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{f(1)-f(0)=\frac{\pi}{2}}$

Exercice 11

$x\in[0,\pi]$

$f(x)=3\sin x-2\sin^3x$

1) $F(x)=a\cos x+b\cos^3x$

$F'(x)=-a\sin x-3b\sin x\cos^2x$

$=-a\sin x-3b\sin x(1-\sin^2x)$

$=-a\sin x-3b\sin x+3b\sin^3x$

$=-(a+3b)\sin x+3b\sin^3x$

$=f(x)$

$\Rightarrow\begin{cases}-(a+3b)=3\\3b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3-3b=-3+2=-1\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$

Donc : $\boxed{a=-1}$ et $\boxed{b=-\frac{2}{3}}$

D'où $F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3x$

2) $f(x)=3\sin x-2\sin^2x.\sin x$

$=3\sin x-2(1-\cos^2x)\sin x$

$=3\sin x-2\sin x+2\sin x\cos^2x$

$=\sin x+2\sin x\cos^2x$

$=(-\cos x)'+2(-\cos x)'.\cos^2x$

$\boxed{F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3x+cte}$

Exercice12

$f(x)=\frac{1}{x}; x\in]0,+\infty[$

1) f est continue sur $]0,+\infty[$ donc f admet une seule primitive F vérifiant : $F(1)=0$

2) F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$F'(x)=f(x)=\frac{1}{x}>0, x>0$

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

* $x>1 \Rightarrow F(x)>F(1) \Rightarrow \boxed{F(x)>0}$
* $x<1 \Rightarrow F(x)<F(1) \Rightarrow \boxed{F(x)<0}$

3) $F(x)=F(ax), x>0, a>0$

a/ $x\mapsto u(x)=ax$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$U(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et F est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow H=Fou$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

On a : $H'(x)=(ax)'\times F'(ax) = a\times f(ax)$

$=\cancel{a}\times\frac{1}{\cancel{a}x}=\frac{1}{x}=f(x)$

$\Rightarrow H'(x)=f(x) \Rightarrow H$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b/ $H'(x)=f(x)$ et $(F(a)+F(x))'=f(x)$

$\Rightarrow H(x)=F(a)+F(x)+cte$

Pour $x=1$ on a :

$H(1)=F(a)+F(1)+cte=F(a) \Rightarrow cte=0$

$\Rightarrow H(x)=F(a)+F(x)$

$\Rightarrow \boxed{F(ax)=F(a)+F(x)}$; $x>0,\ a>0$

c) $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$

$$\begin{cases} F(\frac{a}{a})=F\left(\frac{1}{a}\times a\right)=F\left(\frac{1}{a}\right)+F(a) \\ F\left(\frac{a}{a}\right)=F(1)=0 \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{1}{a}\right)=-F(a)$$

$$F(\frac{x}{a})=F\left(x\times\frac{1}{a}\right)=F(x)+F\left(\frac{1}{a}\right)=F(x)-F(a)$$

Donc : $\boxed{F\left(\frac{x}{a}\right)=F(x)-F(a)}$

4)

$[F(-x)]'=(-x)'\times F'(-x)=(-1)\times f(-x)$

$=(-1)\times\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}=g(x)$

et $F(-(-1))=f(1)=0$

Donc $F(-x)$ est une primitive de g sur $]-\infty,0[$ qui s'annule en -1.

Exercice13

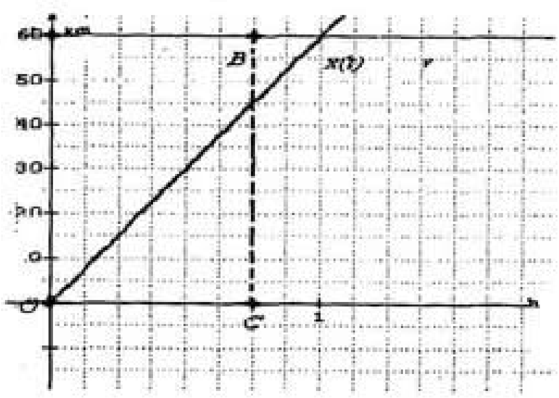
a) $V=60km/h$

$2h45mn=165mn$

$x=V\times t=165km$

b) $x(t)=V\times t=60t$

c) Courbe $x(t)$ et v :



d) A : aire du rectangle $OABC$.

$A(t)=60t$ (Unité d'aire) $=60t\times 4.cm^2$

$\boxed{A(t)=240t\,cm^2}$

$\Rightarrow \boxed{A(t)=4x(t)\,cm^2}$

Exercice 1

$f(x) = x \ln x \qquad x > 0$

$g(x) = x^2 \ln x \qquad x > 0$

1) pour $x > 0$ on a :

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 . \frac{1}{x}$$
$$= 2x \ln x + x$$

2) pour $x > 0$

$$g'(x) = 2x \ln x + x$$
$$= 2f(x) + x$$
$$\Rightarrow g'(x) - x = 2f(x)$$

3) f est continu sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $]0, +\infty[$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{2} g'(x) - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{x^2}{4} + cte$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + cte}$$

Exercice 2

1) $f(x) = \ln(2x+1)$

$2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$x > 0$ et $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Donc f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

et on a :

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} \quad , x > -1$

f est dérivable si et seulement si on a : $\ln(x+1) > 0$

$\ln(x+1) > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(\ln(x+1))'}{2\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{\ln(x+1)}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

f est dérivable si et seulement si on a :

$x^2 - 3x > 0$ or $x^2 - 3x = x(x-3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $x^2 - 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x)'}{(x^2 - 3x)} = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)}$$

6) $f(x)=\ln(|x^2+x-2|)$

f est dérivable si et seulement si $x^2+x-2\neq 0$

On a :

$$x^2+x-2=0 \overset{a+b+c=0}{\Rightarrow} x=1 \text{ ou } x=-2$$

Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$ et :

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

7) $f(x)=\ln|\cos x|$

f est dérivable si et seulement si

$$\cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

et : $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-tgx$ donc

$$f'(x)=-tgx\ ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$$

8) $f(x)=\ln^2(2x+1)$

f est dérivable pour $2x+1>0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

et $f'(x)=2.\dfrac{2}{2x+1}.\ln(2x+1)$

Donc $\forall x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{4}{2x+1}.\ln(2x+1)$$

9) $f(x)=\ln(\ln x)$. f est dérivable si et seulement si on a :

$\ln x>0\Rightarrow x>1$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Donc : $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}, x>1$

10) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$

Signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$:

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$x+1$	$-$ | $+$ 0 $+$
$1-x$	$+$ | $+$ 0 $-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$ 0 $+$ || $-$

$\dfrac{1+x}{1-x}>0$ Donne $x\in\,]-1,1[$

f est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}$

Or $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{-1-1}{(1-x)^2}=\dfrac{-2}{(1-x)^2}$

Donc $f'(x)=\dfrac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{-2}{(1+x)(1-x)}=\dfrac{-2}{1-x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

11) $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

12) $f(x)=x\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$

f est dérivable si et seulement si on a :

$x-1\neq 0$ et $x\neq 0$

f est dérivable si et seulement si $x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$

et on a : $f'(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+x.\dfrac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$

$$f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}+\right|+x.\frac{\frac{\frac{1}{x}.x}{x-1}}{x}$$

Donc : $f'(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x-1}$

Exercice 3

Dans tout l'exercice : k est une constant réelle

a) $x\in\left]\frac{3}{4},+\infty\right[\Rightarrow 4x-3>0$ d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{1}{4}.\frac{(4x-3)'}{(4x-3)}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3)+k$

b) $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\ln x+k$

c) $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}=\frac{1}{x}(\ln x)^2=(\ln x)'.(\ln x)^2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\ln x^3+k$

d) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+1)}$

$x>e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow \ln x>\ln\frac{1}{e}=-1$

$\Rightarrow \ln x+1>0$ et $x>0$, d'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x+1}=\frac{(\ln x+1)'}{\ln x+1}$

$\Rightarrow F(x)=\ln(\ln x+1)+k$

e) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}, x>1,$

donc x > 0 et lnx > 0

D'où f est continue par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{-1}{\ln x}+cte$

f) $f(x)=\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$ .fonction rationnelle

et $2x^2+2x+1\neq 0$ car $\Delta=-4\prec 0$

D'où f est continue sur $I=\square$ par suite elle admet une primitive F

On a $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{(2x^2+2x+2)'}{2x^2+2x+2}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+2)+k$

g) $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$, fonction rationnelle

et $x-1\neq 0$ car $x>1$

D'où f est continue sur $I=\square$ par suite elle admet une primitive F

$f(x)=\frac{2x-2+6}{x-1}=2+\frac{6}{x-1}=2+6.\frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow F(x)=2x+6.\ln(x-1)+k$

Exercice 4

1) $g(x)=\frac{x^2+4x+7}{x+2}, x\in\square\setminus\{-2\}$

a) $g(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}+\frac{3}{x+2}$

$=\frac{(x+2)^2}{x+2}+\frac{3}{x+2}$

$=x+2+\frac{3}{x+2}$

Donc $a=1, b=2, c=3$

g étant une fonction rationnelle, g est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}-\{-2\}$ en particulier sur $]-2,+\infty[$

Donc g admet une unique primitive G Vérifiant $G(-1)=0$ sur $]-2,+\infty[$.

On a :

$G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+cte.$

Or $G(-1)=0$ et $G(-1)=\frac{1}{2}-2+cte=-\frac{3}{2}+cte$

$\Rightarrow cte=\frac{3}{2}$

D'où $G(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x+2)+\frac{3}{2}$

2) $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{\alpha}{(x+1)^2}+\frac{\beta}{x+1}$

$=\frac{\alpha+\beta(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{\alpha+\beta+\beta x}{(x+1)^2}$

Par identification : $\begin{cases}\beta=1\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha=-\beta$ et $\beta=1$

D'où $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$

Pour $x>-1$ on a :

$F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)+cte$

$F(0)=1+cte=0\Rightarrow cte=-1$

Donc $F(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)-1$

Exercice 5

a)

$\ln(2x-1)=0\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

Donc $S=\{1\}$

b)

$\ln(2x+1)-1=0\Leftrightarrow \ln(2x+1)=1\Leftrightarrow 2x+1=e$

$\Leftrightarrow 2x=e-1\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{2}$

Donc $S=\left\{\frac{e-1}{2}\right\}$

c)

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)+\ln 2=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+2}{2-x}\right)=\ln\left(\frac{7}{4-x}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+2}{2-x}=\frac{7}{4-x}\Leftrightarrow (2x+2)(4-x)-7(2-x)=0$

$\Leftrightarrow -2x^2+13x-6=0$

$\Delta=169-48=121=11^2$

$\Rightarrow x'=\frac{13+11}{-4}=-6,\ x''=\frac{13-11}{-4}=-\frac{1}{2}$; $x\in]-1,2[$

Or $-6\notin]-1,2[$ et $\frac{-1}{2}\in]-1,2[$

$S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$

d) $\ln^2 x-3\ln x-4=0$ (E) . Posons $X=\ln x$

(E) est équivalente à : $\begin{cases}X^2-3X-4=0\\ X=\ln x\end{cases}$

$X^2-3X-4=0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} X'=-1, X''=4$

$\ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ *et* $\ln x=4\Leftrightarrow x=e^4$

Donc $S=\left\{\frac{1}{e},e^4\right\}$.

e) $\ln|2x+1|=2\ln 2$

$\Rightarrow \ln|2x+1|=\ln 4; x\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow |2x+1|=4$

$2x+1=4$ ou $2x+1=-4$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{-5}{2}$

Donc $S=\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$

f) Pour $x\neq-1$ et $x\neq-2$

$\frac{1}{2}\ln|x+1|=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{|x+1|}=\ln|x+2|$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x+1|}=|x+2|$

$\Leftrightarrow |x+1| = |x+2|^2 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow |x+1| = x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x+1$ ou $x^2+4x+4 = -x-1$

$\Leftrightarrow x^2+3x+3=0$ ou $x^2+5x+5=0$

$\Delta = 9-12<0$, $S_1 = \varnothing$ | $\Delta = 25-20 = 5$

$\Leftrightarrow x' = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}, x'' = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$

g) $\ln|x+3| + \ln|x+5| = \ln 15, x \neq -5$ et $x \neq -3$

$\ln|(x+3)(x+5)| = \ln 15 \Leftrightarrow |(x+3)(x+5)| = 15$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x+5) = -15 \\ (x+3)(x+5) = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+15 = 15 & (1) \\ x^2+8x+15 = -15 & (2) \end{cases}$

(1) donne $x(x+8)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-8$

(2) donne $x^2+8x+30=0$, on a $\Delta<0$

D'où $S = \{0, -8\}$

Exercice 6

a) $\ln^2 x - \ln\dfrac{1}{x} - 2 = 0 \Rightarrow \ln^2 x + \ln x - 2 = 0$

$\Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0, x>0$

$\Rightarrow \ln x = 1$ ou $\ln x = -2$

$\Rightarrow x = e$ ou $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

$S = \left\{\dfrac{1}{e^2}, e\right\}$

b) $1 + \ln x = \dfrac{6}{\ln x}$, $x>0$ et $x \neq 1$

$\Rightarrow \ln x + \ln^2 x - 6 = 0$

Posons $t = \ln x$

$\Rightarrow \begin{cases} t^2+t-6=0 \\ t = \ln x \end{cases}$

$t^2+t-6=0, \Delta = 1+24 = 25$

$t' = \dfrac{-1+5}{2} = 2$, $t'' = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

Donc

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

$\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

$S = \left\{\dfrac{1}{e^3}, e^2\right\}.$

c) $\ln x - 2\ln(x-4) + \ln 2 = 0,$ *existe* pour $x>4$

$\underbrace{\ln x + \ln 2}_{\downarrow} - \underbrace{2\ln(x-4)}_{\downarrow} = 0$

$\Rightarrow \ln 2x - \ln\left((x-4)^2\right) = 0 \Rightarrow 2x = (x-4)^2$

$\Rightarrow 2x = x^2-8x+16 \Rightarrow x^2-10x+16=0$

$\Delta' = 25-16 = 9>0$

$x' = 5+3 = 8>4$ ou $x'' = 5-3 = 2<4$

Donc $S = \{8\}$

d) $\ln|x+1|<1, x\neq -1$

$\Rightarrow |x+1| < e \Leftrightarrow -e < x+1 < e$

$\Rightarrow -e-1 < x < e-1, x \neq -1$

Donc $S =]-e-1, e-1[\setminus \{-1\}$

e) $\ln|x| < -\ln|3x+2|$ (E)

$x \in \square^* \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$(E) \Leftrightarrow \ln|x| + \ln|3x+2| < 0$

$\Leftrightarrow \ln|x(3x+2)| < 0$

$\Leftrightarrow |x(3x+2)| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x(3x+2) < 1$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-1<0$ ou $3x^2+2x+1>0$

$a-b+c=0$ | $\Delta = 4-12<0$

$x' = -1, x'' = \dfrac{1}{3}$ | $S_2 = \square^* \setminus \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$

$\square$ $T.signe$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x^2+2x-1$	+	0 −	0	+

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \times \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} = 0$$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ on a :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ et $\ln(1) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+3}$ posons $X = x+2$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X+1} = \lim_{X\to+\infty} \underbrace{\frac{X}{X+1}}_{1} . \underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{0} = 0$$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ posons $X = \ln x$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X+1}{X-1} = 1$$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$ posons $X = x+1$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln X}{X-1} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{0} \times \underbrace{\frac{X}{X-1}}_{1} = 0$$

*/ Posons $X = \frac{x+1}{x}$

$$X = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = X - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{X-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$

*/ $\lim_{x\to+\infty} 2\ln x^3 - \ln^2 x + 3\ln x - 4$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln^2 x(2\ln x - 1) + 3\ln x - 4$$

$$= +\infty$$

*/ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} . \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{0}$

$$= 1 \times \frac{1}{-\infty}$$

$$= 0$$

*/ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} . \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}$$

*/ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x} \times \left(\frac{x^2+x}{x}\right)$

On a : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x}$ Posons $X = x^2 + x$

$$= \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Et $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x)}{x^2+x} \times \frac{x^2+x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = 1$

*/ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ posons $X = x^2$

$$= \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

*/ $\lim_{x\to 0^+} x^{2/3} \ln x = 0$ (formule)

*/ $\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \ln x = 0$ (formule)

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{1/3}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \frac{\ln x}{x} = 0$$

*/ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$

$=f'(2)$ avec $f(x)=\ln x$

$\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

ou bien : posons $X=x-2$

$\Rightarrow x=X+2$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{X}{2}+1\right)}{X}$ Posons $t=\dfrac{X}{2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}\times\dfrac{1}{2}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

*/ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}$

$=f'(e)$, avec $f(x)=\ln x$

$=\dfrac{1}{e}$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{x\ln x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{1}{0^+}+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x+2|}{|x-1|}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Exercice 8

$f(x)=x-1-\ln x,\ x\in\,]0,+\infty[\,.$

$g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x},\ x\in\,]0,+\infty[\,.$

1/ ⊗ $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

⊗ $g(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

2) */ f est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout

$x>1$: $f(x)\succ f(1)\Rightarrow f(x)\succ 0$

$\Rightarrow x-1-\ln x\succ 0\Rightarrow \ln x\prec x-1$. (1)

*/ g est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout

$x>1$: $g(x)\succ g(1)\Rightarrow g(x)\succ 0$

$\Rightarrow \ln x-\dfrac{x-1}{x}\geq 0\Rightarrow \ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$. (2)

(1) et (2) donne : $\forall x>1\ \dfrac{x-1}{x}\prec\ln x\prec x-1$

Exercice 9

$x\mapsto\begin{cases}f(x)=2x-x\ln|x|;\ x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) */ continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2x-x\ln x=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}2x-x\ln(-x)$

(Posons $X=-x$)

$= \lim\limits_{X \to 0^+} -2X + X \ln X = 0 = f(0)$

f Continue à droite et à gauche en 0 donc f continue en 0.

*/ Dérivabilité de f en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - x\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 - \ln|x|$ (posons $X = |x|$)

$= \lim\limits_{X \to 0^+} 2 - \ln X = +\infty$

D'où f est non dérivable en 0.

2) a) $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$ et

$f(-x) = 2(-x) - (-x)\ln|-x|$

$= -2x + x\ln|x|$

$= -f(x)$

$f(-0) = f(0) = -f(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -f(x)$

Par suite f est impaire.

b) f est impaire : on étudie f sur $Df \cap \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $f'(x) = (2x - x\ln x)'$

$= 2 - (\ln x + 1)$

$= 1 - \ln x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - x\ln x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x(2 - \ln x) = -\infty$

$f(e) = 2e - e\ln e = 2e - e = e$

f est impaire $\Rightarrow$ 0 est une centre de symétrie pour C

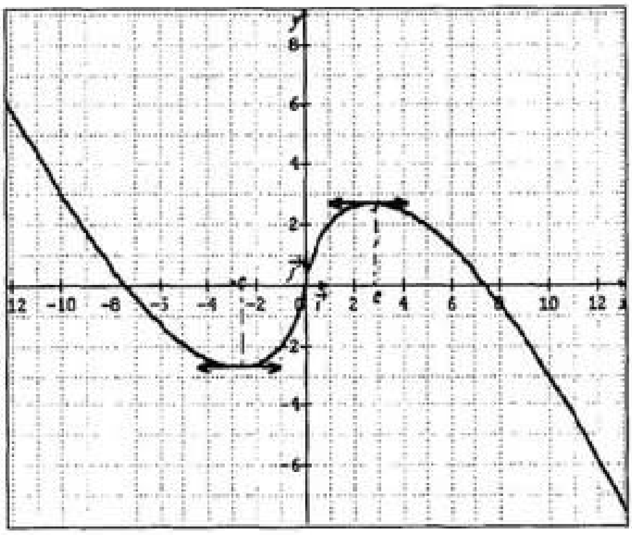
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - x\ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \ln x = -\infty$

$\Rightarrow C_f$ admet une branche infinie parabolique de direction $(o, \vec{j})$.

C admet une tangente verticale en 0.

COURBE :



Exercice 10

1) •/ $Df = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0\}$.

$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

•/ $x \in Df$ et $-x \in Df$

$f(-x) = \ln|(-x)^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| = f(x)$

D'où f est paire.

On étudie f sur $\mathbb{R}_+ \cap Df = [0,1[\cap]1, +\infty[$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. et

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

Signe de $f'(x)$

x	0	1	$+\infty$
x^2-1	$-$	0	$+$
$2x$	$+$		$+$
$\dfrac{2x}{x^2-1}$	$-$	||	$+$

Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \ln\left|1-x^2\right| \underset{t=1-x^2}{=} \lim\limits_{t\to0^+} \ln t = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

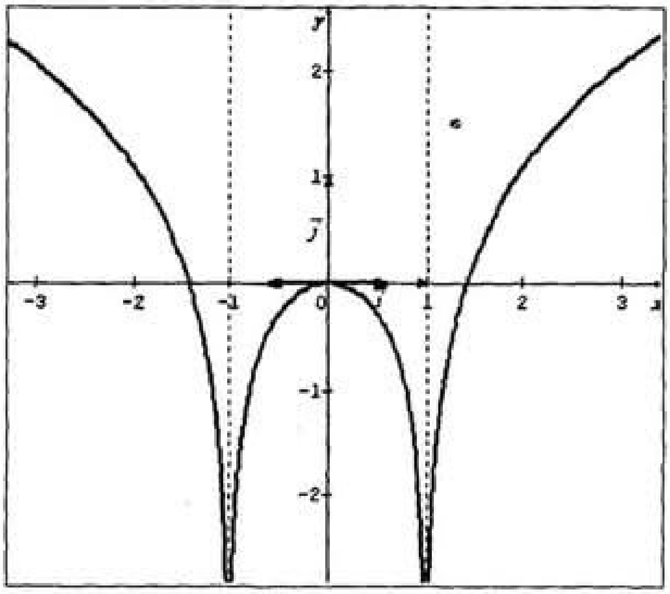
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ C admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$.

Courbe : f est paire donc C est symétrique par rapport à $(o,\vec{j})$.



4) $g(x) = x\ln(x^2-1) + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 2x$

g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$g'(x) = \ln(x^2-1) + x.\frac{2x}{x^2-1} + \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} - 2$$

$$= \ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} - 2$$

$$= \ln(x^2-1) + \frac{2x^2-2-2x^2+2}{x^2-1}$$

$= \ln(x^2-1) = f(x)$ pour $x>1$.

$g'(x) = f(x) \Rightarrow g$ est une primitive de f sur $]1,+\infty[$

Exercice 11

$f(x) = \ln\left|\dfrac{3x-6}{x+2}\right|$

1) $Df = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{6+6}{(x+2)^2}}{\frac{3x-6}{x+2}}=\frac{12}{(3x-6)(x+2)}$$
$$=\frac{12}{3(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x^2-4}.$$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	Ln3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	ln3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$
$$=\ln 3$$
$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty,\ X=\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$$
$$=\lim_{x\to2}\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=\lim_{X\to0^+}\ln X=-\infty,\ X=\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|.$$

2) $x\in Df,\ 2\times0-x=-x\in Df$

Et on a :

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-3x-6}{-x+2}\right|=\ln\left|\frac{-(3x+6)}{-(x-2)}\right|=\ln\left|\frac{3x+6}{x-2}\right|$$
$$=\ln\left|\frac{1}{\frac{3x+6}{x-2}}\right|=-\ln\left|\frac{x-2}{3x+6}\right|=-\ln\left|\frac{x-2}{3(x+2)}\right|$$
$$=-\ln\left|\frac{3x-6}{9(x+2)}\right|=-\left[\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|-\ln 9\right]$$
$$=\ln 9-\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=2\ln 3-f(x)$$

Donc : $f(2\times0-x)=2\times\ln3-f(x)$

D'où $\Omega(0,\ln 3)$ est un centre de symétrie pour la courbe C de f.

3) Intersection avec l'axe des abscisses :

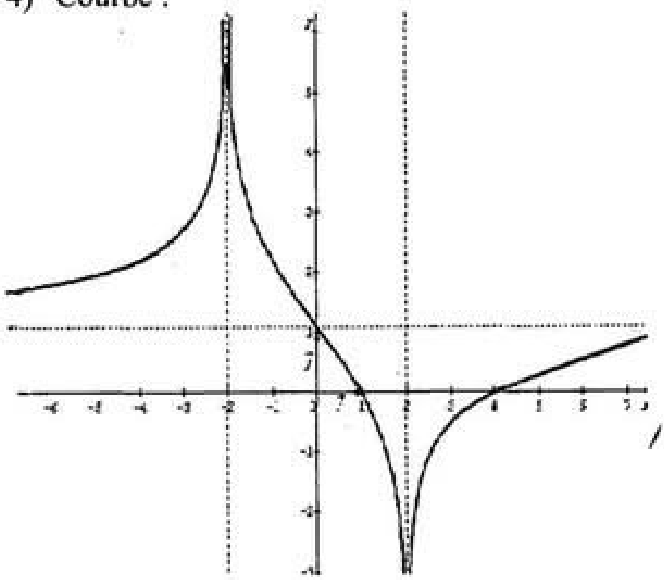
$$f(x)=0\Leftrightarrow\ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=0$$
$$\Leftrightarrow\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{3x-6}{x+2}=1\ \text{ ou }\ \frac{3x-6}{x+2}=-1$$
$$\Leftrightarrow x=4\quad\text{ ou }\quad x=1$$

Donc $C\cap(o,\vec{i})=\{I(4,0),J(1,0)\}$.

<u>Intersection avec l'axe des ordonnés :</u>

$$f(0)=\ln\left(\left|\frac{-6}{2}\right|\right)=\ln(3).$$
$$\Rightarrow C\cap(o,\vec{j})=\{\Omega(0,\ln 3)\}.$$

4) Courbe :



5) a) g est continue et strictement décroissante sur $]-2,2[$ donc g réalise une bijection de $]-2,2[$ sur $g(]-2,2[)=\mathbb{R}$

b) g est dérivable en 0 : $(g(0)=\ln 3)$

et $g'(0)=\frac{4}{0-2}=-2\neq0$

$\Rightarrow g^{-1}$ est dérivable en $\ln 3$

et $\left(g^{-1}\right)'(\ln 3)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 12

1)a) $g(x)=x\ln^2 x-1,\ x\in\left]0,+\infty\right[$.

$g'(x)=\ln^2 x+x.2.\dfrac{1}{x}.\ln x$

$=\ln^2 x+2\ln x.$

$=\ln x(\ln x+2).$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0$ ou $\ln x=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2 x-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \underbrace{x\ln^2 x}_{0}-1=-1$

$g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}\ln^2\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-1=\dfrac{4}{e^2}-1$

b) g est continue et strictement croissante sur $\left]2,3\right[$.

$g(2)=2\ln^2 2-1\simeq-0,04<0$

$g(3)=3\ln^2 3-1\simeq 2,62>0$

$g(2)\times g(3)<0.$

$\Rightarrow$ L'équation $g(x)=0$ admet une unique Solution $\alpha\in\left]2,3\right[$.

c) Signe de g

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2)a) $Df=\left[0,+\infty\right[\setminus\{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=0=f(0).$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x\ln x+1}{\ln x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}=-\infty.$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0.

d) f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}$ et

$f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{\ln x}\right)'$

$=1-\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=1-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

$=\dfrac{x\ln x^2-1}{x\ln^2 x}=\dfrac{g(x)}{x\ln^2 x}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

Tableau de variation :

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{\ln x}$

$=+\infty+\dfrac{1}{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x+\dfrac{1}{\ln x}=1+\dfrac{1}{0^-}-\infty$

e) $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\ln\alpha+1}{\ln\alpha}$

Or $g(\alpha)=\alpha\ln^2\alpha-1=0$

$\Rightarrow \alpha\ln^2\alpha=1$

$$\Rightarrow \ln^2 \alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha . \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right)$$

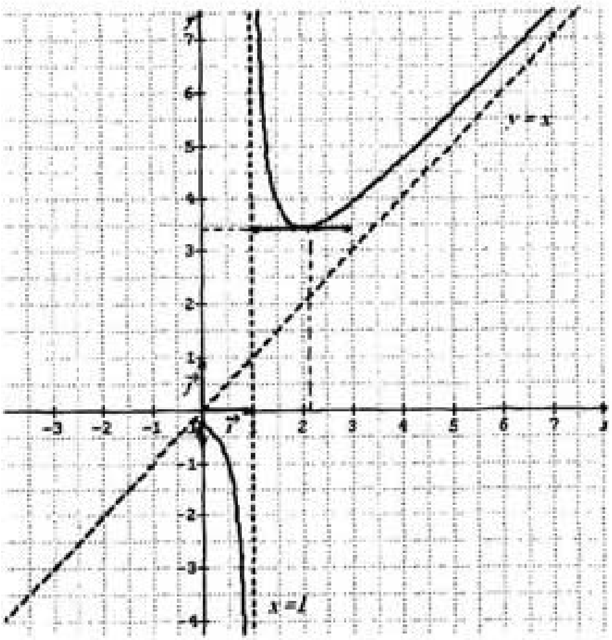
$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}.$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x + 1}{\ln x} - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{\ln x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$\Rightarrow D : y = x$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

g) Courbe C



C Admet une demi-tangente verticale
Au point d'abscisse 0 dirigé vers le bas.

$f(\alpha) \approx 2{,}1 + \sqrt{2{,}1} \approx 3{,}5$

Exercice 13

$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1) $Df = \{x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - \ln x \geq 0\}$.

On a : $1 - \ln x \geq 0$ et $x > 0$.

$\Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e.$

Donc $Df =]0, e]$.

2) f est dérivable si $1 - \ln x > 0$

Donc dérivable sur $]0, e[$.

$$f'(x) = \frac{(1-\ln x)'}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$f''(x) = \frac{\left(2x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{4x^2(1-\ln x)} = \frac{\left(x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{\sqrt{1-\ln x} + x \times \left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}\right)}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{2(1-\ln x) - 1}{4x^2(1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$= \frac{-2\ln x - 1}{4x^2\left(\sqrt{1-\ln x}\right)^2}$$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}}, x \in]0, e[$.

T.V

X	0	e
f'(x)	−	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1-\ln x} = +\infty$$

4) f est continue et strictement décroissante sur $]0, e]$ donc f réalise une bijection de $]0, e]$ sur $f(]0, e]) = [0, +\infty[$.

5)*/ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ S'annule en $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et change de signe

Donc le point $I\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ est un point d'inflexion pour C.

*/ soit T la tangente à C en I.

$$T: y=f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

$$\text{Or } f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$$

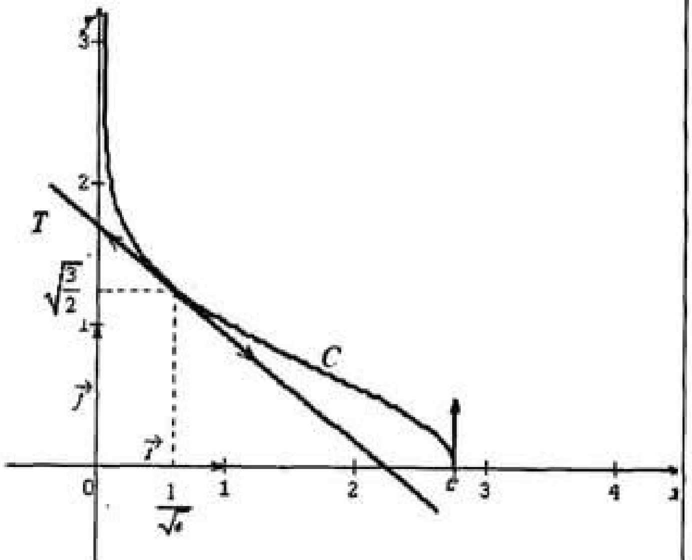
$$\Rightarrow T: y=-\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

$$\Rightarrow T: y=-\sqrt{\frac{e}{6}}x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

6) Courbe C



Exercice 14

$$g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$$

$$f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$$

1) $x\in\left]0,+\infty\right[$.

$$g'(x)=2\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\frac{3}{x}=3\sqrt{x}-\frac{3}{x}$$

$$=\frac{3\left(x\sqrt{x}-1\right)}{x}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1.$$

Donc g est strictement croissante sur $\left]0\,,1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$.

Donc : $x\le 1\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)=8\Leftrightarrow g(x)\succ 0$

$x\ge 1\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)=8\Leftrightarrow g(x)\succ 0$

<u>Conclusion</u> : $\forall\, x\in\left]0,+\infty\right[$, on a $g(x)\succ 0$

2)*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$

$$=\lim_{x\to 0^+}3.\underbrace{\ln x}_{-\infty}.\frac{1}{\sqrt{x}}+x-1=-\infty$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}3.\overbrace{\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}}^{0}+x-1=+\infty.$$

3) $x\in\left]0,+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{3\left(\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}+1$$

$$=\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)}{x}+1$$

$$=3\left(\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)+1$$

$$= \frac{6-3\ln x}{2x\sqrt{x}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{6-3\ln x + 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}} > 0.$$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x-1)$$

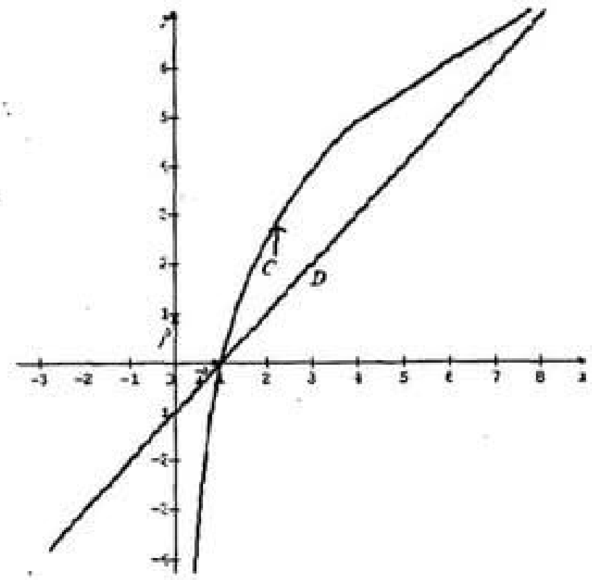
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

D'où la droite D d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique pour C au voisinage de $+\infty$

5) $f(x)-(x-1) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	$-$	0	$+$
Position	D/C	$(1,0)$	C/D

6)



Exercice 15

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)*/ Continuité à droite en 0.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

*/ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{x\ln x}{x+1}}{x}$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}(x+1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 0

2) $g(x) = x+1+\ln x,\ x>0$

a) $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0,\ x > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $g(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} g(0,27) \approx -0,039 < 0 \\ g(0,28) \approx 0,007 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0,27 < \beta < 0,28$$

$\Rightarrow 0,27 < \beta < 0,28.$

3) a) $x>0$

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2}$$

Donc $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$, pour tout $x>0$

b) le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

T.V

x	0		β		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$			
$f(x)$	0	↘	$-\beta$	↗	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}.\ln x=1\times(+\infty)=+\infty$$

On a : $g(\beta)=\ln\beta+\beta+1=0$

$\Rightarrow \ln\beta=-\beta-1$

D'où $f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=\frac{\beta(-\beta-1)}{\beta+1}=-\beta$

c) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x+1}-\ln x\right)$

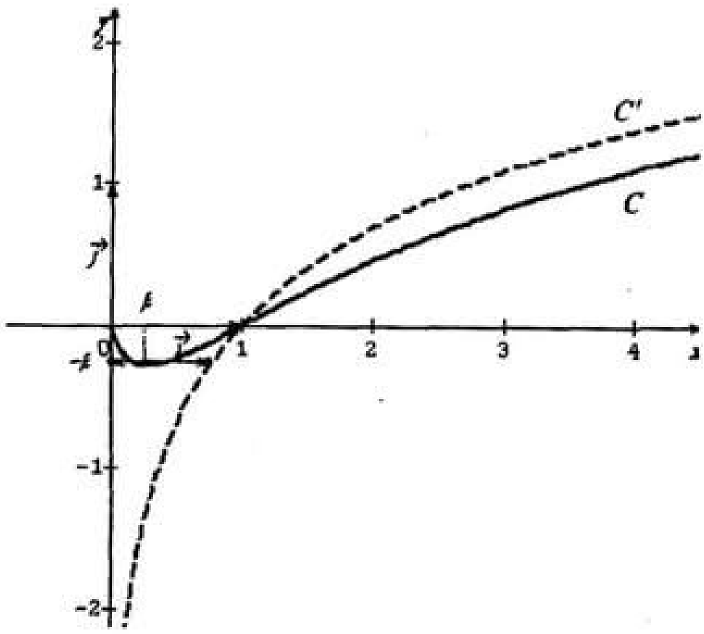
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x-x\ln x-\ln x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\ln x}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe C_f se comporte comme celle de la fonction ($\ln x$)c'est-à-dire C admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$

Position de C et C' :

X	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
Position de C et C'	‖	C/C'	$(1,0)$	C'/C	



Exercice 16

Soit n le nombre de divisions

Pour chaque étape une cellule Se divise en deux :

1^er étape : on compte 2 cellules $=2^1$ cellules.

2eme étape : on compte 4 cellules$=2^2$ cellules.

3eme étape : on compte 8 cellules$=2^3$ cellules.

Après n étapes une cellule se divise en 2^n cellules. Si on compte 10^6 cellules.

Alors on aura $2^n=10^6$

$2^n=10^6\Leftrightarrow\ln 2^n=\ln 10^6$

$\Leftrightarrow n\ln 2 = 6\ln 10$

$\Leftrightarrow n = 6\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ □ $6\times 3,32$

$\Leftrightarrow n$ □ $19,92$ donc $n = 20 (n \in IN)$

Exercice 17

(log désigne logarithme décimale)

$$pH = -\log\left(H_3O^+\right) = -\frac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10}$$

1) $pH = -\dfrac{\ln\left[H_3O^+\right]}{\ln 10} = -0,43\times\ln\left(2,3.10^{-3}\right)$

$= -\dfrac{\ln\left(2,3.10^{-3}\right)}{\ln 10} = -(-2,63)$

□ $2,63 \Rightarrow LogX = 0,43\ln x$

2) $pH = 9,4 = -\log\left[H_3O^+\right] = \log\dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]}$

$\Leftrightarrow 10^{9,4} = \dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]}$

$\Leftrightarrow \left[H_3O^+\right] = \dfrac{1}{10^{9,4}} = 10^{-9,4}$

$\Rightarrow \left[H_3O^+\right] = 3,981071706.10^{-10}$

Exercice 18

$x \in [0,1;6]$

$y = f(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222\ln x$

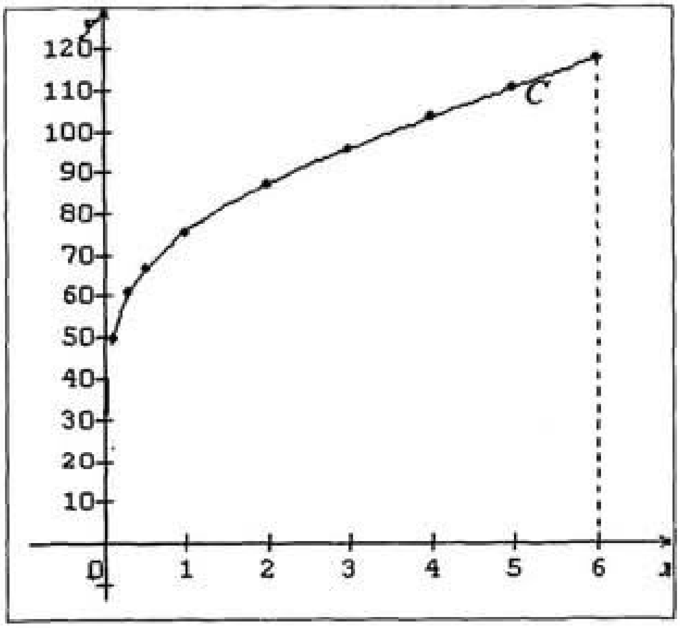
X	0.1	0.3	0.5	1
Y	50	61	66	75

X	2	3	4	5	6
Y	87	96	103	111	117

2) $f'(x) = 5,104 + 9,222\times\dfrac{1}{x}$, $x\in[0,1;6]$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

x	0 ,1	6
$f'(x)$	+	
$f(x)$	50 ↗	117



3)a) un enfant âgé de deux ans et demi (2ans et 6mois)

$f(2,5) = 70,228 + 5,104\times 2,5 + 9,222\times\ln(2,6)$ En cm.

Donc $y = 91$ cm à un cm près

b) un enfant mesure 1m c'est-à-dire $y = 100$ cm

Donc $f(x) = 100$ en cm

$\Rightarrow 70,228 + 5,104x + 9,222\ln x = 100$

$\Rightarrow 9,222\ln x = 5,104x + 70,228 - 100$

$\Rightarrow 9,222\ln x = 5,104x - 29,772$

$\Rightarrow \ln x = \dfrac{5,104x - 29,772}{9,222}$??

Pour $y = 100$ graphiquement on trouve $x = 3,55$.

Donc l'âge estimé est 3 ans et demi à un jour près

Exercice 19

La masse du métal radioactif est périodique de période (138).pour chaque période la masse diminue de moitié.

Désignons par n le nombre de période. On a : par exemple pendant une période : la masse Devienne: $\frac{1}{2}\times 10=5$ g.

Pendant deux périodes : la masse Devienne: $\frac{1}{4}\times 10=\left(\frac{1}{2}\right)^2.10$

Pendant n période : la masse est : $\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 10$

La masse sera 0;1 donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 10=0,1$

et par suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{0,1}{10}=0,001$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,001$.

<u>Cherchons n :</u>

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,001$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=\ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n\ln\frac{1}{2}=\ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n=\frac{\ln(0,001)}{\ln\frac{1}{2}}$

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln\frac{1}{2}}\simeq 6,64$ donc $n=7$.

Le nombre de jours estimé est : 7x138 =966 j à un jour prés

Exercice 20

1) $h(t)=-5t^2+20t, t\geq 0$

a) la balle retombe si $h(t)=0$ donc

$-5t^2+20t=0 \Rightarrow t(-5t+20)=0$

$\Rightarrow t=0$ ou $5t=20$.

D'où la balle retombe au sol si $t=\frac{20}{5}=4$ s

La balle retombe au sol après 4 secondes.

b) Déterminer les extremums de h s'ils existent :

$h'(t)=-10t+20=0 \Rightarrow -10t+20=0 \Rightarrow t=2.$

X	0		2		$+\infty$
h '(x)		$-$	0	$+$	
h(x)	0	↗	20	↘	$-\infty$

h admet un maximum absolue en $t=2$ atteint 20 .Donc à l'instant $t=2$ seconde la balle atteint sa hauteur maximale qui est 20 m.

2) a) $h(0)=0$: à l'instant $t=0$ la balle est au sol.

$$h'(t)=-10t+11-\frac{2}{1+t}$$

$$h'(t)=\frac{-10t(1+t)+11(1+t)-2}{(1+t)}$$

$$=\frac{-10t-10t^2+11+11t-2}{(1+t)}$$

$$=\frac{-10t^2+t+9}{1+t}$$

$h'(t)=0\Rightarrow -10t^2+t+9=0$

Comme $a+b+c=-10+1+9=0$

Donc $t'=1$ ou $t''=\frac{-9}{10}\leq 0$.

D'où $h'(t)=(t-1)(t+\frac{9}{10})$

X	0		1		$+\infty$
h '(x)		$-$	0	$+$	
h(x)	0	↗	6- 2ln2	↘	$-\infty$

$\lim_{t\to+\infty} h(t)=\lim_{t\to+\infty}(-5t^2+11t-2\ln(1+t))=-\infty$

c) h admet $6-2\ln 2$ comme maximum

absolue sur $\left[0,+\infty\right[$ pour $t=1$ donc à l'instant $t=1$seconde la balle atteint la hauteur L.

$L=(6-2\ln 2)$ m. .Or $6-2\ln 2 \simeq 4.61$.

La hauteur est de 4 m et 60 cm.

d) la balle retombe au sol si : $h(t)=0$

Donc si : $-5t^2+11t-2\ln(1+t)=0,\quad t\geq 1$

En utilisant une calculatrice :

On a :

$$h(2)\simeq -0{,}197$$
$$h(1{,}98)\simeq -0{,}005$$
$$h(1{,}97)\simeq 0{,}088$$

$h(1{,}97)\times h(1.98)\leq 0$ donc $h(t)=0$ pour un réel $t\in\left]1.97;1.98\right[$ (théorème des valeurs intermédiaires

La balle retombe a) u sol après 1seconde et 97 au deuxième. C'est-à-dire à peut après 2 Secondes.

Exercice 21

$x\in\mathbb{R}\quad U(x)=\sqrt{x^2+1}+x\ ,\ V(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

$\boxed{\text{On sait que : } (a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

1) a) $U(x).V(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$=\sqrt{x^2+1}^2-x^2$$
$$=x^2+1-x^2=1$$

On a : $U(x).V(x)=1\geq 0$

Donc U et V ont même signe.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $1+x^2\geq x^2$

Donc $\sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{x^2}=|x|$

-- Or si $x\geq 0$ on a : $|x|=x$

Et par suite $\sqrt{1+x^2}\geq x$

Ce qui donne $\sqrt{1+x^2}-x\geq 0$

D'où $V(x)\geq 0$ et comme U et V ont même signe on aura $U(x)\geq 0$

-- Si $x\leq 0$: $\sqrt{1+x^2}\geq -x$

Donc $\sqrt{1+x^2}+x\geq 0$

D'où $U(x)\geq 0$ et par suite $V(x)\geq 0$

Car U et V ont même signe.

Conclusion

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ U(x)\geq 0 \text{ et } V(x)\geq 0.$$

2) a)

$$U'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1$$
$$=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

b) $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ U'(x)=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{U(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Et par suite : $f(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$.

D'où $F(x)=\ln\left(|U(x)|\right)+k,\ x\in\mathbb{R}$

$=\ln\left(U(x)\right)+k$ (Car: $U(x)>0$)

Or $F(0)=0\Rightarrow\ln\left(U(0)\right)+k=0$

$\Rightarrow\ln(1)+k=0\Rightarrow k=0$

Donc : $\boxed{F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

3) a) $x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$

$$F(x)+F(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$$
$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$
$$=\ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]$$

$= \ln[U(x).V(x)] \quad U(x)V(x)=1$

D'après 1)a)

$= \ln[-x^2+x^2+1] = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow F(-x) = -F(x) \quad \Rightarrow F$ est impaire.

b) $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

$\Rightarrow F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x}$$

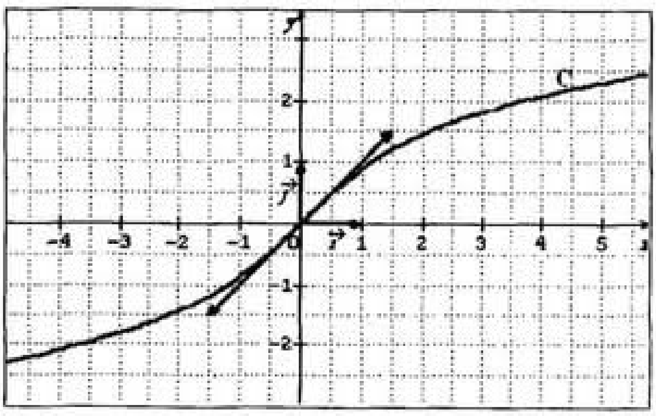
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

$= 0+0 = 0$

$\Rightarrow C$ admet une branche parabolique Infinie de direction $(o,\vec{i})$

F est impaire $\Rightarrow C$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Courbe :



d) $T: y = F'(0)(x-0)+f(0)$

$\boxed{T = y = x}$

Exercice 22

I/ $g(x) = x+(x-2)\ln x$

1) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$g'(x) = 1+(x-2)'\ln x+\ln x'(x-2)$

$= 1+\ln x+(x-2)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+x-2}{x}+\ln x$

$= \dfrac{2x-2}{x}+\ln x = 2\dfrac{(x-1)}{x}+\ln x.$

Donc : $g'(x) = 2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\ln x \; ; \; \forall x>0$

b) */ si $x>1$ on a $\ln>0$ et $\dfrac{x-1}{x}>0$

D'où $2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\ln x>0.$

Donc $g'(x)>0$ si $x>1$

*/ si $0<x<1$ on a $\ln<0$ et $\dfrac{x-1}{x}<0$

Donc : $2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\ln x<0.$

Par suite : $g'(x)<0$ si $x\in]0,1[$.

2) a)

X	0	1	$+\infty$
g'(x)	$-$	0	$+$
g(x)	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} x+\underbrace{(x-2)}_{-2}\underbrace{\ln x}_{-\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+(x-2)\ln x = +\infty$

b) g admet un minimum absolu en 1 atteint 1.

Donc $\forall x>0 : g(x)\geq 1.$

II/ $f(x) = 1+x\ln x-(\ln x)^2$

1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Et on a : $f'(x) = \ln x+x.\dfrac{1}{x}-2.\dfrac{1}{x}\ln x$

$= \ln x+1-2\dfrac{\ln x}{x}$

$$= \frac{x \ln x + x - 2 \ln x}{x}$$

$$= \frac{x + (x-2)\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

$\forall\, x > 0 : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

Comme : $\forall\, x > 0,\ g'(x) \geq 1$ alors

$f'(x) \geq 0.$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[1 + x\ln x - 2(\ln x)^2\right]$$
$$= 1 + 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x - 2(\ln x)^2 =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

b) f étant continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'où f réalise une bijection réciproque f^{-1} définie sur $J = f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} f, \lim\limits_{x\to+\infty} f\right[$.

$\Rightarrow J =$ □ .

2) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= \frac{g(1)}{1}(x-1) + 1 = 1\times(x-1) + 1 = x$$

$$\boxed{T : y = x}$$

b) $x > 0,\ h(x) = x - 1 - \ln x.$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.\ x > 0$$

$h'(x)$ à le signe de $(x-1)$

Tableau de signe de $h'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$-$		$+$	

Tableau des variations de h :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - 1 - \ln x) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right) = +\infty$$

• h admet 0 comme minimum Absolue en 1 donc $\forall\, x > 0;\ h(x) \geq 0$

c) $f(x) - x = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$

$$= 1 - \ln^2 x + x\ln x - x$$
$$= (1 - \ln x)(1 + \ln x) + x(\ln x - 1)$$
$$= (\ln x - 1)[x - 1 - \ln x]$$
$$= (\ln x - 1).h(x)$$

$\Rightarrow f(x) - x = (\ln x - 1).h(x)$

<u>Ou bien</u> : on développe l'expression $(\ln x - 1).h(x)$ on trouve $f(x) - x$.

• Le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1).h(x)$ et comme $h(x) \geq 0$

Alors le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1)$

X	0	e	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
Position	T/ζ	(e,e)	ζ/T

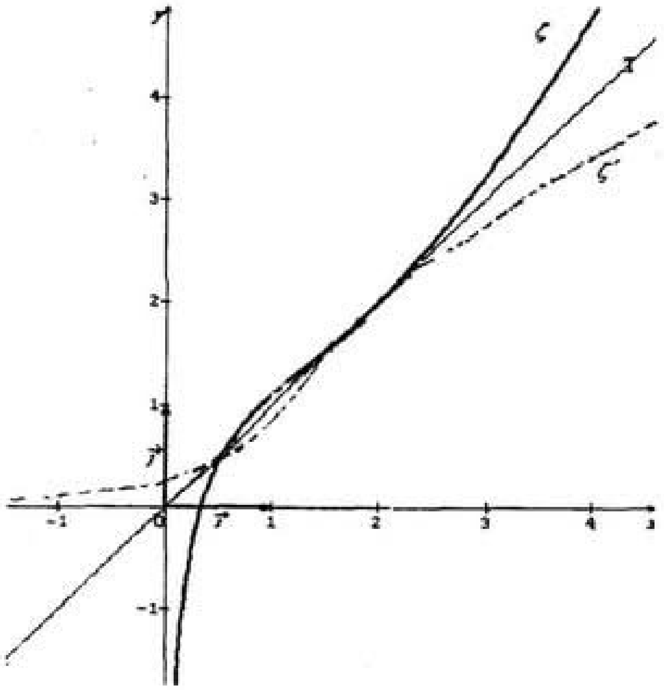
3) $\zeta' = S_T(\zeta) : S_T$ symétrie orthogonale d'axe la droite $T : y = x$.

Branche infinie :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \ln x - \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty$$

ζ Admet une Branche infinie parabolique de direction $(o, \vec{j})$

Courbes de ζ et ζ' :



Exercice 23

$f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$

1) a) $Df = \{x \in \mathbb{R}, x(2-x) > 0\}$.

Signe de : $x(2-x)$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ce qui donne : $Df =]0,2[$

b) $f'(x) = 0 + \frac{[x(2-x)]'}{x(2-x)} = \frac{(2x-x^2)'}{x(2-x)}$

$$= \frac{2-2x}{x(2-x)} = \frac{2(1-x)}{x(2-x)}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to0^+} 1 + \ln[x(2-x)] \overset{X=x(2-x)}{=} 1 + \lim_{X\to0^+} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} 1 + \ln(x(2-x)) \underset{X=x(2-x)}{=} \lim_{X\to0^+} 1 + \ln X = -\infty$$

2) a) $x \in]0,2[$

$0 < x < 2 \Leftrightarrow -2 < -x < 0 \Leftrightarrow 0 < 2-x < 2$

Donc $(2\times1-x) \in]0,2[$.

On a : $x \in Df$, $2\times1-x \in Df$ et on a :

$$f(2-x) = 1 + \ln[(2-x)(2-(2-x))]$$
$$= 1 + \ln[(2-x)(2-2+x)]$$
$$= 1 + \ln[(2-x).x]$$
$$= f(x)$$

Donc la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe C de f.

b) Les abscisses des points d'intersection de C et l'axe $(o,\vec{i})$ sont les solutions de

L'équation $f(x)=0$

Or $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln[x(2-x)]=0$

$\Leftrightarrow \ln[x(2-x)]=-1$

$\Leftrightarrow x(2-x)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow -x^2+2x-\dfrac{1}{e}=0$

$\Delta'=1-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-1}{e}>0$. D'où

$$x_0=\frac{-1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}}{-1}=1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}}{-1}=1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

Donc : $x_0=1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}$ et $x_1=1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}$

3) $x\in]0,2[\,;\varphi(x)=f(x)-x$

a) $\varphi'(x)=f'(x)-1$

$$\varphi'(x)=\frac{2-2x}{x(2-x)}-1=\frac{2-2x-2x+x^2}{x(2-x)}$$

$$=\frac{2x^2-4x+2}{x(2-x)}$$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4-2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=2$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{2}$ ou $x-2=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$ ou $x=2-\sqrt{2}$

Etude de signe : $x^2-4x+2=0$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x+2		+	0	−	0	+	

T.variation :

x	0		$2-\sqrt{2}$		2
$\varphi'(x)$		+	0	−	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	0.81	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)-x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)-x=-\infty$

$\varphi(2-\sqrt{2})=f(2-\sqrt{2})-2+\sqrt{2}$

$=1+\ln\left[(2-\sqrt{2})(2-(2-\sqrt{2}))\right]-2+\sqrt{2}$

$=1+\ln\left[\sqrt{2}(2-\sqrt{2})\right] \simeq 0,81$

b)*/ φ est continue et strictement décroissante sur $]2-\sqrt{2},2[$ et on a :

$\varphi(]2-\sqrt{2},2[)=]\lim\limits_{2^-}\varphi,\varphi(2-\sqrt{2})[=]-\infty\,;\,0,81[$

Comme $0\in]-\infty;0,81[$ alors l'équation $\varphi(x)=0$ possède une unique solution dans $]2-\sqrt{2},2[$.

On a : $\varphi(1)=f(1)-1=1-1=0$.

Donc 1 est l'unique solution dans $]2-\sqrt{2},2[$ **(1)**

*/ φ est continue est strictement croissante sur $]0,2-\sqrt{2}[$

$\varphi(]0,2-\sqrt{2}[)=]\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x),\varphi(2-\sqrt{2})[$

$=]-\infty;0,81[$

$0\in]-\infty;0,81[$. $\varphi(x)=0$ Admet une unique solution $\alpha\in]0,2-\sqrt{2}[$.**(2)**

<u>Conclusion</u>

D'après (1) et **(2)** : l'équation $\varphi(x)=0$ possède deux solutions 1 et $\alpha\in]2-\sqrt{2},2[$

*/ $\varphi(x_0)=f(x_0)-x_0=0-x_0=-x_0$

$=-1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}<0$

$$\varphi(0,3)= f(0,3)-0,3$$
$$=1+\ln(0,3\times 1,7)-0,3$$
$$=0,7+\ln(0,51)\approx 0,02>0$$

$$\varphi(0,3)\times\varphi(x_0)<0\Rightarrow \alpha\in\left]x_0;0,3\right[$$

<u>Remarque</u> :

$$x_0=1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}\approx 0.23\Rightarrow x_0<0,3.$$

*/ $\varphi(\alpha)= f(\alpha)-\alpha=0$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\alpha$$
$$\Rightarrow 1+\ln\left[\alpha(2-\alpha)\right]=\alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{\ln\left[\alpha(2-\alpha)\right]=\alpha-1}$$

c) étude de signe de $\varphi(x)$

x	0	α		1	2
$\varphi(\alpha)$	$-$	0	+	0	$-$

Sur $\left]0,\alpha\right[\cup\left]1,2\right[.\varphi(x)<0$

$\Rightarrow f(x)<x\Rightarrow C$ est au dessous de $\Delta: y=x$

Sur $\left]\alpha,1\right[:\varphi(x)>0$

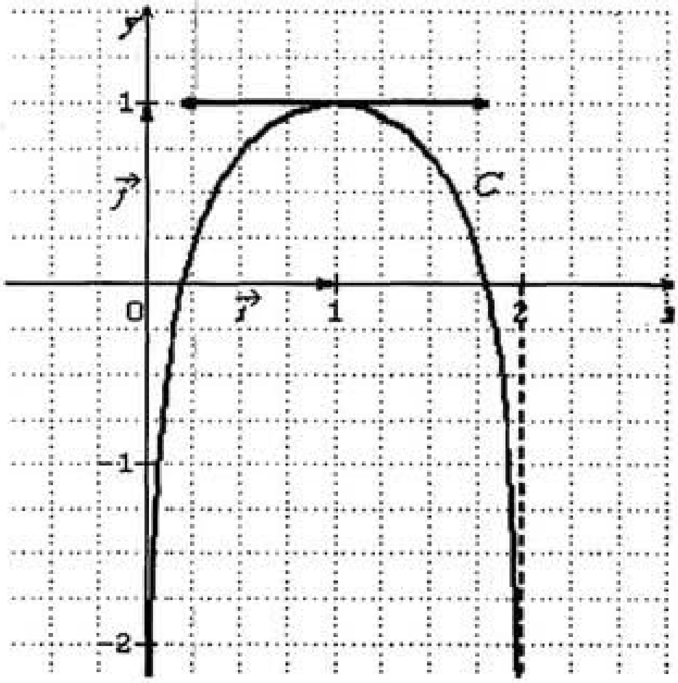
$f(x)>x\Rightarrow C$ est au dessus de $\Delta: y=x$.

$$C\cap\Delta=\{(1,1);(\alpha,\alpha)\}.$$

Pour le graphe : $\frac{1}{e}\approx 0,36$

$$1-\frac{1}{e}\approx 0,64\Rightarrow\sqrt{1-\frac{1}{e}}\approx 0,8$$
$$x_0\approx 0,2\ ,\ x_1\approx 1,8$$

4) Courbe :



5/ g restriction de f a $\left]0,1\right]$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left]0,1\right]$ donc g réalise une bijection de I sur $g(I)=\left]\lim_{0^+} g, g(1)\right]$

$$=\left]-\infty,1\right]=J$$

b) $y\in\left]0,1\right], x\in\left]-\infty,1\right]$

$$y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow g(y)=x$$

$$g(y)=1+\ln\left[y(2-y)\right]=x$$
$$\Leftrightarrow \ln\left[y(2-y)\right]=x-1$$
$$\Leftrightarrow y(2-y)=e^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow -y^2+2y-e^{x-1}=0 \text{ (équation d'inconnue y).}$$
$$\Delta'=1-e^{x-1}$$

On a : $x<1\Leftrightarrow x-1<0$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}<1\Leftrightarrow 1-e^{x-1}>0$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{1-e^{x-1}}}{-1}=1-\sqrt{1-e^{x-1}}$$
$$y_2=\frac{-1-\sqrt{1-e^{x-1}}}{-1}=1+\sqrt{1-e^{x-1}}$$

On a:
$y \in]0,1]$ Donc $y \leq 1$ d'où

$$\boxed{f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-e^{x-1}}}$$

Exercice 24

1) $x \in]0,+\infty[. g(x)=-1+x+2\ln x$

a) $g'(x)=1+\dfrac{2}{x}>0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$			
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (-1+x+2\ln x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (-1+x+2\ln x)=+\infty$

b) $g(1)=-1+1+2\times 0=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

c) •Si $x>1$ on a : $\dfrac{1}{x}<1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$

•Si $0<x<1$ on a : $\dfrac{1}{x}>1$ Donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$

2) $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-x^2\ln x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\underbrace{x\ln x}_{0})=1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=1$

b) pour $x>0$ on a :

$f'(x)=(x-x^2\ln x)'$

$=1-(x^2\ln x)'$

$=1-\left(2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}\right)$

$=1-2x\ln x+x=x\left(\dfrac{1}{x}-2\ln x+1\right)$

$=x\left(\dfrac{1}{x}+2\ln\dfrac{1}{x}+1\right)=x\times g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x)=x\cdot g\left(\dfrac{1}{x}\right)$: le signe de

f'est celui de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-x^2\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-x\ln x)=-\infty$

d) * f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$f(]0,1])=]0,1]$ or $0\notin]0,1]$.

Donc $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]0,1]$

* f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. et $f([1,+\infty[)=]-\infty,1]$.

$0\in]-\infty,1]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1,+\infty[$.

Conclusion :
Dans $]0,+\infty[$ l'équation $f(x)=0$ admet Une unique solution α.

$f\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{7}{4}-\dfrac{49}{16}\ln\dfrac{7}{4}\simeq 0,036>0$

$f(2)=2-4\ln 2\simeq -0,77<0$

$f\left(\dfrac{7}{4}\right)\times f(2)<0\Rightarrow \boxed{\dfrac{7}{4}<\alpha<2}$.

) a) $\Delta:\begin{cases} y=f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x\geq 0\end{cases}$

$\Delta:\begin{cases} y=x \\ x\geq 0\end{cases}$

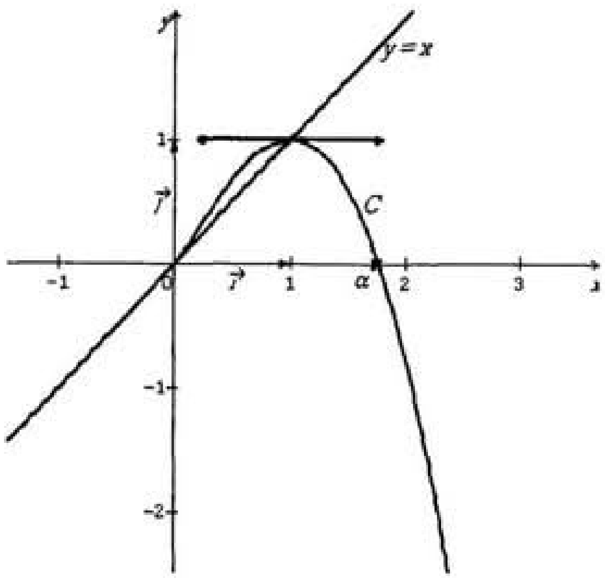
b) $f(x)-x=-x^2\ln x$

Comme $x^2\geq 0$ le signe de $f(x)-x$ est celui de $(-\ln x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
Position	C/Δ	(1,1)	Δ/C

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-x\ln x=-\infty$

Donc C admet une branche infinie Parabolique de direction $(o,\vec{j})$.



Exercice 25

I/ 1)a) • $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$

(Car $x=-1$ est une asymptote).

• $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$

(Car $x=1$ est une asymptote).

b)

x	-2	-1	1	2
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘	

c) le nombre des solutions de l'équation $f(x)=0$ est 5.

2) a) g étant continue et strictement croissante sur $[0,1[$ .donc g réalise une bijection réciproque de $[0,1[$ sur $g([0,1[)=\left]\lim\limits_{1^-}g,g(0)\right]=]-\infty,0]=J$

b) $C'=S_D(C):D:y=x$.(voir courbe).

II/ $f(x)=ax+b+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

1) on a : $\boxed{(ax+b)'=a}\boxed{\left(\ln|U|\right)'=\frac{U'}{U}}$

$$\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=-\frac{2}{x^2-1}.$$

Donc $f'(x)=a-\frac{2}{x^2-1}$.

b) on a : $f(0)=a\times0+b+\ln|1|=b$ Donc $b=0$

$f'(0)=0=a-\frac{2}{0-1}=a+2$ Donc $a=-2$.

2) $f(x)=-2x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\};-x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$f(-x)=-2(-x)+\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|=2x+\ln\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|$.

$f(-x)+f(x)=-2x+\ln\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|$

$+2x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

$=\ln\left[\left|\frac{x+1}{x-1}\times\frac{-x+1}{x+1}\right|\right]=\ln|1|=\ln 1=0$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ Donc est impaire

b) $f'(x)=-2-\frac{2}{x^2-1}=-\frac{2x^2}{x^2-1}$

Rmq. f est impaire on l'étudie sur $[0,+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	−
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=-\infty$.

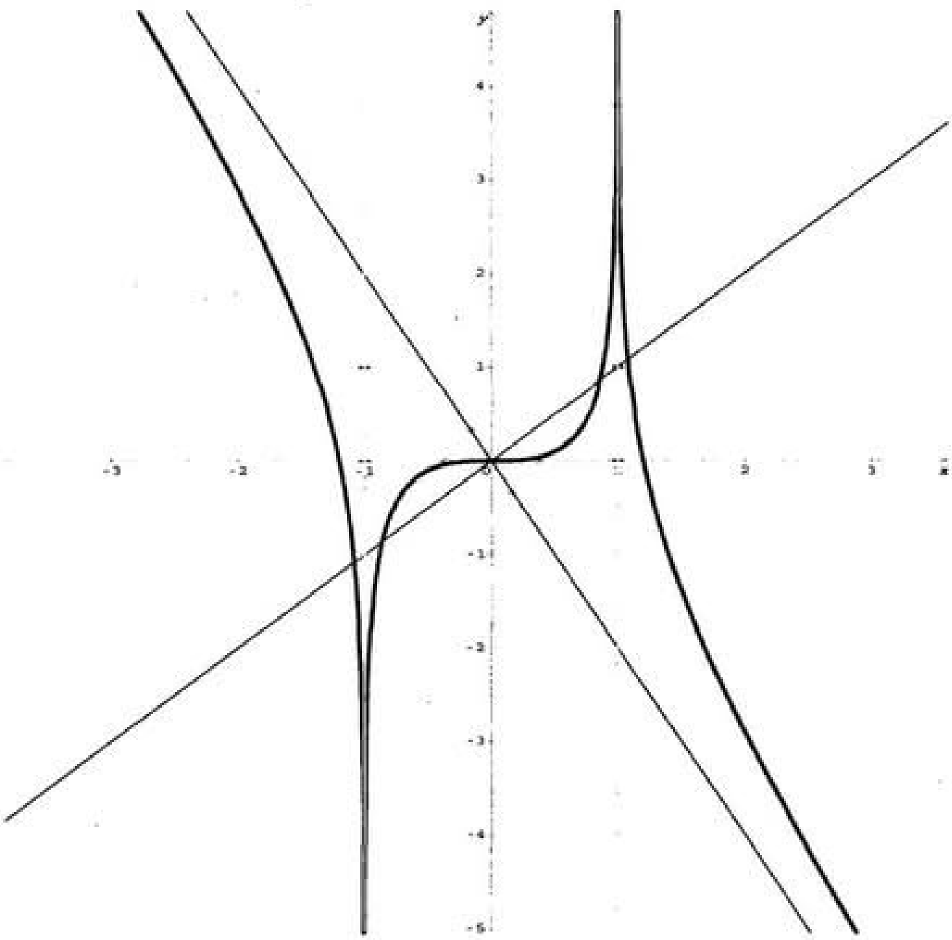
3)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{x})=1$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\ln 1=0.$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=0$ donc la droite $\Delta: y=-2x$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$. Et comme f est impaire alors $y=-2x$ est aussi une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ car $S_o(\Delta)=\Delta$.

Annexe



Exercice 1

*/ $a=\ln\sqrt{e^3}=\frac{1}{2}\ln e^3=\frac{3}{2}\ln e=\frac{3}{2}$

*/ $b=\ln e^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

*/ $c=e^{-\ln 3}=e^{\ln\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

Ou bien $c=e^{-\ln 3}=\frac{1}{e^{\ln 3}}=\frac{1}{3}$

*/ $d=e^{\ln 2-\ln 5}=e^{\ln\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$

*/ $A=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2$

$=\left(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}\right)$

$=\left(2e^x\right)\left(2e^{-x}\right)=4e^xe^{-x}=4$

Donc $\boxed{A=4}$

*/ $B=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$

$=e^{2x}+e^{-2x}-\left(\left(e^x\right)^2-2e^x.e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2\right)$

$=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)$

$=e^{2x}+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}$

Donc $\boxed{B=2}$

Exercice 2

*/ $e^x=-3$ n'a pas des racines car $-3<0$

$S=\phi$

*/ $e^x=e\Leftrightarrow\ln e^x=\ln e\Leftrightarrow x=1$

$S=\{1\}$.

*/ $3e^x=e^{-x}\Leftrightarrow 3e^{2x}=1$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x=\ln\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\ln 3$

$S=\left\{-\frac{1}{2}\ln 3\right\}$

*/ $e.e^{3x-1}=1\Leftrightarrow e^{3x-1+1}=1$

$\Leftrightarrow e^{3x}=e^0\Leftrightarrow 3x=0\Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

*/ $e^{2x}-3e^x+2=0$

Posons $t=e^x$. $t^2=\left(e^x\right)^2=e^{2x}$

Donc on aura : .

$\begin{cases}t^2-3t+2=0\\ t=e^{2x}\end{cases}$

$t^2-3t+2=0$ et $a+b+c=0$

Donc $\begin{cases}t'=1 \quad ou \quad t''=\frac{c}{a}=2\\ t=e^x\end{cases}$

Donc $e^x=1$ ou $e^x=2\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\ln 2$.

$S=\{0,\ln 2\}$

*/ $e^{2x}-5e^x+6=0$. Posons $t=e^x$; $t^2=e^{2x}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-5t+6=0\\ t=e^x\end{cases}$

$t^2-5t+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times 6=1>0$

Donc : $\begin{cases}t'=\frac{5+1}{2}=3\\ t''=\frac{5-1}{2}=2\end{cases}\quad t=e^x$

$\Leftrightarrow e^x=3$ ou $e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 3$ ou $x=\ln 2$

$S=\{\ln 2,\ln 3\}$.

*/ $e^{x^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x^2=\ln\frac{1}{9}\Leftrightarrow x^2=-\ln 9<0$

Il n'existe aucun réel x tel que $x^2=-\ln 9$

$S=\phi$

*/ $e^{-x^2-12x-35}=1=e^0$

$\Leftrightarrow -x^2-12x-35=0$

$\Leftrightarrow x^2+12x+35=0$

$\Delta'=6^2-35=36-35=1$

Donc $x'=-6+1=-5$ Ou $x''=-6-1=-7$

$S_{\mathbb{R}}=\{-7,-5\}$.

*/ $e^{x^2-5x}=e^{-6}$

$\Leftrightarrow x^2-5x=-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

On a : $\Delta=1$ donc $x'=3$ ou $x''=2$

$S_{\mathbb{R}}=\{2,3\}$.

Exercice 3

*/ $e^x<1 \Leftrightarrow x<\ln 1=0 \Leftrightarrow x<0$

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,0\right[$.

*/ $e^x>e \Leftrightarrow x>1$ donc : $S_{\mathbb{R}}=\left]1,+\infty\right[$

*/ $e^{x+2}<e^{2x-1} \Leftrightarrow x+2<2x-1 \Leftrightarrow x>3$

$S_{\mathbb{R}}=\left]3,+\infty\right[$.

*/ $e^{3x-1}<2 \Leftrightarrow 3x-1<\ln 2 \Leftrightarrow 3x<1+\ln 2$.

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{3}(1+\ln 2)$ Donc $S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,\frac{1}{3}(1+\ln 2)\right[$

*/

$e^{-x^2}>e^{-1} \Leftrightarrow -x^2>-1 \Leftrightarrow x^2<1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}<1 \Leftrightarrow |x|<1$ d'où $S_{\mathbb{R}}=\left]-1,1\right[$

*/ $e^{-x}>3 \Leftrightarrow -x>\ln 3. \Leftrightarrow x<-\ln 3$

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;-\ln 3\right[$.

*/ $e^{2x}-3e^x+2=0$ On a : $a+b+c=0$

Donc $e^x=1$ ou $e^x=2$.

$e^{2x}-3e^x+2=(e^x-2)(e^x-1)$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-2		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}-3e^x+2$		$+$ //////	0	$-$	0	$+$ //////	

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]\ln 2,+\infty\right[$

Exercice 4

1/ $e^{\ln|x|}=|x|.\ x\in\mathbb{R}^*$

2/

*/ $e^{|\ln x|}=e^{\ln x}$ si $x\geq 1$

$=x$

*/ $e^{|\ln x|}=e^{-\ln x}$ si $x\leq 1$

$=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$.

Donc

$e^{|\ln x|}=x$ si $x\geq 1$

$e^{|\ln x|}=\frac{1}{x}$ si $0<x\leq 1$

3/ $\ln e^{|x|}=|x|.x\in\mathbb{R}$.

Exercice 5

$P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

1) */ $P(3)=3^3-3.3^2-4\times 3+12$

$=27-27-12+12=0$

Donc 3 est une racine.

*/ $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-3 \Rightarrow b=3a-3=0 \\ c-3b=-4 \\ -3c=12 \Rightarrow c=-4 \end{cases}$$

Donc $\boxed{a=1, b=0, c=-4}$

D'où $P(x)=(x-3)(x^2-4)$

2) $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ Où $x^2=4$

$\Leftrightarrow x=3$ où $x=2$ où $x=-2$

$S=\{-2,2,3\}$

3) $e^{3x}-3e^{2x}-4e^x+12=0$

$\Leftrightarrow (e^x)^3-3(e^x)^2-4e^x+12=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X^3-3X^2-4X+12=0 \\ X=e^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^x=-2$ ou $e^x=2$ ou $e^x=3$.

On a : $e^x=-2<0$ impossible car $e^x>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Donc : $e^x=2$ ou $e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 2$ où $x=\ln 3$.

$S=\{\ln 2, \ln 3\}$

Exercice 6

*/ $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=2$. Cette équation existe si $\dfrac{x+1}{x+2}>0$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x+1}{x+2}$	$+$ //////	‖	$-$	0	$+$ //////

Pour $x \in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[= J$

On a : $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+2}=e^2$

$\Leftrightarrow (x+1)=e^2(x+2)$

$\Leftrightarrow x-e^2x=2e^2-1$

$\Leftrightarrow x(1-e^2)=2e^2-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2e^2-1}{1-e^2}$

$\dfrac{2e^2-1}{1-e^2}=\dfrac{2(e^2-1)+1}{1-e^2}$

$=-2+\dfrac{1}{1-e^2}=-2-\underbrace{\dfrac{1}{e^2-1}}_{\text{positif}}<-2$

donc $x=\dfrac{2e^2-1}{1-e^2}\in J$

(On peut utiliser la calculatrice pour vérifier que $\dfrac{2e^2-1}{1-e^2}<-2$)

Donc $S=\left\{\dfrac{2e^2-1}{1-e^2}\right\}$

*/ $e^{3x+4}=4 \Leftrightarrow 3x+4=\ln 4, x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3x=\ln 4-4=\ln 2^2-4=2\ln 2-4$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\ln 2-4}{3}=\dfrac{2(\ln 2-2)}{3}$

$S=\left\{\dfrac{2}{3}(\ln 2-2)\right\}$.

*/ $e^x-e^{-x}=\dfrac{15}{4}, x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x(e^x-e^{-x})=\dfrac{15}{4}e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-1=\dfrac{15}{4}e^x$

$\Leftrightarrow 4(e^x)^2-15e^x-4=0$

$\Delta=(-15)^2+64=289=17^2$

Donc :

$e^x=\dfrac{15+17}{8}=4$ ou $e^x=\dfrac{15-17}{8}<0$ impossible.

$\Rightarrow x=\ln 4=2\ln 2$

Donc $S=\{2\ln 2\}$

*/ $e^{2x}-4e^x-5=0$ on a $a-b+c=0$

Donc $e^x=-1$ ou $e^x=5$

$e^{2x} - 4e^{x} - 5 = \left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-5\right) > 0$

On sait que $e^{x} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{x} - 5 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

$S = \left]\ln 5, +\infty\right[$

*/ $\left|e^{x-1}-1\right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq e^{x-1} - 1 \leq 3$

$-2 \leq e^{x-1} \leq 4$ on a :

$e^{x-1} \geq -2$ Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{x-1} \leq 4 \Leftrightarrow x - 1 \leq \ln 4 = 2\ln 2.$

$\Leftrightarrow x \leq 1 + 2\ln 2$. Donc $S = \left]-\infty, 1+2\ln 2\right]$

*/ $2e^{3x-1} - 3e^{2x-1} + e^{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow 2e^{3x}.e^{-1} - 3e^{2x}e^{-1} + e^{x}.e^{-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-1}\left(2e^{3x} - 3e^{2x} + e^{x}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \times e^{x}\left(2e^{2x} - 3e^{x} + 1\right) \leq 0$, et $e^{-1} \times e^{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^{x} + 1 \leq 0$

On a : $2e^{3x} - 3e^{2x} + e^{x} = 0$ or $a+b+c=0$

Donc : $e^{x} = 1$ ou $e^{x} = \frac{1}{2}$

Ce qui donne $x = 0$ où $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$2e^{3x} - 3e^{2x} + e^{x} = 2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$e^{x}-\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2e^{3x}-3e^{2x}+e^{x}$		$+$	0	$-$ //////	0	$+$	

$S = \left[-\ln 2, 0\right]$.

Exercice 7

1) */ $f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)\times(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

*/ $g(x) = x^{2}e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = \left(x^{2}\right)'.e^{-x} + x^{2}.\left(e^{-x}\right)'$

$= 2xe^{-x} - x^{2}e^{-x} = e^{-x}\left(2x - x^{2}\right) = g'(x)$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x - x^{2}$ car $e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2}e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}e^{-x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2}}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^{x}}{x^{2}}}_{+\infty}} = 0.$

2) Branches infinies :

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\Rightarrow C_f$ Admet une branche infinie parabolique

De direction $\left(o, \vec{j}\right)$.

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Donc C_g admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.

*/ Position relative de C_f et C_g.

$g(x)-f(x)=x^2e^{-x}-xe^{-x}=xe^{-x}(x-1)$

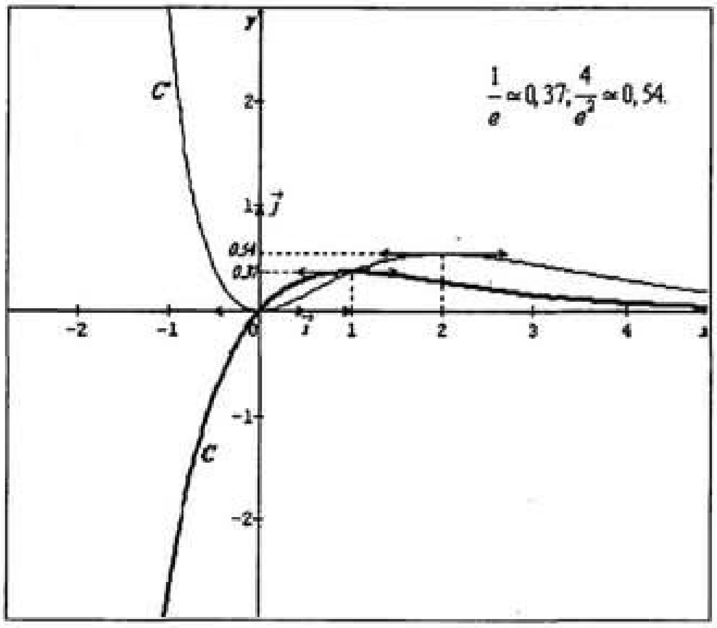
Le signe de $g(x)-f(x)$ est celui de

$x(x-1)$ car $e^{-x}>0$ donc :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g(x)-f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Position	C_g/C_f	$(0,0)$	C_f/C_g	$(1,e^{-1})$	C_g/C_f

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\Rightarrow y=0$ Asymptote pour C_f et C_g



Exercice 8

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}-2e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^{2x}-2\right)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2.\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2.\dfrac{1}{(\frac{e^x}{x})}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\frac{e^x}{x^3})}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\overbrace{e^{-x}}^{e^{-x}=0}+2x\right)==+\infty$

*/ Posons $t=\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(e^t-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=(1-0)\times e^0=1\times1=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3.\underbrace{\dfrac{e^{3x}}{3x}}_{+\infty}.-\overbrace{\dfrac{1}{x}}^{0}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}.\overbrace{\dfrac{e^x}{x^2}}^{+\infty}-\underbrace{\dfrac{1}{2x}}_{0}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-3}{e^x+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}\left(1-\dfrac{3}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{2x}{e^x}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\overbrace{\dfrac{3}{e^x}}^{0}}{1+\dfrac{2}{\underbrace{(\frac{e^x}{x})}_{+\infty}}}=\frac{1}{1}=1$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=1$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\underbrace{1-\frac{1}{e^x}}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

*/ $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ (formule)

*/ $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ (formule)

*/ $\lim_{x\to-\infty} x^2.e^{\frac{1}{x}} = +\infty\times 1 = +\infty$

*/ $\lim_{x\to-\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^x + \frac{1}{x}.e^x = 0+0=0$

*/ $\begin{cases} Posons\ X = x\ln 2 \\ x = \frac{X}{\ln 2}\end{cases}$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x} = \lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X.\frac{1}{\ln 2}}$

$= \lim_{X\to0}\frac{e^x-1}{x}.\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln 2}} = \ln 2.$

Remarque : $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x} = a\ ;a\in IR^*$

*/ • Pour $x>0$: posons $t=\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to0^+} x^2.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2} = +\infty$

• Pour $x<0$: posons $t=\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to0^-} x^2.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t^2}\times e^t = 0.$

Conclusion :

$\lim_{x\to0^-} x^2.e^{\frac{1}{x}} \neq \lim_{x\to0^+} x^2.e^{\frac{1}{x}}$. Donc

$x^2e^{\frac{1}{x}}$ n'a pas de limite en 0.

*/

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; posons $X=\frac{1}{x}$

$= \lim_{X\to+\infty}(1-X).e^X = -\infty$

*/ posons $X = 1+e^x$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X-1} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}.\frac{X}{X-1}$
$=0\times1=0$

*/ posons $X = 1+e^x$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln X}{X-1} = 1.$

*/ $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e(e^x-1)}{x}$

$= \lim_{x\to0}(e\times\frac{e^x-1}{x}) = e$

*/ $\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Posons $X=\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to-\infty}(1-X)e^X$
$= \lim_{X\to-\infty}(1-X)e^X = \lim_{X\to-\infty} e^X - Xe^X = 0$

*/ $\lim_{x\to0}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x = ?$

$\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x = +\infty.$

$\lim_{x\to0^-}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x = -\infty.$

Conclusion :

$\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x$ n'a pas de limite en 0.

*/

On a : $\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = (+\infty)\times(-\infty) = -\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to0^+} e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x} = 0$

Exercice 9

1) $f(x)=e^{-x^2+2x}$ $D_f=\mathbb{R}$.

la fonction $u: x \to u(x)=-x^2+2x$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R})=]-\infty,1]$ or la fonction e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,1]$

$$\boxed{(uov(x))'=v'(x)\times u'(v(x))}$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x)=(-x^2+2x)'e^{-x^2+2x}$$

$$\boxed{f'(x)=(-2x+2)e^{-x^2+2x}}$$

2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2-1}}$

f est définie si $x^2-1\neq 0$ donc $D_f=\setminus\{-1,1\}$

f est **dérivable** sur D_f (fonction composée donc même travail que la question précédente) et on a

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'.e^{\frac{-1}{x^2-1}}.$$

Or $\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'=-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)'$

$$=-\left(-\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{U'}{U^2}}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}e^{-\frac{1}{x^2-1}}}$

3) $f(x)=e^{\sqrt{x^2-x-2}}$ f est définie si : $x^2-x-2\geq 0$

On a : $x^2-x-2=0$, $a-b+c=0$

Donc $x'=-1$; $x''=-\frac{c}{a}=2$

Etude de signe :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.

f est dérivable si $x^2-x-2>0$

Donc pour $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'.e^{\sqrt{x^2-x-2}}$$

Avec $(\sqrt{x^2-x-2})'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

$$\boxed{\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Donc $\forall x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}e^{\sqrt{x^2-x-2}}}$$

4) $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

f est définie et dérivable si et seulement si $e^{2x}-1\neq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

D'où $D_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+1)'(e^{2x}-1)-(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-2e^{2x}(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\frac{2[e^{4x}-e^{2x}-e^{4x}-e^{2x}]}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{u^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}, x\in\mathbb{R}^*}$$

Exercice 10

$f(x)=2e^{2x}-e^x$.

1) $D_f=\mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x(2e^x-1)=+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} 2e^{2x}-e^{x}=0$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x)=4e^{2x}-e^{x}=e^{x}(4e^{x}-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$

□Si $x\geq \ln\frac{1}{4}$:

$\Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4e^{x}\geq 1$

$\Leftrightarrow 4e^{x}-1\geq 0$

f Strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

□Si $x\leq\ln\frac{1}{4}$:

$4e^{x}-1\leq 0$

f strictement décroissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{4}\right]$

$f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=2e^{2\ln\frac{1}{4}}-e^{\ln\frac{1}{4}}$

$=2e^{\ln\frac{1}{16}}-e^{\ln\frac{1}{4}}=2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{4}=-2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$-\frac{1}{8}$	↗ $+\infty$

3) $f(x)=0=2e^{2x}-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x}(2e^{x}-1)=0, e^{x}\neq 0\Leftrightarrow 2e^{x}-1=0$

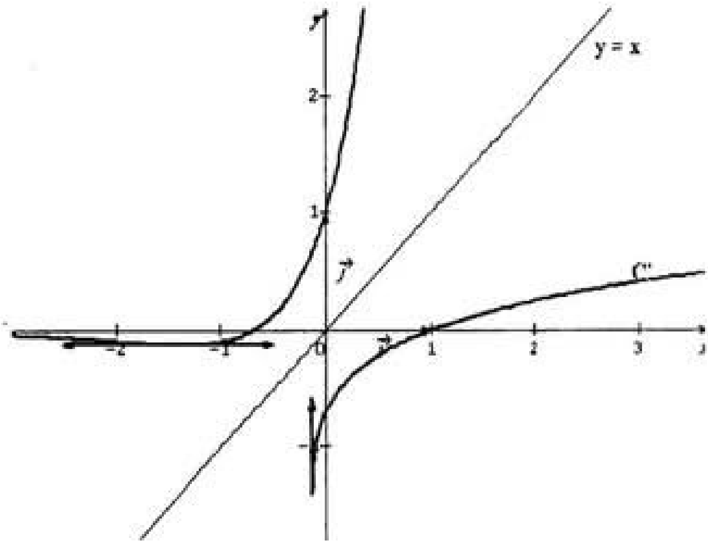
$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^{x}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(2e^{x}-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times(2e^{x}-1)$

$=+\infty\times(+\infty)=+\infty$

$\Rightarrow C$ admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.



5) $I=\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

a) g est continue et strictement croissante sur I donc g réalise une bijection réciproque g^{-1} définie sur J tel que

$J=g(I)=\left[g\left(\ln\frac{1}{4}\right),\lim_{x\to+\infty}g\right[=\left[-\frac{1}{8},+\infty\right[$

b) $C'=S_{\Delta}(C)$. avec $\Delta: y=x$.

c) $g(y)=x\Leftrightarrow y=g^{-1}(x)$, $y\in I, x\in J$

$g(y)=x\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}=x$

$\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}-x=0$ (*on cherche* y)

$\Delta=(-1)^{2}-4(-x)\times 2=1+8x$

$x\geq-\frac{1}{8}\Rightarrow 8x\geq-1\Rightarrow 8x+1\geq 0$

Donc :

$e^{y_1} = \dfrac{1+\sqrt{1+8x}}{4}$

$e^{y_2} = \dfrac{1-\sqrt{1+8x}}{4}$ (*impossible*)

Car par exemple pour $x=1$ on aura

$e^{y_2} = \dfrac{1-\sqrt{9}}{4} = -\dfrac{1}{2} \prec 0$

D'où

$y_1 = g^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+8x}}{4}\right) \quad , x \in J$

6) $F(x) = e^{2x} - e^{x} + cte.$

$F[\ln(0,5)] = e^{2\ln 0,5} - e^{\ln 0,5} + cte$

$= 0,25 - 0,5 + cte = -0,25 + cte = 0$

Donc $cte = 0,25$

$$\boxed{F(x) = e^{2x} - e^{x} + \frac{1}{4}}$$

Exercice 11

$f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

1)*/ $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x}+1 \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}\left(e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

2) $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) - f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} - \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

$= \dfrac{e^{-x}(e^{2x}+1) - e^{x}(e^{-2x}+1)}{(e^{-2x}+1)(e^{2x}+1)}$

$= \dfrac{(e^{x}+e^{-x}) - (e^{-x}+e^{x})}{(e^{-2x}+1)(e^{2x}+1)} = 0$

Donc : $f(-x) = f(x)$

D'où f est paire.

3) $f'(x) = \dfrac{(e^{x})'(e^{2x}+1) - (e^{2x}+1)'e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}.e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^{3x}+e^{x}-2e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{e^{x}-e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$

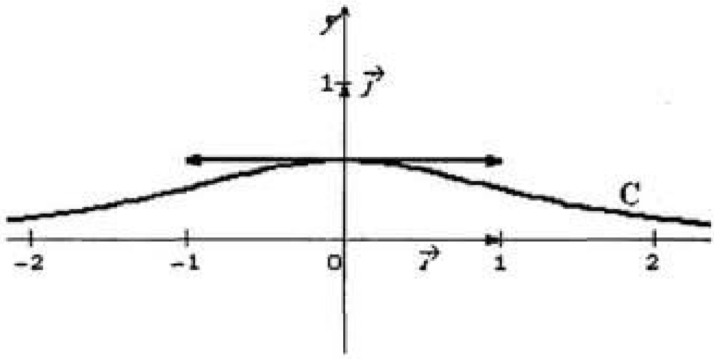
$f'(x) = \dfrac{e^{x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-e^{2x}$

T.V :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Courbe :



4) $g(x) = \ln(\tan x)$

$g'(x) = (1+\tan^2 x) \times \dfrac{1}{\tan x} > 0$

g est continue et strictement croissante

Sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ .donc g réalise une bijection

h définie sur J = $g\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$

On pose $\tan x = X$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\tan x)$

$= \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\tan x) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$$

D'où $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{0^+} g, \lim_{\frac{\pi}{2}} g\right[= \mathbb{R}$

5) a) g est strictement croissante sur

donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

de plus $g'(x) \neq 0. \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$$

$$= \frac{1}{\left[1+\tan^2 h(x)\right].\frac{1}{\tanh(x)}}$$

$$h'(x) = \frac{\tanh(x)}{1+\tan^2 h(x)}.$$

Or $g(h(x)) = x$ et $g(h(x)) = \ln|\tan h(x)|$

$\Leftrightarrow g(h(x)) = x = \ln(\tan[h(x)])$

$\Leftrightarrow \boxed{\tan(h(x)) = e^x}$

D'où

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Donc

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = f(x)}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

et par suite h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

1) f est définie si $e^x - 1 \neq 0$.

Or $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Donc $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 - \infty = -\infty$$

2)a) $x \in \mathbb{R}^*, 2\times 0 - x = -x \in \mathbb{R}^*$

$$f(2\times0-x) = f(-x) = 2\times(-x) + \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$$

$$= -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1} \times \frac{e^x}{e^x} = -2x + \frac{1}{1-e^x}$$

On a :

$$f(-x) + f(x) = -\cancel{2x} + \frac{1}{1-e^x} + \cancel{2x} + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

$$\left(f(-x) + f(x) = 1 = 2\times(0,5)\right)$$

Ce qui donne :

$$f(2\times0-x) = 2\times(0,5) - f(x)$$

Donc $I(0;0,5)$ est un centre de symétrie pour C.

b) $f'(x) = 2 + \frac{(e^x)'(e^x-1) - e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$$= 2 + \frac{e^x(e^x-1) - e^x.e^x}{(e^x-1)^2} = 2 + \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^x-1)^2 - e^x}{(e^x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(e^{x}-1\right)^{2}-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-4e^{x}+2-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-5e^{x}+2=0$

$\Delta=(-5)^{2}-4\times 2\times 2=25-16=9$

Donc $e^{x}=\dfrac{5+3}{4}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

ou

$e^{x}=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$

D'où : $2e^{2x}-5e^{x}+2=2\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}-\dfrac{1}{2}\right)$

T.V :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0			$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-2\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	$2\ln 2+2$	↗	$+\infty$

$f(\ln 2)=2\ln 2+\dfrac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}$

$=2\ln 2+\dfrac{2}{2-1}=2\ln 2+2$

$f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{\ln\frac{1}{2}}}{e^{\ln\frac{1}{2}}-1}=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$

$=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=2\ln\dfrac{1}{2}-1=-2\ln 2-1$

On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=0$

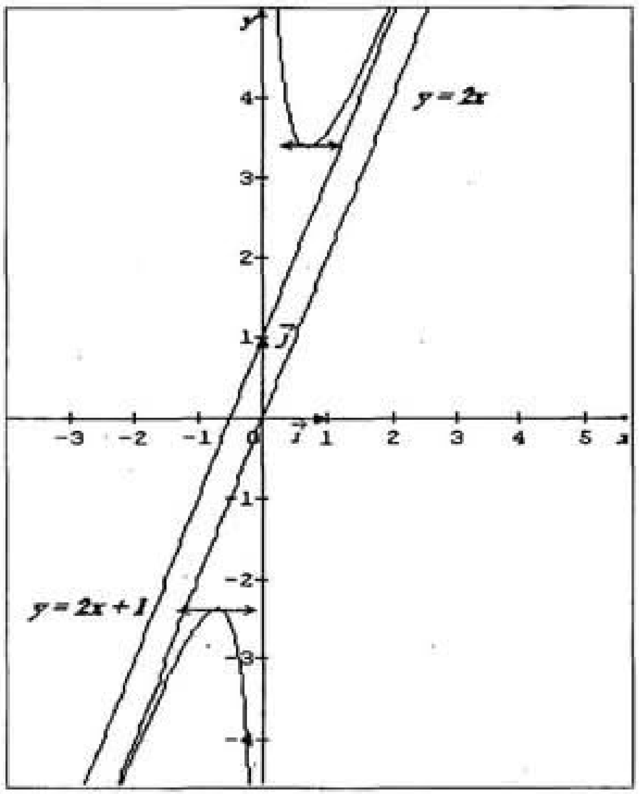
$\Leftrightarrow \Delta : y=2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=1$

$\Leftrightarrow \Delta' : y=2x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

Remarque : on pourra étudier f et tracer C_f sur

$]0,+\infty[$ puisque $I(0;0,5)$ est un centre de symétrie.



3) $2xe^{x}+(1-k)e^{x}-2x+k=0$

$\Leftrightarrow$

$2xe^{x}+e^{x}-ke^{x}-2x+k=0$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^{x}-1\right)+k\left(1-e^{x}\right)+e^{x}=0$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^{x}-1\right)+e^{x}=-k\left(1-e^{x}\right)$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^{x}-1\right)+e^{x}=k\left(e^{x}-1\right),\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1}+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=k.\dfrac{\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1}$

$\Leftrightarrow$

$$2x+\frac{e^x}{e^x-1}=k \Leftrightarrow f(x)=k.$$

Graphiquement on a :

*/ si $k=2\ln\frac{1}{2}-1$ ou $k=2\ln 2+2$

On a une seule solution.

*/ si $k\in\left]2\ln\frac{1}{2}-1;2\ln 2+2\right[$.

Aucune solution.

*/ si $k>2\ln 2+2$ ou $k<2\ln\frac{1}{2}-1$

On a deux solutions.

Exercice 13

$f(x)=e^x+e^{-x}-2$ $\qquad$ $g(x)=e^x-e^{-x}$

$D_f=$□ $\qquad$, $\qquad$ $D_g=$□.

1) Variations de f:

$f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Variations de g :

$g'(x)=e^x+e^{-x}>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-e^{-x}=-\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Rmq : on pourra remarquer que :

*/ f est une fonction paire.

*/ g est une fonction impaire.

Donc l'étude peut se faire seulement sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\frac{e^{-x}}{x}-\frac{2}{x}$

$=+\infty+0-0=+\infty$

C_f admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{e^{-x}}{x}=+\infty-\frac{0}{+\infty}=+\infty$

C_g admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.

(Rmq : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$)

3)a) g est continue et strictement croissante sur IR

Donc g est une bijection de □ sur□ .

b) g est dérivable sur□ et $g'(x)\neq 0,\forall x\in$□ .

Donc g^{-1} est dérivable sur□ .

c) $1{,}5\in$□ donc g^{-1} est dérivable en

$1{,}5$ et $\left(g^{-1}\right)'(1{,}5)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(1{,}5)\right)}$

Or $g^{-1}(1{,}5)=x\Leftrightarrow g(x)=1{,}5$

$e^x-e^{-x}=1{,}5\Leftrightarrow e^{2x}-1=\frac{3}{2}e^x$

$\Leftrightarrow e^{2x}-\frac{3}{2}e^x-1=0$

$\Delta=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4},\sqrt{\Delta}=\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} e^x=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{8}{4}=2 \\ ou \\ e^x=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\dfrac{1}{2},\ imp \end{cases}$$

Donc $e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$ et par suite

$$\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\frac{1}{g'(\ln 2)}=\frac{1}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}$$
$$=\frac{1}{2+e^{\ln\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$
$$\boxed{\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\frac{2}{3}}$$

4) notons f_1 la restriction de f à $[0,+\infty[$.
f_1 est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[\Rightarrow f_1$ est une bijection réciproque de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

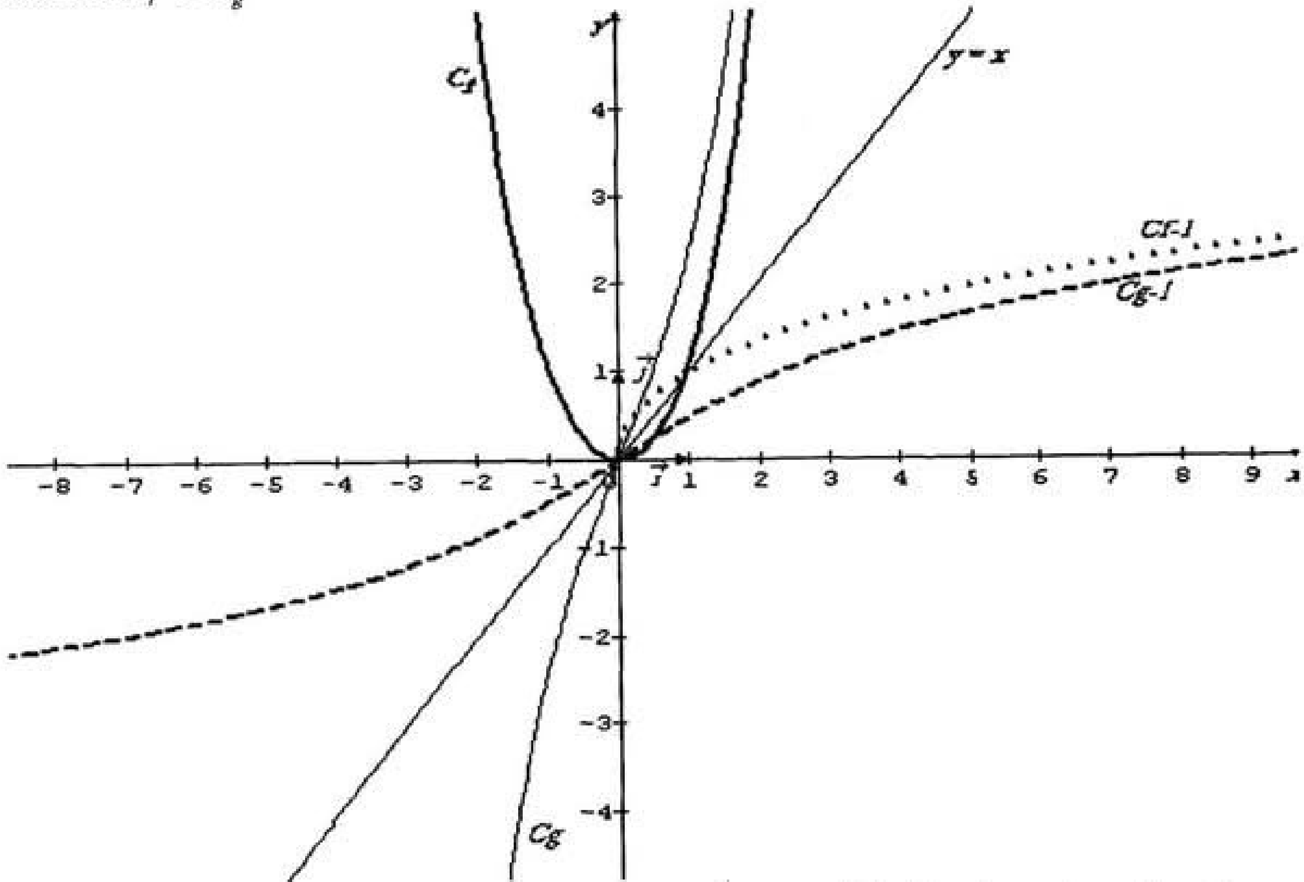
T.V :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(f_1^{-1})'(x)$	$+$
$f_1^{-1}(x)$	$0 \nearrow +\infty$

On a : f_1 et f_1^{-1} ont même sens de variation.

$$C_{f_1^{-1}}=S_{\Delta(y=x)}\left(C_{f1}\right)\ ,\ C_{g^{-1}}=S_{\Delta(y=x)}\left(C_g\right)$$

Courbe : C_f et C_g



Exercice 14

$f(x)=x-1+e^{-x}$

1) $Df=\mathbb{R}$

$f'(x)=(x-1)'+\left(e^{-x}\right)'=1-e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow e^{-x}=1 \Leftrightarrow x=0$

Pour $x\le 0 \Leftrightarrow -x\ge 0 \Leftrightarrow e^{-x}\ge 1 \Leftrightarrow 1-e^{-x}\le 0$

Pour $x\ge 0 \Leftrightarrow -x\le 0 \Leftrightarrow e^{-x}\le 1 \Leftrightarrow 1-e^{-x}\ge 0$

T.V :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 + e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + e^{-x} = ?\ F.I(-\infty + \infty)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\underbrace{xe^{x}}_{0^-}}\right) = +\infty$

Ou bien :

Posons $X = -x \Rightarrow x = -X$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} -X - 1 + e^{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} X\left(-1 - \dfrac{1}{X} + \dfrac{e^X}{X}\right) = +\infty$

<u>Etude des Branches infinies :</u>

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1 + e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{\text{monome de plus haut degré}} + \dfrac{1}{xe^{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -1 + e^{-x} = -1$

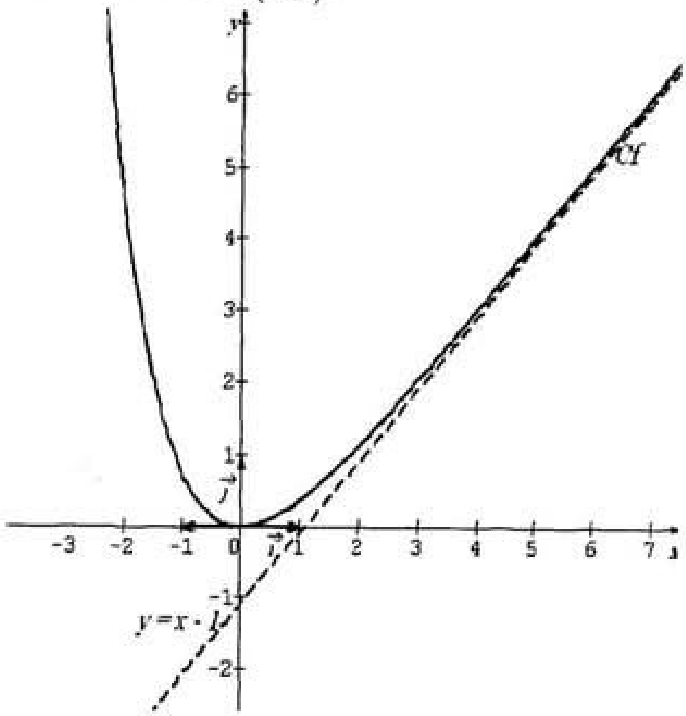
Donc $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1 + e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}, X = -x$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-X-1}{-X} + \dfrac{e^{X}}{-x} = 1 - \infty = -\infty$

Au voisinage de $-\infty$ C_f admet une B.I.P de direction celle de $(o, \vec{j})$.



2) $f(0) = 0$??

Exercice 15

$$\begin{cases} f(x) = xe^{2x+1}, x \le 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x), x > 0 \end{cases}$$

1) */ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - x\ln x = 0 = f(0)$

Donc f est continue a droite en 0.

*/ $\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{2x+1} = 0 = f(0)$

Donc f est continue a gauche en 0.

<u>**Conclusion :**</u>

f est continue a en 0.

2) */ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(1-\ln x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln x = +\infty$

f non dérivable a droite en 0.

*/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{xe^{2x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x+1} = e$

Donc f est dérivable a gauche en 0

et $f_g'(0)=e$

Conclusion :

f non dérivable en $x_0=0$.

3) •Pour $x<0$:

$f'(x)=(x)'e^{2x+1}+x(2x+1)'e^{2x+1}$

$=e^{2x+1}+2xe^{2x+1}$

$\Leftrightarrow f'(x)=(2x+1)e^{2x+1}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de

$(2x+1)$ Car $e^{2x+1}>0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$2x+1$		$-$	0	$+$	

• Pour $x>0$:

$f'(x)=(x)'(1-\ln x)+x(1-\ln x)'$

$=1-\ln x+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)=1-\ln x-1=-\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	||	$+$	0	$-$	

Conclusion :

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{x}).e^{x+1} = 0$ $\boxed{e^a.e^b = e^{a+b}}$

$f(1)=1(1-\ln 1)=1$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\times 2+1} = -\dfrac{1}{2}e^{-1+1}$

$= -\dfrac{1}{2}e^{0} = -\dfrac{1}{2}$

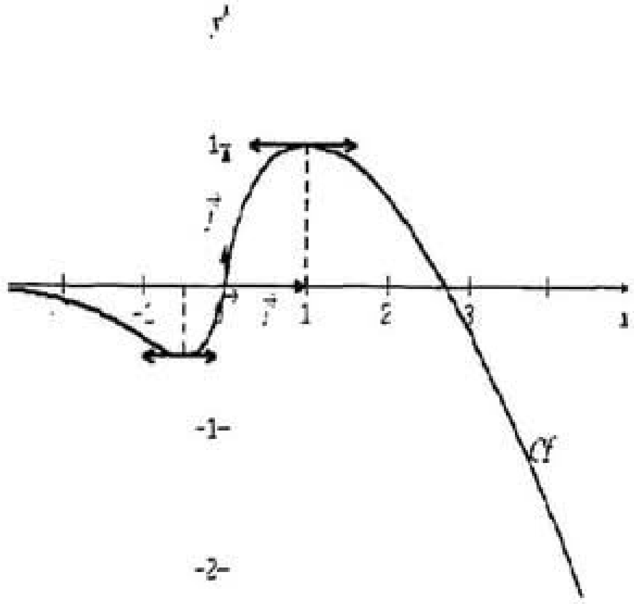
4)*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ est une Asymptote a C_f au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = +\infty$

C_f Admet une B.I.P au voisinage de $+\infty$ de direction celle de $(o,\vec{j})$

Courbe :



Pour $x>0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0$
$\Leftrightarrow x=e$

Exercice 16

$f(x)=\sqrt{1-e^{2x}}$

1) $1-e^{2x}\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq e^{2x} \Leftrightarrow 0\geq 2x \Leftrightarrow x\leq 0$
Donc $Df = D =]-\infty,0]$

$x\in]-\infty,0[$ On a : $-x\geq 0$ et

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}$$
$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{x^2}}\left(\sqrt{x^2}=|x|=-x; x\leq 0\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}\,\sqrt{-x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{\frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{2x}}$$

Donc : $x\in]-\infty,0[=D-\{0\}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$$

ou bien :

$x\in \mathbb{R}_-^* = D-\{0\}$

$$-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}.\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}}$$
$$=-1\times\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{(-x)^2}}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{|x|}$$
$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

2) on a :
on pose $t=2x$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$$

Donc : $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$$
$$=\frac{-1}{0^+}.\sqrt{2}=-\infty$$

f Non dérivable a gauche en 0 et par la suite C_f admet une demi-tangente Verticale érigé vers le haut (ordonné positif) au point d'abscisse0

3) $$f'(x)=\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\ ,x<0$$
$$=-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\leq 0.$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 0
$f(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-e^{2x}} = 1$.

4) a) f continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc f admet une fonction Réciproque f^{-1} définie sur

$f(]-\infty,0]) = [\ f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f\ [\ = [0,1[= E$

b) $y \in]-\infty, 0], x \in [0,1[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

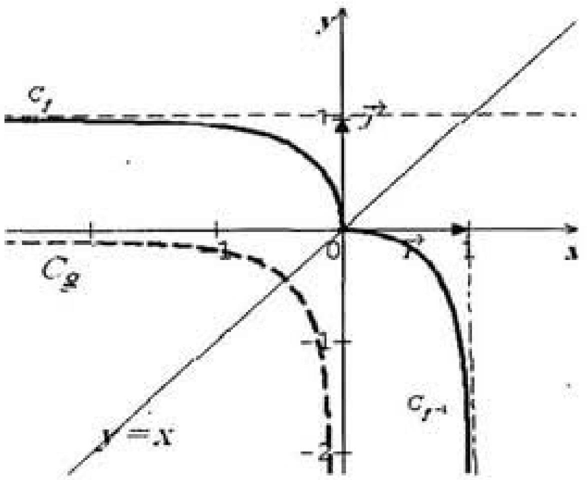
On a : $f(y) = \sqrt{1-e^{2y}} = x$

$\Leftrightarrow 1 - e^{2y} = x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = e^{2y}$

$\Leftrightarrow \ln(1-x^2) = 2y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = y$

D'où $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2), x \in [0,1[}$

c) Courbe :



5) $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x} - 1)$

a) Soit $x \in]-\infty, 0[$

$\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left[e^{2x}(e^{-2x}-1)\right]\right]$ $\qquad$ $\underline{\ln ab = \ln a + \ln b}$

$= \frac{1}{2}\ln e^{2x} + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1)$

Or $\underline{\ln e^{2x} = 2x}$

Donc $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1) \quad \forall\, x \in D\text{-}\{0\}$

b/ $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ et $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ $x \in]-\infty, 0[$

Donc $g'(x) < 0$

T.V :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 0
$g(x)$	$+$
$gf(x)$	$0 \searrow -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(f(x))$, *on* pose $X = f(x)$

$= \lim\limits_{X\to1} \ln X = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ln(f(x))$

$= \lim\limits_{X\to0^+} \ln X$ (*on pose* $X = f(x) > 0$)

$= -\infty$

$y = 0$ et $x = 0$ sont deux asymptotes à C_g.

Exercice 17

$g(x) = -x - 1 + e^x$

1) $g'(x) = -1 + e^x$

$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

le signe de $g'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

- Si $x \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

Donc g est strictement croissante

- Si $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x - 1 \leq 0$

Donc g est strictement décroissante

2) $g'(x)$ s'annule en 0 et change de Signe donc g admet en o un minimum absolue atteint $g(0)=0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ; g(x) \geq 0$

D'où

$-x-1+e^{x} \geq 0 \Rightarrow e^{x} \geq 1+x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e^{x}} \leq \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$

3) $f(x) = \ln(1+x) + e^{-x}$

a) $Df =]-1,+\infty[$

*/ $\lim\limits_{x \to (-1)^{+}} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to (-1)^{+}} \ln(1+x) + e^{-x}; X = 1+x; -x = 1-X$

$\lim\limits_{X \to 0^{+}} \ln X + e^{1-X} = -\infty$

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) + e^{-x} = +\infty$

b/ $f'(x) = \dfrac{(1+x)'}{1+x} - e^{-x} = \dfrac{1}{1+x} - e^{-x}$.

Or d'après la question 2) $e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$

Donc $f'(x) \geq 0$

x	-1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

c) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 0(x-0)+1$

$\boxed{T : y = 1}$

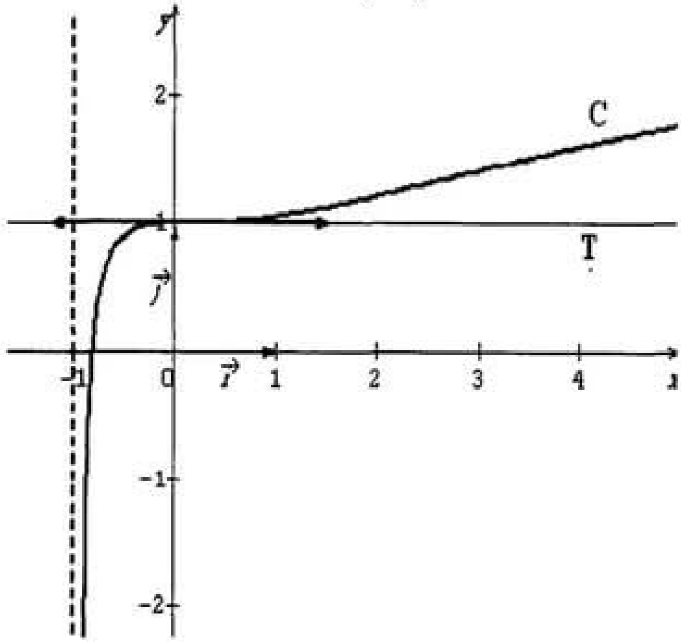
Courbe :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{xe^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{xe^{x}}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad (t = x+1)$$

Donc C admet une B.I.P (branche infinie parabolique) de direction $(o, \vec{j})$



Exercice 18 ?

1) la lame de verre absorbe 4% de la lumière donc la proportion de la lumière incidente qui traverse une lame est 96%.
la deuxième lame de verre absorbe 4% de 96% donc la lumière incidente qui traverse la deuxième lame est :

$\dfrac{96}{100} \times \dfrac{4}{100} = \dfrac{384}{100}$ C'est-à-dire 3,84%

Donc pour 2 lames : la lumière incidente est : $(96-3,84)\% = 92,16\%$.

C'est-à-dire : $\left(\dfrac{96}{100}\right)^{2} = \dfrac{92,16}{100}$

Donc la lumière incidente qui traverse 20 lames est $\left(\dfrac{96}{100}\right)^{20} \approx 44,2\%$

2) 40% de la lumière incidente absorbée
Donc 60% de la lumière traverse les n lames.

$\left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{40}{100}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{96}{100}\right)^n = \ln\left(\frac{40}{100}\right)$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{96}{100}\right) = \ln\frac{4}{10}$

$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.96} \simeq 22,44$

il faut avoir 22 lames.

Exercice 19

$f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$

1) on a : $f(x) = e^{x\ln 3}$

$f'(x) = \ln 3 . e^{x\ln 3} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, (\ln 3 > 0)$

T.V :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

Branches infinies :

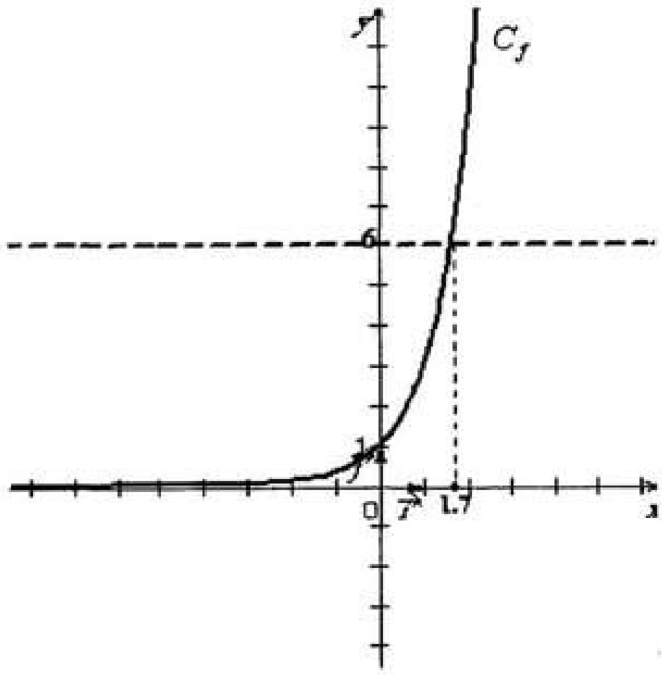
*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln 3 \frac{e^{x\ln 3}}{x\ln 3} \overset{t=x\ln 3}{=} \lim\limits_{X\to+\infty} \ln 3 . \frac{e^t}{t} = +\infty$

$\Rightarrow C_f$ Admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.

Courbe



2) */ graphiquement : les solutions de l'inéquation

$3^x \leq 6$ sont les abscisses des points de C_f

situées au dessous de la droite $\Delta : y = 6$.

Donc $S =]-\infty; 1,7]$

*/ par calcul :

$3^x \leq 6 \Leftrightarrow e^{x\ln 3} \leq 6$
(la fonction $\ln x$ est croissante)

Donc $\ln\left(e^{x\ln 3}\right) \leq \ln 6$

$\Leftrightarrow x\ln 3 \leq \ln 6$ $\boxed{\ln e^a = a}$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 6}{\ln 3}, (\ln 3 > 0)$

$S = \left]-\infty, \frac{\ln 6}{\ln 3}\right]$ Avec $\frac{\ln 6}{\ln 3} \simeq 1,63$.

Exercice 20

$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, x \in \mathbb{R}$

1) $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right)^x < 0$

Car $\frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \ln\frac{1}{5} < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln \frac{1}{5}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x \ln 5}$

$= \lim\limits_{X \to -\infty} e^X, (X = -x \ln 5)$

$= 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x \ln 5}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

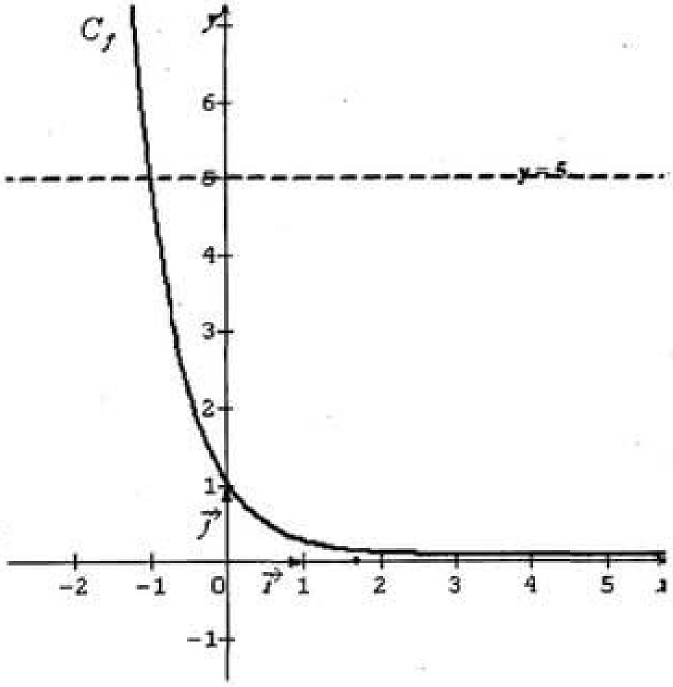
T.V :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x\ln 5}}{x}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln 5 \frac{e^X}{X} = -\infty \quad (X = -x \ln 5)$

$\Rightarrow C_f$ Admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$ et $y=0$ est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$



2) <u>graphiquement</u> :

les solutions de l'inéquation $(\frac{1}{5})^x \leq 5$

Sont les abscisses des points de C_f

Situées au dessous de la droite $\Delta : y = 6$.

Donc $S = [-1, +\infty[$.

<u>Par calcul :</u>

$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 5 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \ln 5 \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln 5$

$\Leftrightarrow -x \ln 5 \leq \ln 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 5}{-\ln 5} = -1$

Donc $S = [-1, +\infty[$.

Exercice 21

NB : les valeurs données dans la troisième question sont des valeurs approchées par défaut

$f(x) = e^{-x}.\sin(2x)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$

Donc : $-e^{-x} \le e^{-x}.\sin 2x \le e^{-x}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{-e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}}$$

2) */ $f(x+\pi) = e^{-(x+\pi)}.\sin(2x+2\pi)$

$= e^{-x}.e^{-\pi}.\sin 2x$

Donc : $\boxed{f(x+\pi) = \frac{1}{e^{\pi}}.f(x)}$

*/ $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.\sin\left(2(x+\frac{\pi}{2})\right)$

$\overset{e^{a+b}=e^a e^b}{=} e^{-x}.e^{-\frac{\pi}{2}}.(-\sin(2x+\pi))$

$\overset{\sin(a+\pi)=-\sin a}{=} e^{-\frac{\pi}{2}} \times \left[e^{-x}(-\sin 2x)\right]$

Or $e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{(e^{\pi})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$

Donc $\boxed{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}.f(x)}$

3) sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$:

f est dérivable et on a :

$f'(x) = (e^{-x})'.\sin 2x + e^{-x}.(\sin 2x)'$

$= -e^{-x}.\sin 2x + e^{-x}.(2\cos 2x)$

$= (2\cos 2x - \sin 2x).e^{-x}$

Comme on a : $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ alors :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2\cos 2x - \sin 2x)$

On a : $2\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \tan 2x = 2$???

La fonction *tan2x* est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ avec la calculatrice on cherche une valeur de x dans $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$

(la calculatrice donne :

$\tan\frac{5\pi}{14} \approx 2.076$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\frac{99\pi}{280} \approx 2.018 \\ \tan\frac{7\pi}{20} = \tan\frac{98\pi}{280} \approx 1.962\end{array}\right\} \text{et } 1.962 \le 2 \le 2.018$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la valeur de x chercher se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{98\pi}{560},\frac{99\pi}{560}\right]$

Pour les variations et le traçage de la courbe on une valeur approché de x par défaut

$x \simeq \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2}$, k $\in \mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2} \le \pi$

$-\frac{1}{2} \le \frac{7}{40} + \frac{k}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{7}{40} \le \frac{k}{2} \le 1 - \frac{7}{40}$

$\Leftrightarrow -1 - \frac{7}{20} \le k \le 2 - \frac{7}{20} \Leftrightarrow -1.35 \le k \le 1.65$

$\Rightarrow k = 0$ ou $k = -1$ *ou* $k = 1$

Donc $x \simeq \frac{7\pi}{40}$; $x \simeq -\frac{13\pi}{40}$ ou $x \simeq \frac{27\pi}{40}$

Tableau des variations de f

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{13\pi}{40}$		$\frac{7\pi}{40}$		$\frac{27\pi}{40}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2.4	↗	0.5	↘	-0.13	↗	0

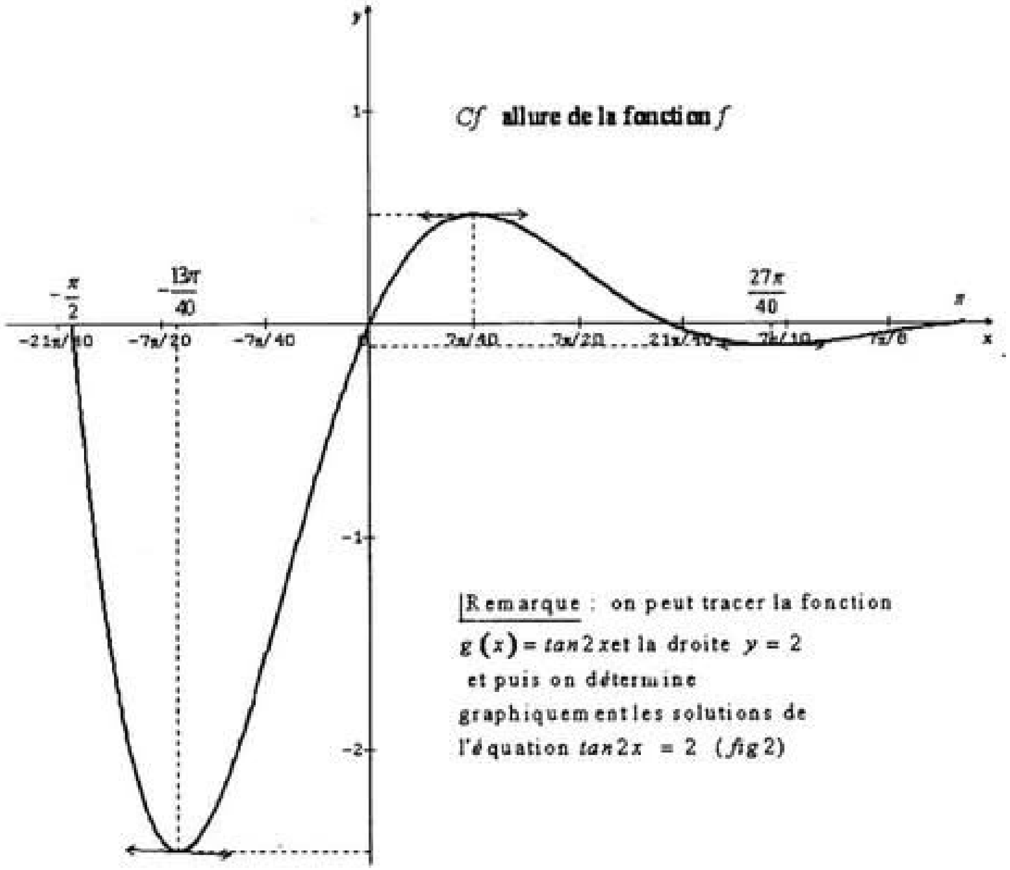
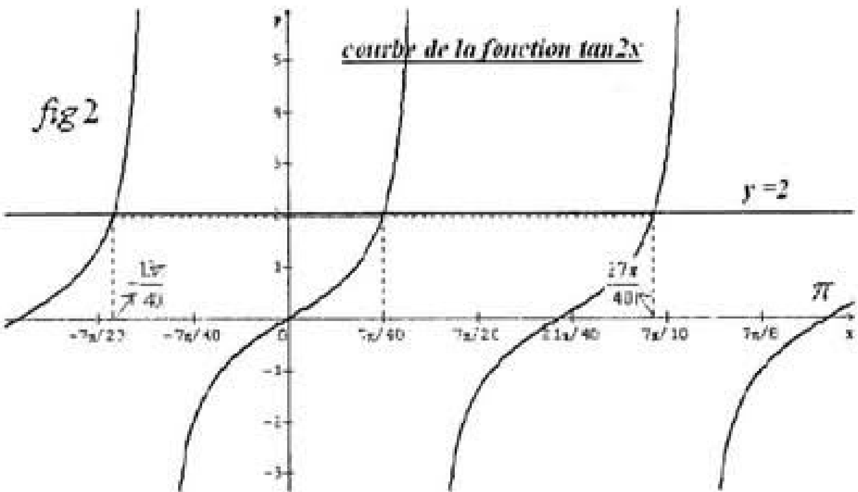


fig 2



Exercice 22

1) $g(x)=e^{2x}-e^{x}+1,\ x\in\mathbb{R}$

a) $g'(x)=2e^{2x}-e^{x}$

$=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

Comme $e^{x}>0$ Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^{x}-1$.

Or $2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}$

T.V :

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$

*/ $g\left(\ln\frac{1}{2}\right)=e^{2\ln\frac{1}{2}}-e^{\ln\frac{1}{2}}+1$

$=e^{\ln\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

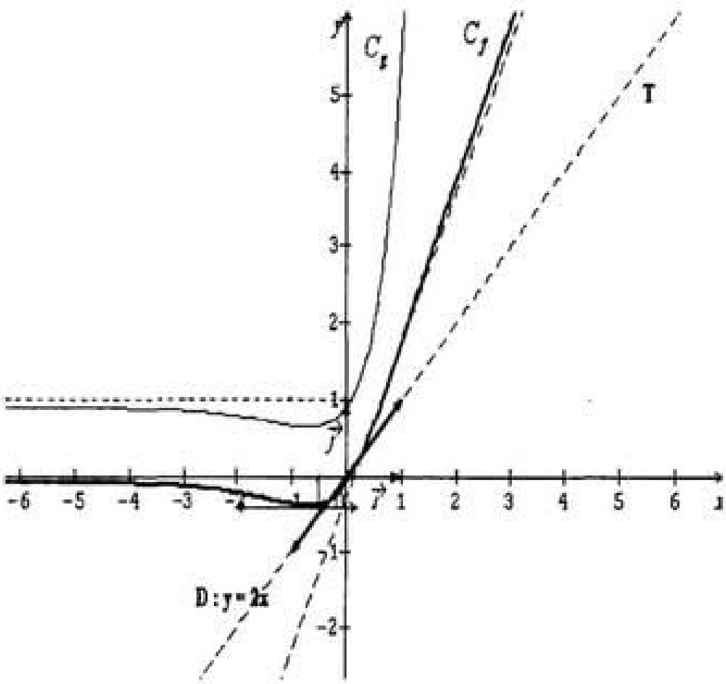
*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$
$= 0 - 0 + 1 = 1$

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}\left(e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$ est une asymptote à Cg

On a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{1}{x}$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}\left(\dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^{x}}\right) = +\infty$

Donc C_g admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$.



c) $k \in \mathbb{R}$;
$(E): e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} + 1 = k$

Donc l'équation (E) est équivalente à
$g(x) = k$

- Si $k \in \left]0, \dfrac{3}{4}\right[$:
 L'équation n'a pas des solutions.
- Si $k \in [1, +\infty[\cap \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$:
 L'équation admet une seule solution
- Si $k \in \left]\dfrac{3}{4}, 1\right[$:
 l'équation admet deux solutions.

<u>Remarque :</u> les solutions de $g(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de C_g et $\Delta : y = k$.

2) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right), x \in \mathbb{R}$

a)
$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$
$$= \ln\left[e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right]$$
$$= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$$
$$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$
$= \ln(1) = 0$.

Donc : $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) = \ln\left(g(x)\right)$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Puisque $g(x) > \dfrac{3}{4}$ (voir variation de g)

Alors $g(x) > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$

Donc f et g ont même sens de variation

D'où :

f est strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{2},+\infty\right[$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(g(x))=\ln(1)=0$

$\Rightarrow y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $-\infty$.

Soit T la tangente a C_f au point $O(0,0)$.

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

T: $\boxed{y=x}$

$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\ln\left(g\left(\ln\frac{1}{2}\right)\right)=\ln\frac{3}{4}$

(voir courbe au dessus)

Exercice 23

$f(x)=\sqrt{1+x}.e^{-x}, x\in[-1,+\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}.e^{-x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}^2.e^{-x}}{\sqrt{1+x}(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{e}{0^+}=+\infty$

f non dérivable à droite en -1.

b) la courbe représentative C_f admet au point d'abscisse (-1) une demi tangente verticale dirigé vers le haut

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}$, $\qquad X=-x$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(\sqrt{1-X}.e^{X})\times\dfrac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{(1-X)e^{X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{e^{X}-Xe^{X}}{\sqrt{1-X}}=0$

<u>Ou bien</u> : on sait que $\sqrt{e^{-2x}}=e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(1+x).e^{-2x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}}+\dfrac{x}{e^{2x}}}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{X}{2e^{X}}}; X=2x$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{1}{2\dfrac{e^{X}}{X}}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $+\infty$.

2) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$f'(x)=\sqrt{1+x}'e^{-x}+\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}e^{-x}-\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\sqrt{1+x}\right)$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1-2(1+x)}{2\sqrt{1+x}}\right)$

$f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}(-1-2x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-1-2x$

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{2}}.e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{e}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}$

3) soit T la tangente au point O.

T a pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$\boxed{T: y=-\frac{1}{2}x+1}$

4) l'équation $f(x)=x$ est équivalente à

$f(x)-x=0$.

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a : $g'(x)=f'(x)-1$

Comme $x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ alors $f'(x)\leq 0$

Donc $g'(x)\leq 0$. et par suite g est une bijection de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur

$g\left(\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]\lim_{+\infty} g, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$=\left]-\infty,\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}\right]$

Avec : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}$

Comme $0\in\left]-\infty,\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}\right]$

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et par suite $f(x)=x$: admet une unique solution $\alpha\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

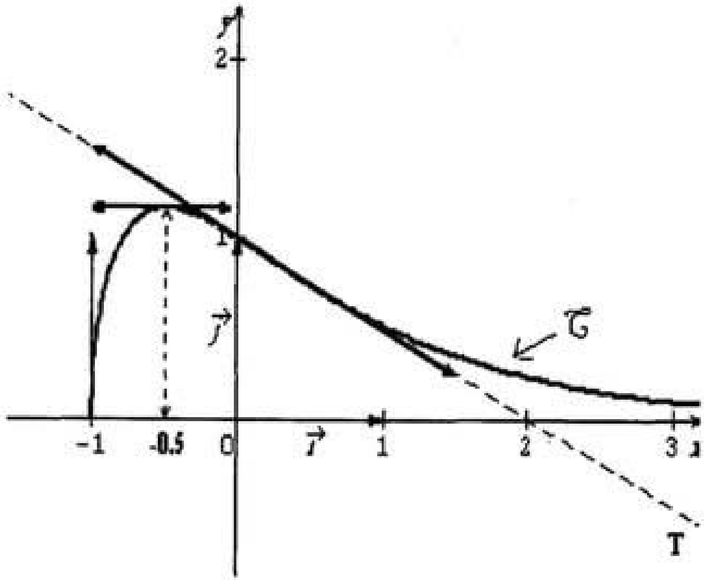
$g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\times\left[f(1)-1\right]$

$=\left[\sqrt{\frac{3}{2}}.e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]\times\left[\sqrt{2}.e^{-1}-1\right]$

$\square\ (0,25)\times(-0,47)\leq 0$

Donc $\boxed{\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[}$

5)



Exercice 24

$f(x)=2e^{-x}+x-2$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x}+x-2$

$=\lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{e^{x}}+x-2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^{-x}+x-2;(X=-x)$

$=\lim_{X\to+\infty} 2e^{X}-X-2$

$=\lim_{X\to+\infty} X\left(2.\frac{e^{X}}{X}-1-\frac{2}{X}\right)=+\infty$

2) a) $-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow 2e^{-x}<1$

$\Leftrightarrow e^{-x}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right)<\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x<\ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>-\ln\frac{1}{2}=-(-\ln 2)$

Donc $x>\ln 2$ et par suite $S_{\square}=\left]\ln 2,+\infty\right[$

b) f est dérivable sur $\square$ et :

$f'(x)=\left(2e^{-x}+x-2\right)'=-2e^{-x}+1$

$f'(x)=0=-2e^{-x}+1 \Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -x=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2)=2e^{-\ln 2}+\ln 2-2$

$=2e^{\ln\frac{1}{2}}+\ln 2-2$

$=2\times\frac{1}{2}+\ln 2-2$

$\boxed{f(\ln 2)=\ln 2-1}$

c) */ f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty,\ln 2\right]$, $0\in\left[\ln 2-1,+\infty\right[$ et $f(0)=0$
Donc 0 est l'unique solution de $f(x)=0$ dans $\left]-\infty,\ln 2\right]$.

*/ f est continue et strictement croissante sur $\left[\ln 2,+\infty\right[$ .d'où f est une bijection de $\left[\ln 2,+\infty\right[$ dans $\left[\ln 2-1,+\infty\right[$
$0\in\left[\ln 2-1,+\infty\right[$ Donc l'équation $f(x)=0$ Admet une seule solution $\alpha\in\left[\ln 2,+\infty\right[$.

$f(1,5)\times f(1,6)\square(-0,05)\times(0,008)<0$

Donc $\alpha\in\left]1,5;1,6\right[$

3) a)
$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0$

Donc la droite $\Delta: y=x-2$ est une asymptote oblique a $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}2\frac{e^{-x}}{x}+1-\frac{2}{x}$

$\lim_{X\to+\infty}2.\frac{e^{X}}{-X}+1+\frac{2}{X}=-\infty$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une branche infini parabolique de direction $(o,\vec{j})$ au voisinage de $(-\infty)$.

4) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x$

$\boxed{T: y=-x}$

b) $g(x)=2e^{-x}+2x-2$

$g'(x)=-2e^{-x}+2=2\left(1-e^{-x}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)=2\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

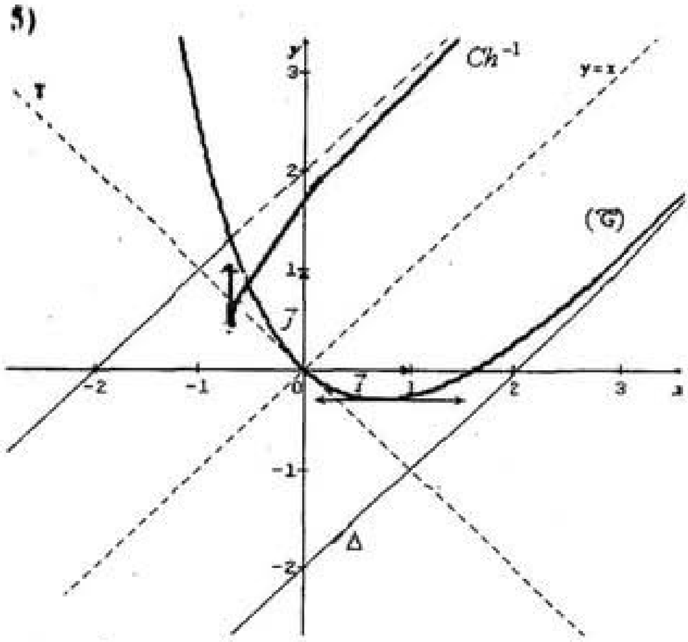
g admet un minimum absolue en 0 atteint 0.

Donc : $\forall x\in\square, g(x)\geq 0$

c) $g(x)\geq 0$ et $g(x)=f(x)-(-x)\geq 0$

Donc ($\mathcal{C}$) est au dessus de sa tangente T.

5)



5) a)

X	$\ln 2-1$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	$+$
$h(x)$	$\ln 2 \nearrow +\infty$

b) $C_{h^{-1}} = S_{(y=x)}(C_h)$

Exercice 25

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},\ x\in \mathbb{R}.$$

1) a) */ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^{2x}}+1}=1$$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{0}{1+0}=0$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{\left(e^{2x}\right)'\left(1+e^{2x}\right)-e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)'}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)-e^{2x}\times 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}+2e^{4x}-2e^{4x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

c) pour $x\in\mathbb{R}$ et $2\times 0-x=-x\in\mathbb{R}$

Et on a : $f(2\times 0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$=\frac{e^{-2x}\left(1+e^{2x}\right)+e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)\left(1+e^{-2x}\right)}$$

$$=\frac{e^{-2x}+1+e^{2x}+1}{1+e^{-2x}+e^{2x}+1}=1$$

Donc $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}$

D'où le point $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

d) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

2) a) $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2}$

On a :

$$f'(t) - \frac{1}{2} = \frac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+e^{2t}\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+2e^{2t}+e^{4t}\right)}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-1+2e^{2t}-e^{4t}}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-\left(e^{2t}-1\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)} \leq 0$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$: $f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$

b) f continue sur $[0,x]$ et dérivable

sur $]0,x[$ et $0 \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$

d'après Le théorème des inégalités des Accroissements finis on a :

$$0 \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}(x-0)$$

D'où : $f(x) - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}x$

C'est-à-dire $f(x) \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Donc $\forall x \geq 0$: $f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$

c) */ pour $x \geq 0$

On a : $f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$

D'où (C) la courbe représentative

de f est au dessous de la tangente T.

*/ pour $x \leq 0$:

f Continue sur $[x,0]$ est dérivable

Sur $]x,0[$ et $f'(t) \leq \dfrac{1}{2} (\forall t \in \mathbb{R})$

Donc d'après le théorème des inégalités

des accroissements finies on a :

$$f(0) - f(x) \leq \frac{1}{2}(0-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - f(x) \leq -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}(x+1)$$

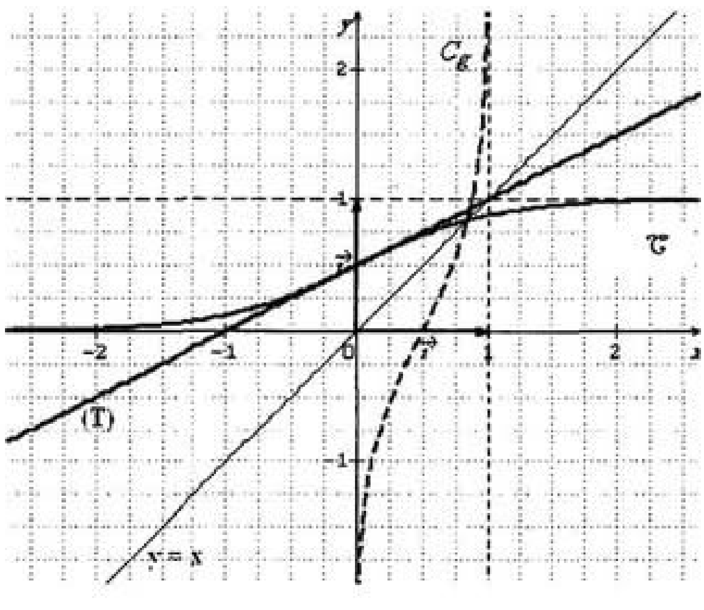
D'où $\mathfrak{T}$ la courbe représentative

de f est au dessus de la tangente T

.Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Position de ζ et T		ζ / T	$(0,1/2)$	T / ζ	

3)



4) a) f continue et strictement croissante

sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection réciproque définie sur : $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[=]0,1[$.

b) $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0,1[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = y\left(1+e^{2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = y \text{ or } y \neq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Donc : pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0,1[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

c) f est une bijection et d'après b/

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

D'où $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = f^{-1}(x)$

Donc C_g est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à : $\Delta : y = x$.

Exercice 26

$$Q(t) = \frac{1}{3}t.e^{3-t}$$

1) le volume V présent dans le sang au bout de 90 mn c'est-à-dire au bout de $t = \frac{3}{2}$ (une heure et demi)

est $Q\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}.e^{3-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

Donc : $\boxed{V = 2,24cm^3}$

2)*/ calculons le volume V présent au bout de $t = \frac{1}{2}$ (une demi heure)

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}e^{3-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}e^{\frac{5}{2}}$$

$$\simeq 2,03cm^3.$$

Le volume de médicament que le patient a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure est : $3 - 2,03cm^3$

c'est-à-dire : $0,97cm^3$.

*/ même calcul pour : $t = 1$ (une heure)

$$Q(1) = \frac{1}{3}e^2 \simeq 2,46.$$

D'où le volume qui a était éliminé au bout d'une heure est :

$3 - 2,46 \simeq \boxed{0,54cm^3}$

3) $Q'(t) = \frac{1}{3}e^{3-t} + \frac{1}{3}t(-1)e^{3-t}$

$$= \frac{1}{3}e^{3-t}(1-t)$$

T.V :

x	0		1		$+\infty$
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}e^2$	$\searrow$	0

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}te^{3-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \times \frac{t}{e^t} \times e^3$$

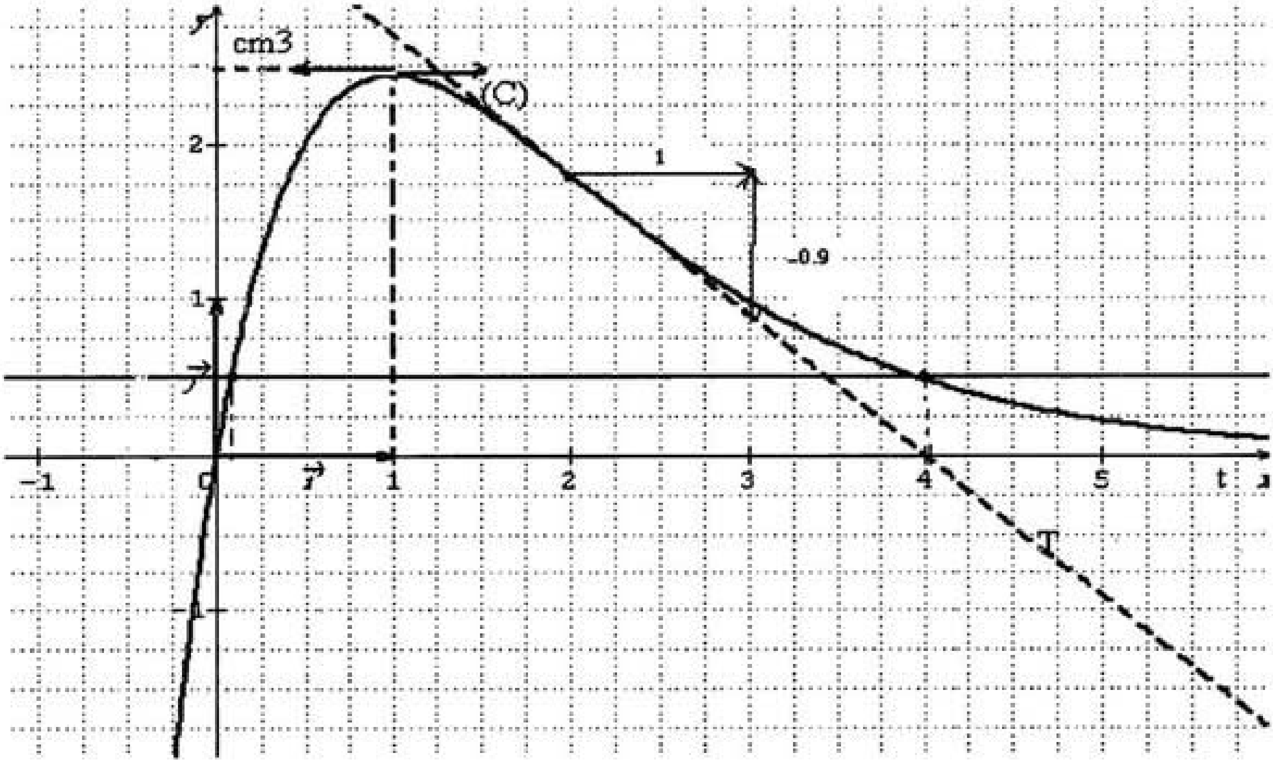
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^3}{3} \times \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$$

4) le coefficient directeur de T

est $Q'(2)$: $Q'(2)=\frac{1}{3}e(-1)=-\frac{e}{3}$

$\boxed{Q'(2)\approx -0,9}$

5) courbe :



6) soit $\Delta : y=\frac{1}{2}$: les abscisses des

Points de (C) situées au dessous de Δ.

Donc $t \in [0;0.09] \cup [4,+\infty[$

Donc le temps estimé est supérieur à 4 heures

Exercice 1

*/ $\int_2^1 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_2^1$
$=(1+1)-(4+2)=2-6=-4$

*/ $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_1^2$
$=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{14}{3}-\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

*/ $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}dx$
$=\left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

*/ $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx$
$=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{2}}$
$=\sqrt{3}-1$

*/ $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx = \int_1^2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx$
$=\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln x\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2}+2+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}+1+\ln 1\right)$
$=4+\ln 2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}+\ln 2$

*/ $\int_0^2 (1-|x-1|)dx = I$
On a:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$x-1$	$-$	0 $+$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	$x-1$
$1-\lvert x-1\rvert$	x	0 $2-x$

D'où :
$I=\int_0^1 (1-|x-1|)dx+\int_1^2 (1-|x-1|)\,dx$
$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx$
$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$
$=\frac{1}{2}+\left[\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]$
$=\frac{1}{2}+2-2+\frac{1}{2}=1$

*/ $\int_2^3 \frac{1}{3x+2}dx = \int_2^3 \frac{3}{3(3x+2)}dx$
$=\frac{1}{3}\int_2^3 \frac{(3x+2)'}{(3x+2)}dx$
$=\frac{1}{3}\left[\ln(3x+2)\right]_2^3 = \frac{1}{3}\left[\ln 11-\ln 8\right]$
$=\frac{1}{3}\ln\frac{11}{8}$

*/ $\int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$

*/ $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx$
$=\int_1^2\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$
$=\left[x-\ln(x+1)\right]_1^2 = \left[(2-\ln 3)-(1-\ln 2)\right]$
$=2-\ln 3-1+\ln 2 = 1+\ln\frac{2}{3}$

*/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}.\ln x\,dx$
$=\int_1^e (\ln x)'.\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln x^2\right]_1^e$
$=\frac{1}{2}\ln^2 e - 0 = \frac{1}{2}$

*/ $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_2^e \frac{1}{x}.(\ln x)^2 dx$

$$= \int_2^e (\ln x)'.\ln^2 x dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_2^e$$

$$= \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln^3 2$$

*/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= -\frac{\cos \pi}{2} + \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Exercice 2

$$f(x) = \frac{3x-5}{2x-1}$$

$$g(x) = \frac{x^2+2x-5}{x+4}$$

$$h(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$$

1) $a + \frac{b}{2x-1} = \frac{a(2x-1)+b}{2x-1}$

$$= \frac{2ax+b-a}{2x-1} = \frac{3x-5}{2x-1}$$

D'où : $\begin{cases} 2a = 3 \\ b-a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = a-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}$

ET par suite:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{7}{2}}{2x-1}$$

D'où:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}.\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{2}dx - \frac{7}{4}\int_1^2 \frac{2}{2x-1}dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x\right]_1^2 - \frac{7}{4}\left[\ln(2x-1)\right]_1^2$$

$$= \left(3 - \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{4}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{3}{2} - \frac{7}{4}\ln 3$$

2) $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+4}$

$$= \frac{ax(x+4)+b(x+4)+c}{x+4}$$

$$= \frac{ax^2+4ax+bx+4b+c}{x+4}$$

$$= \frac{ax^2+(4a+b)x+4b+c}{x+4}$$

D'où : $\begin{cases} a = 1 \\ 4a+b = 2 \\ 4b+c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2-4a \\ c = 5-4b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2-4 = -2 \Rightarrow b = -2 \\ c = -5-4(-2) = -5+8 = 3 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{a = 1, b = -2, c = 3}$

donc :

$$\int_{-3}^0 g(x)dx = \int_{-3}^0 \left(x - 2 + \frac{3}{x+4}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(x+4)\right]_{-3}^0$$

$$= (3\ln 4) - \left(\frac{9}{2} + 6 + 3\ln 1\right)$$

$$= 3\ln 4 - \frac{21}{2}$$

3) $h(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1} = \frac{a(e^x+1)+be^x}{e^x+1}$

$$= \frac{ae^x+a+be^x}{e^x+1} = \frac{(a+b)e^x+a}{e^x+1}$$

D'où : $\begin{cases} a+b=1 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a=-2 \end{cases}$

Donc : $\boxed{a=-2, b=3}$

Par la suite :

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(-2+\frac{3e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$=\left[-2x+3\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$$
$$=\left[-2+3\ln(e+1)\right]-\left[0+3\ln 2\right]$$
$$=-2+3\ln(e+1)-3\ln 2$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 h(x)=-2+3\ln\frac{e+1}{2}}$

Exercice 3

1) Pour $x \neq 1$ on a:

$$x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-1}{x+1}$$
$$=\frac{x^2+2x+1-1}{x+1}=\frac{x^2+2x}{x+1}$$

ET par suite:

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x+1}dx = \int_0^1\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{(x+1)^2}{2}-\ln(x+1)\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{4}{2}-\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$
$$=2-\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

2) $I=\int_0^1 (t+1).\ln(t+1)\,dt$

Integrant par parties:
On pose

$$U(t)=\ln(1+t)\rightarrow U'(t)=\frac{1}{1+t}$$
$$V'(t)=1+t\rightarrow V(t)=\frac{(1+t)^2}{2}$$

Donc :

$$I=\left[\frac{(1+t)^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{(1+t)^2}{2}.\frac{1}{1+t}dt$$
$$=\frac{4}{2}\ln 2-0-\frac{1}{2}\int_0^1(1+t)dt$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_0^1$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

Exercice 4

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}, x\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}.$$

1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}; x\neq 0, x\neq -1$

$$=\frac{a(1+x)^2+b(1+x)x+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a\left(1+2x+x^2\right)+b\left(x+x^2\right)+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a+2ax+ax^2+bx+bx^2+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Donc on a:

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+b+c=0\\a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\c=-2a-b\\a=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\c=-2+1=-1\\a=1\end{cases}\text{ et par suite:}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}$$

2) $\alpha\in]1,+\infty[$

a) $\int_1^\alpha f(t)dt=\int_1^\alpha\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

$$=\left[\ln t-\ln(1+t)+\frac{1}{1+t}\right]_1^\alpha$$

$$=\left(\ln\alpha-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}\right)-\left(\ln 1-\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln 2-\frac{1}{2}$$

Donc:

$$\boxed{\int_1^\alpha f(t)\,dt=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln-\frac{1}{2}}$$

b) $A(\alpha)=\int_1^\alpha\frac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

Integrant par parties:

$$U(t)=\ln t\to U'(t)=\frac{1}{t}$$

$$V'(t)=\frac{1}{(1+t)^3}\to V(t)=-\frac{1}{2(1+t)^2}$$

Donc:

$$A(\alpha)=\left[-\frac{1}{2(1+t)}\ln t\right]_1^\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha\frac{1}{t(1+t)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha f(t)dt$$

Par suite d'après 2) a)

$$A(\alpha)=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Donc :

$$\boxed{A(\alpha)=\frac{1}{2(1+\alpha)}[-\ln\alpha+1]+\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\ln 2\right]-\frac{1}{4}}$$

c) $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}-\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha)}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Avec

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha}=1\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}=\ln 1=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{1+\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}\times\frac{\alpha}{1+\alpha}=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{1+\alpha}=0$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}}$$

Exercice 5

*/ $\int_0^1 xe^x dx$

$$U(x)=x\to U'(x)=1$$

$$V'(x)=e^x\to V(x)=e^x$$

Donc

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1) = e-e+1 = 1$$

D'où $\boxed{\int_0^1 xe^x dx = 1}$

*/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$U(x) = \ln x \to U'(x) = \frac{1}{x}$$
$$V'(x) = \frac{1}{x^2} \to V(x) = -\frac{1}{x}$$

Donc :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{e} - 1\right]$$
$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

D'où $\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}}$

*/ $\int_1^x \ln t dt = \left[t\ln t - t\right]_1^x$
$$= (x\ln x - x) - (0-1)$$
$$= x\ln x - x + 1$$
$$\boxed{\int_1^x \ln t dt = x\ln x - x + 1}$$

*/ $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$
$$U(x) = \cos x \to U'(x) = -\sin x$$
$$V'(x) = e^x \to V(x) = e^x$$
$$I = \left[e^x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx$$
$$= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

Posons : $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

Intégrant par parties J :

$$U(x) = \sin x \to U'(x) = \cos x$$
$$V'(x) = e^x \to V(x) = e^x$$

D'où on a :
$$J = \left[\sin x e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = 0 - I \Rightarrow J = -I$$

On trouve :
$$I = -e^\pi - 1 - I \Rightarrow 2I = -e^\pi - 1$$
$$\Rightarrow I = -\frac{(e^\pi + 1)}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{I = -\left(\frac{1+e^\pi}{2}\right)}$$

*/ $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$
$$U(x) = (\ln x)^2 \to U'(x) = 2.\frac{1}{x}.\ln x$$
$$V'(x) = x \to V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e (x\ln x) dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e (x\ln x) dx$$

Intégrant par parties $\int_1^e (x\ln x) dx$:

$$U(x) = \ln x \to U'(x) = \frac{1}{x}$$
$$V'(x) = x \to V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_1^e (x\ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \cancel{\frac{e^2}{2}} - \cancel{\frac{e^2}{2}} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_1^e x(\ln x)^2 dx == \frac{e^2-1}{4}}$$

Exercice 6

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x\cos x)^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(e^x\cos x)^2 + (e^x\sin x)^2\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x}\cos^2 x + e^{2x}\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi}-1}{2}$$

2) $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x\cos x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

On sait que: $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

D'où : $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$

Intégrant par parties:

$$U(x) = \cos 2x \to U'(x) = -2\sin 2x$$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$$

Integrant par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx = K$

On pose:

$$U(x) = \sin 2x \to U'(x) = 2\cos 2x$$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

Donc:

$$K = \left[\frac{e^{2x}}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x.e^{2x}dx$$

Par la suite $K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$

Il en résulte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{4}(1+e^{\pi})$$

Ce qui donne : $\boxed{I - J = -\frac{1}{4}(1+e^{\pi})}$

3)

$$\begin{cases} I+J=\dfrac{e^{\pi}-1}{2}(1) \\ I-J=-\dfrac{1}{4}\left(1+e^{\pi}\right)(2) \end{cases}$$

$$(1)+(2)\Rightarrow 2I=\frac{e^{\pi}-1}{2}-\frac{1+e^{\pi}}{4}$$

$$=\frac{2e^{\pi}-2-1-e^{\pi}}{4}=\frac{e^{\pi}-3}{4}$$

D'où $\boxed{I=\dfrac{e^{\pi}-3}{8}}$

$$(1)\Rightarrow J=\frac{e^{\pi}-1}{2}-I=\frac{e^{\pi}-1}{2}-\left(\frac{e^{\pi}-3}{8}\right)$$

$$=\frac{4e^{\pi}-4-e^{\pi}+3}{8}=\frac{3e^{\pi}-1}{8}\ \boxed{J=\frac{3e^{\pi}-1}{8}}$$

Conclusion :

$$I=\frac{e^{\pi}-3}{8}\quad\text{et}\quad J=\frac{3e^{\pi}-1}{8}.$$

Exercice 7

1) $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$1+\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x-1+1}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\boxed{\dfrac{e^x}{e^x-1}=1+\dfrac{1}{e^x-1}}$

2) a) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^t}{e^t-1}dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^t-1\right)'}{e^t-1}dt$

$$=\left[\ln\left(e^t-1\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$=\ln\left(e^{\ln 3}-1\right)-\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)$$

$$=\ln(3-1)-\ln(2-1)$$

$$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

Donc: $\boxed{I=\ln 2}$

b) $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^t-1}dt$

On sait que: $\forall t\in\mathbb{R}^*\ \dfrac{e^t}{e^t-1}=1+\dfrac{1}{e^t-1}$

D'où $\dfrac{1}{e^t-1}=\dfrac{e^t}{e^t-1}-1$

Par suite:

$$J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\frac{e^t}{e^t-1}-1\right)dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^t}{e^t-1}dt-\int_{\ln 2}^{\ln 3}dt$$

$$=I-[t]_{\ln 2}^{\ln 3}=\ln 2-[\ln 3-\ln 2]$$

$$=\ln 2-\ln 3+\ln 2=2\ln 2-\ln 3$$

Donc : $\boxed{J=2\ln 2-\ln 3}$

3) $K=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2t}}{e^t-1}dt$

$$K-I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2t}}{e^t-1}dt-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^t}{e^t-1}dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\frac{e^{2t}}{e^t-1}-\frac{e^t}{e^t-1}\right)dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2t}-e^t}{e^t-1}dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^t\left(e^t-1\right)}{e^t-1}dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^t\,dt=\left[e^t\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=e^{\ln 3}-e^{\ln 2}=3-2=1$$

Par suite: $K-I=1$, il en résulte: $K=I+1$

D'où : $\boxed{K=\ln 2+1}$

Exercice 8

I/ 1) $g(x)=(1-x)e^{-x}+1,\ x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=(1-x)'e^{-x}+\left(e^{-x}\right)'(1-x)+0$$

$$=-e^{-x}(1+1-x)=-e^{-x}(2-x)$$

$$=(x-2)e^{-x},\ e^{-x}>0$$

X	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	

2) $g(2) = (1-2)e^{-2} + 1 = 1 - e^{-2} > 0$

$1 - e^{-2}$ est un minimum absolue pour g

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}\ : g(x) \geq 1 - e^{-2} > 0$

Par suite $\boxed{g(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}}$

II/ $f(x) = xe^{-x} + x$

1) a) $x \mapsto x$: est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto e^{-x}$: Dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\left(e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}} ; e^{x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \right)$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(produit et somme de 2 fonctions dérivables).

On a :
$f'(x) = e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) + 1 \ = e^{-x}(1-x) + 1 = g(x)$

b) $f'(x) = g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} + x$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} -te^{t} - t = -\infty, (t = -x)$

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} + x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}} + x = +\infty$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} + x - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}} = 0$

Donc $y = x$ est une asymptote oblique

au voisinage de $+\infty$.

b) $f(x) - x = xe^{-x}$ et $e^{-x} > 0$
D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	$-$	0	$+$
Position relative	D/C	$(0,0)$	C/D

c) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$= g(1)(x-1) + f(1)$
$= x - 1 + e^{-1} + 1$

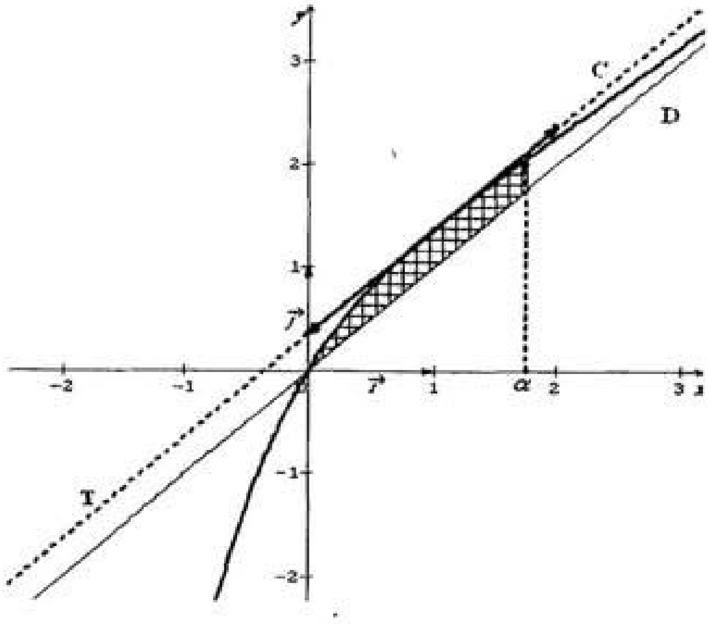
$\boxed{T : y = x + \dfrac{1}{e}}$

d) Branche infinie au $V_{-\infty}$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^{-x} + x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$

(C) Admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$.



3) $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

*/ $A(\alpha)=\int_0^\alpha |f(x)-x|dx=\left(\int_0^\alpha xe^{-x}dx\right)$

Calculons $A(\alpha)$ par parties :

$U(x)=x \to U'(x)=1$

$V'(x)=e^{-x} \to V(x)=-e^{-x}$

D'où :

$$A(\alpha)=\left[-xe^{-x}\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha -e^{-x}dx$$

$$A(\alpha)=\left(\left(-\alpha e^{-\alpha}\right)-\left[e^{-x}\right]_0^\alpha\right).\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

$$\boxed{A(\alpha)=\left(-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1\right).\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$$

*/

$\lim_{\alpha\to+\infty} -\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1$; on pose $t=-\alpha$

$=\lim_{t\to-\infty} te^t-e^t+1$

$=1$

Donc $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} -\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1=1}$

4) Pour $x<1$ on a :

$h(x)=\ln\left(g(x)-1\right)$

a) pour $x<1$:

*/ $h(x)=\ln\left[(1-x)e^{-x}+1-1\right]$

$=\ln\left[(1-x)e^{-x}\right]$; $e^{-x}>0, 1-x>0$

$=\ln(1-x)+\ln e^{-x}$

$=\ln(1-x)-x$

Donc $\forall x<1$ $\boxed{h(x)=\ln(1-x)-x}$

*/ $1-\frac{1}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}-\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1-x-1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}$

D'où $\boxed{1-\frac{1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}}$

b) $I=\int_{-1}^0 \ln(1-t)\,dt$

Intégrant par parties :

$U(t)=\ln(1-t) \to U'(t)=\frac{-1}{1-t}$

$V'(t)=1 \to V(t)=t$

D'où :

$$I=\left[t\ln(1-t)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{-t}{1-t}dt$$

$$I=0-(-1)\ln 2-\int_{-1}^0\left(1+\frac{-1}{1-t}\right)dt$$

$$I=\ln 2-\left[t+\ln(1-t)\right]_{-1}^0$$

$$I=\ln 2-\left[0-(-1+\ln 2)\right]$$

$$I=\ln 2-1+\ln 2$$

$$I=2\ln 2-1$$

Donc : $\boxed{I=2\ln 2-1}$

c)

$J=\int_{-1}^0 h(t)\,dt=\int_{-1}^0\left[-t+\ln(1-t)\right]dt$

$=\int_{-1}^0 -t\,dt+\int_{-1}^0\ln(1-t)\,dt=\left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0+I$

$=\left[0-\left(-\frac{(-1)^2}{2}\right)\right]+I=\frac{1}{2}+2\ln 2-1$

$=2\ln 2-\frac{1}{2}=J$

Donc $\boxed{J = 2\ln 2 - \frac{1}{2}}$

Exercice 9

$f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$; $x > 0$

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x-(x)'(1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\ln x}{x^2}$$

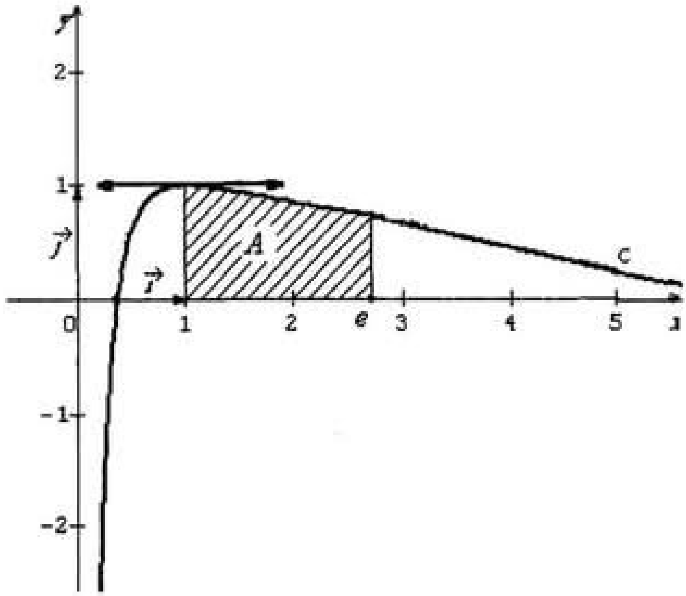
Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-\ln x)$ car $x^2 > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$f(1) = \frac{1+0}{1} = 1$$



2)

$$A = \int_1^e |f(x)|dx = \left(\int_1^e f(x)\,dx\right)\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

$$= \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right)dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e (\ln x)'.\ln x\,dx$$

$$= [\ln x]_1^e + \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= \ln e - \ln 1 + \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

Exercice 10

$f(x) = x\ln(x+2)$, $x \in [0,+\infty[$

1) $f'(x) = \ln(x+2) + x \times \dfrac{1}{x+2}$

Comme $x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+2) = +\infty$; $f(0) = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) - x = x\ln(x+2) - x$
$= x\left[\ln(x+2) - 1\right]$

$x \geq 0$ Donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $\ln(x+2) - 1$.

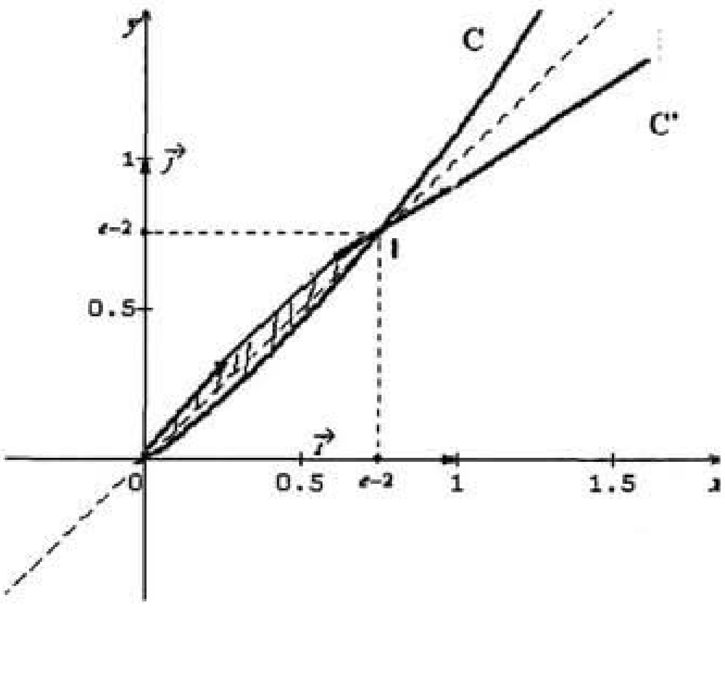
Or: $\ln(x+2) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 1$

$$\Leftrightarrow x+2 = e \Leftrightarrow x = e-2$$

X	$-\infty$	$e-2$	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	$-$	0	$+$
Position relative	Δ/C	$I(e-2, e-2)$	C/Δ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$$

(C) Admet une branche infinie parabolique de direction $(o, \vec{j})$



3)a) */ f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection réciproque de $[0,+\infty[$ sur :

$$f([0,+\infty[) = \left[f(0), \lim_{+\infty} f\right[= [0,+\infty[$$

*/ $(C') = S_\Delta(C)$

b) $x \neq -2$ on a :

$$x - 2 + \frac{4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2}$$
$$= \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2}$$

Donc $\forall x \neq -2$ on a : $\dfrac{x^2}{x+2} = x - 2 + \dfrac{4}{x+2}$

c) $I = \int_0^{e-2} f(t)\,dt = \int_0^{e-2} t\ln(t+2)\,dt$

Calculons I en utilisant une intégration par parties : pour cela posons :

$$U(t) = \ln(2+t) \to U'(t) = \frac{1}{2+t}$$

$$V'(t) = t \to V(t) = \frac{t^2}{2}$$

D'où on aura :

$$I = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t+2)\right]_0^{e-2} - \int_0^{e-2} \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{2+t}\,dt$$
$$= \frac{(e-2)^2}{2}\ln(e-2+2) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^{e-2} \frac{t^2}{2+t}\,dt$$
$$= \frac{(e-2)^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\int_0^{e-2} \frac{t^2}{2+t}\,dt$$
$$= \frac{(e-2)^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{e-2} \frac{t^2}{2+t}\,dt$$

Or $\dfrac{t^2}{t+2} = t - 2 + \dfrac{4}{t+2}$ (d'après 3) b)

Donc : $\int_0^{e-2}\frac{t^2}{t+2}dt=\int_0^{e-2}\left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt$

$=\left[\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)\right]_0^{e-2}$

$=\left[\frac{(e-2)^2}{2}-2(e-2)+4\ln(e-2+2)\right]-\left[0+4\ln(2)\right]$

$=\frac{(e-2)^2}{2}-2e+4+4-4\ln 2$

$=\frac{(e-2)^2}{2}+8-2e-4\ln 2$

Par suite :

$$I=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{(e-2)^2}{2}+8-2e-4\ln 2\right]$$

$$I=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{(e-2)^2}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{(e-2)^2}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{e^2-4e+4}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{e^2}{4}-e+1-4+e+2\ln 2$$

$$\boxed{I=\frac{e^2}{4}+2\ln 2-3}$$

d) $A=\left(\int_0^{e-2}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx\right)9cm^2$.

Comme (C) et (C') sont symétriques

par rapport a $\Delta : y=x$ alors :

$$A=\left(2\int_0^{e-2}\left|f(x)-x\right|dx\right)9cm^2$$

$$A=2\int_0^{e-2}(x-f(x))dx$$

Car (C) est au dessous de Δ.donc :

$$A=2\left[\int_0^{e-2}xdx-\int_0^{e-2}f(x)\,dx\right].9cm^2$$

$$A=2\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e-2}-I\right].9cm^2$$

$$A=2\left[\frac{(e-2)^2}{2}-I\right].9cm^2$$

$$A=\left((e-2)^2-2I\right).9cm^2$$

$$A=\left[(e-2)^2-2\left(\frac{e^2}{4}+2\ln 2-3\right)\right].9cm^2$$

$$A=\left(e^2-4e+4-\frac{e^2}{2}-\ln 2+6\right).9cm^2$$

$$A=\left(\frac{e^2}{2}+10-4e-\ln 2\right).9cm^2$$

D'où :

$$\boxed{A=\left(\frac{9}{2}e^2+90-36e-9\ln 2\right)cm^2}$$

Exercice 11

$I(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$

Calculons la quantité d'électricité
Transportées a chaque demi période

C'est intégrer $I(t)$ entre 0 et $\frac{T}{2}$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$ $\left(t=\frac{T}{2}\right.$ Demi-période)

$$Q=\int_0^{\frac{T}{2}} I_m\cos(\omega t+\varphi)\,dt,\ T>0$$
$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$
$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin\left(\omega\frac{T}{2}+e\right)-\sin(\varphi)\right]$$
$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin(\pi+e)-\sin(\varphi)\right]$$
$$Q=\frac{I_m}{\omega}(-2\sin\varphi)$$

Exercice 12 ?

$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U(t)I(t).dt$$
$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_m I_m\cos^2(\omega t).dt$$
$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_m I_m.\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}.dt$$
$$W=\frac{U_m I_m}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1+\cos(2\omega t)).dt$$
$$W=\frac{U_m I_m}{2}\left[t+\frac{\sin(2\omega t)}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$
$$W=\frac{1}{2}U_m I_m\left[\frac{2\pi}{\omega}+\frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(2\omega\frac{2\pi}{\phi}\right)}_{\sin 4\pi=0}-0\right]$$

$$\boxed{W=\frac{\pi U_m I_m}{\omega}}$$

Exercice 13

$f(x)=\sin^2 x,\ x\in[0,\pi]$

1) f est dérivable sur □ en particulier sur $[0,\pi]$

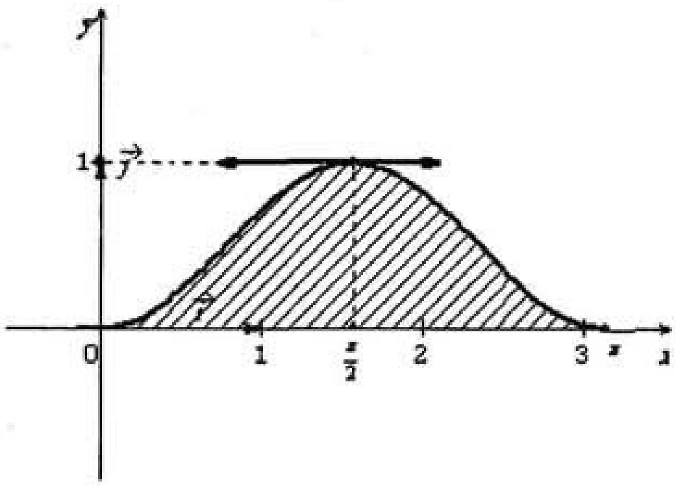
et $f'(x)=2\cos x.\sin x$, $\boxed{(u^n)'=nu'u^{n-1}}$

Comme $\sin x\geq 0\ \ \forall x\in[0,\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos x$.

T.V :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



2) (linéarisation : voir cour *nombres complexes*)

$$\sin^2 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2ix}-1+e^{-2ix}}{-4}=\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$$
$$=\frac{e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}.e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$
$$=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{16}+\frac{6}{16}-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{4}$$
$$=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{3}{8}-\frac{\cos x}{2}$$
$$\boxed{(\sin x)^4=\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos x}{2}+\frac{3}{8}}$$

3) $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\left(\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\right)\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$

$$A=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx.va$$

$$A=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$A=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boxed{A=\frac{\pi}{2}.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$$

4) $V=\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$ (unité de volume)

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx.u.volume$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 4x}{32}\right]_0^{\pi}$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{8}\pi-0\right]=\frac{3}{8}\pi^2\Rightarrow\boxed{V=\frac{3}{8}\pi^2.(uv)}$$

Exercice 14

$f(x)=1+2\cos^2 x;\ x\in[0,\pi]$

1) f est. derivable sur $[0,\pi]$ et

$$f'(x)=0+2\times 2\times\cos x(-\sin x)$$
$$=-4\cos x.\sin x$$

Or $\forall x\in[0,\pi]:\sin x\geq 0$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-\cos x)$

T.V :

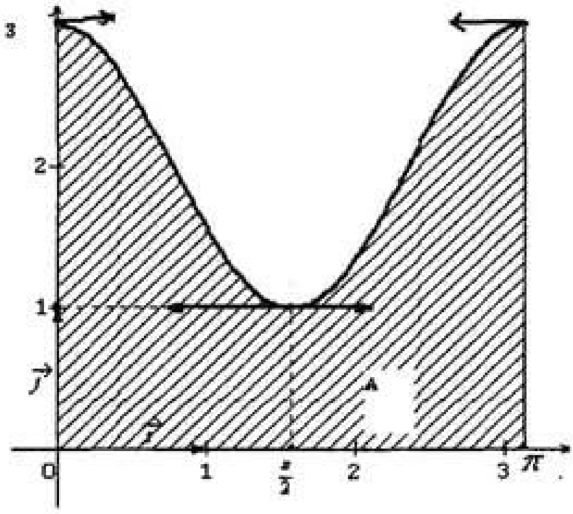
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

$f(0)=1+2\cos^2 0=1+2=3$

$f(\pi)=1+2\cos^2\pi=1+2(-1)^2=3$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+2\cos^2\frac{\pi}{2}=1+0=1$

2)



3) a) $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(1+2\cos^2 x\right)dx(va)$

$$=\int_0^{\pi}dx+\int_0^{\pi}2\cos^2 x dx,\ \boxed{\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

$$=\pi+\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\pi+\left[x+\sin 2x\right]_0^{\pi}=\pi+\pi-0$$

$$=\pi+\pi=2\pi.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

Donc : $\boxed{A=2\pi.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$

b) $V=\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx.uv$

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\cos^2 x\right)dx.uv$$

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(1+4\cos^2+4\cos^4 x\right)dx$$

$$V=\pi\left[\int_0^{\pi}dx+4\int_0^{\pi}\cos^2 xdx+4\int_0^{\pi}\cos^4 xdx\right]$$

Or on a :

$$\int_0^{\pi}dx=\pi$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2\pi}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

On va linéaires : $\cos^4 x$.

$$\cos x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+4e^{3ix}e^{ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{16}+4\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{16}\right)+\frac{6}{16}$$

$$\cos^4 x=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}$$

D'où :

$$\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi-0=\frac{3}{8}\pi$$

Par la suite :

$$V=\pi\left[\pi+4\times\frac{\pi}{2}+4\times\frac{3\pi}{8}\right]u.v$$

$$=\pi\left[\pi+2\pi+\frac{3\pi}{2}\right]u.v$$

$$=\pi\times\frac{9\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi^2u.v$$

Conclusion : $\boxed{V=\frac{9}{2}.\pi^2.u.v}$

Exercice 15

A/ $K(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1, x\in□$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}K(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}+1;\quad t=-x$

$=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(t^2-t+1\right)e^t+1$

$=\lim\limits_{t\to-\infty}t^2e^t-te^t+e^t-1=-1$

b) K est une fonction dérivable

sur □ (produit de deux fonctions dérivable :

$x\mapsto x^2+x+1$ Polynôme

$x\mapsto e^{-x}$: (Dérivable sur□)

et $K'(x)=(2x+1)e^{-x}+\left(x^2+x+1\right)\left(-e^{-x}\right)$

$K'(x)=e^{-x}\left(2x+1-x^2-x-1\right)$

$K'(x)=\left(x-x^2\right)e^{-x}, x\in□$

Comme $e^{-x}>0$: le signe de $K'(x)$ est

Celui de $x-x^2$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0			$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$	↘	0	↘	1

$K(0)=1-1=0$ et $K(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1$

2) on a : $\frac{3}{e}-1□1,10>0$

*/ $K(]-\infty,0])=[0,+\infty[$

$K(]0,1])=\left]0,\frac{3}{e}-1\right]$

K Est une bijection sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $]0,1]$

Comme $K(0)=0$ alors dans $]-\infty,1]$ l'unique solution de $K(x)=0$ est 0.

*/ K est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $K([1,+\infty[)=\left]-1,\frac{3}{e}-1\right]$

Alors l'équation $K(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1,+\infty[$

On a : $K(2)=9e^{-2}-1□-0,03<0$ donc : $\alpha\in]1,2[$

En utilisant une calculatrice on trouve :

$$\begin{cases} K(1,79) \approx 0,00077 \\ K(1,8) \approx -0,001 \end{cases}$$

Remarque : comme $1 < \alpha < 2$

On utilisant une dichotomie :

On a : $K(1,5) > 0$

Pour $\dfrac{2+1,5}{2} = 1,75$

On a : $K(1,75) > 0$ …………..

Conclusion :

$$\boxed{1,79 < \alpha < 1,80}$$

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe *de* $K(x)$		$+$	0	$-$	

B/ $f(x) = (2x+1)e^{-x}; g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

1) */ $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

Les points de coordonnées $(0, f(0)) \in C_f$

Et $(0, g(0)) \in C_g$.

Donc : $\boxed{A(0,1) \in C_f \cap C_g}$

*/ $f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$

$\Rightarrow f'(0) = 2 - 1 = 1$

$$g'(x) = \frac{2(x^2x+1) - (2x+1)^2}{(x^2x+1)^{20}}$$

$\Rightarrow g'(0) = 1$

Donc C_f et C_g ont la même tangente

La tangente T en A tangente à pour équation :

$T: \ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = g'(0)(x-0) + g(0) = x$

Donc T a pour équation $y = x$

2) a) on a

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)\left[(x^2+x+1)e^{-x} - 1\right]}{x^2+x+1}$$

Donc : $\boxed{f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1).K(x)}{x^2+x+1}}$

b) $x^2 + x + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Puisque $\Delta = -3 < 0$

Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $(2x+1).K(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
Signe *de* $K(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Position relative :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$g(x) - f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position		C_g/C_f		C_f/C_g		C_g/C_f	
			$(-0.5, 0)$		$(\alpha, f(\alpha))$		

3) a) la fonction h est dérivable et :

$$h'(x) = -2e^{-x} + (-2x-3)(-e^{-x}) - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$= e^{-x}(-2+2x+3) - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$= (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$= f(x) - g(x)$$

Donc $h'(x) = f(x) - g(x)$

On aura h est une primitive de $f-g$.

b) $A = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| dx . \|\vec{i}\| . \|\vec{j}\|$

Comme : $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{2}, \alpha\right]$

Alors $f(x) - g(x) \geq 0$

Par suite :

$$A = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x)) dx \right) \times 4cm^2$$
$$A = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} h'(x) dx \right) v.a$$
$$= [h(x)]_0^{\frac{1}{2}} .4cm^2$$
$$= \left(h\left(\frac{1}{2}\right) - h(0) \right) \times 4cm^2$$
$$= \left[\left(-4e^{-\frac{1}{2}} - \ln\frac{7}{4} \right) - (-3-0) \right] \times 4cm^2$$
$$= \left[-\frac{4}{\sqrt{e}} - \ln\frac{7}{4} + 3 \right] \times 4cm^2$$

D'où $\boxed{A = \left(12 - \frac{16}{\sqrt{e}} - 4\ln\frac{7}{4} \right) cm^2}$

Exercice 16

I/ $g(x) = (1-x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - xe^{-x}$
$$= \lim_{X\to-\infty} e^X + Xe^X, (X = -x)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

2) a) $g'(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$
$$g'(x) = e^{-x}(-1-1+x)$$
$$g'(x) = (x-2)e^{-x}$$

T.V:

X	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	0

On a: $g([0,2]) = \left[-\frac{1}{e^2}, 1 \right]$

Donc pour $0 \leq x \leq 2$ on a: $g(x) \leq 1$

On a $g([2,+\infty[) = \left[-\frac{1}{e^2}, 0 \right[$

Donc pour $x \geq 2$: $g(x) \leq 0 \leq 1$

<u>Conclusion</u> : $\forall x \in [0,+\infty[: g(x) \leq 1$

II/ $f(x) : \begin{cases} x\ln(-x), x < 0 \\ x(2-e^{-x}), x \geq 0 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to0^-} x\ln(-x), (X = -x)$
$$= \lim_{X\to0^+} -X\ln X$$
$$= 0 = f(0)$$

Donc f est continue à gauche en 0.

<u>Conclusion :</u>

f est continue à en 0

2) a) */ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x(2-e^{-x})}{x}$
$$= \lim_{x\to0^+} 2 - e^{-x} = 1$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

*/ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x\ln(-x)}{x}$
$$= \lim_{x\to0^-} \ln(-x), (X = -x)$$
$$= \lim_{X\to0^+} \ln X = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 0

b) */ (C) admet une demi tangente verticale dirigé vers le haut à gauche au point d'abscisse 0.

*/ (C) admet une demi tangente d'équation $y = x$ à droite au point d'abscisse 0.

3) a) pour $x > 0$: f est dérivable et

$$f'(x) = \left(x\left(2 - e^{-x}\right)\right)'$$
$$= \left(2 - e^{-x}\right) + x\left(e^{-x}\right)$$
$$= 2 - e^{-x}(1 - x)$$
$$= 2 - g(x)$$

Donc $\forall x > 0$: $f'(x) = 2 - g(x)$

c) pour $x < 0$: f est dérivable et

$$f'(x) = \left[x\ln(-x)\right]'$$
$$= \ln(-x) + x \times \left(\frac{-1}{-x}\right)$$
$$= \ln(-x) + 1$$

Pour $x < 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) = -1$

$\Leftrightarrow -x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

On a aussi :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \geq -1$$
$$\Leftrightarrow -x \geq e^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{e}$$

Pour $x > 0$

$f'(x) = 2 - g(x)$

D'après (**I/2**) b) $g(x) \leq 1$ d'où $f'(x) \geq 0, \forall x > 0$

T.V :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\ln(-x), X = -x$$
$$= \lim_{X \to +\infty} -X\ln X = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - e^{-x}\right) = +\infty$$

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}(-1) = \frac{1}{e}$$

4) a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - e^{-x}\right) - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2x - xe^{-x} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty}} = 0$$

Donc dans la droite Δ d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\ln(-x)}{x}$

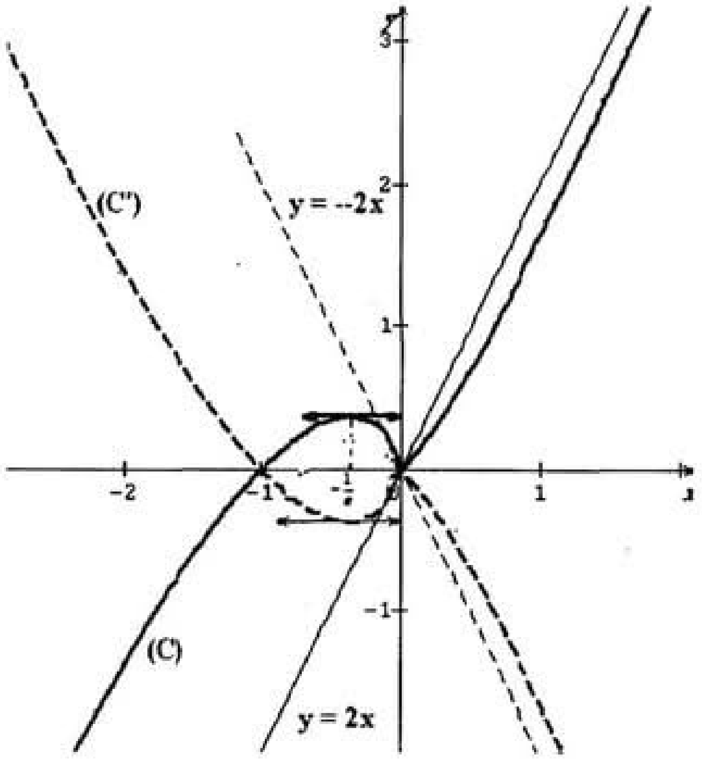
$$= \lim_{x \to -\infty} \ln(-x) = +\infty$$

Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

5) a) $f(-1) = (-1)\ln(1) = -1 \times 0 = 0$

Donc (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1.

Courbe :



b) $S_{(o,\vec{j})}(C)=(C')$

III/ $\alpha \in]-1,0[$

1) $\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \int_{-1}^{\alpha} t\ln(-t)\,dt$

Effectuant une intégration par parties :

$U(t)=\ln(-t) \to U'(t)=\frac{1}{t}$

$V'(t)=t \to V(t)=\frac{t^2}{2}$

Donc : $\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(-t)\right]_{-1}^{\alpha} - \int_{-1}^{\alpha}\frac{1}{t}.\frac{t^2}{2}dt$

$=\frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha)-0-\frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha} t\,dt$

$=\frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha)-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{\alpha}$

$=\frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha)-\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2}{2}-\frac{1}{2}\right]$

$$\boxed{\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha)-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{4}}$$

2) on a :

$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\left|f(t)-(-f(t))\right|dt.u.a$

$=2\int_{-1}^{\alpha} f(t)\,dt.u.a$

$=2\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha)-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\times 4cm^2$

$$\boxed{A(\alpha)=\left(4\alpha^2\ln(-\alpha)-4\alpha^2+2\right)cm^2}$$

3) a) $\lim_{\alpha\to 0^-} A(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^-} 4\alpha^2\ln(-\alpha)-4\alpha^2+2$

$=\lim_{t\to 0^+} 4t^2\ln t+4t+2=2$

b) $\lim_{\alpha\to 0^-} A(\alpha)$: représente l'aire de la région du plan limite par les droites d'équation $x=0$ et $x=-1$ et les courbes (C) et (C').

Exercice 17

I/ $g(x)=x^2+1-\ln x;\ x>0$

1) $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

T.V :

X	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}(3+\ln 2)$	↗ $+\infty$	

$\lim_{x\to 0^+} x^2+1-\overbrace{\ln x}^{-\infty}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2+1-\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{1}{2}+1+\ln\sqrt{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(3+\ln 2)$$

2) La fonction admet un minimum absolu en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ atteint $\frac{1}{2}(3+\ln 2)>0$ d'où $\forall x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)>0$.

II/ $f(x)=x+2+\frac{\ln x}{x}, x>0$

1) a) $x\mapsto x+2$: est une fonction polynôme

Donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$.

$x\mapsto\frac{\ln x}{x}$: est dérivable sur $]0,+\infty[$: quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et par suite f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=(x+2)'+\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=1+\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}$$

$$=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et $g(x)>0$

Donc $\forall x>0$ on a $f'(x)>0$

T.V :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2+\frac{\ln x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+2)+\underbrace{\ln x}_{-\infty}.\overbrace{\frac{1}{x}}^{+\infty}=-\infty$$

*/ $\lim\limits_{x\to +\infty} x+2+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

2) a) on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\overbrace{\frac{x+2}{x}}^{1}+\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right)=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)-x=\lim_{x\to +\infty} 2+\frac{\ln x}{x}=2$$

Donc la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique a C au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de : $f(x)-(x+2)$:

On a : $f(x)-(x+2)=\frac{\ln x}{x}, x>0$

D'où on a :

X	0	1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	$-$	0	$+$
Position	Δ/C	$(1,3)$	C/Δ

3) $x\in[1,+\infty[$

a) $M(x,f(x))$ et $N(x,x+2)$

On a : $MN=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$

$$=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-(x+2))^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\ln x}{x}+(x+2)-(x+2)\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}=\left|\frac{\ln x}{x}\right|=\frac{\ln x}{x}$$

Car $x\geq 1$ donc $\ln x>0$ et $x>0$

D'où : $\boxed{MN=\frac{\ln x}{x}}$

b) on a : $MN=\frac{\ln x}{x}$ donc

MN est maximale si et seulement si : $\frac{\ln x}{x}$ est maximale . Posons $h(x)=\frac{\ln x}{x}$

On a : $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow 1=\ln x \Leftrightarrow x=e$

T.V :

x	1		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

h admet $\frac{1}{e}$ pour maximum absolue

Donc MN est maximale pour $\boxed{x_0=e}$

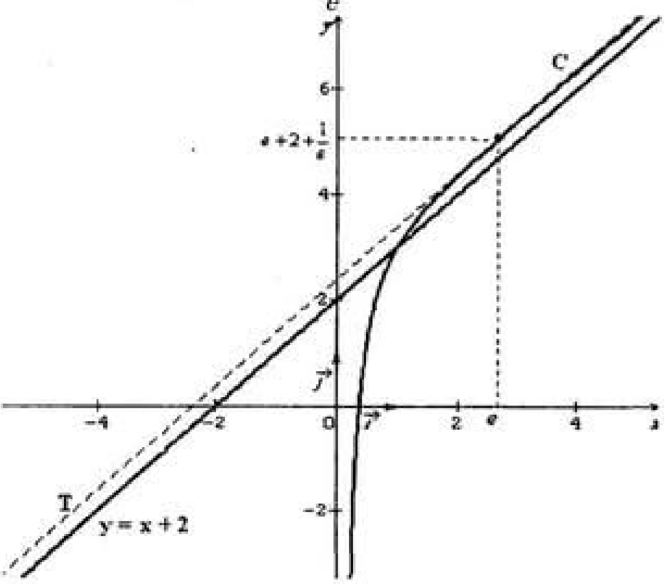
c) Soit T la tangente à C au point d'abscisse $x_0=e$

On a : $f'(e)=\frac{g(e)}{e^2}=\frac{e^2}{e^2}=1$

et $f'(e)$: coefficient directeur de T

Donc T et Δ sont parallèles car elles ont même coefficient directeur

Courbe : $f(e)=e+2+\frac{1}{e}\simeq 5,1$



5) a) $A=\int_1^e \left| f(x)-(x+2)\right| dx.u.a$

$=\left(\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\right)u.a=\left(\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx\right)u.a$

$=\int_1^e (\ln x)'.\ln x dx.u.a=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$

$=\frac{(\ln e)^2}{2}-0$

Donc : $\boxed{A=\frac{1}{2}.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$

b) Soit B l'aire de la région du plan Limité par $y=x+2$, C_f , $x=\alpha$ et $x=e$

On a :

$B=\int_e^\alpha \left|f(x)-(x+2)\right|dx=\int_e^\alpha \frac{\ln x}{x}dx$

$=\int_e^\alpha \frac{1}{x}.\ln x dx=\int_e^\alpha (\ln x)'.\ln x.dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^\alpha=\left(\frac{(\ln\alpha)^2}{2}-\frac{1}{2}\right).\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$

On a :

$A=B \Leftrightarrow \frac{(\ln\alpha)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{(\ln\alpha)^2}{2}=1$

$\Leftrightarrow (\ln\alpha)^2=2 \Leftrightarrow \ln\alpha=\sqrt{2}\Leftrightarrow \alpha=e^{\sqrt{2}}$

Par suite l'aire de la région limité par C et les droites d'équations :

$y=x+2, x=e, x=\alpha$ est égale à A pour $\boxed{\alpha=e^{\sqrt{2}}}$

Exercice 1

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n+3}{U_n+6}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) i/ pour $n=0$ on a:
$-3 < U_0 = -1 < 1$ Vrai

ii) supposons que : $-3 < U_n < 1$

et montrons que : $-3 < U_{n+1} < 1$

En effet :

$U_n + 6 \geq -3+6 = 3 > 0$

- $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4U_n+3}{U_n+6} - 1 = \dfrac{4U_n+3-U_n-6}{U_n+6}$

$$= \frac{3U_n-3}{U_n+6} = \frac{3(U_n-1)}{U_n+6} < 0 \quad \text{Car } U_n < 1$$

- $U_{n+1} + 3 = \dfrac{4U_n+3}{U_n+6} + 3$

$$= \frac{4U_n+3+3U_n+18}{U_n+6}$$

$$= \frac{7U_n+21}{U_n+6} = \frac{7(U_n+3)}{U_n+6} > 0 \text{ ,car } U_n > -3$$

D'où : $-3 < U_{n+1} < 1$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $-3 < U_n < 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+3}{U_n+6} - U_n$$

$$= \frac{4U_n+3-U_n^2-6U_n}{U_n+6}$$

$$= \frac{-U_n^2-2U_n+3}{U_n+6}$$

Or : $-U_n^2 - 2U_n + 3 = -(U_n-1)(U_n+3)$

(Car $a+b+c=0 \Leftrightarrow U_n = 1$ ou $U_n = -3$)

D'où :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-\overbrace{(U_n-1)}^{(-)}\overbrace{(U_n+3)}^{(+)}}{U_n+6}$$

Alors : $U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

3) soit $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{4U_n+3}{U_n+6}-1}{\dfrac{4U_n+3}{U_n+6}+3}$$

$$= \frac{\dfrac{4U_n+3-U_n-6}{U_n+6}}{\dfrac{4U_n+3+3U_n+18}{U_n+6}} = \frac{3U_n-3}{7U_n+21}$$

$$V_{n+1} = \frac{3(U_n-1)}{7(U_n+3)} = \frac{3}{7}\left(\frac{U_n-1}{U_n+3}\right)$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = \dfrac{3}{7} V_n$

Par suite (V_n) est une suite

géométrique de raison $q = \dfrac{3}{7}$

de premier terme : $V_0 = \dfrac{U_0-1}{U_0+3}$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{-1-1}{-1+3} = \frac{-2}{2} = -1$$

Donc : $\boxed{q = \dfrac{3}{7} et V_0 = -1}$

b) $V_n = V_0.q^n = (-1) \times \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$

D'où $\boxed{V_n = V_0.q^n = -\left(\dfrac{3}{7}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}}$

On sait que : $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$

$$\Leftrightarrow (U_n+3)V_n = Un-1$$

$$\Leftrightarrow U_nV_n - U_n = -3V_n - 1$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n-1) = -3(V_n-1)$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{-3(V_n-1)}{V_n-1}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{3.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1}{-\left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1} = \frac{1-3.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\dfrac{3}{7}\right)^n}$$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{U_n = \dfrac{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{-\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1} = \dfrac{1 - 3.\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^n}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = 0$ car $-1 < q < 1$

d)*/ $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_n = V_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

$= (-1) \times \dfrac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 - \frac{3}{7}}$

$= \dfrac{\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{\frac{7-3}{7}} = \dfrac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1\right)$

D'où : $\boxed{S_n = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1\right)}$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7}{4}\left(\underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0} - 1\right) = -\dfrac{7}{4}$

Exercice 2

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) par récurrence :

* pour $n = 0$ on a : $U_0 = 1 \le 2$ (vrai)
* supposons que $U_n \le 2$

et montrons que $U_{n+1} \le 2$

En effet :

$U_n \le 2 \Leftrightarrow -U_n \ge -2$

$\Leftrightarrow 4 - U_n \ge 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4 - U_n} \le \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{4 - U_n} \le \dfrac{4}{2} = 2$

D'où : $U_{n+1} \le 2$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \le 2$

b) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4}{4 - U_n} - U_n$

$= \dfrac{4 - 4U_n + U_n^2}{4 - U_n}$

$= \dfrac{(U_n - 2)^2}{4 - U_n}$

Comme $U_n \le 2$ on a $4 - U_n \ge 0$

D'où $U_{n+1} - U_n \ge 0$ et par suite

(U_n) est une suite croissante.

c/ */ la suite (U_n) étant croissante et majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ

•/ on a :

*/ $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \dfrac{4}{4 - x}$

*/ (U_n) converge vers $l \le 2$

*/ f est continue en l

Car $]-\infty, 2] \subset \mathbb{R} \setminus \{4\}$ d'où $f(\ell) = \ell$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{4 - \ell} = \ell \Leftrightarrow 4 = 4\ell - \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\ell - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 2$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2}$

2) $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1} - 2}$

Or $U_{n+1} - 2 = \dfrac{4}{4 - U_n} - 2 = \dfrac{4 - 8 + 2U_n}{4 - U_n}$

$U_{n+1} - 2 = \dfrac{-4 + 2U_n}{4 - U_n} = \dfrac{2(U_n - 2)}{4 - U_n}$

Donc :

$V_{n+1} = \dfrac{4-U_n}{2(U_n-2)} = \dfrac{2-U_n}{2(U_n-2)} + \dfrac{2}{2(U_n-2)}$

$= -\dfrac{1}{2} + V_n$

Donc (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r = -\dfrac{1}{2}$

b/*/ (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$V_0 = \dfrac{1}{U_0-2} = \dfrac{1}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Donc :

$V_n = V_0 + nr = -1 - \dfrac{1}{2}n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{V_n = -1 - \dfrac{1}{2}n}$

*/ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1 - \dfrac{1}{2}n) = -\infty$

c/ on sait que : $V_n = \dfrac{1}{U_n-2}$

Donc $U_n - 2 = \dfrac{1}{V_n}$ d'où :

$U_n = \dfrac{1}{V_n} + 2 \Leftrightarrow U_n = \dfrac{-1}{1+\dfrac{n}{2}} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{-1}{\dfrac{2+n}{2}} + 2 = \dfrac{-2}{2+n} + 2$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{U_n = \dfrac{-2}{2+n} + 2}$

d/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n+2} + 2 = 0 + 2 = 2$.

Exercice 3

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a/*/ pour $n=0$ on a : $0 \le U_0 = 0 \le 3$ vrai

*/ supposons que $0 \le U_n \le 3$

et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 3$

On a : $0 \le U_n \le 3 \Leftrightarrow 3 \le U_n + 6 \le 9$

$\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{3} \le \sqrt{U_n+6} \le \sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 0 \le U_{n+1} \le 3$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_n \le 3$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n+6} - U_n$

$= \dfrac{\left(\sqrt{U_n+6} - U_n\right) \times \left(\sqrt{U_n+6} + U_n\right)}{\sqrt{U_n+6} + U_n}$

$= \dfrac{U_n + 6 - U_n^2}{\sqrt{U_n+6} + U_n}$

On a :

$U_n + \sqrt{U_n+6} \ge 0$ car $U_n \ge 0$

Étudions donc le signe de $-X^2 + X + 6$

On a : $-X^2 + X + 6 = 0$; $\Delta = 1 + 24 = 25$

Donc $x' = \dfrac{-1+5}{-2} = -2$; $x'' = \dfrac{-1-5}{-2} = 3$

X	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-X^2+X+6$	$-$	0	$+$ 0	$-$

Donc $-X^2 + X + 6 \ge 0$ pour $x \in [-2,3]$

Comme $U_n \in [0,3] \subset [-2,3]$

On aura $-U_n^2 + U_n + 6 \ge 0$ et par suite

$\dfrac{U_n + 6}{\sqrt{U_n+6} + U_n} - U_n^2 \ge 0$

<u>Conclusion :</u>

$U_{n+1} - U_n \ge 0$ Donc (U_n) est une suite croissante.

c/ */ (U_n) est une suite croissante et majorée par 3 donc (U_n) converge vers $\ell \in [0,3]$

*/ •$U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $\ell \in [0,3]$

•f Continue en ℓ car $[0,3] \subset [-6,+\infty[$

D'où $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell+6} = \ell$

$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 6 = 0$

D'après 1) b/ on a $\ell = -2$ ou $\ell = 3$

Comme $\ell \geq 0$ alors $\ell = 3$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3}$

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 3 = \sqrt{U_n + 6} - 3$$

$$= \frac{U_n + 6 - 9}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{U_n - 3}{\sqrt{U_n + 6} + 3}$$

Or $\sqrt{U_n + 6} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{U_n + 6} + 3 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}$$

Il en résulte :

$$\frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

b/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

Multiplions membre à membre

$$|U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} + 3|$$

$$\times \quad |U_{n-1} + 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-2} - 3|$$

$$\times \quad |U_{n-2} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-3} + 3|$$

$$\times \quad \vdots$$

$$|U_1 + 3| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 3|$$

$$= |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 3|$$

Or $|U_0 - 3| = |-3| = 3$

Donc $|U_n - 3| \leq 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

c/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - 3| = 0$ et par suite :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$$

Exercice 4

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases}$$

1) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$5 - \frac{12}{U_n + 3} = \frac{5(U_n + 3) - 12}{U_n + 3}$$

$$= \frac{5U_n + 15 - 12}{U_n + 3} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} = 5 - \frac{12}{U_n + 3}$

b/ i/ pour $n = 0 : 0 \leq U_0 = 1 < 3$ vrai

ii/ supposons que $0 \leq U_n < 3$

et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 3$

En effet :

$0 \leq U_n < 3 \Leftrightarrow 3 \leq U_n + 3 < 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{U_n + 3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-12}{3} \leq \frac{-12}{U_n + 3} < \frac{-12}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5 - 4 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 5 - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 3$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} < 3$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n < 3$

c/ $U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - U_n, n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{5U_n + 3 - U_n^2 - 3U_n}{U_n + 3}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2U_n + 3}{U_n + 3}$$

Soit le trinôme : $-X^2 + 2X + 3$

On a $a - b + c = 0$ donc

$-X^2 + 2X + 3 = 0 \Leftrightarrow X' = -1, X'' = 3$

Par suite : $-X^2 + 2X + 3 = -(X+1)(X-3)$

D'où : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(U_n+1)(U_n-3)}{U_n+3}$

Or on sait que : $U_n + 1 \geq 0, U_n - 3 < 0$

et $U_n + 3 \geq 0$ D'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc (U_n) est strictement croissante

Conclusion :

(U_n) est croissante et majorée par 3

d'où (U_n) est convergente.

2) $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$

a/ on a :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3}{\dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3} + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}}{\dfrac{5U_n + 3 + U_n + 3}{U_n + 3}}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n - 6}{6U_n + 6} = \frac{2(U_n - 3)}{6(U_n + 1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{U_n - 3}{U_n + 1} = \frac{1}{3} V_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \dfrac{1}{3} V_n$.

et par suite (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

b/ on a : $V_n = V_0 \times q^n$

Or $V_0 = \dfrac{U_0 - 3}{U_0 + 1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$ donc : $\boxed{V_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

On a : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$

$\Leftrightarrow V_n(U_n + 1) = U_n - 3$

$\Leftrightarrow V_n U_n - U_n = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -V_n - 3$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{-V_n - 3}{V_n - 1} = \dfrac{V_n + 3}{1 - V_n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{U_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

c/ (V_n) est une suite géométrique

de raison $q = \dfrac{1}{3} \in]-1, 1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3$$

3) $W_n = U_n - 3$

On a : $W_{n+1} = U_{n+1} - 3$

$$= \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - 3 = \frac{5U_n + 3 - 3U_n - 9}{U_n + 3}$$

$$= \frac{2U_n - 6}{U_n + 3} = \frac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}$$

Donc $|W_{n+1}| = \left|\dfrac{2(U_n - 3)}{U_n + 3}\right|$

$$= \frac{2}{|U_n + 3|} |U_n - 3|$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |U_n - 3|, U_n + 3 \geq 0$$

$$= \frac{2}{U_n + 3} |W_n|$$

Or $U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_n + 3 \geq 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{U_n+3} \leq \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{U_n+3} \leq \frac{2}{3}$

Donc : $|W_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|W_n|.\forall n\in \mathbb{N}$

b/ Montrer le résultat par récurrence :

*/ $n=0 : |W_0| = |U_0-3| = |-2|$

$= 2 \leq 2.\left(\frac{2}{3}\right)^0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Donc le résultat est vrai pour $n=0$

*/ supposons que $|W_n| \leq 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

et montrons que $|W_{n+1}| \leq 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

En effet :

$|W_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|W_n|$ et $|W_n| \leq 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Donc $|W_{n+1}| \leq \frac{2}{3}\times 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |W_{n+1}| \leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Conclusion :

$\forall n\in \mathbb{N} : |W_n| \leq 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c/ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-3) = 0$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3}$

Exercice 5

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1+\sqrt{U_n-1}, n\in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a/ Montrons le résultat par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ Vrai

ii) supposons que : $1 < U_n < 2$

et montrons que : $1 < U_{n+1} < 2$

En effet :

$1 < U_n < 2 \Leftrightarrow 0 < U_n - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{U_n-1} < 1$

$\Leftrightarrow 1 < 1+\sqrt{U_n-1} < 2$

Donc $1 < U_{n+1} < 2$

Conclusion :

$\forall n\in \mathbb{N} : 1 < U_n < 2$

b/ on a : $\forall n\in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = 1+\sqrt{U_n-1} - U_n$

$= \sqrt{U_n-1} - (U_n-1)$

$= \sqrt{U_n-1}\left(1-\sqrt{U_n-1}\right)$

On a : $U_n < 2 \Rightarrow U_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{U_n-1} \leq 1$

D'où $1-\sqrt{U_n-1} \geq 0$

et on sait que $\sqrt{U_n-1} \geq 0$

D'où $\sqrt{U_n-1}\left(1-\sqrt{U_n-1}\right) \geq 0$

et par suite $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ce qui donne : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) est une suite convergente et elle converge vers $\ell \in [1,2]$.

On a aussi : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 1+\sqrt{x-1}$

f est continue sur $[1,+\infty[$

et $[1,2] \subset [1,+\infty[$ d'où f est continue en ℓ

Conclusion : $f(\ell) = \ell$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1+\sqrt{\ell-1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell-1} = \ell - 1$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = \ell^2 - 2\ell + 1 \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

On a $a+b+c=0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Comme (U_n) est croissante on a :

$U_n > U_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell \geq \frac{3}{2}$

Finalement $\ell = 2$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2}$

2) $V_n = \ln(U_n - 1)$

a/ $\forall n\in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 1)$

$= \ln\left(1+\sqrt{U_n-1}-1\right) = \ln\left(\sqrt{U_n-1}-1\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(U_n-1), \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}V_n$

et par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

b/ (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0}$

On a : $V_n=\ln(U_n-1)$

$\Leftrightarrow e^{V_n}=U_n-1\Leftrightarrow U_n=e^{V_n}+1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{V_n}+1=e^0+1=1+1=2$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=2}$$

Exercice 6

$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x};x\in\mathbb{R}$

$U_n=\frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx, n\in\mathbb{N}^*$

a/ $f(x+\ln x)=\frac{e^{x+\ln x}}{1+e^{x+\ln x}}=\frac{e^x\times e^{\ln x}}{1+e^x\times e^{\ln x}}$

Or on sait que $e^{a+b}=e^a.e^b, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

et que : $e^{\ln r}=r, r>0$

Finalement $f(x+\ln x)=\frac{xe^x}{1+xe^x}$

b/ $U_n=\frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^n\frac{xe^x}{1+xe^x}dx=\frac{1}{n}\int_0^n\frac{(1+xe^x)'}{1+xe^x}dx$$

$$=\frac{1}{n}\left[\ln(1+xe^x)\right]_0^n=\frac{1}{n}\left[\ln(1+ne^n)-\ln(1+n)\right]$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{U_n=\frac{\ln(1+ne^n)}{n}-\frac{\ln(1+n)}{n}}$

c/ */ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+ne^n)}{n}=?$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+xe^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[xe^x\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln e^x}{x}+\frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1+\frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x}=0+1+0=1$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+ne^n)}{n}=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X-1}, X=x+1$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-1}{X}}=\frac{0}{1}=0$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=0$

d/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+ne^n)}{n}-\frac{\ln(1+n)}{n}=1$

Exercice 7

$$n\in\mathbb{N}^*,\ V_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+......+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

a/ $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ on a :

$n\geq p\Leftrightarrow\sqrt{n}\geq\sqrt{p}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{p}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}$

b/ on a: $\forall n\geq1$

$\frac{1}{\sqrt{p}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}\geq\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow V_n\geq n\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*: V_n\geq\sqrt{n}$

c/ on a: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $V_n\geq\sqrt{n}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty}$

Exercice 8

$f(x) = \ln(x+3),\ x \in]-3,+\infty[$

1) $f'(x) = \dfrac{1}{x+3} > 0$

T.V:

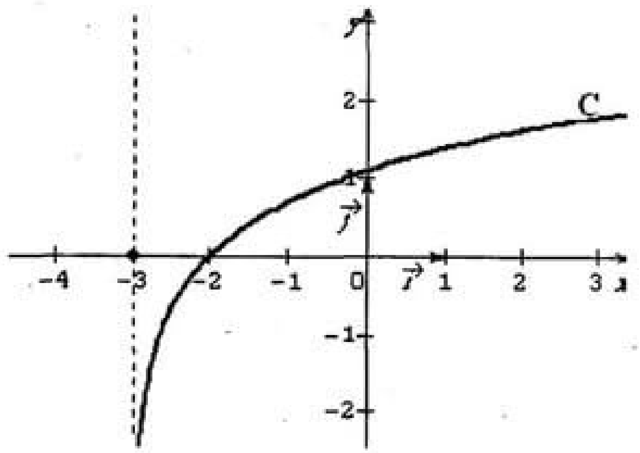
x	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^+} \ln(x+3)$$
$$= \lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty, (X = x+3)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty, (X = x+3)$$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X-3}, (X = x+3)$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-3}{X-3}} = \frac{0}{1} = 0$$

Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{i})$.



2) $h(x) = f(x) - x,\ x \in]-3,+\infty[$

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{-x-2}{x+3} < 0$$

Pour tout $x \in]1,2[$: h est continue et strictement décroissante donc h est une bijection de $]1,2[$ sur $]h(2),h(1)[=]\ln 5 - 2, \ln 4 - 1[$

Or : $\ln 5 - 2 \simeq -0,39$; $\ln 4 - 1 \simeq 0,386$

Donc $0 \in]\ln 5 - 2, \ln 4 - 1[$ et par suite $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$.

3)
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$:

i) pour $n = 0$ on a $1 \le U_0 = 1 \le 2$ Vrai

ii) supposons que $1 \le U_n \le 2$ et montrons que $1 \le U_{n+1} \le 2$ En effet on a :

$1 \le U_n \le 2$ et f est croissante sur $[1,2]$

Donc $f(1) \le f(U_n) \le f(2)$

Avec : $f(1) = \ln 4 \simeq 1,38 \ge 1$

$f(2) = \ln 5 \simeq 1,609 \le 2$

Donc $1 \le U_{n+1} \le 2$

<u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \le U_n \le 2$

b/ montrons par récurrence que $U_n \le U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

i) pour $n = 0$ on a :

$U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = f(1) = \ln 4$

et $1 \le \ln 4 \Rightarrow U_0 \le U_1$ Vrai

ii) supposons que $U_{n-1} \le U_n$ et montrons que $U_n \le U_{n+1}$ en effet on a :

$U_{n-1} \le U_n$ et f est croissante sur $[1,2]$

et $U_n \in [1,2], \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f(U_{n-1}) \le f(U_n) \Leftrightarrow U_n \le U_{n+1}$

D'où (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) converge vers un réel ℓ

Calcul de ℓ : on a :

i) $U_{n+1} = f(U_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in [1,2]$

iii) f continue en ℓ car $[1,2] \subset]-3,+\infty[$

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0$

$\Leftrightarrow f(\ell) = 0$ D'où $\boxed{\ell = \alpha}$

Exercice 9

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$

i) $n = 0$: $1 \leq U_0 = 1 \leq \sqrt{2}$ vrai

ii) supposons que $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{2}$

En effet on a : $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq U_n^2 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}U_n^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}U_n^2 + 1 \leq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} \leq \sqrt{2}$

Or $\sqrt{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{1} = 1$ donc $1 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{2}$

__Conclusion :__ $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} - U_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} - U_n\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + U_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}U_n^2 + 1 - U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{2}U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{2 - U_n^2}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right]} = \frac{(\sqrt{2} - U_n)(\sqrt{2} - U_n)}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right]}$$

Or on sait que $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2} - U_n \geq 0$ et $\sqrt{2} + U_n \geq 0$

et $2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} + 1\right] \geq 0$ et par suite $U_{n+1} - U_n \geq 0$

Finalement : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par $\sqrt{2}$ donc (U_n) est une suite convergente.

2) $V_n = U_n^2 - 2, n \in \mathbb{N}$

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 2 = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1}^{\,2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}U_n^2 + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}(U_n^2 - 2)$$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0^2 - 2 = -1$.

b/ on a : $V_n = V_0 . q^n$ donc $\boxed{V_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n n \in \mathbb{N}}$

Aussi on a : $V_n = U_n^2 - 2$ donc $U_n^2 = V_n + 2$

C'est-à-dire $U_n = \sqrt{V_n + 2}, n \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{U_n = \sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}, n \in \mathbb{N}}$

c/ */ on a (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

*/ $U_n = \sqrt{V_n + 2}$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{V_n + 2} = \sqrt{2}$

d/ $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} U_K^2 = \sum\limits_{K=0}^{K=N} (V_k + 2)$

$$=\sum_{k=0}^{k=n} V_k + 2(n+1)$$

$$= V_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 2(n+1)$$

$$=(-1)\times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + 2(n+1)$$

$$\boxed{S_n = -2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 2(n+1)}$$

e/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 2\left(\frac{(n+1)}{n}\right)$

$$= 0+2 = 2$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 2}$

Exercice 10

$K_n = \int_0^1 (x+1)e^{-nx}dx, I = \int_0^1 xe^{-x}$

1) a/*/ $K_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^1$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Donc $\boxed{K_0 = \frac{3}{2}}$

*/ $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$: par parties:

$U(x) = x \to U'(x) = 1$

$V'(x) = e^{-x} \to V(x) = -e^{-x}$

$$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$

$$= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - \left[e^{-1}-1\right]$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$$

Donc $\boxed{I = 1 - \frac{2}{e}}$

*/ on a : $K_1 = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx$

$$K_1 - I = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx - \int_0^1 xe^{-x}dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^{-x} + xe^{-x} - xe^{-x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Donc : $\boxed{K_1 - I = 1 - \frac{1}{e}}$

$K_1 - I = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow K_1 = I + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{e}$

Il en résulte : $\boxed{K_1 = 2 - \frac{3}{e}}$

b/ $K_{n+1} - K_n =$

$\int_0^1 (1+x)e^{-(n+1)x}dx - \int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx, n \in \mathbb{N}$

$$= \int_0^1 (1+x)e^{-nx}\left[e^{-x}-1\right]dx$$

On a : $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ Donc $e^{-x} - 1 \le 0$

et $(1+x)e^{-nx} \ge 0$ donc

$$(1+x)e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \overbrace{(1+x)}^{+}e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right)dx \le 0$$

D'où $K_{n+1} - K_n \le 0$ ce qui prouve que (K_n) est une suite décroissante.

c/ on a : $(1+x)e^{-(nx)} \ge 0$ et

$\int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx \ge 0 \Rightarrow K_n \ge 0$ D'où (K_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où elle est convergente.

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2$ et $e^{-nx} \ge 0$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}}$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in [0,1]$

$(E) : e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}$

En intégrant les trois membres de l'inégalité (E)

On obtient : $\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le \int_0^1 2e^{-nx} \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le 2\int_0^1 e^{-nx}$$

Or $\int_0^1 e^{-nx}dx = \left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \left[-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1-e^{-n}}{n}$

D'où : $\frac{1-e^{-n}}{n} \le K_n \le 2\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)$

c/ on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n} = 0$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = 0}$

Exercice 11

$n\in\mathbb{N} : J_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$

1) a/*/ $J_0 + J_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$

$= \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1\left(\frac{1+e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1 dt = 1$

*/ $J_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t)'}{1+e^t}dt$

$= \left[\ln(1+e^t)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$ $\boxed{J_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

On a: $J_0 + J_1 = 1 \Leftrightarrow J_0 = 1 - J_1$

D'où : $\boxed{J_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

b/ $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $(n+1)t \ge nt, t\in[0,1]$

$\Leftrightarrow e^{(n+1)t} \ge e^{nt} \Leftrightarrow \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

D'où $J_{n+1} \ge J_n$ et par suite (J_n) est croissante

2) on a : $0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^t \le e$

$\Leftrightarrow 1 \le e^t \le e \Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 1+e, e+1 \le 4$

$\Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 4$

et par suite $\frac{1}{4} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2}, \forall t\in[0,1]$

b/ on a : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1]$ $\frac{e^{nt}}{4} \le \frac{e^{nt}}{1+e^t} \le \frac{e^{nt}}{2}$

Intégrant les trois membres de l'inégalité on trouve :

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{4}dt \le J_n \le \int_0^1 \frac{e^{nt}}{2}dt \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nt}dt \le J_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nt}dt$$

Or $\int_0^1 e^{nt}dt = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N} : \frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) \le J_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$

c/ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\times\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} = +\infty$

et $J_n \ge \frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{e^n}{n}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right)$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty}$

Exercice 12

$$0 < U_0 < V_0 , \begin{cases} U_nV_n = U_0V_0 \\ V_n = \frac{1}{2}(U_{n-1}+V_{n-1}), n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1)i) pour $n = 0$

$U_0 > 0$ et $V_0 > U_0 > 0$ Vrai

ii) supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$

et montrons que $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$

en effet : $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) > 0$ car $U_n + V_n > 0$

Aussi on a : $U_{n+1}V_{n+1} = U_0V_0 > 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N} : U_n > 0$ et $V_n > 0$

2) a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$(V_n - U_n)V_n = V_n^2 - U_nV_n$

$= \frac{1}{4}(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - U_{n-1}V_{n-1}$

$= \frac{1}{4}\left[(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 + 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 - 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1} - V_{n-1}\right]^2$

Donc $V_n(V_n - U_n) = \frac{1}{4}(U_{n-1} - V_{n-1})^2 \geq 0$

Et comme $V_n \geq 0$ on aura $V_n - U_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*$

et comme $V_0 > U_0$ il résulte: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : U_n < V_n}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

*/ $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n$

$= \frac{1}{2}(U_n + V_n - 2V_n)$

$= \frac{1}{2}(U_n - V_n) \leq 0$

Car $U_n < V_n$ donc la suite (V_n) est décroissante.

*/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on sait que $V_{n+1} \leq V_n$

Donc $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$ car $U_n \geq 0$

et puisque $V_nU_n = U_{n+1}V_n$

On aura $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$

D'où $V_{n+1}U_{n+1} - U_nV_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow V_{n+1}(U_{n+1} - U_n) \geq 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ce qui prouve que la suite (U_n) est croissante.

3)*/ Convergence de (V_n) : on a:

$\forall n \in \mathbb{N} : V_n > U_n$

et la suite (U_n) est croissante

Donc $U_n > U_0$ d'où $V_n > U_0$

(V_n) est une suite décroissante et minorée par V_0 donc (V_n) est convergente.

*/ Convergence de (U_n) :

(V_n) est décroissante donc majorée par son premier terme c'est-à-dire $V_n < V_0$ et $U_n < V_n$

Donc : $U_n < V_0$ donc (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc c'est une suite convergente.

4) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V_n - U_n = \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) - U_n$

$= \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n)$

Et puisque $U_n > U_{n-1}$ donc $-2U_n < -2U_{n-1}$

Donc $V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n < V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n$

Par suite $V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

"<u>Multiplions membre à membre</u> "

$$\begin{cases} 0 < V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) \\ \times\ 0 < V_{n-1} + U_{n-1} < \frac{1}{2}(V_{n-2} - U_{n-2}) \\ \times\ 0 < V_{n-2} + U_{n-2} < \frac{1}{2}(V_{n-3} + U_{n-3}) \\ \times\ \quad \vdots \\ 0 < V_1 + U_1 < \frac{1}{2}(V_0 - U_0) \end{cases}$$

$= \ 0 < V_n - U_n < (\frac{1}{2})^n (V_0 - U_0)$

b/ $\Leftrightarrow 0 \leq V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0) = 0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0}$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$ et

(U_n) et (V_n) sont convergentes donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

c/ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_nV_n = U_0V_0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_nV_n = U_0V_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n^2 = U_0V_0$

et $U_n > 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{U_0V_0}\,;\ \lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{U_0V_0}}$$

Exercice 13

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}} \end{cases}$$

1) a/ par récurrence

i) pour $n=0: 0\le U_0=0\le 1$ vrai

ii) supposons que $0\le U_n \le 1$

et montrons que $0\le U_{n+1}\le 1$

En effet $U_n\ge 0$ donc $\dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}\ge 0$

d'où $U_{n+1}\ge 0$ Aussi on a:

$$U_{n+1}-1=\frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}-1$$

$$=\frac{U_n-\sqrt{1+U_n^{\,2}}}{\sqrt{1+U_n^2}}=\frac{U_n^{\,2}-\sqrt{1+U_n^{\,2}}^{\,2}}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n-\sqrt{1+U_n^{\,2}}\right)}$$

$$=\frac{U_n^{\,2}-\left(1+U_n^{\,2}\right)}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}\left(U_n-\sqrt{1+U_n^{\,2}}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}\left(U_n-\sqrt{1+U_n^{\,2}}\right)}$$

Comme $\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n-\sqrt{1+U_n^{\,2}}\right)\ge 0$

On aura $U_{n+1}-1\le 0$ donc

$U_{n+1}\le 1$ D'où $0\le U_{n+1}\le 1$

Conclusion:

$\forall n\in\mathbb{N}: 0\le U_n\le 1$

b/ $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}-U_n=U_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}}-1\right)$$

On sait que $1+U_n^{\,2}\ge 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+U_n^{\,2}}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}}-1\le 0$$

et comme $U_n\ge 0$ on aura: $U_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}}-1\right)\le 0$

Ce qui donne $U_{n+1}-U_n\le 0$ d'où (U_n) est une Suite décroissante.

c/ (U_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où (U_n) est convergente posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$

On a : $f(U_n)=U_{n+1}$ et f continue en $\ell\in[0,1]\subset\mathbb{R}$ puisque $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}=\ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell^2}{1+\ell^2}=\ell^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1+\ell^2}-\ell^2=0 \Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1}{1+\ell^2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1-1-\ell^2}{1+\ell^2}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{\ell^4}{1+\ell^2}=0 \Leftrightarrow \boxed{\ell=0}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0}$

2) $V_n=\dfrac{1}{U_n^{\,2}}, n\in\mathbb{N}$

a/ $V_{n+1}=\dfrac{1}{U_{n+1}^{\,2}}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{U_n}{\sqrt{U_{n+1}^{\,2}}}\right)^2}$

$$V_{n+1}=\frac{1}{\dfrac{U_n^{\,2}}{1+U_n^{\,2}}}=\frac{1+U_n^{\,2}}{U_n^{\,2}}=\frac{1}{U_n^{\,2}}+1$$

$V_{n+1}=1+V_n$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$

b/ */ on a : $V_n=V_0+nr$

Or $V_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{1+U_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{V_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + n}$

*/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{1}{U_n^2} \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow \sqrt{U_n^2} = \sqrt{\frac{1}{V_n}} = \frac{1}{\sqrt{V_n}}$$

$$\Leftrightarrow |U_n| = U_n = \frac{1}{\sqrt{V_n}} \text{ Car } U_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}}}, n \in \mathbb{N}$$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + n}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

c/ $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_n$: Somme de n premier terme d'une suite arithmétique. $S_n = n \times \dfrac{V_0 + V_{n+1}}{2}$

$$= n \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + n - 1}{2} = n \times \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + n - 1}{2}$$

$$\boxed{S_n = n\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + n}{2}\right)}, n \in \mathbb{N}^*$$

*/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - n + \sqrt{2}n}{2n^2}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)}{2\cancel{n^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 14

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} ; I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt, n \geq 1$$

1) a/ $I_0 + I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 dt = 1$$

*/ comme: $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$

On a : $I_0 + I_1 = 1 \Rightarrow I_1 = 1 - I_0 \Rightarrow I_1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

Donc : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{4-\pi}{4}}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} + \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}.t^2 + t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n}\cancel{(t^2+1)}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}}$

c/ on a : $t \in [0,1]$, donc : $t^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow t^2.t^{2n} \leq t^{2n} \Leftrightarrow \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

D'où (I_n) est décroissante

Aussi on a : $\dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \geq 0$

Par suite $I_n \geq 0$ donc (I_n) est minorée par 0.

d/ (I_n) décroissante est minorée par 0 d'où c'est une suite convergente.

2) a/ $t\in[0,1]$; $0\le t^2\le 1$

$$\Leftrightarrow 1\le t^2+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}\le\frac{1}{t^2+1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 0\le\frac{t^{2n}}{1+t^2}\le t^{2n}; t\ge 0$$

Intégrant les trois membres de l'inégalité précédente sur $[0,1]$ on aura :

$$0\le\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\le\int_0^1 t^{2n}dt$$

Or $\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$ (d'après 1-b/)

D'où : $0\le I_n\le\frac{1}{2n+1};\forall n\in\mathbb{N}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 15

$a>0; n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^n e^{-t}}{n!}dt$

Avec $n!=n(n-1)\times\ldots\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$

1) $I_1(a)=\int_0^a te^{-t}dt$

Intégrant par parties et posons:

$U(t)=t\to U'(t)=1$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

D'où : $I_1(a)=\left[-te^{-t}\right]_0^a-\int_0^a -e^{-t}dt$

$$=-ae^{-a}-\left[e^{-t}\right]_0^a=-ae^{-a}-e^{-a}+1$$

$$\boxed{I_1(a)=-(1+a)e^{-a}+1}$$

2) a) $n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0$, pour $t\ge 0$ on a: $-t\le 0$

$$\Leftrightarrow 0\le e^{-t}\le e^0=1 \text{ et } t^n\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 0\le t^n e^{-t}\le t^n \Leftrightarrow 0\le\frac{t^n e^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$$

b) on a: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\ge 0\quad 0\le\frac{t^n e^{-t}}{n!}\le\frac{t^n}{n!}$

Intégrant les trois membres de cette inégalité on aura : $0\le\int_0^a\frac{t^n e^{-t}}{n!}dt\le\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt$

Or: $\int_0^a\frac{t^n}{n!}dt=\frac{1}{n!}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$$=\frac{1}{n!}\times\frac{a^{n+1}}{(n+1)}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\boxed{0\le I_n(a)\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $I_n(a)=\int_0^a\frac{t^n e^{-t}}{n!}dt$

Posons:

$U(t)=t^n\to U'(t)=nt^{n-1}$

$V'(t)=e^{-t}\to V(t)=-e^{-t}$

$$I_n(a)=\frac{1}{n!}\int_0^a t^n e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\left[-t^n e^{-t}\right]_0^a-\int_0^a nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\left(-a^n e^{-a}\right)+\frac{n}{n!}\int_0^a t^{n-1}e^{-t}dt$$

Or: $\frac{n}{n!}=\frac{n}{n(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

Donc $I_n(a)=-\frac{a^n e^{-a}}{n!}+\underbrace{\int_0^a\frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!}dt}_{I_{n-1}(a)}$

Il résulte que: $\forall n\in\mathbb{N}^*: I_n(a)=-\frac{a^n e^{-a}}{n!}+I_{n-1}(a)$

D'où : $I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n e^{-a}}{n!}$

b) on a: $-\frac{a^n e^{-a}}{n!}\le 0$ car $a>0$

Donc $I_n(a)\le I_{n-1}(a)$ et par suite $(I_n(a))$ est une suite décroissante et $I_n(a)\ge 0$ d'où $I_n(a)$ est convergente.

c) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+\ldots\ldots+\frac{a^n}{n!}\right)$$

i) Pour $n=1$: $I_1(a)=1-(1+a)e^{-a}$

$$=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}\right) \text{ Vrai}$$

II) Supposons que le résultat est vrai à l'ordre n et montrons que :

$$I_{n+1}(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+.....+\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

En effet: $I_{n+1}(a)-I_n(a)=-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times e^{-a}$ d'après 3) a)

Donc on a :

$$I_{n+1}(a)=I_n(a)-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+.....+\frac{a^n}{n!}+\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Conclusion:

$\forall n\in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n(a)=1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)}$$

On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} I_n(a)=0$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-a}\left(1+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+.....+\frac{a^n}{n!}\right)=1$$

Multiplions par e^a et remarquant que $e^a.e^{-a}=1$ On trouve:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+.....+\frac{a^n}{n!}=e^a}$$

Exercice 16

$$\begin{cases} f(x)=x\ln(1-x)+\frac{1}{4}, x<0 \\ f(x)=\frac{e^x}{x^2+4}, x\geq 0 \end{cases}$$

1) a) */ Continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x\ln(1-x)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}=f(0)$$

f est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x^2+4}=\frac{1}{4}=f(0)$$

f est continue a droite en 0 .

Conclusion :

f est continue en 0 :

*/ Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\ln(1-x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\ln(1-x)$$

$$=\ln 1=0=f_g'(0)$$

f est dérivable a gauche en 0.

*/ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x}{x^2+4}-\frac{1}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4e^x-4-x^2}{4(x^2+4)x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4(e^x-1)}{4(x^2+4)x}-\frac{x^2}{4(x^2+4)x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{e^x-1}{x}\right).\left(\frac{1}{x^2+4}\right)-\frac{x}{4(x^2+4)}\right]$$

$$=1\times\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}=f_d'(0)$$

f est dérivable a droite en 0.

Conclusion :

$f_g'(0)\neq f_d'(0)$ Donc f n'est pas dérivable en 0.

b) pour $x<0$:

$$f'(x)=x'\ln(1-x)+x(\ln(1-x))'$$
$$=\ln(1-x)+x\times\frac{-1}{1-x}$$
$$=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}$$

On a : $x<0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow 1-x>1$ donc $\ln(1-x)>0$

D'où : $f'(x)=\ln(1-x)+\dfrac{-x}{1-x}>0$

Pour $x>0$

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(x^2+4)-(x^2+4)'e^x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{e^x(x^2+4)-2xe^x}{(x^2+4)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{e^x((x-1)^2+3)}{(x^2+4)^2}>0$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, f est strictement croissante

T.V :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\ln(1-x)+\frac{1}{4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{4x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)+\frac{1}{4x}$$
$$=+\infty+0=+\infty$$

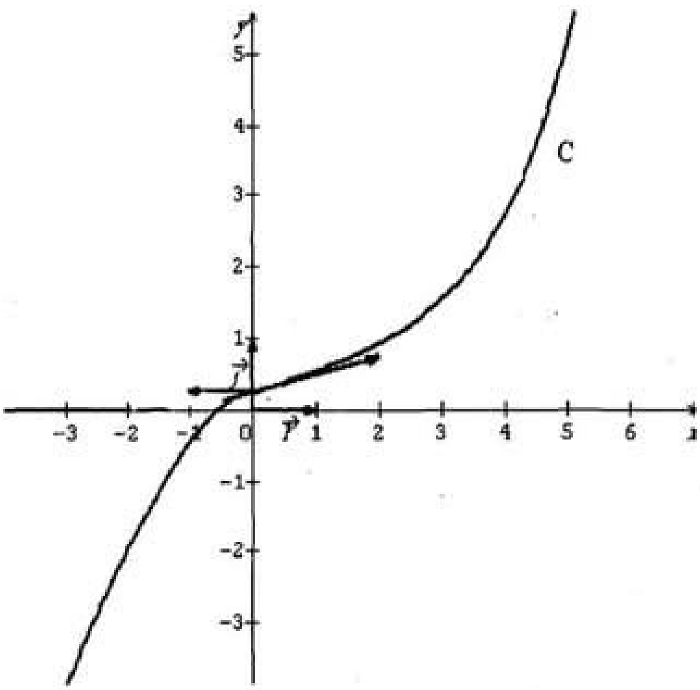
C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3}}{\frac{x^3+4x}{x^3}}=+\infty$$

Car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+4x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$

Donc C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $+\infty$.

Courbe :



2) a) $x\in[0,1]$ on a :

$$\frac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}-\frac{1}{4}=\frac{4(x^2-2x+4)-(x^2+4)^2}{4(x^2+4)^2}$$

On sait que $4(x^2+4)^2>0$

et on a :

$4(x^2-2x+4)-(x^2+4)^2$
$=4x^2-8x+16-(x^4+8x^2+16)$
$=4x^2-8x+16-x^4-8x^2-16$
$=-x^4-4x^2-8x\leq 0, x>0$

D'où : $\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}-\dfrac{1}{4}\leq 0$

Par suite : $\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\leq\dfrac{1}{4}, x\in[0,1]$

b) $x\in[0,1]:\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\leq\dfrac{1}{4}$

D'où on a : $0\leq\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\leq\dfrac{1}{4}$ et $1\leq e^x\leq e, x\in[0,1]$

Donc : $0\leq\dfrac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2}\leq\dfrac{e}{4}\leq\dfrac{3}{4}$ car $e\leq 3$.

Par suite $\forall x\in[0,1]$, $0\leq f'(x)\leq\dfrac{3}{4}$

3) $x\in[0,1]: g(x)=f(x)-x$

a) $g'(x)=f'(x)-1\leq\dfrac{3}{4}-1\leq 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

T.V :

x	0	α	1
$g'(x)$			
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{e-5}{5}$

$g(0)=f(0)-0=\dfrac{1}{4}$

$g(1)=f(1)-1=\dfrac{e}{5}-1=\dfrac{e-5}{1}$

b) $f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Or la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

Donc g est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

et comme $\dfrac{e-5}{5}<0$ on a $0\in\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

Conclusion :

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

*/ le signe de $f(x)-x$ est celui de $g(x)$ sur $[0,1]$.

Etude de signe :

D'où : $\begin{cases} x\in[0,\alpha]: f(x)\geq x \\ x\in[\alpha,1]: f(x)\leq x \end{cases}$

4) $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $\alpha\leq U_0=1\leq 1$ car $\alpha\in[0,1]$

Donc vrai pour $n=0$

ii) supposons que $0\leq U_n\leq 1$

et montrons que $0\leq U_{n+1}\leq 1$

En effet $\alpha\leq U_n\leq 1$

et comme U_n est croissante sur $[0,1]\subset\mathbb{R}$ donc

$f(\alpha)\leq f(U_n)\leq f(1)$

Avec $f(\alpha)=\alpha, f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(1)=\dfrac{e}{5}\leq 1$

Donc on aura : $\alpha\leq U_{n+1}\leq 1$

Conclusion :

$\forall n\in\mathbb{N} : \alpha\leq U_n\leq 1$

b) on sait que pour $x\in[\alpha,1]$ $f(x)\leq x$ d'après 3)b)

et comme $U_n\in[\alpha,1]$ on aura $f(U_n)\leq U_n$

D'où $U_{n+1} \leq U_n$ et par suite (U_n) est une suite décroissante

Conclusion :

(U_n) est une suite décroissante et minorée par α donc c'est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in [\alpha, 1]$

c) D'après 3)b/ on a : f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in [0,1] : 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements Finis on a : $U_n \in [0,1], \alpha \in [0,1]$ donc sur $[\alpha, U_n]$

on a :

$$0 \leq f(U_n) - f(\alpha) \leq \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

d) on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases} 0 \leq U_1 + \alpha \leq \frac{3}{4}(U_0 - \alpha) \\ \times\ 0 \leq U_2 - \alpha \leq \frac{3}{4}(U_1 - \alpha) \\ \times\ 0 \leq U_3 - \alpha \leq \frac{3}{4}(U_2 - \alpha) \\ \times\ \quad \vdots \\ \quad 0 \leq U_n - \alpha \leq \frac{3}{4}(U_{n-1} - \alpha) \end{cases}$$

$$= 0 \leq U_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (U_0 - \alpha)$$

Donc $0 \leq U_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et $\left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n, (U_0 = 1)$

D'où : $0 \leq U_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Par suite : $\boxed{\alpha \leq U_n \leq \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^n, \forall\ n \in \mathbb{N}}$

e) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$

Exercice 1

1) posons p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i , on a
$p_1 = p_3,\ p_5 = p_6 = 2p_1$ et $2p_1 = 3p_2$

$$\sum_1^6 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$\Leftrightarrow\ p_1 + p_2 + p_1 + p_2 + 2p_1 + 2p_1 = 1$

$\Leftrightarrow\ 6\,p_1 + 2\,p_2 = 1 \Leftrightarrow 3x2\,p_1 + 2\,p_2 = 1$

$\Leftrightarrow\ 3x3p_2 + 2p_2 = 11p_2 = 1 \Leftrightarrow\ p_2 = \frac{1}{11}$

Or $p_1 = \frac{3}{2}\,p_2 \Longrightarrow p_1 = \frac{3}{22}$

Conclusion : $\boxed{p_1 = p_3 = \frac{3}{22}\ ,\ p_2 = p_4 = \frac{1}{11}\ ,\ p_5 = p_6 = \frac{3}{11}}$

2) $A = \{2,4,6\}$; $p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{5}{11}$

$B = \{5,6\}$; $p(A) = p_5 + p_6 = \frac{6}{11}$

Exercice 2

3R, 5V, 7J

1) $card(\Omega) = 15^2 = 225$

2) $p(A) \overset{(R,R)}{=} \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3^2}{225} = \frac{9}{225}$

$p(B) \overset{(J,J)}{=} \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{7^2}{225} = \frac{49}{225}$

$p(C) \overset{(RR)ou(VV)ou(JJ)}{=} \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3^2+5^2+7^2}{225} = \frac{83}{225}$

On a D est l'événement contraire de C d'où :

$p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{83}{225} = \frac{142}{225}$

Exercice 3

B_1-B_4-N_2-N_3-N_5-N_7

1) card. $(\Omega) = C_6^2 = 15$

$p(A) \overset{n°:1ou3ou5ou7}{=} \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$p(B) \overset{\{B,B\}ou\{N,N\}}{=} \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^2 + C_4^2}{15} = \frac{1+6}{15} = \frac{7}{15}$

" $C = \{N_3, N_5, N_7\} = A \cap B$"

$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

L'événement D est la réunion des événements A et B

$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$= p(A) + p(B) - p(C)$
$= \frac{2}{5} + \frac{7}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ donc $\boxed{p(D) = \frac{2}{5}}$

2) card. $(\Omega) = 6^2 = 36$

$p(E) \overset{(B,N)ou(N,B)}{=} \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{(2^1 x 4^1)x2}{36} = \frac{4}{9}$

$\overline{F}$ <<N'obtenir aucune boule noire>> donc $\overline{F}$ est réalisée lorsque on tire deux boules blanches parmi quatre

$p(\overline{F}) = \frac{2^2}{36} = \frac{1}{9} \Longrightarrow p(F) = 1 - p(\overline{F}) = \frac{8}{9}$

Exercice 4

$4B, 2R$

1) a) E_k << seule la k^{eme} boule tirée est blanche >>

$p(E_1) \overset{(BRR)}{=} \frac{4}{6} x \frac{2}{5} x \frac{2}{5} = \frac{8}{75}$

b) $p(E_2) \overset{(RBR)}{=} \frac{2}{6} x \frac{4}{6} x \frac{2}{5} = \frac{4}{45}$

$p(E_3) \overset{(RRB)}{=} \frac{2}{6} x \frac{2}{6} x \frac{4}{6} = \frac{2}{27}$

c) $p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \dfrac{72+60+50}{675} = \dfrac{182}{675}$

d) $p(E_1 \mid E) = \dfrac{p(E \cap E_1)}{p(E)} = \dfrac{p(E_1)}{p(E)} = \dfrac{\frac{8}{75}}{\frac{182}{675}} = \dfrac{36}{91}$

2) a) $n \geq 2$, soit A_n l'événement « obtenir au moins une boule blanche parmi les n boules tirées »

$\overline{A_n}$ « N'obtenir aucune boule blanche »
Donc toutes les boules tirées sont rouges

$p(\overline{A_n}) = (\frac{2}{6})^n = \dfrac{1}{3^n}$

D'où $p(A_n) = 1 - p(\overline{A_n}) = \boxed{1 - \dfrac{1}{3^n} = p_n}$

b) $p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{3^n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 0{,}01$

ln:log.népérien

$\ln((\frac{1}{3})^n \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \ln \frac{1}{3} \leq \ln(0{,}01)$

$(\ln \frac{1}{3} \leq 0)$ donc $n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{1}{3})} \simeq 4{,}19$

Conclusion : $\boxed{n \geq 5}$

Exercice 5

$\underline{|3B,2N|}$ U_1 $\qquad$ $\underline{|1B,4N|}$ U_i $2 \leq i \leq n$

1) E_1 : tirer une blanche parmi les trois de l'urne U_1
$\overline{E_1}$: tirer une noire parmi les deux de l'urne U_1

$p(E_1) = \dfrac{3}{5}$

- On prend une blanche de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de deux dans l'urne U_2 qui contient dans ce cas six boules d'où :

$p(E_2 \mid E_1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

- On prend une noire de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de l'urne U_2 qui contient dans ce cas une blanche et cinq noires d'où :

$p(E_2 \mid \overline{E_1}) = \dfrac{1}{6}$

On a $p(E_2) = p(E_2 \cap E_1) + p(E_2 \cap \overline{E_1})$

$= p(E_1).p(E_2|E_1) + p(\overline{E_1})\, p.(E_2 \mid \overline{E_1})$

$= \dfrac{3}{5} x \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} x \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{15}$

2) $p_{k+1} = p(E_{k+1})$

a) $p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$

$= p(E_k).p(E_{k+1}|E_k) + p(\overline{E_k})\, p(E_{k+1}|\overline{E_k})$

$= p_k x \dfrac{2}{6} + (1 - \overline{p_k}) x \dfrac{1}{6}$

$p_{k+1} = p_k(\dfrac{2}{6} - \dfrac{1}{6}) + \dfrac{1}{6}$

$p_{k+1} = \dfrac{1}{6} p_k + \dfrac{1}{6}$

b) On a : $V_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6} p_n + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{5}$

$= \dfrac{1}{6} p_n - \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{6}(p_n - \dfrac{1}{5})$

D'où $V_{n+1} = \dfrac{1}{6} V_n$ ce qui prouve que la suite V est géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$

c) On sait que : $V_n = V_1 x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Or on a : $V_1 = p_1 - \dfrac{1}{5} = p(E_1) - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow V_n = \dfrac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Par suite : $p_n = V_n + \dfrac{1}{5} \Rightarrow \boxed{p_n = \dfrac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1} + \dfrac{1}{5}}$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{5} x \underbrace{(\frac{1}{6})^{n-1}}_{0} + \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5}$$

$-1 < \dfrac{1}{6} < 1$

Exercice 6

$\boxed{R_1R_1R_0, J_1J_0J_{-1}, V_2V_{-1}}$

1) $p(A) \overset{\{R_1,R_1,J_1\}}{=} \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56}$

$p(B) \overset{\{3R\}ou\{3J\}}{=} \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^3 + C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{28}$

*pour que l'événement C est réalisée il suffit de tirer le jeton jaune numéroté 0 et les deux jetons rouges numérotés 1 ou bien le jeton rouge numéroté 0 et un jeton parmi les deux jetons rouges numérotés 1 et un jeton parmi les jetons jaunes numérotés 1 et – 1 et les deux jetons verts donc :

$p(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 x C_2^2 + C_1^1 x C_2^1 x C_4^1}{C_8^3} = \dfrac{1+8}{56} = \dfrac{9}{56}$

$p(D) = \dfrac{card(D)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^2 x C_5^1 + C_4^2 x C_2^1}{C_8^3} = \dfrac{27}{56}$

2)

- $p(S) \overset{\{0;1;-1\}ou\{2;-1;-1\}}{=} = \dfrac{C_3^1 x C_2^1 x C_2^1 + C_1^1 x C_2^2}{C_8^3} = \dfrac{13}{56}$

$\overline{N}$: tirer trois jetons portants un numéro différent de 0

- $p(\overline{N}) = \dfrac{C_6^3}{C_8^3} = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14} \Rightarrow p(N) = 1 - p(\overline{N})$

$\Rightarrow p(N) = \dfrac{9}{14}$

3) l'événement $N \cap S$: « obtenir un produit nul et une somme nulle » donc tirer un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté – 1

$\Rightarrow p(N \cap S) = \dfrac{C_3^1 x C_2^1 x C_2^1}{C_8^3} = \dfrac{12}{56}$

Donc : $p(N | S) = \dfrac{p(N \cap S)}{p(S)} = \dfrac{\frac{12}{\cancel{56}}}{\frac{13}{\cancel{56}}} = \dfrac{12}{13}$

Exercice 7

$\boxed{0 - 0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 2}$

1) $p(R) \overset{\{0,0,0\}}{=} = \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{4}{35}$

L'événement A | R : « obtenir trois jetons numérotés 0 au premier tirage puis tirer le jeton numéroté 0 parmi les quatre qui reste au second tirage »

$\Rightarrow p(A | R) = \dfrac{1}{4}$

$p(A \cap R) = p(R).\ p(A | R) = \dfrac{1}{4} . \dfrac{4}{35} = \dfrac{1}{35}$

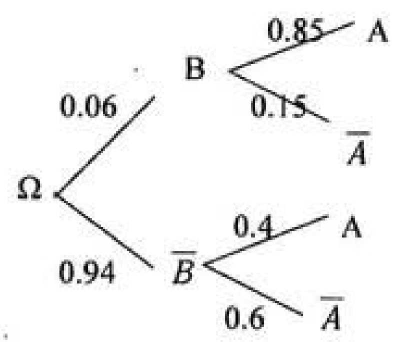
$\boxed{p(A) = p(A \cap R) = \dfrac{1}{35}}$

2) a) $p(B) = \overbrace{\dfrac{C_4^2 . C_2^1}{C_7^3}}^{\{0,0,1\}} + \overbrace{\dfrac{C_4^3}{C_7^3} . \dfrac{2}{4}}^{\{0,0,0\}\cap\{1\}} = \dfrac{12}{35} + \dfrac{2}{35} = \dfrac{14}{35}$

b) $p(H) = p(R | B) = \dfrac{p(R \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{2}{3\cancel{5}}}{\frac{14}{3\cancel{5}}} = \dfrac{1}{7}$

Exercice 8

1) On pourra utiliser un diagramme en arbre :



On a donc :

$p(\overline{A} | B) = 1 - p(A | B) = 1 - 0,85 = 0,15$

$$p(\overline{B} \mid A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{0,4x\,0,94}{p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

$$p(\overline{B} \mid A) = \frac{0,376}{p(B)p(A|B) + p(\overline{B})p(A|\overline{B})}$$

$$= \frac{0,376}{0,06x\,0,85 + 0,94x\,0,4} = \frac{0,376}{0,427} = 0,885$$

$\Rightarrow \quad p(\overline{B} \mid A) = 0,885$

2) $p(A \cap B) = p(B).\, p(A \mid B)$
$=0,06 \times 0,85 = 0,051$

$p(A) \times p(B) = 0,427 \times 0,06 = 0,025$

Conclusion : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, d'où A et B ne sont pas indépendants

Exercice 9

$$p(A) \overset{(2,4,6)ou(1,3,5)}{\widehat{=}} \frac{3^2+3^2}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) \overset{(2,4,6)ou(1,3,5)}{\widehat{=}} \frac{(1^1 x\, 6^1)x\,2}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{(1^1 x\, 3^1)x\,2}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Conclusion : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, d'où A et B sont deux événements indépendants

Exercice 10

D_1 " la pièce présente le défaut D_1 "
D_2 " la pièce présente le défaut D_2 "

1) A l'événement <<la pièce présente les 2 défauts>>

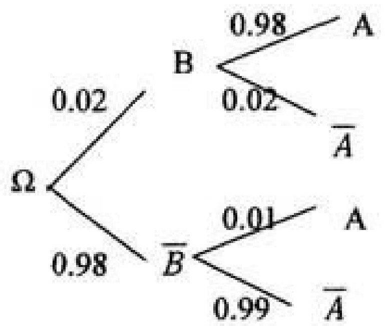
$p(A) = p(D_1 \cap D_2) = p(D_1)\, p(D_2 \mid D_1)$
$= 0.08.x0.15 = 0.012$

2)
$$p(D_2 \cup D_1) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_2 \cap D_1) = 1$$
$$\Leftrightarrow p(D_2) = 1 + p(D_2 \cap D_1) - p(D_1)$$
$$= 1 + 0.012 - 0.08 = 0.932$$

3) $p(D_1 \mid D_2) = \dfrac{p(D_1 \cap D_2)}{p(D_2)} = \dfrac{0,012}{0,932} = 0.013$

Exercice 11

On considère l'arbre pondéré ci contre où M désigne L'événement "personne malade" et T l'événement " Le test de dépistage est positif"



a) $p(M \cap T) = p(M).\, p(T \mid M)$
$= 0.98x.0.02 = 1,96\ \%$

b) $p(\overline{M} \cap \overline{T}) = p(\overline{M}).\, p(\overline{T} \mid \overline{M})$
$= 0.98x.0.99 = 97,02\%$

c) $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$
$= \dfrac{196}{1000} + \dfrac{1}{100} x \dfrac{98}{100} = 2,94\ \%$

d) $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 70,60\ \%$

e) $p(\overline{M} \mid T) = \dfrac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0098}{0,0294} \sqcup 33\%$

f) $p(M \mid \overline{T}) = \dfrac{p(\overline{T} \cap M)}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,0004}{0,706} \sqcup 0,56\%$

Exercice 12

On considère les événements :
M " Dérèglement mécanique "
E " Dérèglement électronique "

On a : p (M) = 0,007 ; p (E) = 0,003
p (M | E) = 0,5

1) $p(M \cap E) = p(E).p(M|E)$
$= 0{,}003 \times 0{,}5 = 0{,}0015$

2) $p(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - p(M \cup E)$ avec
$p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E)$
$= 0{,}0085$
D'où $p(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - 0{,}0085 = 0{,}9915$

3) la machine est déréglé c'est l'événement : $M \cup E$
Donc :
$$p(M \cap E | M \cup E) = \frac{p(M \cap E)}{p(M \cup E)} = \frac{0{,}0015}{0{,}0085} = 0{,}176$$
Par suite la probabilité que la machine à subit un dérèglement mécanique et électronique sachant qu'elle est déréglée est 0,176

Exercice 13

D_1 " la pièce présente le défaut D_1 "
D_2 " la pièce présente le défaut D_2 "
On a :
$P(D_1) = \frac{6}{100}$, $P(D_2) = \frac{12}{100}$, $P(D_1 \cap D_2) = \frac{5}{100}$
Soit A l'événement <<la pièce présente un seul défaut>>

$$p(A) = p(D_1 \cap \overline{D_2}) + p(\overline{D_1} \cap D_2)$$

Or on sait que : $p(\overline{D_1} \cap D_2) = p(D_2) - p(D_1 \cap D_2)$
$p(\overline{D_2} \cap D_1) = p(D_1) - p(D_1 \cap D_2)$

Par suite on aura :

$$p(A) = p(D_1) + p(D_2) - 2p(D_1 \cap D_2)$$
$$\frac{6}{100} + \frac{12}{100} - \frac{10}{100} = \frac{8}{100}$$

$$\boxed{p(A) = 8\%}$$

Exercice 14 !!

M désigne l'événement "personne choisi malade" et F l'événement " personne choisi est fumeur "

On a : $p(\overline{F} \cap \overline{M}) = \frac{1}{2}$ (50%)

$p(\overline{F} \cap M) = \frac{1}{4}$ (25%)

On sait que les événements sont indépendants donc :

$$p(\overline{F} \cap M) = p(\overline{F}).p(M)$$
$$\Leftrightarrow \quad p(M) = \frac{p(\overline{F} \cap M)}{p(\overline{F})}$$

Avec :
$$p(\overline{F}) = p(\overline{F} \cap \overline{M}) + p(\overline{F} \cap M)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finalement $p(M) = \frac{p(\overline{F} \cap M)}{p(\overline{F})} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$

- $P_1 = p(F \cap \overline{M}) = p(\overline{M}).p(F)$
$= (1 - p(M))(1 - p(\overline{F}))$
$= \frac{2}{3} x \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{1}{6}}$

- $P_2 = p(F \cap M) = p(F).p(M)$
$= p(M).(1 - p(\overline{F})) = \frac{1}{3} x \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{1}{12}}$

Exercice 15 :

E_1 "appareil fabriquée la première entreprise "

E_2 "appareil fabriquée la deuxième entreprise "

F_1 " fiabilité de l'appareil de la première entreprise "

F_2 " fiabilité de l'appareil de la deuxième entreprise"

On désigne par F " fiabilité de l'appareil achetée " on a :

$$p(F) = p(F_1 \cap E_1) + p(F_2 \cap E_2)$$
$$= p(E_1).p(F_1 | E_1) + p(E_2).p(F_2 | E_2)$$
$$= \frac{2}{3} x \frac{95}{100} + \frac{1}{3} x \frac{90}{100} = \frac{14}{15} \square\ 93\ \%$$

$$\boxed{p\ (F) = 93\ \%}$$

Exercice 16 :

On applique le principe de probabilité totale

$p(D) = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3)$

$= p(M_1)p(D | M_1) + p(M_2)p(D | M_2) + p(M_3)p(D | M_3)$

$$= \frac{50}{100} x \frac{1}{100} + \frac{35}{100} x \frac{2}{100} + \frac{15}{100} x \frac{6}{100} = \frac{21}{1000}$$

$$\boxed{p(D) = 0{,}0021}$$

Exercice 17 :

Appelons E l'événement :" l'emboutisseuse tombe en panne "
et R:" le robot tombe en panne "

On a : $p(E) = \frac{2}{100}$, $p(R) = \frac{8}{100}$ et $p(R | E) = \frac{1}{4}$

On a : $p(R \cap E) = p(E).p(R | E)$
$$= \frac{2}{100} x \frac{1}{4} = \frac{1}{200} = 0{,}5.10^{-2}$$

- $P((\overline{R} \cap \overline{E}) = 1 - p(R \cup E)$
$$= 1 - [p(R) + p(E) - p(R \cap E)]$$
$$= 1 - p(R) - p(E) + p(R \cap E)$$
$$= \frac{181}{200}$$

$$\boxed{p(\overline{R} \cap \overline{E}) = 90{,}5\ \%}$$

Exercice 1

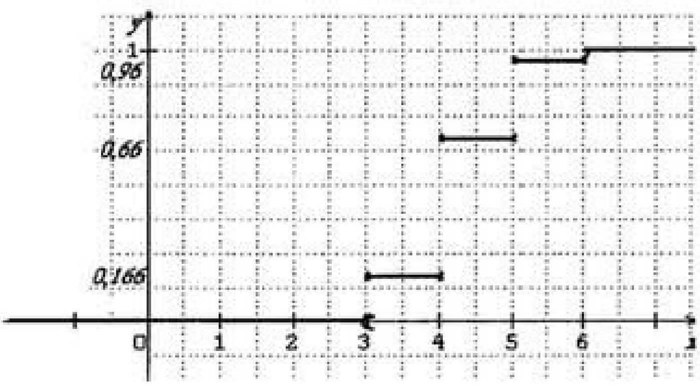
1) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$

- $p(X=3) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120}$
- $p(X=4) = \dfrac{C_6^2 x C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{60}{120}$
- $p(X=5) = \dfrac{C_6^1 x C_4^2}{C_{10}^3} = \dfrac{36}{120}$
- $p(X=6) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{4}{120}$

2) soit F la fonction de répartition de la variable X :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, 3[\\ \dfrac{20}{120} & x \in [3, 4[\\ \dfrac{80}{120} & x \in [5, 6[\\ \dfrac{116}{120} & x \in [4, 5[\\ 1 & x \in [6, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 2

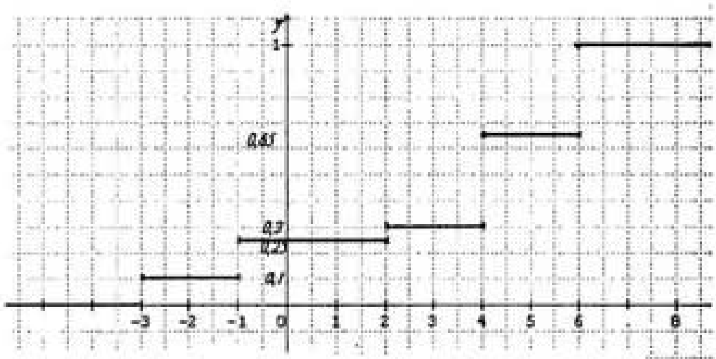
On a :

$F(-2) = p(X \leq -2) = 0{,}1$
$F(0) = p(X \leq 0) = 0{,}25$
$F(4{,}2) = p(X \leq 4{,}2) = 0{,}65$

La fonction de répartition de X est définie ainsi :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si \ x \in]-\infty, -3[\\ 0{,}1 & si \ x \in [-3, -1[\\ 0{,}25 & x \in [-1, 2[\\ 0{,}3 & x \in [2, 4[\\ 0{,}65 & si \ x \in [4, 6[\\ 1 & si \ x \in [6, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 3

On sait que :

$E(X) = \sum_i x_i p_i = -2a - 1x0{,}15 + 2x0{,}25 + 4b + 6x0{,}1$
$= -2a + 4b + 0{,}95$ or $E(X) = 1{,}05$

D'où $-2a + 4b = 1{,}05 - 0{,}95 = 0{,}1$

De plus on sait que : $\sum_i p_i = 1$

$\Rightarrow a + 0{,}15 + 0{,}25 + b + 0{,}1 = 1$

$\Rightarrow a + b + 0{,}5 = 1 \Rightarrow a + b = 0{,}5$

Donc a et b vérifie :

$$\begin{cases} -2a + 4b = 0{,}1 \\ a + b = 0{,}5 \end{cases} \xRightarrow{(1)+2(2)} 6b = 1{,}1 \Rightarrow b = \frac{11}{60}$$

Et par suite : $a = 0{,}5 - b = \dfrac{30}{60} - \dfrac{11}{60} = \dfrac{19}{60}$

$\Rightarrow \boxed{a = \dfrac{19}{60} \text{ et } b = \dfrac{11}{60}}$

Exercice 4

On désigne par R, B, V et J les évènements :

R « tirer une boule rouge » B « tirer une boule bleue »
V « tirer une boule verte » J « tirer une boule jaune »

1) r, b, v et j vérifient : $\frac{r}{1}=\frac{b}{2}=\frac{v}{3}=\frac{j}{4}$

$\Rightarrow$ 2r = b ; 3r = v et 4r = j et aussi :
r + b + v + j = 20

$\Rightarrow$ r + 2r + 3r + 4r = 20 $\Rightarrow$ 10r = 20

Par suite : r = 2 ; b = 4 ; v = 6 et j = 8

Finalement • $p(R)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$; $p(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

• $p(V)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ Et $p(J)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

2) a) $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

b) X suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et $p=p(B)=\frac{1}{5}$ donc

$$\boxed{p(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{3-k};\quad k\in\{0,1,2,3\}}$$

$p(X=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$

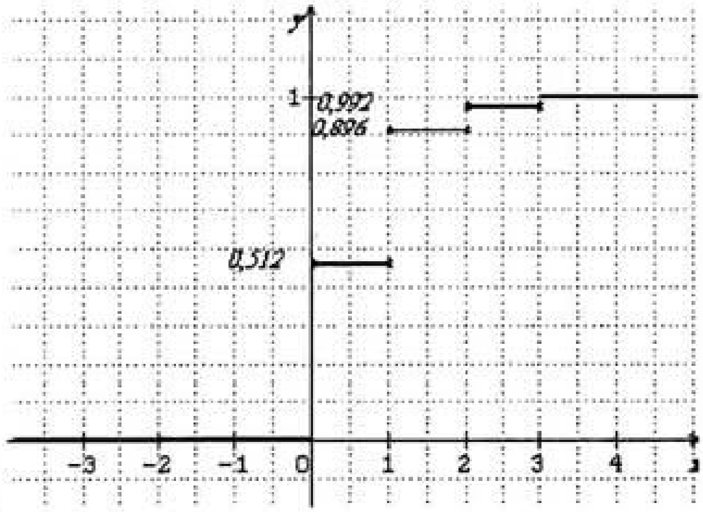
$p(X=1)=3x\,\frac{1}{5}x\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$

$p(X=2)=3x\left(\frac{1}{5}\right)^2x\,\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$

$p(X=3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

c) La fonction de répartition de X est définie ainsi :

$$F(X)=\begin{cases}0 & si\ x\in\left]-\infty,0\right[\\ \frac{64}{125} & si\ x\in\left[0,1\right[\\ \frac{112}{125} & x\in\left[1,2\right[\\ \frac{124}{125} & x\in\left[2,3\right[\\ 1 & si\ x\in\left[3,+\infty\right[\end{cases}$$



d) $E(X)=n\cdot p=3.\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

$V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=3.\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})=\frac{12}{5}$

Exercice 5

1B-1R-3N

1) pour qu'il reste dans l'urne deux couleurs il suffit de tirer une boule blanche ou une boule rouge donc :

$p(A)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

2) Soit l'événement B : « il reste dans l'urne deux couleurs »

On a : $card.(\Omega)=A_5^2=20$

l'événement B est réalisé si et seulement si on tire une boule rouge et une boule noire ou bien une boule blanche et une boule noire d'où :

$$p(B)=\frac{\overbrace{(A_1^1xA_3^1)x2}^{(R,N)ou(N,R)}+\overbrace{(A_1^1xA_3^1)x2}^{(B,N)ou(N,B)}}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{p(B)=\frac{3}{5}}$$

3) $card.(\Omega)=C_5^2=10$

a) loi de probabilité de X :

$X(\Omega)=\{1,2,3\}$

$p(X=1)=\frac{C_1^1xC_1^1}{C_5^2}=\frac{1}{10}\qquad\{R,B\}$

$$p(X=2) \underbrace{=}_{\{R,N\}ou\{B,N\}} \frac{C_1^1 x C_3^1 + C_1^1 x C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{10}$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \quad \{N,N\}$$

b) $E(X) = \sum_i x_i p_i = \frac{1}{10} + \frac{12}{10} + \frac{9}{10} = 2,2$

c) la loi de probabilité de x est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	Total
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
$x_i p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{9}{10}$	$E(X)=\frac{22}{10}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{27}{10}$	$E(X^2)=\frac{52}{10}$

- On a donc : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \sum_i x_i^2 p_i - [E(X)]^2$$

$$= \frac{52}{10} - \left(\frac{22}{10}\right)^2$$

$$= \frac{520-484}{100} = \frac{36}{100}$$

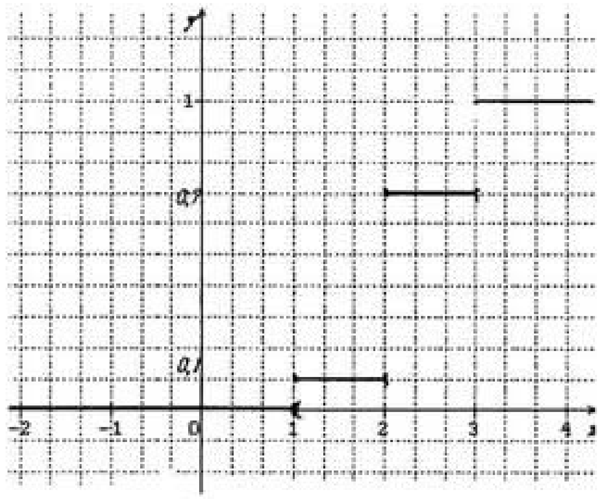
$$\Rightarrow \boxed{V(X) = 0,36}$$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \boxed{\sigma(X) = 0,6}$

d) La fonction de répartition de X est définie par:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, 1[\\ 0,1 & x \in [1,2[\\ 0,7 & x \in [2,3[\\ 1 & x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 6

9B - 1R

1) $card.(\Omega) = C_{10}^3 = 120$

Soit l'événement R : « obtenir une boule rouge » on a :

$$p(R) = \frac{C_1^1 x C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

2) Dans cette expérience la variable X suit une loi binomiale de paramètre n = 5 et $p = p(R) = \frac{3}{10}$ donc

$$\boxed{p(X=k) = C_5^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}; \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}}$$

Par suite on a :

$$E(X) = nxp = 5.\frac{3}{10} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(X) = 1,5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5x\frac{3}{10}x\frac{7}{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{1,05} = 1,025}$$

Exercice 7

Les cinq lancers du dé sont indépendants et à chaque lancer il y a deux résultats un succès (obtenir le chiffre 4) de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et un échec donc X suit une loi binomiale $B(5, \frac{1}{4})$ d'où :

$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$\boxed{p(X=k) = C_5^k (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{5-k}; \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}}$$

Aussi on a : $E(X) = nxp = 5.\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{E(X) = 1,25}$

Exercice 8

a) X suit une loi binomiale $B(100, \frac{1}{50})$ donc :

$X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,100\}$

$$\boxed{p(X=k) = C_{100}^k (\frac{1}{50})^k (\frac{49}{50})^{100-k}; \quad k \in \{0,1,2,\dots,100\}}$$

b) $E(X) = nxp = 100.\frac{1}{50} = 2$

Exercice 9

V1-V1* B0-B1-B (-1)

1) On désigne par F l'événement : obtenir face au cour du lancer de la pièce de monnaie on a $p(F) = \frac{1}{2}$

Soit $\overline{F}$ 'événement contraire de F c'est-à-dire obtenir la face pile au cour du lancer de la pièce de monnaie

a) D'après le principe de probabilité totale on a :

$$p(A) = p(F \cap A) + p(\overline{F} \cap A)$$
$$= p(F).p(A \mid F) + p(\overline{F}).p(A \mid \overline{F})$$
$$= \frac{1}{2} x \frac{C_3^1 x C_1^1}{C_5^2} + \frac{1}{2} x \frac{(3^1 x 1^1) x 2 + 1^2}{5^2}$$
$$= \frac{3}{20} + \frac{7}{50} = \frac{29}{100} \Rightarrow \boxed{p(A) = 0,29}$$

b) C'est l'événement : obtenir face sachant que A est réalisé donc :

$$p(F \mid A) = \frac{p(F \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{29}{100}} = \frac{15}{29}$$

c) • Soit Y l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours des n épreuves repérées de la même manière et qui sont indépendantes ainsi Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p = p(A) = \frac{29}{100}$

On a : $p_n = 1 - p(Y=0)$

$$= 1 - C_n^0 (\frac{29}{100})^0 (\frac{71}{100})^n$$

D'où $\boxed{p_n = 1 - (\frac{71}{100})^n}$

• $p_n \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - (\frac{71}{100})^n \geq 0,95$

Ln : log népérien

$\Leftrightarrow (\frac{71}{100})^n \leq 0,05 \Leftrightarrow Ln(\frac{71}{100})^n \leq \ln(0,05)$

$\Leftrightarrow n(Ln\frac{71}{100}) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{Ln(\frac{71}{100})}$

$\Leftrightarrow n \geq 8,746$

<u>Conclusion</u> : le plus petit entier n vérifiant $p_n \geq 0,95$ est $n = 9$

2) • Loi de probabilité de X:

$X(\Omega) = \{1,2,3\}$

$p(X=1) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \longrightarrow (B, \dots)$

$p(X=2) = \frac{2}{5} x \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \longrightarrow (V, B \dots)$

$p(X=3) = \frac{2}{5} x \frac{1}{4} x \frac{3}{3} = \frac{1}{10} \rightarrow$

$(V, V, B....)$

- $E(X) = \sum_i x_i p_i = 1x\frac{6}{10} + 2x\frac{3}{10} + 3x\frac{1}{10}$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = 1,5}$

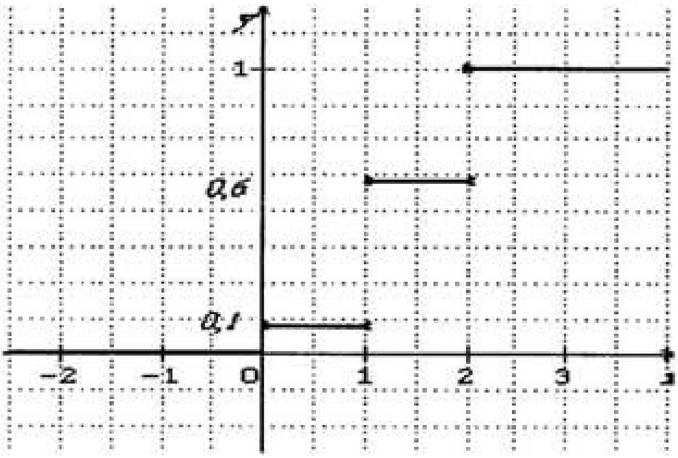
Exercice 10 Voir exercice 8 (mêmes énoncés)

Exercice 11

1) a) La fonction de répartition de X est définie par:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \in]-\infty, 0[\\ F(x) = 0,1 & x \in [0,1[\\ F(x) = 0,6 & x \in [1,2[\\ F(x) = 1 & x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X) :



b) $E(X) = \sum_i x_i p_i = 0x\,0,1 + 1x\,0,5 + 2x\,0,4$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = 1,3}$

2) a) $p(C_1 \cap E) = p(C_1).\ p(E | C_1) = p_1 \times 0,7 =$ 0,5x0,7

$\Rightarrow \boxed{p(C_1 \cap E) = 0,35}$

b) deux clients se présentent à la station et un seul achète de l'essence donc le premier va acheter de L'essence et le second de gazoil ou bien le premier va acheter de gazoil et le second de l'essence

D'où $p(E | C_2) = 0.3x0.7 + 0.7x0.3 = 0.-.42$

$p(C_2 \cap E) = p(C_2).\ p(E | C_2)$
$= p_2 \times 0,42 = 0,4x0,42$

$\Rightarrow \boxed{p(C_2 \cap E) = 0,168}$

c) Soit l'événement C_0 : en cinq minute aucun client se présente à la station, $\{C_0, C_1, C_2\}$ est un système complet donc on appliquant le principe de probabilité totale on trouve :

$p(E) = p(E \cap C_0) + p(E \cap C_1) + p(E \cap C_2)$
$= 0 + 0,35 + 0,168$

Donc $\boxed{p(E) = 0,518}$

3) $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

L'événement (y = 0) c'est que les deux clients achètent de gazoile où aucun client n'arrive à la station ou un seul client arrive à la station et achète de gazoile on aura :

$p(y = 0) = (0,3x0,3)x0,4 + 0,1x1 + 0.5x0,3 = 0,286$

$p(y = 1) = p(E) = 0,518$

$p(y = 2) = (0,7x0,7)x0,4 = 0,196$

Conclusion

x_i	1	2	3	total
p_i	0,286	0,518	0,196	1

Exercice 12

$\underbrace{|0,0,2|}_{B_1}$ $\underbrace{|1,1,3,4|}_{B_2}$

1) Utilisant un tableau donnant tout les produit possibles obtenus au cour de cette épreuve:

X	1	1	3	4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2	2	2	6	8

Donc la loi de probabilité de X est :

$X(\Omega) = \{0, 2, 6, 8\}$

$p(X=0) = \frac{8}{12}$, $p(X=2) = \frac{2}{12}$

$p(X=6) = \frac{1}{12}$, $p(X=8) = \frac{1}{12}$

2) Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où on obtient un produit supérieur à quatre . Y suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et de $p = p(x > 4) = p(X=6) + p(X=8) \Rightarrow p = \frac{1}{6}$

D'où :

a) $p(Y=2) = C_3^2.(\frac{1}{6})^2.(\frac{5}{6})^1 = \frac{5}{12}$

b) $p(Y=0) + p(Y=2) = C_3^0.(\frac{1}{6})^0.(\frac{5}{6})^3 + C_3^1.(\frac{1}{6})^1.(\frac{5}{6})^2$

$= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{25}{27}$

3) a) $p_1 = \frac{1}{3}$; $p_2 = \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

et $p_3 = \frac{2}{3} x \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

le (n – 1) premier tirage sont des jetons numérotes 0 et le n[me] tirage est le jeton numéroté 2 donc :

$$\boxed{p_n = (\frac{2}{3})^{n-1}.\frac{1}{3}}$$

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^{i-1} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{3})^{i-1}$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}.\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}}_{\text{somme des n termes d'une suite géométrique}} \Rightarrow S_n = 1-(\frac{2}{3})^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty}\left[1-(\frac{2}{3})^n\right] = 1$$

Exercice 13

1) $p(A) = \underbrace{(\frac{3}{6} x \frac{1}{6}) x 2}_{(-1,0)} + \underbrace{(\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2}_{(-1,1)} + \underbrace{(\frac{1}{6} x \frac{2}{6}) x 2}_{(0,1)}$

(-1,0) ou (-1,1) ou (0,1)

$= \frac{6+12+4}{36} \Rightarrow \boxed{p(A) = \frac{11}{18}}$

(-1,1) ou (0,0)

$p(B) = (\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2 + (\frac{1}{6})^2 \Rightarrow \boxed{p(B) = \frac{13}{36}}$

2) l'événement C est l'événement A sachant B :

$p(C) = p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

- $A \cap B$ C'est l'événement obtenir une somme nulle ave deux numéros différents c'est-à-dire obtenir le couple (-1, 1)

$\Rightarrow p(A \cap B) = (\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2 = \frac{12}{36}$

Par suite :

$p(C) = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{13}{36}} \Rightarrow \boxed{p(C) = \frac{12}{13}}$

3) Utilisant un tableau donnant tout les sommes possibles obtenus au cour de cette épreuve:

+	-1	-1	-1	0	1	1
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
0	-1	-1	-1	0	1	1
1	0	0	0	1	2	2
1	0	0	0	1	2	2

a) Loi de probabilité de X :

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

- $p(X=-2) = \dfrac{9}{36}$ • $p(X=-1) = \dfrac{6}{36}$

- $p(X=0) = \dfrac{13}{36}$ • $p(X=1) = \dfrac{4}{36}$

- $p(X=2) = \dfrac{4}{36}$

b) $p(X>0) = p(X=1) + p(X=2) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

$$\boxed{p(X>0) = \frac{2}{9}}$$

Exercice 14

$B_1\ B_{-1}\ N_1\ N_1\ N_{-1}$

1) card.$(\Omega) = C_5^2 = 10$

a) $p(A) = \dfrac{\overset{\{[illegible]\}}{C_2^2}}{10} + \dfrac{\overbrace{C_3^2}^{\{N, N\}}}{10} = \dfrac{2}{5}$

$p(B) = \dfrac{\overset{\{[illegible]\}}{C_2^2}}{10} = \dfrac{1}{10}$

b) les valeurs prises par X sont $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$

$\{-1, -1\} \longrightarrow p(X=-2) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$

$\{-1, 1\} \longrightarrow p(X=0) = \dfrac{C_3^1 x C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{6}{10}$

$\{1, 1\} \longrightarrow p(X=2) = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$

E(X) : espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = -2x\frac{1}{10} + 0x\frac{6}{10} + 2x\frac{3}{10} = 0,4$$

2) P : $x + ay + b = 0$; P' : $x + by - a = 0$

Soient $\overline{N}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P

$\overline{N}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P'

On a donc :

- P et P' sont parallèles si et seulement si $\overline{N}$ et $\overline{N}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overline{N}, \overline{N}') = \begin{vmatrix}1 & 1\\ a & b\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow a = b$

Donc l'événement C est réalisée si on tire deux jetons de même numéro par suite : p (C) =

$\dfrac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

- P et P' sont perpendiculaires si et seulement si $\overline{N}$ et $\overline{N}'$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overline{N} \cdot \overline{N}' = 0$

$\Leftrightarrow 1 + ab = 0 \Leftrightarrow ab = -1$

Donc l'événement D est réalisée si on tire deux jetons deux numéros distincts d'où :

$p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = \dfrac{3}{5}$

$$\boxed{p(C) = \frac{2}{5} \text{ et } p(D) = \frac{3}{5}}$$

Exercice 15

$\underline{|N, N, B, B, B|}$ U_1 $\underline{|N, N, N, B, B|}$ U_2

1) On considère l'événement A « obtenir le chiffre 0 au cours du lancer du dé cubique » $p(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

D'après le principe de probabilité totale on a :

$$p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap \overline{A})$$
$$= p(A).p(E | A) + p(\overline{A}).p(E | \overline{A})$$
$$= \frac{2}{3}x\frac{3^2 + 2^2}{5^2} + \frac{1}{3}x\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2}$$

$$\Rightarrow \ p(E) = \frac{12}{25}$$

On a seulement deux couleurs donc tirer exactement une boule noire c'est tirer deux boules de couleur différente par suite l'événement F et l'événement contraire de E d'où

$$p(F) = 1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$$

2)

- Loi de probabilité de X :

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

$$p(X=0) = \frac{2}{3} x \frac{2^2}{5^2} + \frac{1}{3} x \frac{A_3^2}{A_5^2} = \frac{31}{150}$$

$$p(X=1) = p(F) = \frac{13}{25} = \frac{78}{150}$$

$$p(X=2) = \frac{2}{3} x \frac{3^2}{5^2} + \frac{1}{3} x \frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{41}{150}$$

- $\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - [E(x)]^2}$

Avec le tableau suivant on aura :

x_i	0	1	2	Total
p_i	$\frac{31}{150}$	$\frac{78}{150}$	$\frac{41}{150}$	1
x_ip_i	0	$\frac{78}{150}$	$\frac{82}{150}$	$E(X)=\frac{160}{150}$
$x_i^2p_i$	0	$\frac{78}{150}$	$\frac{164}{150}$	$E(X^2)=\frac{242}{150}$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{242}{150} - \left[\frac{160}{150}\right]^2} = 0{,}69$$

Exercice 16

$$\underbrace{\lfloor N_0, N_2, N_2, B_0, B_0, B_1 \rfloor}_{S_1} \qquad \underbrace{\lfloor N_0, N_0, N_0, N_1, B_0, B_1 \rfloor}_{S_2}$$

1) Soit l'événement A_1 « obtenir le chiffre 1 au cours du lancer du dé » $p(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

a) D'après le principe de probabilité totale on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap \overline{A_1})$$
$$= p(A_1).p(B \mid A_1) + p(\overline{A_1}).p(B \mid \overline{A_1})$$
$$= \frac{1}{3} x \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{2}{3} x \frac{A_4^3}{A_6^3}$$
$$\Rightarrow \ p(B) = \frac{1}{5}$$

De même :

$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap \overline{A_1})$$
$$= p(A_1).p(A \mid A_1) + p(\overline{A_1}).p(A \mid \overline{A_1})$$

Or l'événement $(A \mid A_1)$ est impossible car il n y a pas des jetons noirs numérotés 1 dans le sac S_1

$$p(A) = p(A_1).p(\emptyset) + p(\overline{A_1}).p(A \mid \overline{A_1})$$

$$p(A) = \frac{1}{3} x\, 0 + \frac{2}{3} x \frac{(A_1^1 x A_5^2) x 3}{A_6^3}$$

$$\Rightarrow \ p(A) = \frac{1}{3}$$

b) Faire des tirages dans S_1 sachant que les jetons sont noirs est l'événement A_1 sachant B :

$$p(A_1 \mid B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$$

c) Loi de probabilité de X :

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$$

- $p(X=0) = \frac{1}{3} x \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{2}{3} x \frac{A_4^3}{A_6^3} = \frac{9}{45}$
- $p(X=1) = \frac{1}{3} x \frac{C_3^1 x C_1^1}{C_6^2} + \frac{2}{3} x \frac{(A_4^2 x A_2^1) x 3}{A_6^3} = \frac{21}{45}$
- $p(X=2) = = \frac{1}{3} x \frac{C_3^1 x C_2^1}{C_6^2} + \frac{2}{3} x \frac{(A_2^2 x A_4^1) x 3}{A_6^3} = \frac{12}{45}$
- $p(X=3) = = \frac{1}{3} x \frac{C_1^1 x C_2^1}{C_6^2} + \frac{2}{3} x\, 0 = \frac{2}{45}$

  Événement impossible
- $p(X=4) = = \frac{1}{3} x \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{2}{3} x\, 0 = \frac{1}{45}$

  Événement impossible

Conclusion

x_i	0	1	2	3	4	Total
p_i	$\frac{9}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	1
x_ip_i	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{4}{45}$	$E(X)=\frac{55}{45}$
$x_i^2p_i$	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{48}{45}$	$\frac{18}{45}$	$\frac{16}{45}$	$E(X^2)=\frac{103}{45}$

D'où $\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-[E(x)]^2}$

$$=\sqrt{\frac{103}{45}-\left[\frac{11}{9}\right]^2} \Rightarrow \boxed{\sigma(X)=0,89}$$

d) La probabilité d'obtenir le jeton noir numéroté 1 parmi les jetons tirés pour la première fois à la troisième épreuve est la probabilité telle que A est réalisé pour la première fois à la troisième épreuve donc

$$p=p(\bar{A}).p(\bar{A}).p(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

2) a) • Pour et à chaque épreuve il y en a deux résultats telle que l'apparition du chiffre 2 (succès) ou non et Les épreuves sont indépendantes et identiques

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres:

$n=3$ et $p=p(\bar{A})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

D'où $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$$\boxed{p(X=k)=C_3^k(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{3-k};\quad k\in\{0,1,2,3\}}$$

b) • $E(X)=n\cdot p=3\cdot\frac{2}{3}=2 \Rightarrow \boxed{E(X)=2}$

• $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{3x\frac{2}{3}x\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{3}}=0,82}$$

Exercice 17

1) a) • $p(A) \overset{\{-2,-1,2\}}{=} \frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

• B: tirer les deux jetons numérotés 1 et un jeton parmi $\{-2,-1,2\}$

$$\Rightarrow p(B)=\frac{C_2^2xC_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

b) S est réalisée si l'on tire les deux jetons n°1 et le jeton n° (– 1) ou bien on tire un jeton n° 1 et les deux jetons numérotés 2 et – 2 ainsi ona :

$$p(S)=\frac{C_2^2xC_1^1+C_2^1xC_1^1xC_1^1}{C_5^3}=\frac{1+2}{10}=\frac{3}{10}$$

2) a) X suit une loi binomiale de paramètres: $n=3$ et $p=p(S)=\frac{3}{10}=0,3$ on a donc :

$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$

$$\boxed{p(X=k)=C_5^k(0,3)^k(0,7)^{5-k};\quad k\in X(\Omega)}$$

b) $E(X)=n\cdot p=5\cdot(0,3) \Rightarrow \boxed{E(X)=1,5}$

$V(X)=n\cdot p.(1-p)=5\cdot(0,3)(0,7) \Rightarrow \boxed{V(X)=1,05}$

Exercice 18

1) • x est une variable aléatoire continue qui suit une Loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0,50]

• $E(X)=\frac{0+50}{2}=25$

2) $p(20\le X\le 25)=\frac{25-20}{50-0}=\frac{1}{10}=0,1$

Exercice 19 !

$Y=X^2$: une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [0,1] de densité $f=1$

$$E(y=x^2)=\int_0^1 xf(x)dx$$

$$=\int_0^1 x.x^2dx=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}=0,25$$

$$V(Y)=\int_0^1 x^2f(x)dx-E(Y)^2$$

$$=\int_0^1 x^4dx-(\frac{1}{4})^2=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1-\frac{1}{16}=\frac{1}{5}-\frac{1}{16}=0,1375$$

Exercice 20 !!

□La loi du temps d'attente X de ce client est une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [0,20]

□ $E(X) = \dfrac{20+0}{2} = 10$

Exercice 21(6 lampes???)

a) * $f(t) = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$

□ $\forall$ t$\in [0,+\infty[$ on a : $f(t) \geq 0$

□ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t).dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^x$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-\frac{x}{4}}\right) = 1$$

<u>Conclusion</u> : *f* est une densité de probabilité d'une variable aléatoire positive

** □ $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t.f(t).dt$: en intégrant par parties en trouve $E(X) = 4$

Ou bien on remarquera que *f* est une densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

Donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \boxed{E(X) = 4 \text{ ans}}$

□ $V(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t^2.f(t).dt - E(X)^2$

$$= \frac{1}{\lambda^2} = 16 \Rightarrow \boxed{V(X) = 16}$$

b) $p(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 f(t).dt$

$$= e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda\times 6} = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$$

$\boxed{p(0 \leq X \leq 6) \; □ \; 0{,}776}$

<u>Remarque</u> : la probabilité pour que cette appareil fonctionne de façon continue pendant 6 ans est exactement la probabilité qu'une seule lampe fonctionne de façon continue pendant 6ans car les 6 lampes sont tous nécessaires au même temps pour cette appareil

Exercice 22

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ 1-e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) └ $\forall$ $x \in [0,+\infty[$ on a : $0 \leq e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ donc $0 \leq 1-e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ d'où $\boxed{0 \leq F(X) \leq 1}$ (1)

└ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(X) = 0}$ (2)

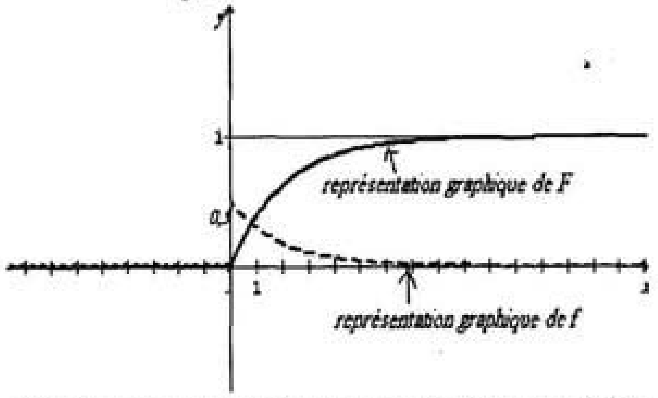
└ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(X) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-\frac{1}{2}x}) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(X) = 1}$ (3)

Les résultats (1), (2) et (3) prouvent que F satisfaite aux propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X

2) La fonction *f*: dérivée de F est la densité de probabilité de X d'où :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



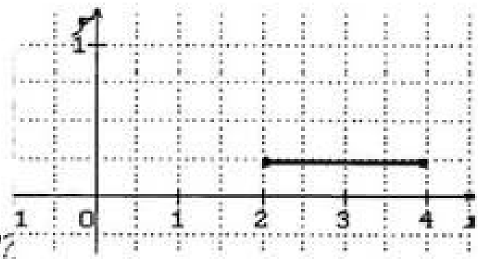
4) a) On pourra remarquer que X est une variable Aléatoire continu suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$

Donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \boxed{E(X) = 2}$

□ $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \boxed{V(X) = 4}$

b) $p(2 \leq X \leq 4) = e^{-\frac{1}{2}2} - e^{-\frac{1}{2}4} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$

$\boxed{p(2 \leq X \leq 4) \approx 0,24}$



graphe ???

Exercice 23

1) X aléa numérique qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$

$p(X \geq 10) = e^{-\frac{1}{10}10} = e^{-1} \approx 0,367$

2) $p(10 \leq X \leq 20) = e^{-\frac{1}{10}\times 10} - e^{-\frac{1}{10}20}$

$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 0,24$

Exercice 24

1) a) durée de vie est 5 ans signifie $E(Y) = 5 = \frac{1}{a}$

Donc $\boxed{a = \frac{1}{5} = 0,2}$

b) $e^{-0,2t} = \frac{1}{2}$ (50 %) $\Leftrightarrow -0,2.t = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{0,2}.\ \ln 2 = 5\ln 2 \Leftrightarrow t \approx 3,46$

Donc la durée de la garantie est environ de 3ans et demi

c) $p(Y \geq 2) = e^{-0,2\times 2} = e^{-0,4} \approx 0,67$

2) a) les moteurs fonctionnent de manière indépendante.

On choisi un moteur alors deux résultats sont possibles ou bien le moteur n'a pas de panne pendant les deux premières années ou bien non, par suite cette variable X suit une loi binomiale de paramètre n = 10 et p = $e^{-0,4}$

b) $E(X) = n \times p \approx 10 \times (0,67) \Rightarrow \boxed{E(X) \approx 6,7}$

c) Calcul ....
d) f ?? } !!!!

Exercice 25

a) $p(t) = \frac{1}{2}p(0)$ pour t = 5730 donc

$p(5730) = \frac{0,75}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{0,75}{2} = 0,75.e^{-5730\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-5730\lambda}$

$\Leftrightarrow -5730.\lambda = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \Leftrightarrow \lambda \approx 0.00012$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda \approx 12 \times 10^{-5}}$

b) 10 % des particules de type A se transforment en particules de type B c'est-à-dire il reste 65 % des particules de type A d'où :

$p(t) = \frac{65}{100} = 0,65 \Leftrightarrow 0,75.e^{-12\times 10^{-5}t} = 0,65$

$\Leftrightarrow e^{-12\times 10^{-5}t} = \frac{0,65}{0,75} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{13}{15})}{12}\times 10^5$

Donc $\boxed{t \approx 1192.}$

c) pour qu'il y a autant des particules de type A que celle de type B il suffit que 25 % des particules A se transforment en particules de type B
Donc il reste 50 % de chaque type ainsi on a :

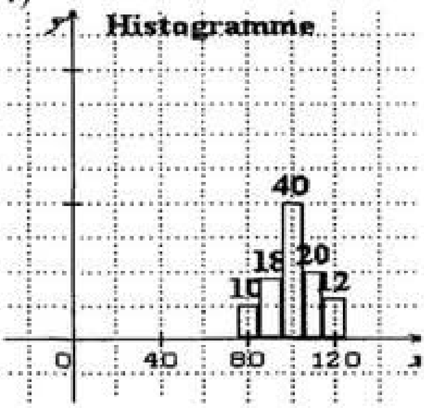
$p(t) = \frac{50}{100} = 0,5 \Leftrightarrow 0,75.e^{-12\times 10^{-5}t} = 0,5$

$\Leftrightarrow e^{-12\times 10^{-5}t} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{2}{3})}{12}\times 10^5$

Donc $\boxed{t \approx 3379.}$

Exercice 1

1)



2)□ la distance moyenne parcourue par un véhicule pendant 3 ans est $\overline{d} = \frac{1}{N}\sum_i n_i c_i$

Avec N=100 : effectif total ; n_i : l'effectif et c_i centre de la classe

$$\overline{d} = \frac{1}{100}(10x80 + 18x90 + 40x100 + 20x110 + 12x120)$$

$$\boxed{\overline{d} = 100,6\,km}$$

□ donc la distance moyenne parcourue par un véhicule pendant une année est $\boxed{\overline{d_1} = \frac{\overline{d}}{3} = 33,53km}$

Exercice 2

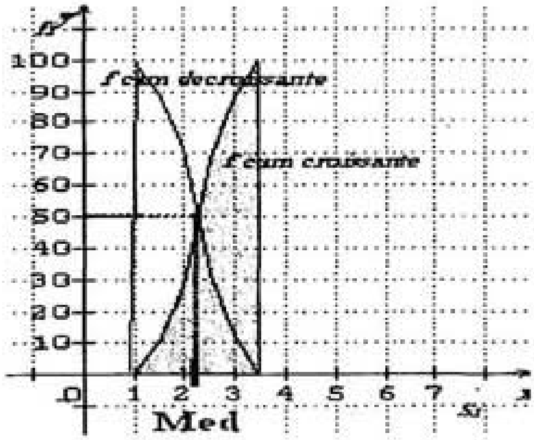
1) Fréquence associer à la série A :

Salaire en dinars	De 1 à 1,5	De 1,5 à 2	De 2 à 2,5	De 2,5 à 3	De 3 à 3,5
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$	0,1	0,18	0,14	0,2	0,12

2) a) histogramme des fréquences cumulées croissantes :

Et décroissant

Salaire	De 1 à 1,5	De 1,5 à 2	De 2 à 2,5	De 2,5 à 3	De 3 à 3,5
f_i□	0,1	0,28	0,68	0,88	1
f_i□	1	0,90	0,72	0,32	0,12



b) même tableau ?

3) Pour la série A :

- Salaire moyenne : $\overline{S} = \frac{1}{N}\sum_i c_i s_i = 2,28$
- Médiane : Me

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes est une valeur convenable de la médiane donc :

$$\boxed{M_e = 2,275}$$

- Ecart type de la série A :

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i c_i^2 s_i - \overline{S}^2} = 0,56$$

Exercice 3

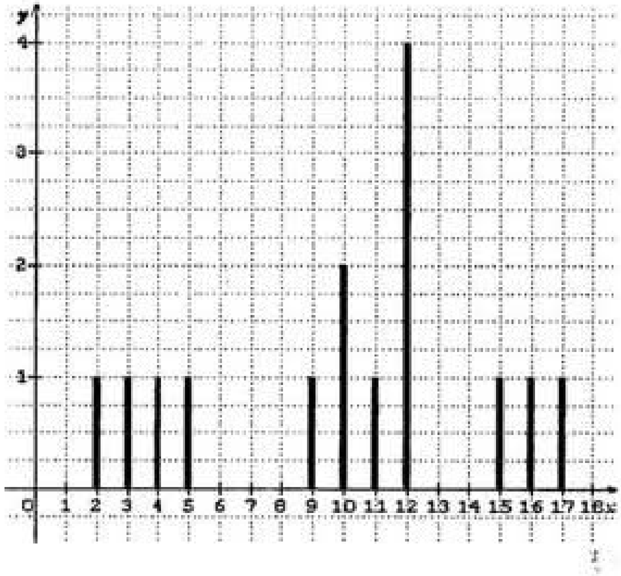
1) • moyenne : $\overline{x} = \frac{1}{15}\sum_i n_i x_i = 11$

• Médiane $\boxed{M_e = 12}$

• Mode (valeur qui correspond à l'effectif le plus grand) $\boxed{M_0 = 13}$

2) a)

Yi	2	3	4	5	9	11	12	15	16	17
Effectif ;ni	1	1	1	1	1	2	4	1	1	1



b)

$$\overline{y} = \frac{1}{15}\sum_i n_i y_i = 10$$

Médiane pour la série y $\boxed{M_e = 11}$

Mode pour la série y $\boxed{M_0 = 12}$

???? erreur

3) Pour Y

Écart moyen :

$$e = \frac{1}{N}\sum_i y_i\left|y_i - \overline{y}\right|$$

$$= \frac{2x8+3x7+4x6+5x5+9+0+12x2+15x5+16x6+17x7}{15}$$

$= 27.4$

Écart type $\sigma_S = 4,487$

Etendu est : $Y_{Max} - Y_{Min} = 17 - 2 = 15$

Pour X

Écart moyen

$$e = \frac{1}{N}\sum_i x_i\left|x_i - \overline{x}\right|$$

$$= \left(\frac{6\times5+7\times3+8x3+9x2+10\times1+12x1+13x2+14x3+15x4}{15}\right)$$

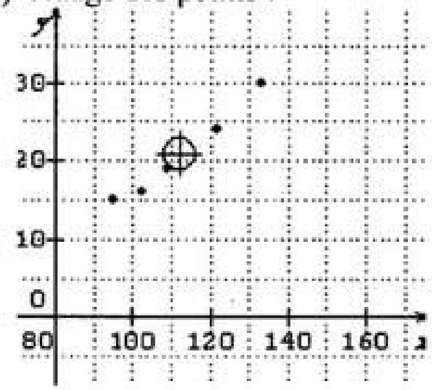
$= 16,2$

Écart type $\sigma_X = 2,58$

Etendu est : $X_{Max} - X_{Min} = 15 - 6 = 9$

Exercice 4

1) a) Nuage des points :



b) $\overline{X} = 112,4$ et $\overline{Y} = 20,8$

$\Rightarrow G(\overline{X},\overline{Y}) = G(112,4 ; 20,8)$

2)

X	95	103
Y	15	16

$G_1 (99 ; 15.5)$

X	109	122	133
Y	19	24	30

$G_2 (121.333 ; 24.333)$

(G_1G_2) est la droite de Mayer : (G_1G_2) : $y = ax + b$

Avec : $a = \dfrac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} = \dfrac{24.333 - 15.5}{121.333 - 99} = 0,395$

On a : $\overline{Y_2} = a\overline{X_2} + b \Rightarrow b = \overline{Y_2} - a\overline{X_2}$

$\Rightarrow b = 24.333 - 0.395 \cdot 121.333 = -23,656$

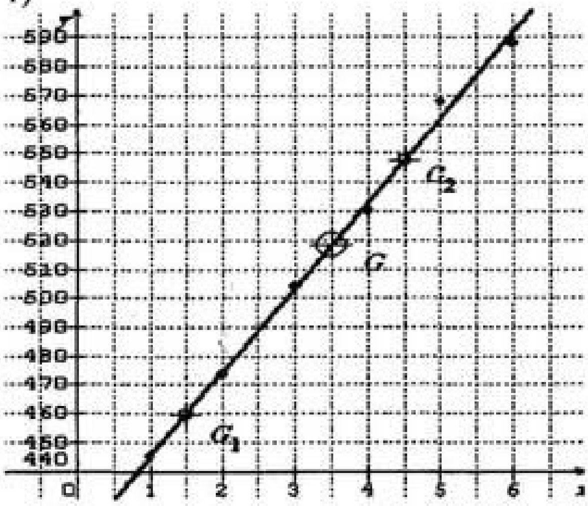
Donc : $\boxed{(G_1G_2) :\ y = 0,395x - 23,656.}$

3) la taille x = 115cm d'où $y = 0,395 \cdot 115 - 23,656$
$= 21,769$

Le poids estimer d'un enfant de taille 115cm est 22kg

Exercice 5

1)



2) a) G_1 (1.5 ; 459.5) et G_2 (4.5 ; 547.5)

b) $\boxed{(G_1G_2): \ y = 29.333x + 415.5.}$

3) x = 10 $\Rightarrow$ y = 708,83 (MDUS)

X	0	1	2
Y	76	67	59

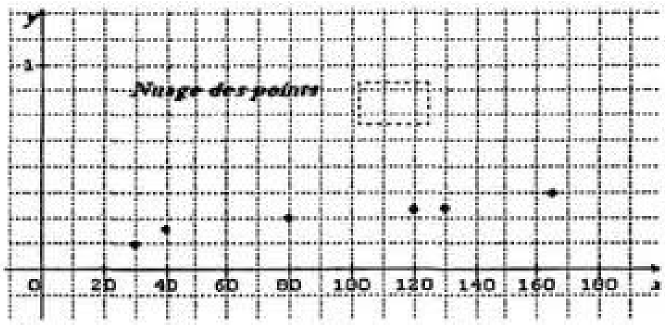
X	4	6	10
Y	46	35	20

Exercice 6

1) $\overline{X}$ =94,1667 et $\overline{Y}$ = 0.255

$\Rightarrow$ G ($\overline{X}$,$\overline{Y}$) = G (94.1667; 0.255)

2)



3) Coefficient de corrélation : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} =$ 0,9657

On a $|r| \geq 0,75$ donc un ajustement affine est justifié

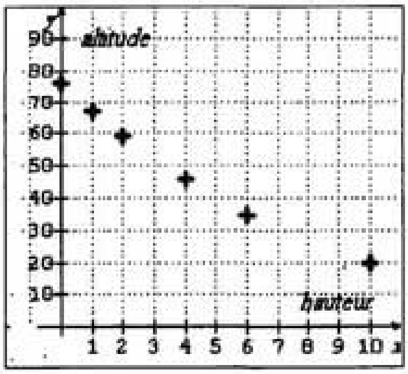
Droite de régression : y = a□x + b

Avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$\boxed{y = 0,00157□x + 0,1068.}$

Exercice 7

1) a) Nuage des points :



b) le nuage des points à la forme allongés donc un ajustement affine est donc justifié

2) Méthode de Mayer

$\overline{X_1} = 1$; $\overline{Y_1}$ =67,33

$\overline{X_2} = 6,66$; $\overline{Y_2}$ = 33,66

Droite de Mayer : y = a□x + b

Avec : $a = \dfrac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} = \dfrac{33,66 - 67,33}{6,66 - 1} = -5,941$

On a : $\overline{Y_1} = a\overline{X_1} + b \Rightarrow b = \overline{Y_1} - a\overline{X_1}$

$\Rightarrow$ b = 67,33 + 5,948 = 72,274

Donc : $\boxed{y = -5.941\ x + 73.274}$

3) pour y = 60cm on aura : 60 = (– 5, 941)□x + 73, 274

$$\Rightarrow x = \frac{60 - 73,274}{-5,941} = 2,234$$

L'altitude estimer est à peut prés 2km et 240m

Exercice 8

1) a) r = $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{31,1}{(2,87)\square(11,038)} = 0,98$

b) On a $|r| = 0,98$ est voisin de 1 donc il existe une forte corrélation entre X et Y

2) • Droite de régression Y en X : $y = a \sqcup x + b$

Avec : $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{31,1}{8,25} = 3,769$

$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 22,4 - 3,769 \sqcup 5,5 = 1.670$

Équation de la courbe de régression :

$\boxed{y = 3.769\,x + 1.67}$

• Droite de régression X en Y : $x = a' \sqcup y + b'$

Avec : $a' = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \dfrac{31,1}{121,83} = 0,255$

$b' = \overline{X} - a'\overline{Y} = 5,5 - 0,255 \sqcup 22,4 = -0,212$

Équation de la courbe de régression :

$\boxed{x = 0.25\,y - 0.212}$

3) chiffre d'affaire dépassera 50MD donc $y \geq 50$

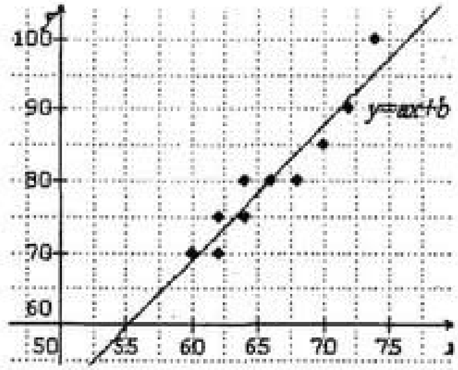
D'où : $0.25\,y - 0.212 \geq 0.25 \bullet 50 - 0.212 = 12,28$

Par suite $x \geq 12,28$

Conclusion : le rang de l'année à partir duquel le chiffre d'affaire dépassera 50 MD tunisiens est 13

Exercice 9

1)



2) • $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i = 66,2$ • $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_i y_i = 80,5$

• $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i n_i - \overline{X}^2 = 19,56$

• $V(Y) = \dfrac{1}{n}\sum_i y_i n_i - \overline{Y}^2 = 77.25$

• $Cov(X,Y) = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = 36,9$

3) On a : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.95$

On a $|r| = 0,98$ est voisin de 1 donc il y a forte Corrélation linéaire entre X et Y et un ajustement affine est donc justifié

4)

5) On a $x = 65$ d'où : $y = 1,886 \bullet 65 - 44,35 = 78,24$

Conclusion Donc la charge de la rupture d'un acier est D'environ 78,5kg

Exercice 10

1) a) $\sigma_x = 2,71282$ $\sigma_y = 10,3554$

$$Cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}\square\overline{Y} = 22,5781$$

b) $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.803712$

c) On a $|r| \approx 0,8 \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a forte Corrélation linéaire entre X et Y et un ajustement affine est donc justifié

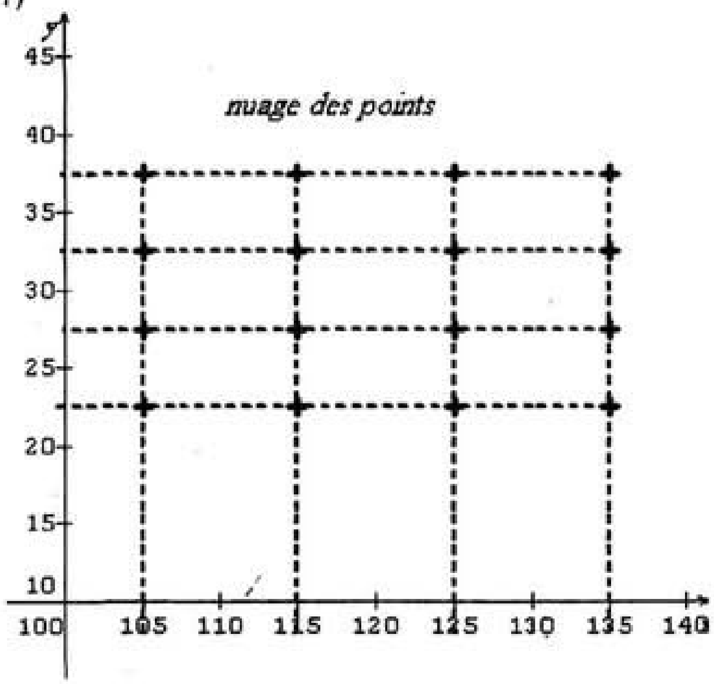
2) Droite Y en X → D_1: $y = 3,07\,x + 3,45$
Droite X en Y → D_2: $x = 0,21\,y + 2,151$

3) $x = 7$ donc $y = 3,07 \bullet 7 + 3,45 = 24,94$

D'où le volume estimer est 25 litres

Exercice 11

1)



2) • $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = 118.7$ • $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i = 29.75$

• $V(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \overline{X}^2 = 127,37$

• $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_i y_i^2 - \overline{Y}^2 = 26,69$

3) $Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_i n_{i,j} c_i c_i - \overline{X}\,\overline{Y} = 45,175$

4) $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.775$

5) Droite de régression Y en X : $y = 0,35 \square x - 12,37$

Exercice 12

A/

- X: notes de français

x_i	4.5	6	6.5	8	9.5	12
ni	2	2	4	2	2	3

Moyenne : 7.866* Médiane : 6.5* Mode : 6.5

Ecart -type : 2.49978

- y: notes de Maths

y_i	7.5	8	8.5	10	12	14.5
ni	2	2	2	2	5	2

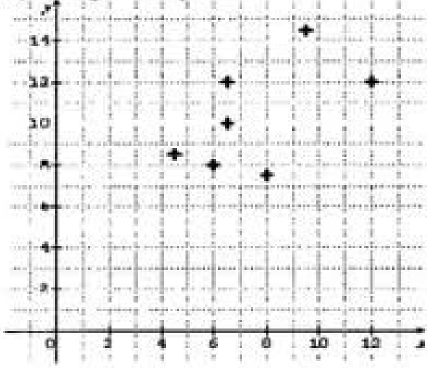
Moyenne : 10.4667
Médiane : 10
Mode : 12
Ecart -type : 2.34141

- Z: note de sc. physique

x_i	4.5	6	6.5	8	9.5	12
ni	2	2	4	2	2	3

Moyenne : 6.266
Médiane : 6
Mode : 7
Ecart -type : 1.1953

B/ 1) a) nuage des points



b) le nuage des points n'a pas la forme allongée donc il n'y a pas une relation de type affine entre X et Y

c) Nature de la régression

Droite de Mayer : $G_1(7.57 ; 10.35)$ $G_2(8.125 ; 10.56)$

Équation de la courbe de régression :

$$y = 0.372\,x + 7.548$$

2) a) Cov. (X, Y) = 3.39556 ; $\sigma_x = 2.49978$

$\sigma_y = 2.34141$

Donc $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = 0.580138$

b) $r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (faible) un ajustement affine n'est pas justifié

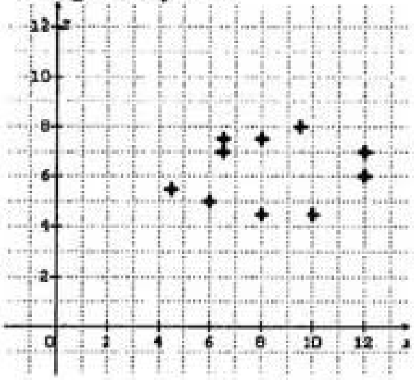
3) Droite Y en X $\rightarrow$ D_1: $y = 0.53\,x + 5.48$

Droite X en Y $\rightarrow$ D_2: $x = 0.44\,y + 3.80$

(même méthode de la question 2 exercice 8)

C/ Etude de le série double (X , Z)

Nuage des points



- le nuage des points n'a pas la forme allongée donc il n'y a pas une relation de type affine entre X et Z

- Nature de la régression

Droite de Mayer : $G_1(7.57 ; 10.35)$ $G_2(8.125 ; 10.56)$

Équation de la courbe de régression :

$$y = 0.372\,x + 7.548$$

- Cov. (X, Z) = 0.59; $\sigma_x = 2.52455$

$\sigma_Z = 1.19536$

Donc $r = \dfrac{Cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} = 0.2$

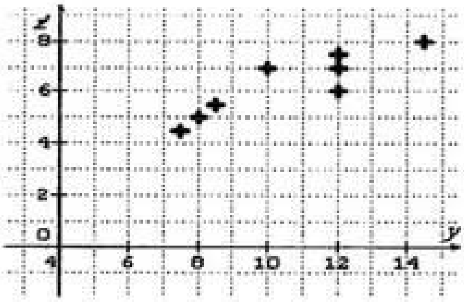
- $r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (faible) : ajustement affine n'est pas justifié

- Droite Z en X $\rightarrow$ D_1: $z = 0.09\,x + 5.51$

  Droite X en Z $\rightarrow$ D_2: $x = 0.41\,z + 5.51$

Etude de le série double (Y , Z)

Nuage des points



- le nuage des points a la forme allongée donc il y a une relation de type affine entre X et Z

- Cov. (Y, Z) = 0.59; $\sigma_y = 2.34$ et $\sigma_Z = 1.19$

Donc $r = \dfrac{Cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} = 0.88$

- $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq |r| \leq 1$: un ajustement affine est justifié

Équation de la droite de régression Y en Z :

$$y = 0{,}45\,z + 1{,}54$$

Exercice 13

1) $r = -0{,}98 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq |r| \leq 1$ d'où il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y

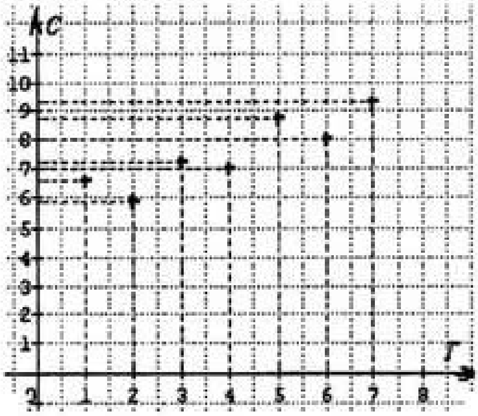
2) $y = ax + b = -2{,}3\,x + 32{,}23$

3) $x = -4° \Rightarrow y = -2{,}3 \bullet (-4) + 32{,}23 = 41.43$

La consommation estimer est de 41 litres et demi pendant 24heures d'où cette famille va consommer environ 83 litres de pétrole

Exercice 14

1) Nuage des points :



2) Coefficient de corrélation linéaire : r = 0.887, comme r est proche de 1 il résulte qu'on peut justifier un ajustement affine de la série double (T,C)

3) droite de régression C en T : c = at. + b

$$a = \frac{Cov(T,C)}{V(T)} = 0,49$$

$$b = \overline{C} - a\overline{T} = 5.56$$

$$\boxed{c = 0.49\,t + 5.56}$$

Exercice 15 :

1) a) * Distribution marginal associe à X :

x_i	1	2	3	4	5
Effectif marginal	1	5	13	23	8

* Distribution marginal associe à Y :

y_i	30	50	70	90	120
Effectif marginal	2	3	10	26	9

b) • $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i = 3.64$

• $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j = 86.6$

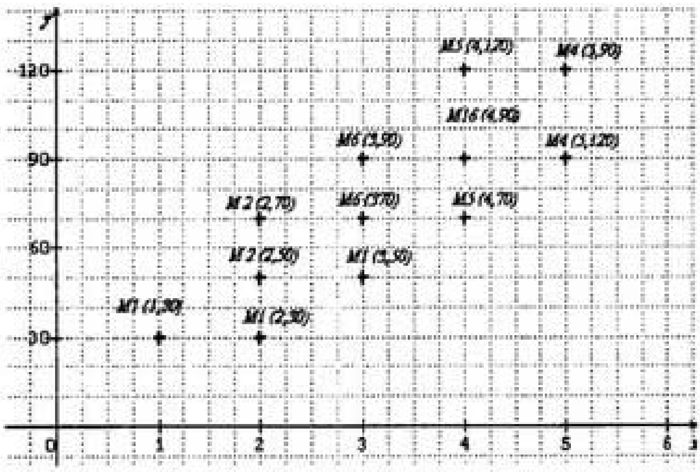
• $V(X) = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \overline{X}^2 = 0.870$

• $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_i y_i^2 - \overline{Y}^2 = 470.460$

• $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 0.933$

• $\sigma_y = \sqrt{V(Y)} = 21.69$

2) Nuage des points



3) a) • $Cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y} = 15.176$

• Coefficient de corrélation linéaire :

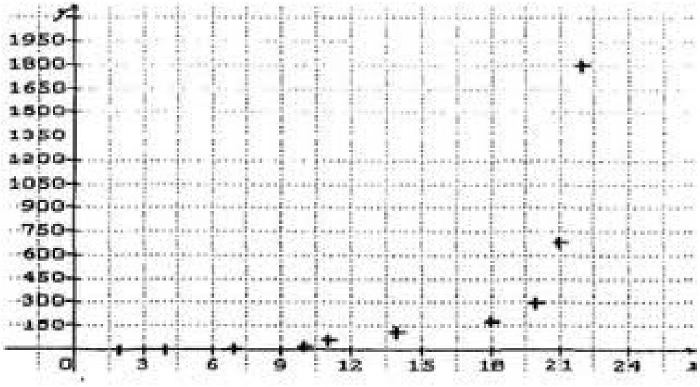
$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.75$$

b) Équation de la courbe de régression :

$$y = 19.44\,x + 11.80$$

Exercice 16 :

1) a) nuage des points :



b) le nuage des points ne peut pas assimiler à une relation de type affine entre X et Y ; ajustement affine non justifié

c) $r = 0,67 < \frac{\sqrt{3}}{2}$: il n'y a pas une forte corrélation entre X et Y

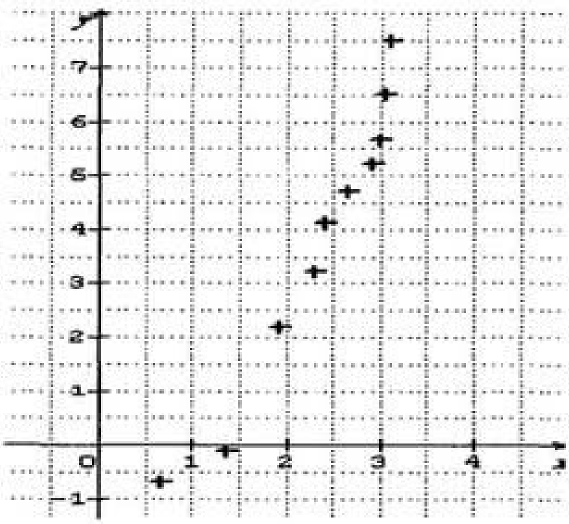
2) U = lnX et V = lnY

a)

U	0.69	1.39	1.94	2.3	2.4
V	-0.69	-0.1	2.2	3.22	4.13

U	2.64	2.9	3	3.04	3.09
V	4.7	5.2	5.67	6.52	7.5

<u>Nuage des points de la série (U,V) :</u>



b) le nuage des points est bien allongé : un ajustement affine est justifié entre U et V

c) $r_1 = 0,98$: $|r_1|$ est proche de 1 donc il y a une forte corrélation entre U et V

d) Droite de régression V en U : $v = a \times u + b$

Avec : $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{1.876}{0.566} = 3.31$

$b = \overline{V} - a\overline{U} = 3.83 - 3,31 \times 2.34 = -3,91$

Équation de la droite de régression V en U :

$$\boxed{V = 3,31\,U - 3,91}$$

e) d'après la question d on a : $V = 3,31\,U - 3,91$

Donc : $\ln Y = 3,31 \ln U - 3,91 \Leftrightarrow Y = e^{3.31\ln X - 3.91}$

$\Leftrightarrow Y = e^{-3.91}.e^{3.31\ln X} = 0.02.\ e^{3.31\ln X}$

D'où $\boxed{Y = 0.02.\ e^{3.31\ln X}}$

f) pour X = 13 on a : $Y = 0.02.\ e^{3.31\ln 13}$

Par suite $Y = 0.02.\ e^{8.48} \approx 96.34$

<u>Conclusion</u> :

Le revenu annuel est estimé de 97 MDT

Pr *oposition* 1	**Devoir De Contrôle N°2**	$4^{ème}$ T 2 Heures

<u>Exercice N° 1</u> (6 pts)

- Chaque question comporte trois affirmations notées **(A)** , **(B)** et **(C)**. Une seule affirmation est exacte.
- Une réponse exacte rapporte 0.75 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite Δ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = -2+\alpha \;;\; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3-\alpha \end{cases}$ et le plan $P : 3x - 2y + z - 1 = 0$

	Affirmation **(A)**	Affirmation **(B)**	Affirmation **(C)**
1	Le point $M(1,1,-1) \in P$	Le point $M(1,1,0) \in P$	Le point $M(0,1,1) \in P$
2	Le point $N(2,1,-1) \in \Delta$	Le point $N(3,-1,2) \in \Delta$	Le point $N(1,-2,-3) \in \Delta$
3	Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ	Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ	Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ
4	Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P	Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P	Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P
5	Δ est sécante à P	Δ est incluse dans P	Δ est strictement parallèle à P
6	Le plan $Q : 3x - 2y - z + 1 = 0$ est parallèle à P	Le plan $Q : 9x + 6y + 3z + 3 = 0$ est parallèle à P	Le plan $Q : 6x - 4y + 2z + 1 = 0$ est parallèle à P
7	Le plan $R : x + y - z + 1 = 0$ est perpendiculaire à P	Le plan $R : 6x - 4y + 2z + 1 = 0$ est perpendiculaire à P	Le plan $R : x - y - 4z + 1 = 0$ est perpendiculaire à P
8	La distance du point $I(0,1,0)$ au plan P est : $\frac{\sqrt{14}}{14}$	La distance du point $I(0,1,0)$ au plan P est : $\frac{3\sqrt{14}}{14}$	La distance du point $I(0,1,0)$ au plan P est : 3

<u>Exercice N° 2</u> (4 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On donne les points $A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$ et $I(0,1,-1)$.

1) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donner une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2) a) Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

b) Soit P le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$.

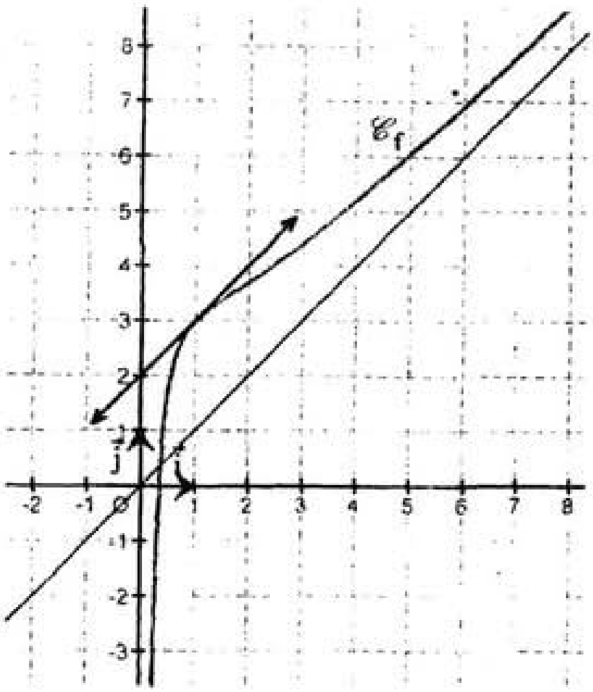
Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$.

c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice N° 3 (4 pts)

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre représente une fonction f définie sur $]0,+\infty[$.

Les droites d'équations $x=0$ et $y=x$ étant des asymptotes à cette courbe.



1) En utilisant le graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

b) Le tableau de variation de f.

2) On admet que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b\dfrac{\ln x}{x}$; $a,b\in\mathbb{R}$

a) Monter que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$,

$$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+b\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right).$$

b) En utilisant le graphique,

Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

c) En déduire alors l'expression de $f(x)$.

Exercice N° 4 (6 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la droite $\Delta : x=1$ est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}$)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la droite Δ et la courbe ($\mathscr{C}$)

Exercice 1 :

1) b
2) b
3) a
4) c
5) a
6) c
7) a
8) b

Exercice 2

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-\text{[illegible]}\\-\text{[illegible]}\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-8\\24\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-8\\24\end{pmatrix}=\vec{n}$: est un vecteur normal du plan (ABC)

Donc ce plan a pour équation : $-8x-8y+24z+d=0$ et comme $A\in(ABC)$ on aura $16+d=0$

D'où : $d=-16$ et par suite (ABC): $-8x-8y+24z-16=0$

2) a) $S: x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ ou bien $S: x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$

b) $d(I,P)=\dfrac{|0+1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{11}}\prec 2$ donc S et P sont sécants suivant un cercle

3) c) Posons $H(x,y,z)$ *et* $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ *vecteur normal de P* ; $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n_P}\\ H\in P\end{cases}$ *ce qui donne*

$$\begin{cases}x=\alpha\\ y=1+\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-1-3\alpha\\ x+y-3z+2=0\end{cases}$$

en remplace x , y , z dans l'équation (4) *on trouve* $\alpha=-\dfrac{6}{11}$ donc $H(-\dfrac{6}{11},\dfrac{5}{11},\dfrac{7}{11})$

Exercice 3 :

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

b)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $f'(x)=1+a(-\dfrac{1}{x^2})+b(\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2})=1-\dfrac{a}{x^2}+b(\dfrac{1-\ln x}{x^2});x\neq 0$

b) $f(1)=3$ et $f'(x)=1$

c) $\begin{cases} f(1)=3 \Leftrightarrow 1+a=3 \Leftrightarrow a=3-1=2 \\ f'(1)=1 \Leftrightarrow 1-a+b=1 \Leftrightarrow a=b=2 \end{cases}$

Exercice 4 :

1) $a)\ x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ **donc f est définie sur $\mathbb{R}$**

b) $x \in \mathbb{R}$ *et* $(2-x) \in \mathbb{R}$ **on a** $f(2-x)=ln[(2-x)^2-2(2-x)+2]=ln(4-4x+x^2-4+2x+2)$

$$= ln(x^2-2x+2) \quad = f(x)$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe (ξ) de f

(Rappelons que la droite $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe de d'une fonction f
si et seulement si : $x \in Df$; $(2-x) \in Df$ et $f(2a-x)=f(x)$)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ **donc** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x+2)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2\left[1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right])}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+\ln\left[1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left[1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}{x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\downarrow 0}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}.\ln\left[\overbrace{1-\underbrace{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}_{\downarrow 0}}^{1}\right]=0.\ln 1=0$$

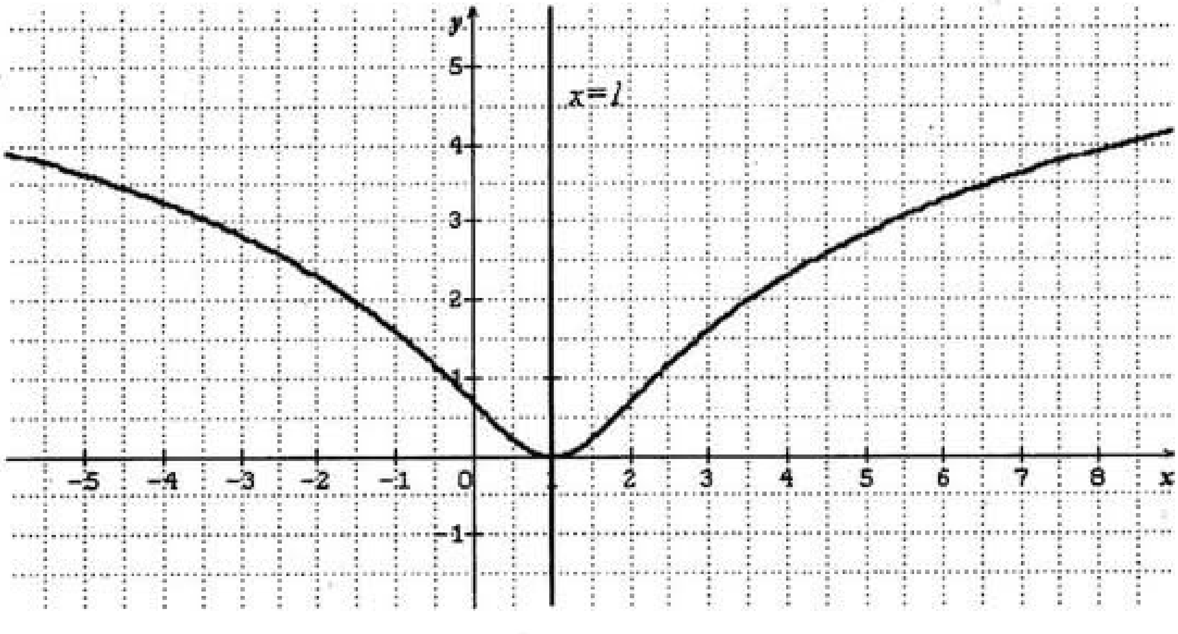
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ **donc la courbe de f admet une branche infinie de direction la droite des abscisses**

2) a) $f'(x)=\frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$ **pour tout réel x**

b) <u>Remarque</u> : on peut étudier f *sur* $[1,+\infty[$ car la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe (ξ) de f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

c) graphe :


y
x
x=1
5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Proposition 3 (énoncé) Synthése n°2 **CMS**

Devoir de SYNTHESE n°2

Epreuve : Mathématiques — Mars 2009

Section : 4éme Tech. — Durée : 3 heures

EXERCICE N ° 1: (3 points)

Pour chacune des questions suivantes seulement deux des quatre réponses proposées sont correctes L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux lettres parmi **a) , b) , c)** ***ou*** **d)** *correspondantes aux réponses choisies . Chaque question est notée 1point : 0,5pt pour chaque réponse exacte (aucune justification n'est demandé)*

1) $\int_1^{e^2} \frac{2}{x} \ln x . dx$ est égale à :

a) -4 **b)** 4 **c)** $e^{-Ln\ (0,25)}$ **d)** $-\frac{1}{0,25}$

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, A (1, 0, 0), H (0 , 1 , 1) B (1 , 1 , 0) , G (1 , 1 , 1) et $\overrightarrow{OE} = \vec{k}$ on a :

a) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

b) le volume du tétraèdre OABG est égale à : $\frac{1}{3}$

c) O, A, G et H ne sont pas coplanaires

d) l'équation du plan (EBG) est : $x - y = 0$

3) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, alors on a :

a) $f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$

b) f est définie sur $]0, +\infty[$

c) f admet un prolongement par continuité en 0

d) la limite de f en $+\infty$ est égale 1

EXERCICE N ° 2: (5 points)

On muni l'espace du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A (4 , 0 , 0) , B (0 , 4 , 0) , C (0 , 0 , 4) et Ω (0 , 2 , 2)

1) Calculer AB, AC et BC et déduire que le triangle ABC est équilatéral
2) Soit (S) l'ensemble des points M (x, y, z) du plan vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0$
   a) montrer que (S) est une sphère de centre Ω et préciser son rayon R
   b) Vérifier que I, le milieu de [AB], est un point de S
   c) Vérifier que [BC] est un diamètre de (S)
3) Soit $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à la droite (BC) et passant par I

a) déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$

b) Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et (S) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

EXERCICE N ° 3 : (7 points)

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{2 + U_n}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que (U_n) est croissante

c) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$, $x \in [0,1]$

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$

b) En utilisant le théorème des accroissement finis montrer que : $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{3}{4}|U_n - 1|$

c) Montrer que : $|U_n - 1| \leq (\dfrac{3}{4})^n$

d) Retrouver la limite de U_n

EXERCICE N ° 4 : (5 points)

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 + x\ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

ξ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que g est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement

2) a) Etudier les variations de g

b) Déterminer une équation de la tangente T à ξ au point d'abscisse 1

c) Calculer la dérivée seconde de g et déduire la position de ξ et sa tangente T

d) Tracer T et ξ

3) En intégrant par parties calculer : $\int_1^e x\ln x.dx$ et déduire $\int_1^e g(x).dx$

~~~~~ Bon Travail ~~~~
~~~~~

Exercice 1

1) a et c
2) a et d
3) a et c

Exercice 2

1) $AB = AC = BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ donc ABC est un triangle équilatéral
2) a) $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ par suite (S) est une sphére de centre Ω $(0,2,2)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2})$

   b) $I(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}) \Rightarrow I(2,2,0)$ et $\Omega I = \sqrt{8}$ ce qui prouve que $I \in (S)$ (on peut aussi remplacer les coordonnées de I dans l'équation de (S))

   c) $0 + 4^2 + 0 - 4x4 - 0 = 16 - 16 = 0$ donc $B \in (S)$

   $0 + 0 + 4^2 - 0 - 4x4 = 16 - 16 = 0$ donc $C \in (S)$

   Comme $BC = 4\sqrt{2} = 2R$ d'où [BC] est un diamètre de (S)

3) a) $\mathcal{P}$ à pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de

   $\mathcal{P}: -4y + 4z + d = 0$ or $I \in \mathcal{P}$ d'où $d = 8$; on simplifie par -4 on obtient $\mathcal{P}: y - z - 2 = 0$

   b) $d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|2-2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2\sqrt{2}(rayon\ de\ la\ sphére)$ donc l'intersection de $\mathcal{P}$ et (S) est un cercle (C) de centre $H(x_H, y_H, z_H)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$

   c) $\mathcal{P}$ à pour vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan $\mathcal{P}$

   Ce qui donne $\begin{cases}\overrightarrow{\Omega H} = \alpha\vec{i} \\ H \in \mathcal{P}\end{cases}$ $\alpha \in IR$ donc $\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2 + \alpha \\ z_H = 2 - \alpha \\ y_H - z_H - 2 = 0\end{cases}$ par suite $(2+\alpha) - (2-\alpha) - 2 =$

   On trouve $\alpha = 1$ d'où $H(0,3,1)$

Exercice 3

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{2 + U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Par recurrence

i/ pour $n=0$ on a: $0 \leq U_0 = 0 \leq 1$ Vrai

ii) supposons que : $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que : $-3 \leq U_{n+1} \leq 1$

En effet :

- $U_n \geq 0 \Leftrightarrow 2U_n \geq 0$ donc $2U_n + 1 \geq 0$ et $U_n + 2 \succ 0$ par suite $\dfrac{2U_n+1}{2+U_n} \geq 0$ donc $U_{n+1} \geq 0$

- $U_{n+1}-1=\dfrac{2U_n+1}{2+U_n}-1=\dfrac{2U_n+1-2-U_n}{2+U_n}=\dfrac{U_n-1}{2+U_n}\leq 0$ Car $U_n\leq 1$ et $2+U_n\succ 0$ donc $U_{n+1}\leq 1$

  D'où : $0\leq U_{n+1}\leq 1$

Conclusion :

$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0\leq U_n\leq 1$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n+1}{2+U_n}-U_n=\frac{2U_n+1-2U_n-U_n^2}{2+U_n}=\frac{1-U_n^2}{2+U_n}=\frac{(1-U_n)(1+U_n)}{2+U_n}\geq 0$$

D'où : $U_{n+1}\geq U_n, \forall n\in\mathbb{N}$; ce qui prouve que (U_n) est croissante

c) •/ la suite (U_n) étant croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel ℓ

•/ on a : */ $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

*/ (U_n) converge vers $\ell\in[0,1]$

*/ f est continue en ℓ car $[0,1]\subset\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ d'où $f(\ell)=\ell$ c'est à dire :

$\dfrac{2\ell+1}{2+\ell}=\ell\Leftrightarrow 2\ell+1=2\ell+\ell^2\Leftrightarrow \ell^2=1\Leftrightarrow \ell=1$ ou $\ell=-1\notin[0,1]$ Conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1}$

2) a) $f'(x)=\frac{2\times2-1\times1}{(2+x)^2}=\frac{3}{(2+x)^2}$ or $x\geq 0\Leftrightarrow 2+x\geq 2\Leftrightarrow (2+x)^2\geq 4\Leftrightarrow \frac{1}{(2+x)^2}\leq\frac{1}{4}$

D'ou $\frac{3}{(2+x)^2}\leq\frac{3}{4}$ par suite on a : $f'(x)\leq\frac{3}{4}$ et $f'(x)\geq 0\geq -\frac{3}{4}$

ce qui donne pour tout $x\in[0,1]$ on a $|f'(x)|\leq\dfrac{3}{4}$

b) on a : f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in[0,1]:|f'(x)|\leq\dfrac{3}{4}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements Finis on a : $U_n\in[0,1], 1\in[0,1]$ donc sur $[U_n,1]$ on a :

$|f(1)-f(U_n)|\leq\dfrac{3}{4}\times|1-U_n|$ et puisque $f(1)=1$ et $|a-1|=|1-a|$ alors : $|U_{n+1}-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_n-1|$

c) on a : $\forall n\in\mathbb{N}:|U_{n+1}-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_n-1|$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases}0\leq|U_1-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_0-1|\\ \times\ 0\leq|U_2-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_1-1|\\ \times\ 0\leq|U_3-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_2-1|\\ \times\ \quad\vdots\\ \quad 0\leq|U_n-1|\leq\dfrac{3}{4}|U_{n-1}-1|\end{cases}$$

$= \quad 0 \le |U_n - \alpha| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{|U_0 - 1|}_{=1 \text{ car } U_0 = 0}$ Donc $0 \le |U_n - 1| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d) on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$ D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - U_n) = 0$ ce qui prouve que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur [0, + ∞ [par : $\begin{cases} g(x) = 1 + x.Lnx & si\, x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \underbrace{x \ln x}_{0} = 1 = g(0)$. Donc g est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + x \ln x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

par suite g n'est pas dérivable à droite en 0 donc ξ possède une demi tangente verticale dirigé vers le bas

2) a) $g'(x) = 0 + lnx + x.\frac{1}{x} = 1 + lnx$

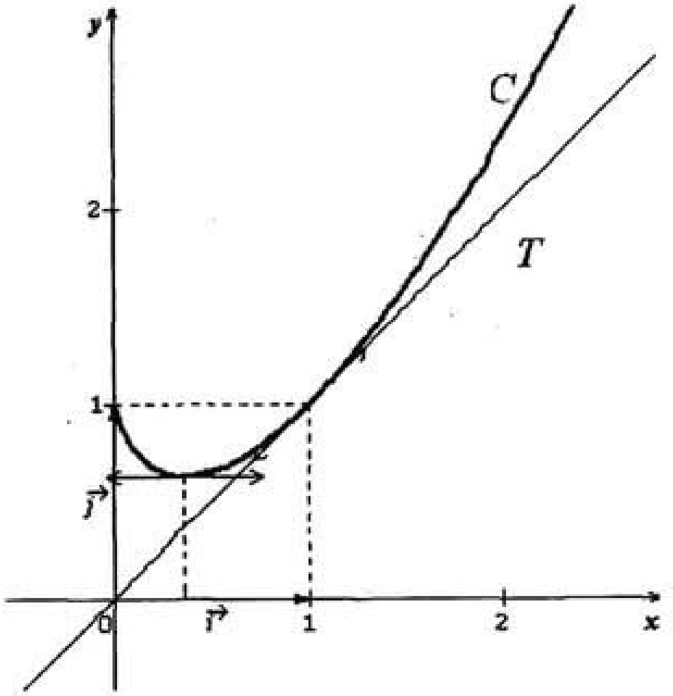
On a : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow +1 + lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	$1 - \frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

b) T : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ donc $T: y = x$

c) $g''(x) = \frac{1}{x} > 0$; la courbe ξ est au dessus de la tangente T

d) voir courbe



3)

- $\int_1^e (x\ln x)\,dx$

$U(x) = \ln x \rightarrow U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = x \rightarrow V(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc :

$$\int_1^e (x\ln x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

- $\int_1^e g(x).dx$

$$\int_1^e g(x)dx = \int_1^e (1 + x\ln x)\,dx = \int_1^e dx + \int_1^e (x\ln x)\,dx = e - 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = e + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

Enoncé

4eme Technique 1

Devoir de contrôle n°3

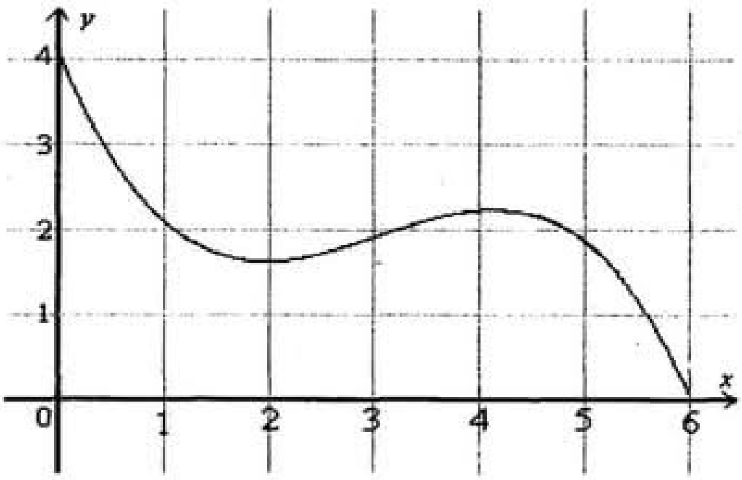
Durée : 2 heures
Avril - 2009

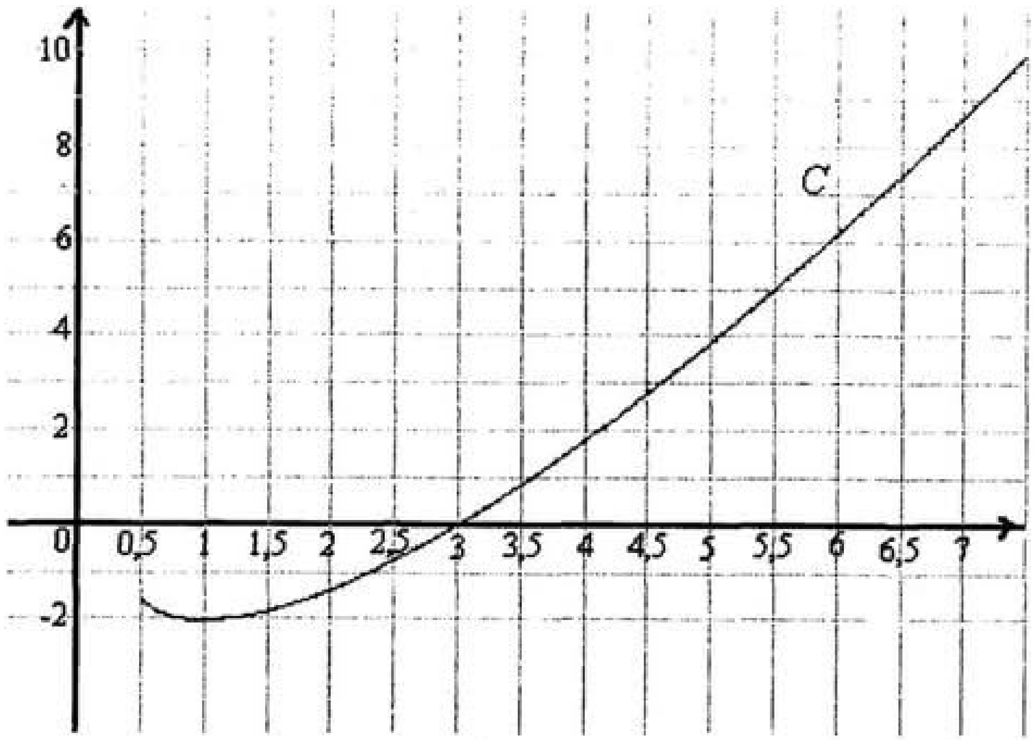
Execice 1 QCM (3points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.

Barème : *Une réponse exacte rapporte 1 point.*
Une réponse inexacte ou une question sans réponse ne rapporte et n 'enlève aucun point.

1) Voici la courbe représentative d'une fonction *f* sur l'intervalle [0 ;6 [.




10
8
6
4
2
0
-2
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
6
6,5
7
C

1. a) A l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f

b) Donner $f(1)$, F(1) et F(3). Préciser le signe de $f(3)$

c) Calculer

$$\int_1^3 f(x)dx$$

2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{2x-1} \quad f_2(x) = \ln(2x-1) \quad f_3(x) = -1 + \frac{1}{2x-1}$$

Une de ces trois fonctions est la fonction f

a) Etudier le signe de f_1 sur l'intervalle J.

b) Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur l'intervalle J.

c) Calculer $f_3(1)$

d) Calculer

$$\int_1^3 f_3(x)dx$$

e) En déduire la fonction f.

Bon travail

Correction

Exercice 1

1) $f'(x) \succ 0$ et $(\ln[f(x)])' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ donc elle a même variation que f

2) $Y=2x+2$

3) $\{3\}$

Execice 2

1)a) $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx - \int_0^1 x^n e^{-x}dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\right)dx$

$= \int_0^1 x^n \underbrace{(x-1)}_{<0} e^{-x}dx \leq 0$ donc U est décroissante

b) $x^n e^{-x} \geq 0$ d'où $\int_0^1 x^n e^{-x}dx \geq 0$ ce qui prouve que la suite U est minorée par 0 et comme elle est décroissante alors elle converge

1) a) $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}\, x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ (*)

b) Intégrant les trois membres de l' inégalité (*) : $\dfrac{1}{e}\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

Or: $\int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{1}{e(n+1)} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Execice 3

1) a) sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ **on a : F est décroissante donc** $f(x) \leq 0$

sur $[1, +\infty[$ **on a : F est croissante donc** $f(x) \geq 0$

b) $f(1) = 0$ **; F(1) = −2 ; F(3) = 0 et** $f(3) \geq 0$

c) $\int_1^3 f(x)dx = f(3) - f(1) = 0 - (-2) = 2$

2) a)

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \ldots (\text{ou bien le discriminant } \Delta = -3 \prec 0) \\ e^{2x-1} \succ 0 \\ \text{donc pour } x \in J \text{ on a : } f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{2x-1} \succ 0 \end{cases}$$

b) $\ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow S_J = \{1\}$

$f_2(1) = -1 + \dfrac{1}{2-1} = -1 + 1 = 0$

c) $\int_1^3 f_2(x)dx = \int_1^3 (-1 + \dfrac{1}{2x-1})dx = \left[-x + \dfrac{1}{2}l(2x-1)\right]_1^3$

$= \left(-3 + \dfrac{1}{2}\ln(5)\right) - (-1 + \dfrac{1}{2}\ln 1)) = -2 + \dfrac{1}{2}\ln(5)$

d) la fonction f **est** f_2

EXAMEN DU BAC BLANC

Section : tech

Epreuve : Mathématiques — Durée : 3 heures

EXERCICE n°1 (3points):

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte.
Indiquer sur votre copie sans justification le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) Si la durée de vie en années d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$ alors la probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie au moins 3 ans est :

   a) $\frac{e-1}{3}$ b) $1-\frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{e}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{\ln x + x - 1}$ est égale à :

   a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 2

3) la suite réelle définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, $n \geq 1$ est :

   a) décroissante b) croissante c) ni croissante, ni décroissante

EXERCICE n° 2 (5 points)

Les variations de chiffres d'affaires mensualité en fonction de frais de publicité (en milles dinars) d'une entreprise a donné les résultats suivants :

x_i : chiffres d'affaires	7	9	13	15	18	20
y_i : frais de publicité	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1

1) Représenter graphiquement cette série par un nuage des points dans un repère orthogonale en précisant le point moyen du nuage
2) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y)

   b) Y a – t – il une forte corrélation entre X et Y ? Justifier
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X
4) Quelle sera la somme de frais de publicité estimée si le chiffre d'affaires de cette entreprise serait 35 milles dinars

EXERCICE n° 3 (5 points)

Une urne contient sept jetons indiscernables au toucher dont trois sont jaunes numérotés 0, 1 et 2 et quatre sont blancs numérotés 0, 1 , 2 , et 2

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux jetons de l'urne

1) a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : << les deux jetons tirés sont de même couleur >>

B : << les deux jetons tirés portent le même numéro >>

b) Sachant que les jetons tirés sont de même couleur qu'elle est la probabilité pour qu'ils portent le même numéro ?

2) Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur la somme des numéros marqués sur les deux jetons tirés

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X

EXERCICE n° 4 (5 points)

(C) désigne la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans **l'annexe I** on a tracer le graphique de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$

1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Vérifier que l'équation $f(x) = 0$, admet dans $]-\infty, 0]$, une unique solution α

c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près

2) On suppose que f est définie sur IR par : $f(x) = (1-x)(2-e^{-x})$

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = 2.(e^{-x}-1) - xe^{-x}$

b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) < 0$

c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis dresser le tableau de variation de f sur IR

d) Vérifier que : $\alpha = -\ln 2$

3) a) Montrer que la droite D d'équation: $y = -2.x + 2$, est une asymptote oblique à (C)

b) Etudier la position relative de (C) et D

c) Tracer D et compléter le graphique de l'annexe I

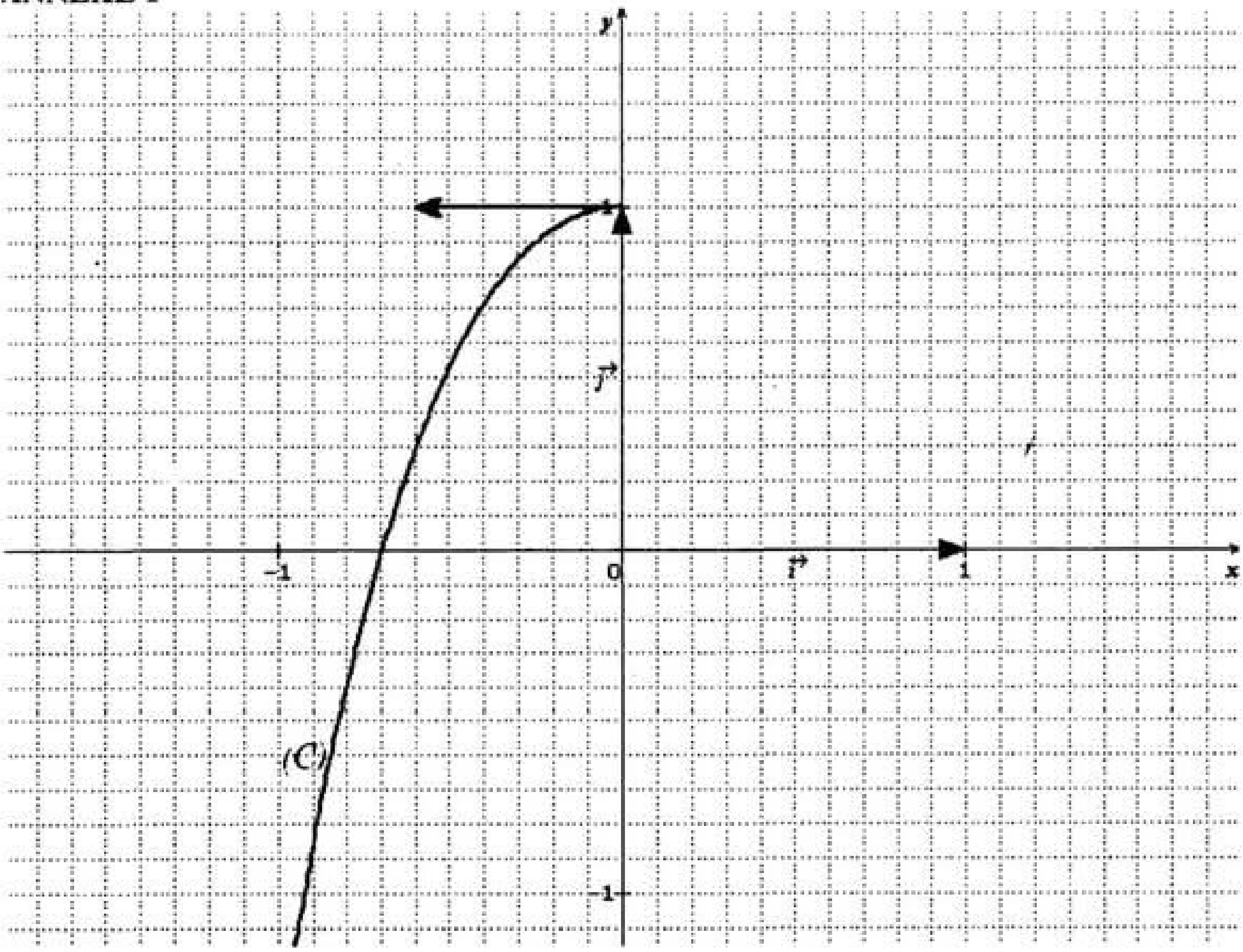
4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, 0]$

a) Montrer que h réalise une bijection notée h^{-1} de I sur un intervalle J à déterminer

b) Montrer que : $(h^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2(1+\ln 2)}$

c) Tracer la courbe de h^{-1}

ANNEXE 1

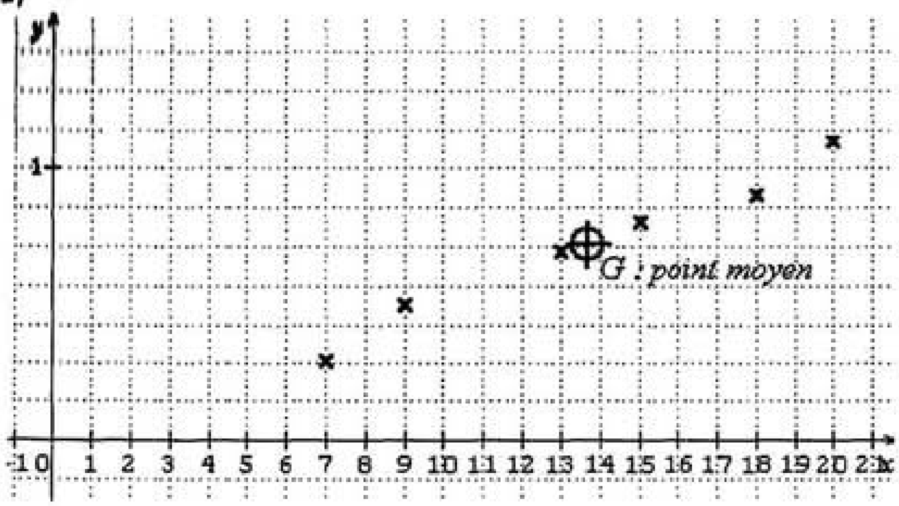


Exercice 1

1) c 2) a (Ind : on divise par lnx) 3) a

Exercice 2

1)



2) b a) coefficient de corrélation : $r = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0{,}989$

b) On a $|r| \geq 0{,}75$ donc un ajustement affine est justifié

3) Droite de régression : y = a⊔x + b

Avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ on trouve : $y = 0{,}056\,x + -0{,}049$

1) Le chiffre d'affaire X estimer est : y = 0,056 x 35 + -0,049 = 2.009 MD

Exercice 3

$$\underset{\text{U}}{\underline{\left| J_0, J_1, J_2, B_0, B_1, B_2, B_2 \right|}}$$

1) a) l'événement A « obtenir deux jetons jaunes ou deux blancs » on a : p (A) = $\dfrac{C_3^2 + C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$

L'événement B « obtenir deux jetons portent le numéro 0 *ou* 1 *ou* 2 » on a : p (B) = $\dfrac{2C_2^2 + C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{5}{21}$

b) Faire des triages des jetons qui portent le même numéro sachant qu'il soient de même couleurs est l'événement sachant A donc

$$p = p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6} \text{ avec } p(\overbrace{B \cap A}^{blancs2}) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

2) a) Loi de probabilité de X :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $p(X=0) = \dfrac{C_2^2}{C_7^2} = \dfrac{1}{21}$ (deux jetons numérotés 0)
- $p(X=1) = \dfrac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \dfrac{4}{21}$ (un jetons numérotés 1 et un numéroté 0)
- $p(X=2) = \dfrac{C_2^2 + C_2^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \dfrac{7}{21}$ (deux numérotés 1 ou bien un jetons numéroté 2 et l'autre 0)
- $p(X=3) = \dfrac{C_2^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \dfrac{6}{21}$ (un jetons numérotés 1 et un numéroté 2)
- $p(X=4) = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{3}{21}$ (deux jetons numérotés 2)

b) $E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \times \dfrac{1}{21} + 1 \times \dfrac{4}{21} + 2 \times \dfrac{7}{21} + 3 \times \dfrac{6}{21} + 4 \times \dfrac{3}{21} = \dfrac{16}{7}$

EXERCICE n° 4

1) a) $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

b) Dans $]-\infty, 0]$, (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point A ;
donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (α est l'abscisse de point A)

c) $\alpha \simeq 0.7$

2) a) pour tout réel x on a : $f'(x) = (1-x)'(2 - e^{-x}) + (1-x)(2 - e^{-x})'$

$$f'(x) = -(2 - e^{-x}) + (1-x)(e^{-x})$$

$$f'(x) = -2 + e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -2 + 2e^{-x} - xe^{-x} = -2(1 - e^{-x}) - xe^{-x}$$

Donc pour tout réel x : $f'(x) = -2(1 - e^{-x}) - xe^{-x}$

b) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xe^{-x} > 0 \\ 2(1 - e^{-x}) > 0 \end{cases}$

$2(1 - e^{-x}) + xe^{-x} > 0$ (la somme de deux réels positifs)

Conclusion pour tout $x > 0$: $f'(x) = -[\![2(1 - e^{-x}) + xe^{-x}]\!] < 0$

c) $f'(0) = 0$,
Tableau de variation de f sur IR

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\overbrace{1-x}^{-\infty})(\overbrace{2-\underbrace{e^{-x}}_{0}}^{2}) = -\infty$$

d) $f(\alpha) = (1-\alpha)(2-e^{-\alpha}) = 0$ et $\alpha \neq 1$ donc $2 = e^{-\alpha} \Leftrightarrow \ln 2 = -\alpha$ d'où $\alpha = -\ln 2$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (-2x+2) \right] = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(2-e^{-x}) + 2x - 2$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2 - e^{-x} - 2x + xe^{-x} + 2x - 2 = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x} + xe^{-x} \overset{\text{on pose } X=-x}{=} \lim_{X\to-\infty} -\overbrace{e^{X}}^{0} - (\underbrace{Xe^{X}}_{0}) = 0$$

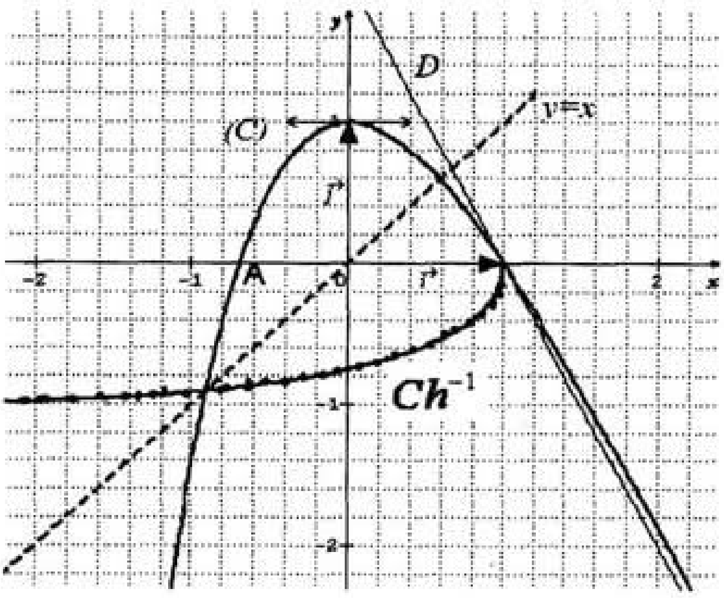
Par suite la droite D d'équation: $y = -2.x + 2$, est une asymptote oblique pour (C) au voisinage de $+\infty$

b) On a : $f(x) - (-2x+2) = 2 - e^{-x} - 2x + xe^{-x} + 2x - 2 = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$

Comme pour tout réel x on a $e^{-x} > 0$ on aura :

- Si $x \geq 1$ alors la courbe (C) est au dessus de l'asymptote D
- Si $x \leq 1$ alors la courbe (C) est au dessous de l'asymptote D

c)



3) a) h est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, 0]$ donc elle réalise une bijection définie sur $J = h(I) =]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(0)] =]-\infty, 1]$

b) On a : $h(\alpha) = 0$ donc $h^{-1}(0) = \alpha = -\ln 2$, h est dérivable en $-\ln 2$

et $h'(-\ln 2) = -2(1-e^{\ln 2}) + \ln 2 e^{\ln 2} = 2 + 2\ln 2 = 2(1+\ln 2) \neq 0$

D'où h^{-1} est dérivable en 0 et $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(-\ln 2)} = \frac{1}{2(1+\ln 2)}$

c) La courbe de h^{-1} est la symétrique de celle de h par rapport à la droite : $y = x$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
EXAMEN DU BACCALAURÉAT
SESSION DE JUIN 2008

NOUVEAU REGIME			
SESSION DE CONTRÔLE			
SECTION :	SCIENCES TECHNIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 3 h	COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La limite de $\frac{x}{\ln(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à :

a) 1 b) 0 c) $+\infty$

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_n = (-\frac{2}{3})^n$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3) Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\Omega), p)$.
On désigne par X la variable aléatoire définie par :

x_i	-1	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Soit E(X) et V(X) l'espérance mathématique et la variance de X .

a) $E(X) = 0$ et $V(X) = 0$

b) $E(X) = 0$ et $V(X) = \frac{1}{3}$

c) $E(X) = \frac{2}{3}$ et $V(X) = \frac{1}{3}$

Exercice 2 (6 points)

1) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$ et $2i$.

Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0$.

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

3) Soit $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$

a) Vérifier que $P(2i) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes m et p tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + mz + p)$.

c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer (C) .

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que $x_n = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A (3, 2, 4) ; B(0, 3, 5) ; C(0, 2, 1) et D (3, 1, 0).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire.

2) Soit S la sphère de centre I (2, -2, 5) et de rayon $3\sqrt{2}$ et P le plan passant par les points A, B , et D.

a) Vérifier que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

b) Montrer que le plan P est tangent à la sphère S au point A.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
SESSION DE CONTRÔLE – JUIN 2008

Exercice 1 (Q.C.M)

- **Contenus :**
  - Fonction logarithme népérien.
  - Suites réelles.
  - Probabilités.
- **Aptitudes visées :**
  - Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
  - Etudier la convergence d'une suite du programme.
  - Calculer les caractéristiques d'une variable aléatoire et interpréter les résultats.
- **Corrigé :**

1) c)

2) a)

3) b)

Exercice 2

- **Contenus :**
  - Opérations algébriques sur le corps des complexes, propriétés du conjugué, du module et de l'argument.
  - Résolution d'équations de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.
- **Aptitudes visées :**
  - Calculer ou transformer des expressions complexes.
  - Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe.
  - Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul
  - Reconnaître que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux, à partir de leurs affixes.
  - Résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.

❖ Corrigé :

1) a)$OACB$ est un losange équivaut à $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ et $OA = OB$.

On a $Aff\left(\overrightarrow{OA}\right) = \sqrt{3}+i$ et $Aff\left(\overrightarrow{BC}\right) = 2i - \left(-\sqrt{3}+i\right) = \sqrt{3}+i$. D'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

$OA = \left|\sqrt{3}+i\right| = 2$ et $OB = \left|-\sqrt{3}+i\right| = 2$. Donc $OA = OB$.

Ainsi $OACB$ est un losange.

2) a) (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0. \Delta' = 3$.

$z' = i - \sqrt{3}$ et $z'' = i + \sqrt{3}$.

Ainsi $S_1 = \left\{\sqrt{3}+i; -\sqrt{3}+i\right\}$.

b) $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3) $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$.

a) $P(2i) = (2i)^3 - 4i(2i)^2 - 8(2i) + 8i = -8i + 16i - 16i + 8i = 0$.

b) $P(z) = (z-2i)(z^2 + mz + p) \Leftrightarrow P(z) = z^3 + (-2i+m)z^2 + (-2im + p)z - 2ip$.

D'où :

$$\begin{cases} -2i + m = -4i \\ -2im + p = -8 \\ -2ip = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2i \\ p = -4 \end{cases}$$

Ainsi $P(z) = (z - 2i)(z^2 + -2iz - 4)$.

c)$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + -2iz - 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = \sqrt{3}+i$ ou $z = -\sqrt{3}+i$.

Ainsi $S_2 = \left\{2i; \sqrt{3}+i; -\sqrt{3}+i\right\}$

Exercice 3

❖ Contenus :

- Fonction logarithme népérien : Propriétés, limites usuelles.
- Etude et représentation graphique de fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$, où u est une fonction du programme.
- Fonction exponentielle : Propriétés, limites usuelles.

❖ Aptitudes visées :

- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Reconnaître qu'une droite est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme.
- Déterminer une valeur exacte ou approchée d'une solution d'une équation de la forme f(x) = k, dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle.

- Reconnaître si une fonction du programme est dérivable en un point ou sur un intervalle.
- Déterminer la dérivée d'une fonction composée.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction du programme connaissant le signe de sa dérivée.
- Tracer la courbe représentative de la réciproque d'une fonction donnée.

❖ **Corrigé :**

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

Alors la courbe (C) admet une asymptote d'équation $x = 0$ et une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

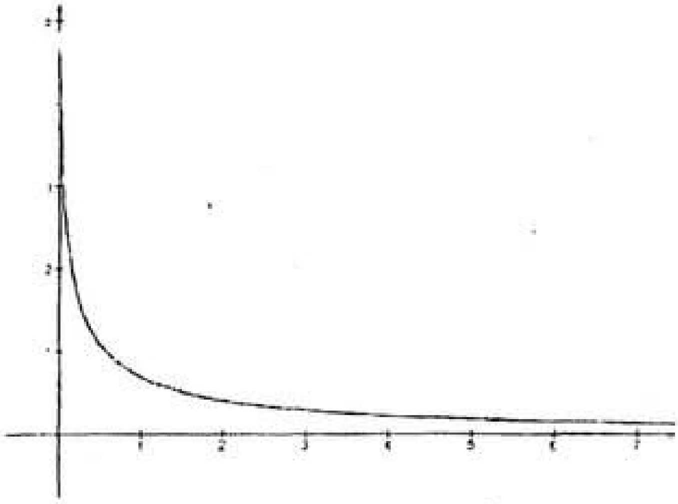
2) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{x(x+1)}$.

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[; x(x+1) > 0$.

Alors pour tout $x \in]0;+\infty[; f'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

3)



4) a) f étant continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, alors f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \in]0;+\infty[$, alors l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$ que l'on notera x_n.

b) $f(x_n)=\ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)}=1$

Exercice 4

❖ Contenus :

- Vecteurs de l'espace.
- Produit vectoriel dans l'espace.
- Droites et plans de l'espace, équations, position relative.
- Sphère, section d'une sphère par un plan.

❖ Aptitudes visées :

- Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
- Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Déterminer la section d'une sphère par un plan.

❖ Corrigé :

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et par suite $ABCD$ est un parallélogramme.

Aire $(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=9\sqrt{2}$.

2) a) $\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$.

b) Comme $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, alors la droite (AI) estt perpendiculaire au plan P.

De plus $AI=\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=3\sqrt{2}$.

Alors le plan P est tangent à la sphère S au point A.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 3 Heures	COEFFICIENT : 3

Exercice 1 : QCM (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3}-i$ est

a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2) Si z est un nombre complexe alors le conjugué de $1+iz^2$ est

a) $1-iz^2$ b) $1-i\,\overline{z}^2$ c) $-1-iz^2$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le module du nombre complexe $z = 1+e^{i\theta}$ est égal à

a) $1+\left|e^{i\theta}\right|$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2\,(1+\cos\theta)}$

4) Soit A et B deux événements tels que : $p(A \setminus B) = \frac{1}{4}$; $p(A \setminus \overline{B}) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$

Alors

a) $p(A) = \frac{7}{12}$ b) $p(A) = \frac{7}{24}$ c) $p(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 2 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $8-6i = (3-i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 3 Heures	COEFFICIENT : 3

Exercice 1 : QCM (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3}-i$ est

a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2) Si z est un nombre complexe alors le conjugué de $1+iz^2$ est

a) $1-iz^2$ b) $1-i\,\overline{z}^{2}$ c) $-1-iz^2$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le module du nombre complexe $z = 1+e^{i\theta}$ est égal à

a) $1+\left|e^{i\theta}\right|$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2\,(1+\cos\theta)}$

4) Soit A et B deux événements tels que : $p(A \backslash B) = \frac{1}{4}$; $p(A \backslash \overline{B}) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$

Alors

a) $p(A) = \frac{7}{12}$ b) $p(A) = \frac{7}{24}$ c) $p(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 2 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $8-6i = (3-i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(1+i)z-2(1-i)=0$.

2) Soit θ un réel de $[0, \pi]$.

On considère l'équation : $(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta})\,z - 2\,(1 - e^{i\theta}) = 0$

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E_θ).

b) Déterminer l'autre solution de E_θ.

3) Soient A et M_θ les points d'affixes respectives -2 et $1 - e^{i\theta}$; $\theta \in [0, \pi]$.

a) Calculer AM_θ en fonction de θ.

b) Déterminer la valeur de θ de $[0, \pi]$ pour laquelle AM_θ est maximale.

Exercice 3 : (5 points)

Un nourrisson est pesé quotidiennement durant le 1[er] mois de sa naissance.

Dans le tableau statistique ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson, et la variable Y le poids en kilogrammes.

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kg)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série (X, Y).

b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?

2) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.

b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

3) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.

b) Interpréter le résultat trouvé.

4) a) Calculer la covariance du couple(X, Y).

b) En déduire qu'une équation de la droite de régression de Y en X est $Y = 0{,}04\,x + 3{,}41$.
(les coefficients sont donnés à 0,01 près).

5) a) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

b) Quel pourrait être l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 Kg ?

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{x}}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{x})$.

d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Section: Sciences Techniques *Session de contrôle 2009*

Matière : Mathématiques

Exercice n°1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes, probabilité conditionnelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer le module et le conjugué d'un nombre complexe, appliquer la formule de la probabilité totale.
- ✓ **Corrigé :**

1) c) 2) b) 3) c) 4) b)

Exercice n°2 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, une équation du second degré ; connaitre la relation entre les racines d'une équation du second degré ; interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

1) a- $(3-i)^2 = 3^2 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.

b- $(E) : z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$; $\Delta = (1+i)^2 + 4(-2(1-i)) = 8 - 6i = (3-i)^2$.

$z_1 = -2$; $z_2 = 1 - i$.

2) $\theta \in [0,\pi]$, $(E_\theta) : z^2 + (1+e^{i\theta})z - 2(1-e^{i\theta}) = 0$.

a- On a : $(-2)^2 + (1+e^{i\theta})(-2) - 2(1-e^{i\theta}) = 4 - 2 - 2e^{i\theta} - 2 + 2e^{i\theta} = 0$

b- $(-2)z_2 = -2(1-e^{i\theta})$ signifie $z_2 = 1 - e^{i\theta}$

3) $A(-2)$ et $M_\theta(1-e^{i\theta})$

a- $AM_\theta = |1 - e^{i\theta} + 2| = |3 - e^{i\theta}| = |3 - \cos\theta - i\sin\theta| = \sqrt{10 - 6\cos\theta}$.

b- AM_θ est maximale si $\cos\theta = -1$ soit $\theta = \pi$.

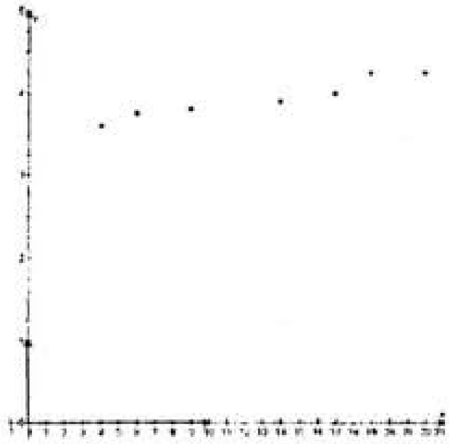
Exercice n°3 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Série statistique double.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.

✓ **Corrigé :**

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kilogrammes)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a-



Nuages des points associés à la série (X,Y)

b- D'après le nuage des points, un ajustement affine de la série double est bien justifié .

2) a- $\bar{x} = 13$; $\sigma_x = 6{,}324$.

b- $\bar{y} = 3{,}971$; $\sigma_y = 0{,}287$.

3) a- Le coefficient de corrélation entre X et Y est : $r = 0{,}946$.

b- Il ya une très forte corrélation entre x et y.

4) a- $\text{Cov}(X, Y) = 1{,}721$

b- L'équation de la droite de régression de Y en X est de la forme : $y = a x + b$

avec $a = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{1.721}{40} = 0{,}04$; $b = \bar{y} - a\bar{x} = 3{,}41$

D'où une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 0{,}04x + 3{,}41$

5) a- $x = 30$ alors $y = (0{,}04)(30) + 3{,}41 = 4{,}61$.

Une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance est 4,61 kg.

b- pour $y = 3{,}85$ kg on obtient $3.85 = 0{,}04x +$ $= 11$

Ainsi l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 kg est égal à 11 jours.

Exercice 4 ***(6 points)***

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle, suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une fonction, déterminer les asymptotes à sa courbe, étudier la position relative de deux courbes, appliquer l'inégalité des accroissements finis, étudier la convergence d'une suite réelle définie par une fonction.

✓ **Corrigé :**

Pour tout $x \in$ IR, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$.

1) a- $u : x \rightarrow 1+e^{-x}$ est dérivable et strictement positive sur IR, alors la fonction $x \rightarrow \ln(1+e^{-x})$ est dérivable sur IR, par suite f est dérivable sur IR et on a :

Pour tout $x \in$ IR ; $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^{x}}$.

b- tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

c- Pour tout $x \in$ IR, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{-x}(e^{x}+1)) = \frac{1}{2}(\ln(e^{-x}) + \ln(e^{x}+1)) = \frac{1}{2}(-x + \ln(e^{x}+1))$

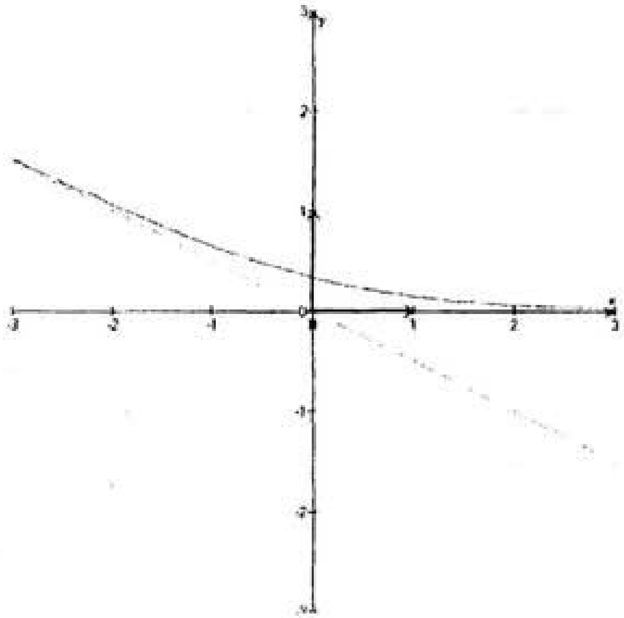
d'où $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{x})$

d- • $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) + \frac{1}{2}x) = \lim\limits_{x \to -\infty}(\ln(1+e^{x})) = 0$ donc la droite Δ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

• $f(x) - (-\frac{1}{2}x) = \ln(1+e^{x})$ et comme $1+e^{x} > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $\ln(1+e^{x}) > 0$ et par suite $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.

e- Traçage de $\mathcal{C}_f$ et Δ .



2) a- On pose $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur IR. $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout $x \in IR$.

h est une fonction continue strictement décroissante sur IR alors h réalise une bijection de IR sur h(IR)=IR.

Alors il existe un réel α unique tel que $h(\alpha) = 0$. Or $h(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) = \alpha$.

b- $h(0) = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$ et $h(1) = -0{,}84 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $0 < \alpha < 1$.

3) a- Pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$.

Pour tout $x \geq 0$, $1 + e^x \geq 2$ signifie $\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{4}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b- f est dérivable sur IR_+ et pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après les inégalités des accroissements finis : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$; $x \in IR_+$.

Conclusion : pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) a- Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \geq 0$; vérifié.

Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après 1)b-

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $u_n \geq 0$.

b- D'après 3)b et pour $x = u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient :

$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ signifie $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c- Pour $n = 0$; $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, vraie .

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après b) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ et comme $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

EXAMEN DU BACCALAURÉAT - SESSION DE JUIN 2010 **SESSION DE CONTRÔLE**

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3 H** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la sphère (S) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$ et le plan P : $2x - y - z = 0$.
La sphère (S) et le plan P sont

a) tangents b) sécants c) disjoints.

2) Soit A et B deux points distincts de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ est

a) une droite b) une sphère c) un plan.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ est égale à

a) $+\infty$ b) 2 c) 0.

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$.
La valeur moyenne de f sur $[0, 1]$ est égale à

a) -1 b) $2 - e$ c) $e - 2$.

Exercice 2 (6 points)

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z + 1 + \sqrt{3}\, i = 0$

a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E).

b) Déduire l'autre racine de (E)

1 / 3

Dans la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$.

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I.

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A, B, et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(\vec{u}, \vec{OI}) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et celle de $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3 (5 points)

Le premier exercice d'un examen est un questionnaire à choix multiples (QCM) formé de quatre questions indépendantes. Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat coche au hasard une seule réponse pour chaque question

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : le candidat coche la réponse exacte de la première question seulement

B : le candidat coche une seule réponse exacte

C : le candidat ne coche aucune réponse exacte

2) Une réponse exacte vaut 1 point et une réponse fausse vaut 0 point.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la note totale attribuée au candidat dans cet exercice

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Donner la loi de probabilité de X

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

Exercice 4 (6 points)

I) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 1 + 2\ln(x)$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 / 3

1) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,75 < \alpha < 1$.
2) Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$

II) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$

c) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et Δ

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer $(\mathscr{C})$ et Δ.

4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SESSION DE CONTRÔLE

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0.75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   Soit la sphère $(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$ et le plan $P : 2x - y - z = 0$
   La sphère (S) et le plan P sont
   a) tangents   b) sécants   c) disjoints.

2) Soit A et B deux points distincts de l'espace.
   L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$ est
   a) une droite   b) une sphère   c) un plan.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ est égale à
   a) $+\infty$ b) 2   c) 0.

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$.
   La valeur moyenne de f sur $[0, 1]$ est égale à
   a) -1 b) $2-e$ c) $e-2$

Exercice 2 (6 points)

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : 2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z + 1 + \sqrt{3}\,i = 0$
   a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E)
   b) Déduire l'autre racine de (E).

Dans la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$.
   On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I.
   a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.
   b) Placer les points A, B, et I dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.
   b) En déduire que $OI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{OI}}\right) = \dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$.
   c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et celle de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 3 (5 points)

Le premier exercice d'un examen est un questionnaire à choix multiples (QCM) formé de quatre questions indépendantes. Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat coche au hasard une seule réponse pour chaque question.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : le candidat coche la réponse exacte de la première question seulement.
   B : le candidat coche une seule réponse exacte.
   C : le candidat ne coche aucune réponse exacte.

2) Une réponse exacte vaut 1 point et une réponse fausse vaut 0 point.
   On désigne par X la variable aléatoire égale à la note totale attribuée au candidat dans cet exercice.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

Exercice 4 (6 points)

I) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 1 + 2\ln(x)$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

1) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,75 < \alpha < 1$.
2) Déterminer, suivant les valeurs de x ; le signe de $g(x)$.

II) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Montrer que droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et Δ.
2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) Tracer $(\mathscr{C})$ et Δ.
4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

CORRIGE

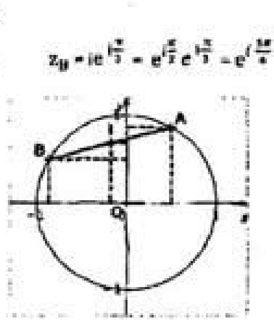
Exercice 1 :

1) b)
2) c)
3) b)
4) c)

Exercice 2

1) a) $3 - \sqrt{3}\,i - 3 + 1 + \sqrt{3}\,i = 0$ donc 1 est une solution de (E).
   b) $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$
   d'où $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

2) a) $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B = ie^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$
   b)



3) a) $OA = OB = 1$ et $\dfrac{z_A}{z_B} = -i \in i\mathbb{R}$ signifie que $\vec{OA} \perp \vec{OB}$,
d'où le triangle OAB est un triangle isocèle et rectangle en O.

b) OAB est un triangle rectangle en O et I est le milieu du segment [AB]

donc $IO = IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

OAB est un triangle isocèle donc [OI) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$ d'où :

$$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}})\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$$

c) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

d'où $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3

1) $p(A) = \frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^3$; $p(B) = C_4^1\,\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^3$ et $p(C) = (\frac{3}{4})^4$.

2) a) $X(E) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) X suit la loi binomiale de paramètres $p = p(S) = p(A) = \frac{1}{4}$ et $n = 4$

Donc $p(X = k) = C_4^k\,(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{4-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

c) $E(X) = np = 1$; $V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4

I/ 1) g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[) = IR$. $0 \in IR$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.

$g(0{,}75) = -0{,}7...$ et $g(1) = 1$, $g(0{,}75)g(1) < 0$ donc $0{,}75 < \alpha < 1$.

2) $\left.\begin{array}{l} 0 < x < \alpha \\ g \text{ est strictement croissante sur }]0, \alpha] \end{array}\right\}$ donc $g(x) < g(\alpha)$ d'où $g(x) < 0$.

$\left.\begin{array}{l} x > \alpha \\ g \text{ est strictement croissante sur } [\alpha, +\infty[\end{array}\right\}$ donc $g(x) > 0$.

II/ 1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{\ln x}{x^2}) = 0$.

Donc $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) - (2x-1) = -\frac{\ln x}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (2x-1)$	+		−
Position relative de (C) et Δ	(C) au dessus de Δ		(C) au dessous de Δ

(C) et Δ se coupent au point d'abscisse 1.

2) a) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) Voir la courbe.

4) $\mathcal{A} = \int_1^e ((2x-1) - f(x))dx$ (ua)

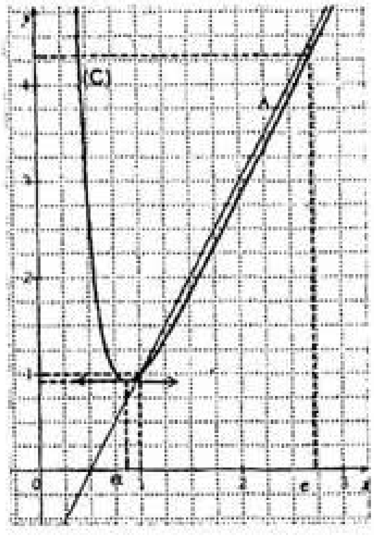
Donc $\mathcal{A} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

<u>Intégration par parties</u> : On pose $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2}$; $v(x) = -\frac{1}{x}$

$$\mathcal{A} = [-\frac{\ln x}{x}]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{e} + [-\frac{1}{x}]_1^e$$

$\mathcal{A} = (1 - \frac{2}{e})$ ua.



REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

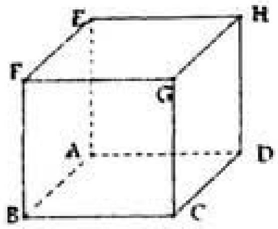
1) La fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est

a) croissante sur $]0\,,+\infty[$ b) décroissante sur $]0\,,+\infty[$ c) n'est pas monotone sur $]0\,,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ est égale à :

a) 0 b) 2 c) 1

3) La figure ci-contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.



i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$

ii) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{EA}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$

Exercice 2 (6 points)

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

1) Montrer que $i e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

b) Placer les points les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Calculer l'aire du losange $OACB$.

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x e^{-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, les axes du repère et la droite D d'équation x= n

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{A}_n$.

Exercice 1

1) c 2) a 3) i) b 3) ii) a

Exercice 2

1) a) $U_1 = \frac{4\times 1}{1+1} = 2$; $U_2 = \frac{4\times 2}{1+2} = \frac{8}{3}$

b)) i/ pour $n=0$ on a: $0 < U_0 = 1 < 3$ Vrai

ii) supposons que : $0 < U_n < 3$ et montrons que : $0 < U_{n+1} < 3$. En effet :$1+U_n > 2 > 0$

- $1+U_n > 2 > 0$ et $U_n > 0$ donc $\frac{4U_n}{1+U_n} > 0$

- $U_{n+1} - 3 = \frac{4U_n}{1+U_n} - 3 = \frac{4U_n - 3 - 3U_n}{1+U_n} = \frac{U_n - 3}{1+U_n} < 0$,car $U_n - 3 < 0$ et $1+U_n > 0$ D'où : $0 < U_{n+1} < 3$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 3$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\frac{4U_n}{1+U_n} - 3}{\frac{4U_n}{1+U_n}} = \frac{\frac{4U_n - -3 - 3U_n}{(1+U_n)}}{\frac{4U_n}{(1+U_n)}} = \frac{U_n - 3}{4U_n} = \frac{1}{4}\left(\frac{U_n - 3}{U_n}\right) = \frac{1}{4}V_n \text{ D'où } : V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n :$$

Par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

b) *) (V_n) est une suite géométrique de premier terme : $V_0 = \frac{U_0 - 3}{U_0} = -2$ donc

$$V_n = V_0 . q^n = (-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

**) $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n} \Leftrightarrow U_n \times V_n = U_n - 3 \Leftrightarrow U_n V_n - U_n = -3 \Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -3 \Leftrightarrow U_n = \frac{-3}{V_n - 1} = \frac{3}{1 - V_n}$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{3}{1 - (-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{1+2\underbrace{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}_{0}} = 3$

3) a) $W_n + V_n = \dfrac{3}{U_n} + V_n = \dfrac{3}{U_n} + \dfrac{U_n - 3}{U_n} = \dfrac{3+U_n-3}{U_n} = \dfrac{U_n}{U_n} = 1 \Rightarrow W_n = 1 - V_n \;; n \in IN$

b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(1-V_n) = (n+1) - \sum\limits_{k=0}^{n} V_n = (n+1) - V_0 \times \dfrac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = (n+1) + \dfrac{8}{3}\left[1-(\dfrac{1}{4})^n\right]$

c) $\dfrac{S_n}{n} = (\dfrac{1}{n}+1) + \dfrac{8}{3n}\left[1-(\dfrac{1}{4})^n\right] \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{8}{3n}\left[1-(\dfrac{1}{4})^n\right]\right) = 1$

Exercice 3

- $ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$
- $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 - 4(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{12}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}} + 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}} + 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

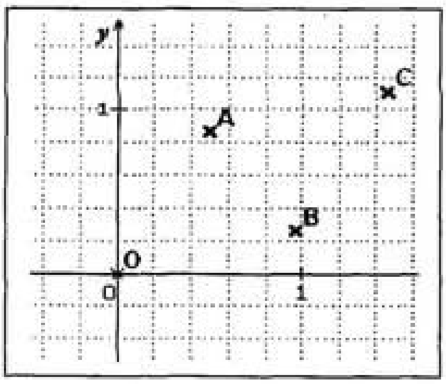
$\delta = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *(racine carré de* Δ*)*

*) $z' = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{12}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z'' = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{12}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) • $aff(\overrightarrow{OA}) = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $aff(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = (e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}) - e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

ce qui prouve que *OABC* est un parallélogramme

• De plus on a : $\left.\begin{aligned} OA &= |z_A| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \\ BC &= |z_C - z_B| = \left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right| = 1 \end{aligned}\right\} OA = BC$



OACB est un parallélogramme à deux cotés consécutifs isométrique donc c'est un losange

b) voir figure

c) aire (OACB)= $\dfrac{AB \times OC}{2} = ?$ ***la moitié de produit des longueurs des diagonales***

Première méthode

$$AB\times OC = |z_B - z_A|\times|z_C| = \left|e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right| = \left|\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\times\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\right|$$

$$= \left|\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{12}}\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \left|-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})+\frac{1}{2}i(\sqrt{3}-1)\right| = \frac{1}{2}\left|-(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{3}+3+3-2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

donc : $aire(OACB) = \frac{AB\times OC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

on a utiliser les formules : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ / $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ / $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Deuxième méthode

$$AB\times OC = |z_B - z_A|\times|z_C| = \left|e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{12}}\times\left(1-e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})}\right)\right|\times\left|e^{i\frac{\pi}{12}}\times\left(1+e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})}\right)\right|$$

$$= \overbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right|}^{=1}\times\left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right|\times\left|\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right| = \left|1^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right| = \left|1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

donc : $aire(OACB) = \frac{AB\times OC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

on a utiliser les formules : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ // $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ // $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Exercice 4

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(1+x)}_{-\infty}\overbrace{e^{-x}}^{+\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+xe^{-x}) = \lim\limits_{X\to-\infty}(\overbrace{e^{X}}^{0} + \underbrace{Xe^{X}}_{0}) = 0$ (On pose $X = -x$)

b) f est dérivable sur IR (produit de deux fonctions dérivables et on

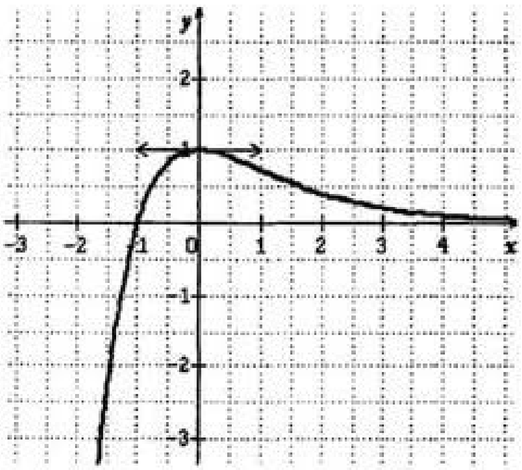
$$f'(x) = 1+x)'e^{-x} + (1+x)(e^{-x})' = e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x}$$

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\dfrac{1+x}{x}}_{1}\right) e^{-x} = +\infty$

Donc ($\mathscr{C}$) admet une B.I.P de direction $\left(o,\vec{j}\right)$



b)

3) a) a) Integrant par parties : $\mathscr{A}_n = \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (1+x)e^{-x}dx$

On pose: $\left.\begin{array}{l} U(x)=1+x \to U'(x)=1 \\ V'(x)=e^{-x} \to V(x)=-e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^n (1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n - \int_0^n (-e^{-x})dx$

$-(1+n)e^{-n}+1-\left[e^{-x}\right]_0^n = -(1+n)e^{-n}+1-e^{-n}+1 = \boxed{2-(2+ne^{-n}) = \mathscr{A}_n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2-(2+n)e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2-2e^{-n}-ne^{-n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (2-2e^{-n}-ne^{-n})$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} (2-\dfrac{2}{e^n}-\dfrac{n}{e^n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (2-\dfrac{2}{e^n}-\dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{e^n}{n}}_{+\infty}}) = 2$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3 heures** **COEFFICIENT : 3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) L'équation $(z-i)(z^2+4)=0$ admet dans $\mathbb{C}$:

a) une unique solution b) exactement deux solutions c) exactement trois solutions.

2) Le nombre complexe $(1-i)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à :

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $2i$.

3) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$ est :

a) croissante sur $\mathbb{R}$ b) décroissante sur $\mathbb{R}$ c) n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

4) L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,dt$ est égale à :

a) $2\ln(e-e^{-1})$ b) 0 c) $2\ln(e+e^{-1})$.

Exercice 2 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{x-1}{4x-3}$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ puis déterminer $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$.

b) Montrer que, pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x)-x\geq 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (6points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-1, 3, 2)$.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (ABC).
3) Calculer le volume V du tétraèdre $DABC$.
4) Soit I, J et K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

   On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC).

   a) Donner une équation cartésienne du plan Q.

   b) Vérifier que J et K appartiennent à Q.

   c) On désigne par V' le volume du tétraèdre $DIJK$.

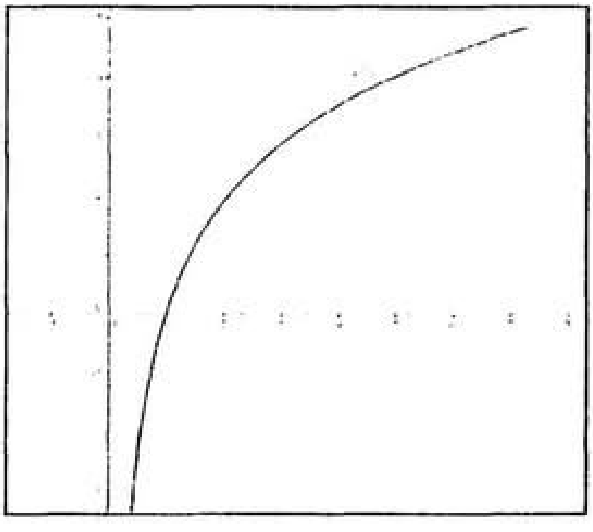
   Montrer que $V = 8V'$.

Exercice 4 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

On sait que (Γ) n'admet aucun extremum.



1) a) Par lecture graphique, donner le signe de g sur $]0, +\infty[$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(x-1)g(x) \geq 0$.

2) La fonction g est définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 \ln(x) + x - 1$, et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = (x-1)g(x) + 1$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

a) Vérifier que (T) a pour équation : y = x-1.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (T).

c) Tracer la courbe (C_f).

Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session de contrôle

Exercice 1

1) c)
2) b)
3) a)
4) b)

Exercice 2

1) Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{x-1}{4x-3}$.

a) $f'(x) = \dfrac{-3+4}{(4x-3)^2} = \dfrac{1}{(4x-3)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Comme f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $f(x) - x = \dfrac{x-1}{4x-3} - x = \dfrac{x-1-x(4x-3)}{4x-3} = \dfrac{-(2x-1)^2}{4x-3}$.

$4x-3 < 4 \times \frac{1}{2} - 3$ donc $4x-3<0$ et par suite $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2)

a) Montrons que pour tout pour $n \in IN$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Par récurrence

Pour n=0, $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Soit $n \in IN$, supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et par suite $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

D'où pour tout pour $n \in IN$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrons que (u_n) est croissante.

Soit $n \in IN$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ car $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est convergente vers une limite l.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \text{f est continue sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{Pour tout n , } u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente vers l.} \end{array}\right\}$$

Donc $l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow \frac{(2l-1)^2}{4l-3} = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$

Exercice 3

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-1, 3, 2)$.

1) .

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times(-1) = 0$

donc le triangle ABC est rectangle en A.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

Par suite $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC)

donc $\overrightarrow{AD}$ est normal à (ABC).

3) Le volume V du tétraèdre DABC.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{3}{2}AD^2\right| = \frac{0+4+4}{4} = 2$$

4) Soit I, J et K les milieux respectifs de [DA], [DB] et [DC].

On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC).

a) $I(-1,2,1)$ et $(ABC)//Q$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal à Q par suite

$Q: 0x + 2y + 2z + d = 0$,

$I(-1,2,1) \in Q$ donne $2 \times 2 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Donc $Q : y + z - 3 = 0$

b) $J(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \in Q$ car $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0$ et $K(\frac{-1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2}) \in Q$ car $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 3 = 0$.

c) V' le volume du tétraèdre DIJK.

$V' = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\right)\overrightarrow{ID}\right|$ or $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{ID}$

Ainsi $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(2\,\overrightarrow{IJ} \wedge 2A\overrightarrow{IK}\right).2\,\overrightarrow{ID}\right| = 8V'$

Exercice 4

1) a) D'après le graphique, $g(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$; $g(x) > 0$ pour $x \in]1,+\infty[$ et $g(1)=0$.

b) pour $x \in]0,1[$, $(x-1) < 0$ et $g(x) < 0$ donc $(x-1)g(x) \geq 0$

pour $x \in]1,+\infty[$, $(x-1) > 0$ et $g(x) > 0$ donc $(x-1)g(x) \geq 0$

pour $x=1$. $(x-1)\ g(x)=0$

Donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $(x-1)g(x) \geq 0$

2) On donne $g(x) = 2\ln(x) + \frac{x-1}{x}$ et $f(x) = (x-1)^2\ln(x) + x - 1$.

a) $f'(x) = 2(x-1)\ln x + (x-1)^2 \times \frac{1}{x} + 1 = (x-1)(2\ln x + \frac{x-1}{x}) + 1 = (x-1)g(x) + 1$

b) Tableau de variation de f.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1)^2\ln x + x - 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)^2\ln x + x - 1 = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

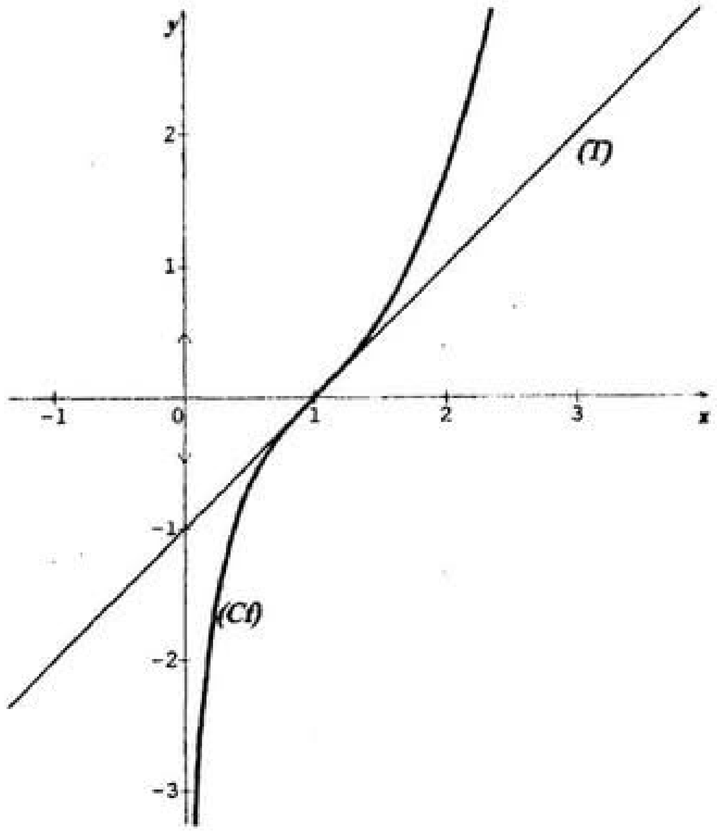
a) $f(1) = 0$; $f'(1) = (1-1)g(1) + 1 = 1$ donc (T) a pour équation : $y = x-1$.

b) Position relative de (C_f) et (T).

$f(x)-(x-1)=(x-1)^2 \ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	(T)/ (C_f)		(C_f) / (T)	

c) La courbe (C_f) .



REPUBLIQUE TUNISIENNE ◆◆◆ **MINISTERE DE L'EDUCATION**	**EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012**		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	**Durée : 3h**	**Coefficient : 3**
SECTION : Sciences Techniques			**SESSION PRINCIPALE**

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ est

a) $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$

2) Un argument du nombre complexe $(1-i\sqrt{3})i$ est

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{-\pi}{3}$

3) Le module du nombre complexe $1+e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égal à

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2

4) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-i)(\bar{z}+i)=1$ est

a) un singleton. b) une droite. c) un cercle.

Exercice 2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points $A(2, 1, 1)$; $B(1, 1, 0)$ et $C(1, 0, 1)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan que l'on notera P .
b) Vérifier que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) Soit le point D $(2,0,0)$.

a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

3) Soit $I\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. On désigne par (S) la sphère de centre I et passant par D.

a) Montrer que la sphère(S) passe par les points A et B.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle ($\mathscr{C}$).

c) Justifier que ($\mathscr{C}$) est circonscrit au triangle ABC.

4) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle ($\mathscr{C}$).

c) Soit D' le symétrique de D par rapport à Ω.
Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre D'ABC est égal à $\mathcal{V}$.

Exercice 3 (5 points)

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x) = 2 - x + \ln x$.

x	1		$+\infty$
f'(x)	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$

1) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln\alpha = \alpha - 2$.

b) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \ ; \quad n \in N \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n; $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

- admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$,
- atteint son maximum au point d'abscisse 0.

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f_d'(0)$ (nombre dérivé à droite de f en 0)

b) Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer dans l'annexe la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f.

On note β l'abscisse du point d'intersection des deux courbes (C) et (C').

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

a) En utilisant 1) a) montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

b) Soit $I=\int_0^\beta (2x+1)e^{-2x}\,dx$.

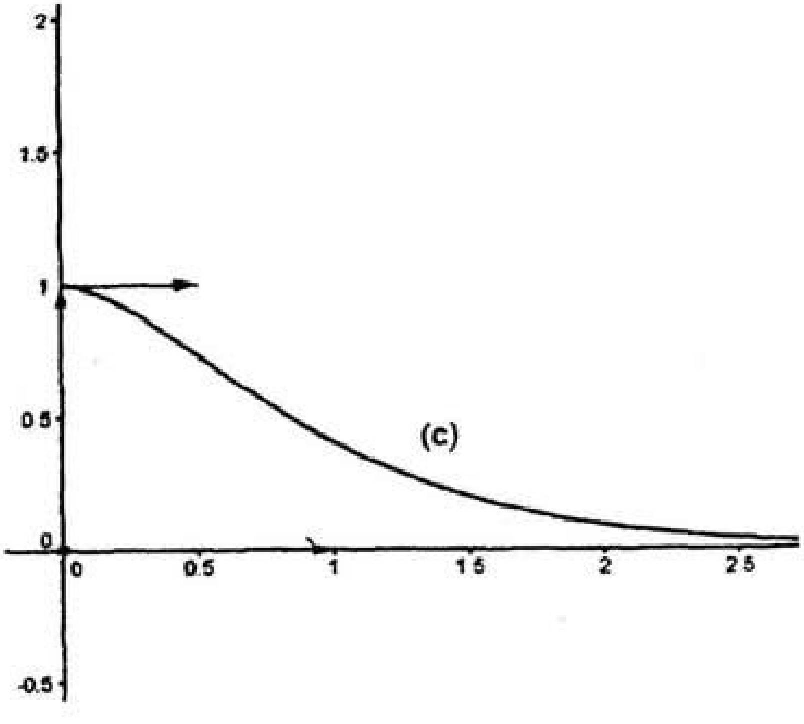
A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I=1-(\beta+1)e^{-2\beta}$.

c) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\beta$ et $x=1$.

Hachurer (E) et déterminer $\mathscr{A}$ en fonction de β.

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Techniques

Annexe (à rendre avec la feuille de copie)



4 / 4

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3 heures	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques		SESSION PRINCIPALE	

EXERCICE 1 : (3 points)

1) c 2) a 3) a 4) c

EXERCICE 2 : (6 points)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C non alignés don ils déterminent un plan P.

b) A(2 , 1, 1) et $2-1-1=2-2=0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x-y-z=0$

B(1 , 1, 0) et $1-1-0=0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation $x-y-z=0$

C(1 , 0 , 1) et $1-0-1=0$ donc les coordonnées de C vérifient l'équation $x-y-z=0$

Ainsi $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) a) D(2 , 0 , 0). $2-0-0=2\neq 0$ donc D n'appartient pas au plan P donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Autrement : $\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\-1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$

b) $\mathscr{V}$: le volume du tétraèdre ABCD. $\mathscr{V}=\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})\right|=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$

3) a) $I\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$. La sphère (S) de rayon $R=ID=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$IA=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=R$ donc (S) passe par A.

$IB=\sqrt{(1-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=R$ donc (S) passe par B

b) $\{A,B\}\in(S)\cap P$ et comme $A\neq B$ donc P coupe (S) suivant un cercle ($\mathscr{C}$).

c) $\{A,B\}\in(S)\cap P$ donc $\{A,B\}\in(\mathscr{C})$ et comme $IC=\sqrt{(1-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=R$ donc (S) passe par C, d'où $\{A,B,C\}\in(\mathscr{C})$ ainsi ($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) a) Δ passe par $I\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ et perpendiculaire au plan P donc le normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ au plan P est un vecteur directeur de Δ. $\Delta:\begin{cases}x=\frac{3}{2}+m\\ y=\frac{1}{2}-m\\ z=\frac{1}{2}-m\end{cases}\quad m\in IR$

b) Ω est le projeté orthogonal de I sur P donc $\Omega\in\Delta$, par suite $\Omega\left(\frac{3}{2}+m\ ,\ \frac{1}{2}-m\ ,\ \frac{1}{2}-m\right)$ et $\Omega\in P$

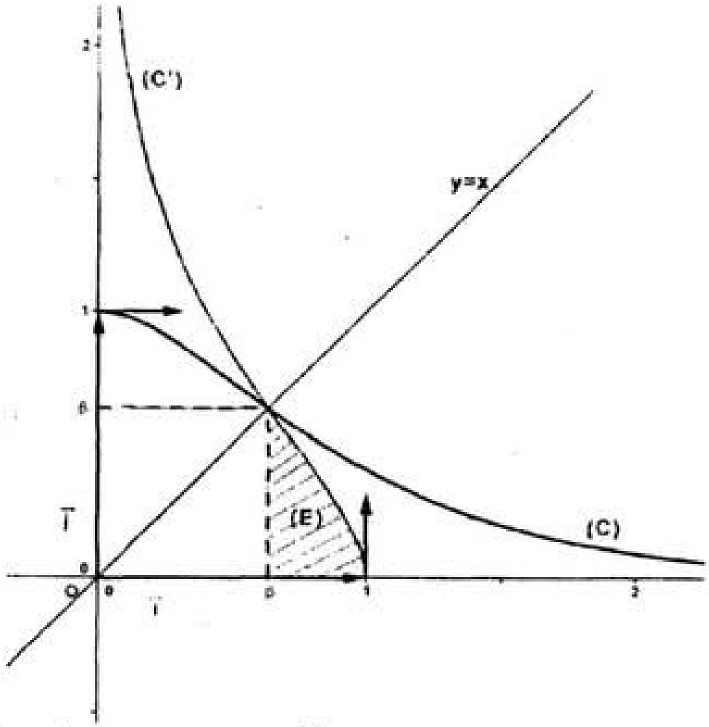
On remplace les coordonnées de Ω dans l'équation cartésienne de P on obtient

$\frac{3}{2}+m-\frac{1}{2}+m-\frac{1}{2}+m=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+3m=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$

Ainsi $\Omega\left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$

c) On vérifie que D est un point de Δ et comme passe par Ω est perpendiculaire au plan P donc $D\Omega$ est la hauteur de ABCD issue de D ainsi $\mathscr{V}==\frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times D\Omega$

$D'=S_{\Omega}(D)$ donc $D'\in\Delta$ et $D\Omega=D'\Omega$ ainsi $D'\Omega$ est la hauteur de ABCD' issue de D' ainsi



3) a) f est définie sur $[0\ ,+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$, a et b deux réels.

D'après 1) a) on a : $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'_d(0)=0 \end{cases}$

Or f est dérivable sur $[0\ ,+\infty[$ et $f'(x)=ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}=(-2ax+a-2b)e^{-2x}$

Donc $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'_d(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$

D'où pour tout $x\in[0\ ,+\infty[$, $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

b) $I=\int_0^{\beta}(2x+1)e^{-2x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x)=2x+1 \\ v'(x)=e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

D'après le formule d'intégration par parties : $I=\left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^{\beta}+\int_0^{\beta}e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^{\beta}+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\beta}$

$$=\left(-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}e^{-2\beta}+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}-\frac{1}{2}e^{-2\beta}$$

$$=1-\frac{1}{2}(2\beta+1)e^{-2\beta}-\frac{1}{2}e^{-2\beta}=1-\frac{1}{2}(2\beta+2)e^{-2\beta}=1-(\beta+1)e^{-2\beta}$$

c) $\mathscr{A}=\int_{\beta}^{1}f^{-1}(x)\,dx=\int_0^{\beta}f(x)\,dx-\beta^2=\int_0^{\beta}(2x+1)e^{-2x}\,dx-\beta^2=1-\beta^2-(\beta+1)e^{-2\beta}$ u.a   <u>*u.a* : unité d'aire</u>

Autrement : $\mathscr{A}=\int_{\beta}^{1}f^{-1}(x)\,dx=\int_0^{\beta}(f(x)-\beta)\,dx=1-(\beta+1)e^{-2\beta}-\beta^2$ u.a

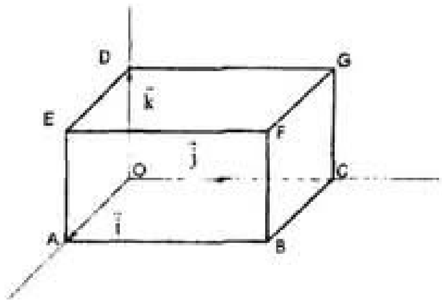
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE ◇◇◇ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : **MATHEMATIQUES**	Durée : **3h**	Coefficient : **3**
SECTION : Sciences Techniques		SESSION DE CONTROLE	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par « vrai » ou par « faux ».
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



Dans la figure ci-contre, OABCDEFG est un parallélépipède rectangle dont le sommet F a pour coordonnées $(1, 2, 1)$.

1) a) Le plan (DEF) a pour équation cartésienne : $z = 1$.

b) $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$.

2) Soit (S) la sphère de centre O et passant par D.

a) $E \in (S)$.

b) Le plan (DEF) est tangent à (S).

Exercice 2 (6 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(4+e^{i\theta})z+2(2+e^{i\theta})=0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I et M d'affixes respectives 2 et $2+e^{i\theta}$.

Montrer que le point M appartient au cercle (Γ) de centre I et de rayon 1.

3) Soit A le point d'affixe $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que A appartient au cercle (Γ). Construire le point A.

b) Montrer que le triangle OAI est rectangle en A.

c) En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle OAM est rectangle en A.

Exercice 3 (6 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$. On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x\in]0,+\infty[$; $g'(x)=\frac{1+x}{x^2}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

b) Tracer (T) et (C).

3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-1+(x-1)\ln x$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α et β. (On prendra $\alpha<\beta$)

b) Justifier que $0,2<\alpha<0,3$ et que $2,2<\beta<2,3$.

4) Soit (E) la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations, $x=\alpha$ et $x=\beta$. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de (E).

a) Hachurer (E).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$; $f'(x)=g(x)$.

c) Montrer que $\mathscr{A} = \int_1^{\alpha} g(x)dx + \int_1^{\beta} g(x)dx$

d) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (5 points)

Le responsable d'un site internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site durant chaque semaine.

Neuf semaines après le lancement de son site, le responsable relève les résultats suivants

Rang x_i de la semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre y_i (en milliers) de pages visitées	3	4	5	8	15	25	40	75	135

1) Représenter dans l'annexe ci-joint le nuage de points correspondant à cette série.

2) Le nuage des points suggère un ajustement de type exponentielle.
On pose $z = \ln y$
On arrondira au centième les résultats des calculs des questions a), b), c) et d).

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$									

b) Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (x_i, z_i).

c) Donner une équation de la droite Δ de régression de z en x.

d) En déduire que $y = 1{,}4e^{0{,}49x}$.

e) Donner alors une estimation du nombre, arrondi à l'unité, des pages visitées durant la douzième semaine.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

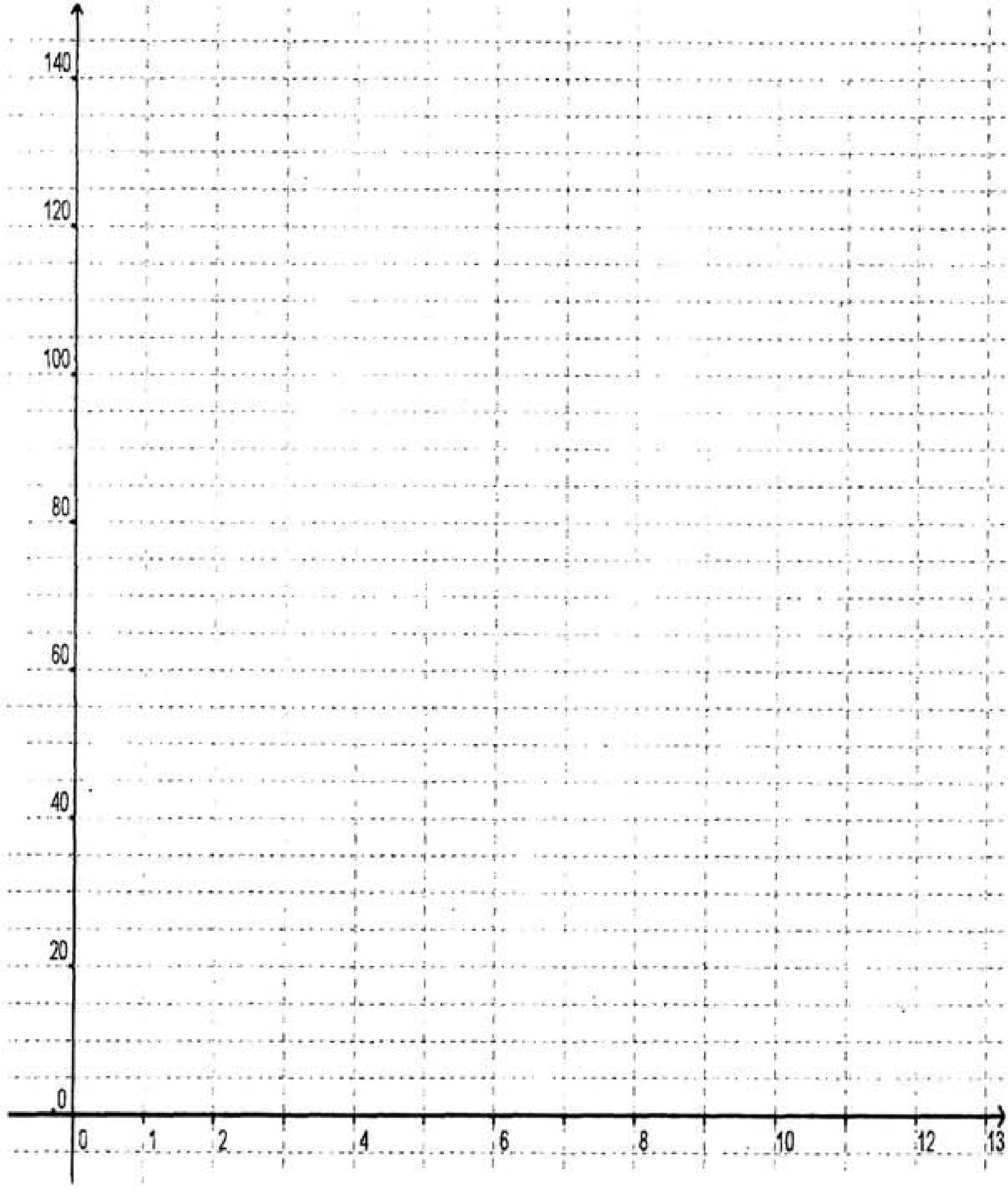
Signatures des Surveillants

....

....

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Techniques

Annexe (à rendre avec la feuille de copie)



REPUBLIQUE TUNISIENNE ◆◆◆ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3 heures	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques		SESSION DE CONTROLE	

EXERCICE 1 : (3 points)

1) a) Vrai b) Vrai

2) a) Faux b) Vrai

EXERCICE 2 : (6 points)

$\theta \in [0 , 2\pi[$

1) $z^2-(4+e^{i\theta})z+2(2+e^{i\theta})=0$

$\Delta=(4+e^{i\theta})^2-4\times2(2+e^{i\theta})=16+8e^{i\theta}+e^{i2\theta}-16-8e^{i\theta}=e^{i2\theta}$. donc $\delta=e^{i\theta}$

D'où les solutions sont $z_1=\dfrac{4+e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2}=2$ et $z_2=\dfrac{4+e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2}=2+e^{i\theta}$

$S_{\mathbb{C}}=\{2 , 2+e^{i\theta}\}$

2) $z_I=2$ et $z_M=2+e^{i\theta}$.

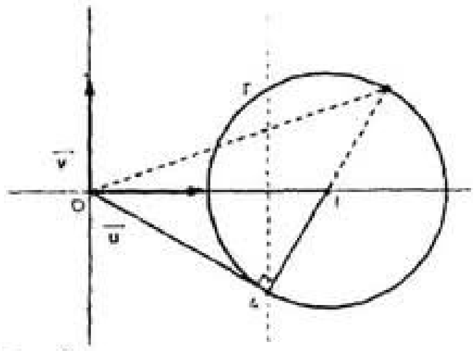
$|z_M-z_I|=|2+e^{i\theta}-2|=|e^{i\theta}|=1 \Leftrightarrow IM=1$ d'où M appartient au cercle (Γ) de centre I et de rayon 1.

3) a) $z_A=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$IA=|z_A-z_I|=\left|\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\right|=\left|-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ainsi A est un point de (Γ).

Autrement : $z_A=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2+e^{i\frac{4\pi}{3}}$ z_A est de la forme $z_M=2+e^{i\theta}$ avec $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$

Ainsi M est un point de (Γ).



b) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AO}}}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\dfrac{i}{\sqrt{3}}\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\right)}{-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ d'où $\dfrac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AO}}}$ est imaginaire pur donc $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{AO}$ ainsi le triangle OAI est rectangle en A.

c) OAM est rectangle en A donc $(AM)\perp(AO)$ et comme $(AI)\perp(AO)$ donc $(AM)\,//\,(AO)$ et par suite $M\in(AO)$ et comme $M\in(\Gamma)$ d'où M est le point diamétralement opposé à A sur (Γ).

3) soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x)=-1+(x-1)\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) f est continue est strictement décroissante sur $]0\,,1[$ et $f(]0\,,1[)=]-1\,,+\infty[$, $0\in]-1\,,+\infty[$ ainsi l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur $]0\,,1[$.

De même f est continue est strictement décroissante sur $]1\,,+\infty[$ et $f(]1\,,+\infty[)=]-1\,,+\infty[$, $0\in]-1\,,+\infty[$ ainsi l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution β sur $]1\,,+\infty[$.

b) $f(0,2)=0,29$ et $f(0,3)=-0,16$ ainsi $f(0,2)\times f(0,3)<0$ donc $0,2<\alpha<0,3$

$f(2,2)=-0,05$ et $f(2,3)=0,08$ ainsi $f(2,2)\times f(2,3)<0$ donc $2,2<\beta<2,3$

4) a) voir figure ci-dessus.

b) f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. Pour tout $x\in]0\,,+\infty[$; $f'(x)=\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{1}{x}+\ln x=g(x)$

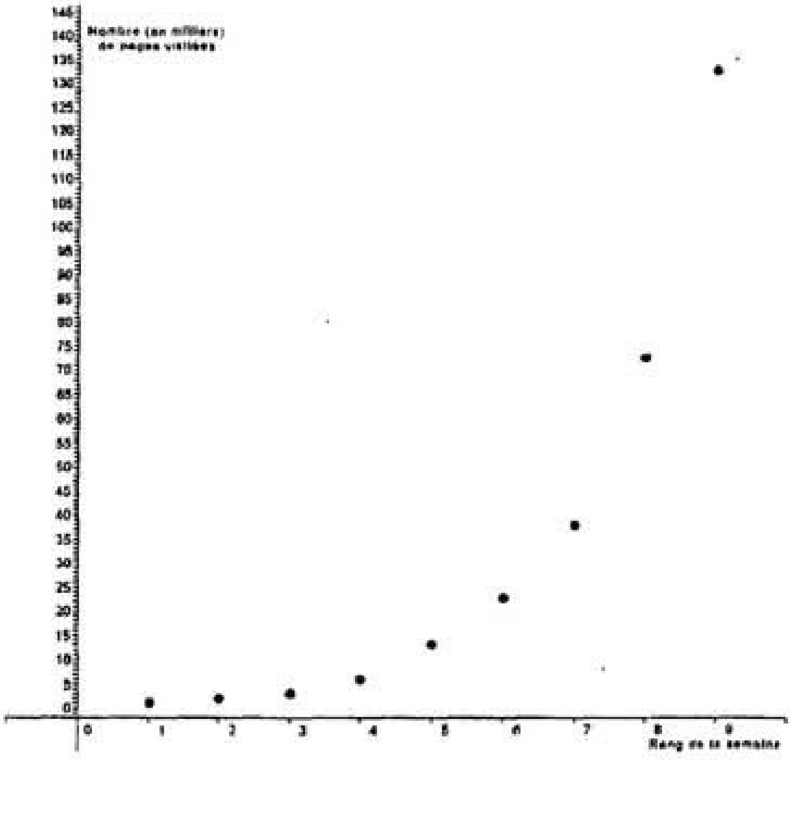
c) $\mathcal{A}=\displaystyle\int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx=\int_\alpha^1 |g(x)|\,dx+\int_1^\beta |g(x)|\,dx=\int_\alpha^1 -g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx=\int_1^\alpha g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx$

d) $\mathcal{A}=\displaystyle\int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx=\int_1^\alpha g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx=\int_1^\alpha f'(x)\,dx+\int_1^\beta f'(x)\,dx=[f(x)]_1^\alpha+[f(x)]_1^\beta$

$=f(\alpha)-f(1)+f(\beta)-f(1)=-2f(1)=2$ u.a

EXERCICE 4 : (5 points)

1)



Ainsi $\frac{z_A + z_M}{2} = z_1 \Leftrightarrow z_M + z_A - 2z_1 = 0 \Leftrightarrow 2 + e^{i\theta} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta + i\ \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta + i\ \sin\theta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$ D'où $\theta = \frac{\pi}{3}$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) soit g la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} = 0$ la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O\ ,\ \vec{i})$.

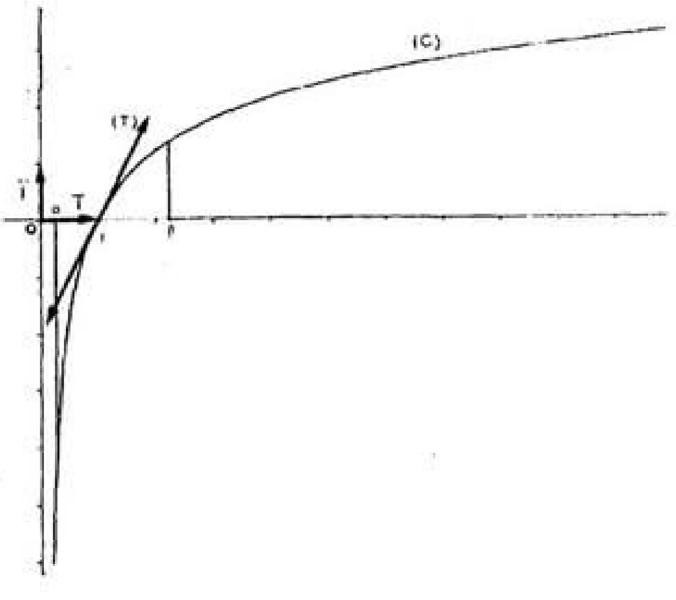
c) la fonction $x \mapsto \ln x$ *est dérivable sur* $]0\ ,\ +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est dérivable sur IR^* ainsi la fonction g est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$. Pour tout $x \in]0\ ,\ +\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$

d) Pour tout $x \in]0\ ,\ +\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$ donc $g'(x) > 0$ et par suite g est strictement croissante sur $]0\ ,\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) a) $(T) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$ d'où $(T) : y = 2x - 2$

b)



2) *a)*

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	1,1	1,39	1,61	2,08	2,71	3,22	3,69	4,32	4,91

b) $r = 0,99$

c) $\Delta : z = 0,49x + 0,34$

d) $z = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow \ln y = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow y = e^{0,49x+0,34}$ ainsi $y = e^{0,49x}e^{0,34}$

D'où $y = 1,4e^{0,49x}$

e) pour $x = 12$ on a $y = 1,4e^{0,49\times 12} = 500,93$

D'où le nombre des pages visitées durant la douzième semaine est 501.

SOMMAIRE