CMS

2ème

SCIENCES
TECH. DE L'INFORMATIQUE

CORRIGEES DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principale

SAI. FETHI
Professeur principale

شمس للنشر

MATHEMATIQUES

Sommaire

CHAPITRE 1: CALCUL DANS IR
(Activités) 2

CHAPITRE 2:PROBLEMES DU PREMIER DEGRE
PROBLEMES DU SECOND DEGRE
(Exercices et problèmes) 22

CHAPITRE 3: NOTIONS DE POLYNÔMES
(Exercices et problèmes).....45

CHAPITRE 4: ARITHMETIQUES
(Exercices et problèmes) 57

CHAPITRE 5: CALCUL VECTORIEL
(Exercices et problèmes) 70

CHAPITRE 6: BARYCENTRE
(Exercices et problèmes) 81

CHAPITRE 7: TRANSLATION
(Exercices et problèmes).....91

CHAPITRE 8: HOMOTHETIE
(Exercices et problèmes).....100

CHAPITRE 9: ROTATIONS
(Exercices et problèmes) 111

CHAPITRE 1

CALCUL DANS IR (Activités)

Activité1

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	ID	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2,5	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
12	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\frac{2}{3}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{5}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$-\frac{63}{7}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
π	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\frac{5}{8}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{\sqrt{3}}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Activité 2

a)

- $\sqrt{3} \in ID$ $[F]$ $\frac{5}{8} \in ID$ $[V]$
- $-23 \in \mathbb{Q}$ $[V]$ $-23 \in \mathbb{Z}$ $[V]$
- $\sqrt{36} \notin \mathbb{N}$ $[F]$ $6{,}13 \notin ID$ $[F]$
- $1{,}98 \in \mathbb{Q}$ $[V]$ $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ $[F]$
- $\frac{3}{11} \in \mathbb{Q}$ $[V]$ $\frac{27}{3} \notin \mathbb{N}$ $[F]$ $\frac{2}{9} \in ID$ $[F]$

b)

- $\mathbb{N} \subset ID$ $[V]$ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ $[V]$
- $\mathbb{Q} \subset ID$ $[F]$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $[V]$

Activité 3

1)

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=1$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

3)

- $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12})=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Activité 4

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=1$ Le (Voir l'activité 3)

Activité 5

1) Il suffit de remarquer que le chiffre des unités du produit des moyens est différent du chiffre des unités du produit des extrêmes : $a\neq b$

2) $a=1,732050807946928315554641612334 1$, $b=1,732050807946045671578973176068 7$

Activité 6

$$E=\frac{2\times\frac{-6}{11}+\frac{\frac{6}{11}+3}{4}}{\frac{10}{816}\times\frac{-6}{11}+\frac{\frac{6}{11}+2}{544}}=\frac{\frac{-12}{11}+\frac{\frac{6}{11}+\frac{33}{11}}{4}}{\frac{5}{408}\times\frac{-6}{11}+\frac{\frac{6}{11}+\frac{22}{11}}{544}}=\frac{\frac{-12}{11}+\frac{\frac{39}{11}}{4}}{\frac{5}{204}\times\frac{-3}{11}+\frac{\frac{28}{11}}{544}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\frac{-12\times 4}{11\times 4}+\frac{39}{11}\times\frac{1}{4}}{\frac{5}{3\times 68}\times\frac{-3}{11}+\frac{28}{11}\times\frac{1}{544}}=\frac{\frac{-9}{44}}{\frac{5}{68}\times\frac{-1}{11}+\frac{7}{11}\times\frac{1}{136}}=\frac{\frac{-9}{44}}{\frac{-10}{11\times 136}+\frac{7}{11\times 136}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\frac{-9}{44}}{\frac{-3}{1496}}=\frac{9}{44}\times\frac{1496}{3}=\frac{3\times 3}{44}\times\frac{44\times 34}{3}=3\times 34=102 \text{ ans}$$

Activité 7

$$(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\ldots\times(1+\frac{1}{2002})\times(1+\frac{1}{2003})=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{2003}{2002}\times\frac{2004}{2003}=\frac{2004}{2}=1002$$

Activité 8

$$\frac{M}{l}=k=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

Masse	15	50	70	80	55	145
Allongement	9	30	42	48	33	87

$$M=k\times l\Leftrightarrow\frac{M}{l}=k$$

Activité 9

1) Le pourcentage du solde est x tel que : $\frac{32-20,400}{32}=\frac{x}{100}$

$$\frac{32-20,400}{32}=\frac{x}{100}\Rightarrow x=\frac{11,6\times100}{32}=36,25\%$$

2) Soit y le pourcentage de la réduction : $\frac{10,500}{150}=\frac{y}{100}\Rightarrow y=\frac{10,500\times100}{150}=7\%$

3)

- $10+\frac{10\times10}{100}=11$
- $11+\frac{11\times20}{100}=13,2$
- L'augmentation est alors : $13,2-10=3,2$
- Soit z le pourcentage global de l'augmentation : $\frac{3,2}{10}=\frac{z}{100}\Rightarrow z=\frac{3,2\times100}{10}=32\%$

4)

- Soit x le prix de l'article.
- La réduction est $y=\frac{10x}{100}=0,1x$
- $11+\frac{11\times20}{100}=13,2$
- Le taux de réduction est $z=\frac{0,1x}{x+0,1x}=\frac{0,1x}{1,1x}=\frac{1}{11}\approx0,09\%$

Activité 10

1)

- $TVA=58\times\frac{17}{100}=9,86$ dinars
- $TTC=58+9,86=67,86$ dinars

2)

- $TVA=HT\times\frac{17}{100}$ dinars
- $TTC=HT+HT\times\frac{17}{100}=\frac{117}{100}HT\Rightarrow HT=\frac{100}{117}TTC=\frac{100}{117}\times35,100=30$ dinars

Activité 11

a)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

- $(3-\sqrt{5})^2=9-6\sqrt{5}+5=14-6\sqrt{5}$
- $(2+a\sqrt{3})^2=4+4a\sqrt{3}+(a\sqrt{3})^2=4+4a\sqrt{3}+3a^2$
- $(3\sqrt{2}-5\sqrt{6})^2=(3\sqrt{2})^2-30\sqrt{12}+(5\sqrt{6})^2$
  $\Rightarrow(3\sqrt{2}-5\sqrt{6})^2=18\sqrt{3}-30\sqrt{4}\times\sqrt{3}+150=18\sqrt{3}-60\sqrt{3}+150=-42\sqrt{3}+150$

- $(2+a)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 a + 3\times 2a^2 + a^3 = 8 + 12a + 6a^2 + a^3$
- $(1-\sqrt{5})^3 = 1^3 - 3\times 1^2\sqrt{5} + 3\times 1\times\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} = 16 - 8\sqrt{5}$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

b)

- $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$
- $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2\times 1\times\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \left|\sqrt{2}+1\right| = \sqrt{2}+1$
- $\sqrt{28+10\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 5^2 + 2\times 5\times\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+5)^2} = \left|\sqrt{3}+5\right| = \sqrt{3}+5$
- $\sqrt{21-8\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 4^2 - 2\times 4\times\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} = \left|\sqrt{5}-4\right| = 4-\sqrt{5}$

Activité 12

a)

- $11^2 = (10+1)^2 = 121 \qquad 19^2 = (20-1)^2 = 361$
- $29^2 = (30-1)^2 = 841$

b)

- $n=1 \Rightarrow x = 1\times 2\times 3\times 4 + 1 = 25 = 5^2 = (1\times 4+1)^2$
- $n=2 \Rightarrow x = 2\times 3\times 4\times 5 + 1 = 121 = 11^2 = (2\times 5+1)^2$
- $n=3 \Rightarrow x = 3\times 4\times 5\times 6 + 1 = 361 = 19^2 = (3\times 6+1)^2$
- $n=4 \Rightarrow x = 4\times 5\times 6\times 7 + 1 = 841 = 29^2 = (4\times 7+1)^2$

c)

- Conjecture : $\forall n\in\mathbb{N} : n\times(n+1)(n+2)\times(n+3)+1 = \left[n(n+3)+1\right]^2$
- $\forall n\in\mathbb{N} : \begin{cases} n\times(n+1)(n+2)\times(n+3)+1 = (n^2+n)(n^2+5n+6) \\ \left[n(n+3)+1\right]^2 = (n^2+3n+1)^2 = (n^2+1)^2 + 9n^2 + 2\times 3n(n^2+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} : \begin{cases} n\times(n+1)(n+2)\times(n+3)+1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \\ \left[n(n+3)+1\right]^2 = n^4 + 1 + 2n^2 + 9n^2 + 6n^3 + 6n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} : n\times(n+1)(n+2)\times(n+3)+1 = \left[n(n+3)+1\right]^2$$

Activité 13

a) $(75895478)^2 - (75895477)\times(75895479) = 1$

$$x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

b) $7^2 + 7 = 8^2 - 8 = 56 \qquad 11^2 + 11 = 12^2 - 12 = 132 \qquad 29^2 + 29 = 30^2 - 30 = 870$

c)

- Conjecture : $\forall n\in\mathbb{N} : n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$
- $\forall n\in\mathbb{N} : (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$

Activité 14

1) $B-9A=100...005-999...99=6$

2) $A\times B+1=A\times(9A+6)+1=9A^2+6A+1=(3A)^2+2\times 3A+1=(3A+1)^2$

$\Rightarrow A\times B+1=(333...34)^2$ ((n-1)fois le chiffre 3)

Activité 15

1) $(0,3)^2-0,3=0,09-0,3=-0,21\prec 0\Rightarrow (0,3)^2\prec 0,3$

2) a)

- L'aire de ABCD est : a^2
- L'aire de ABEF est : $a\times 1=a$

b) L'aire de ABCD est plus petit que celle de ABEF $\Rightarrow a^2\prec a$

3)

- $a^2-a=a(a-1)$
- $0\prec a\prec 1\Rightarrow \begin{cases} a\succ 0 \\ a-1\prec 0\end{cases}\Rightarrow a(a-1)\prec 0\Rightarrow a^2-a\prec 0\Rightarrow a^2\prec a$

4) $a\geq 1\Rightarrow \begin{cases} a\succ 0 \\ a-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow a(a-1)\geq 0\Rightarrow a^2-a\geq 0\Rightarrow a^2\geq a$

5)

- $0\prec a\prec 1\Rightarrow\prec 0\prec\sqrt{a}\prec 1\Rightarrow(\sqrt{a})^2\prec\sqrt{a}\Rightarrow a\prec\sqrt{a}$
- $a\geq 1\Rightarrow\sqrt{a}\geq 1\Rightarrow(\sqrt{a})^2\geq\sqrt{a}\Rightarrow a\geq\sqrt{a}$

6)

a) $\sqrt{2}-1\succ 1\Rightarrow(\sqrt{2}-1)^2\succ\sqrt{2}-1$

b) $0\prec 0,34\prec 1\Rightarrow 0,34\prec\sqrt{0,34}$

c) $\frac{7}{3}\succ 1\Rightarrow\frac{7}{3}\succ\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\forall x\in\mathbb{R}:1+x^2\geq 1\Rightarrow 0\prec\frac{1}{1+x^2}\leq 1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}\leq\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$

Activité 16

$0\prec x\prec 1\Rightarrow\sqrt{x}\succ x$ alors le 100eme chiffre de $\sqrt{x}$ ne peut pas être inférieur à 9 c'est donc 9

Activité 17

1)

a) $OA=a\succ 1\Rightarrow OA\succ OB$

b)

- Thalès dans le triangle OAJ : $\frac{OB}{OJ}=\frac{OI}{OA}\Rightarrow\frac{OB}{1}=\frac{1}{a}\Rightarrow OB=\frac{1}{a}$
- $OA\succ OB\Rightarrow a\succ\frac{1}{a}$

2)

a) $\begin{cases} OQ' \succ 1 \\ OP = a \prec 1 \end{cases} \Rightarrow OQ' \succ OP$

b)

- Thalès dans le triangle OQQ' : $\frac{OP'}{OQ'} = \frac{OP}{OQ} \Rightarrow \frac{1}{OQ'} = \frac{a}{1} \Rightarrow OQ' = \frac{1}{a}$
- $OQ' \succ OP \Rightarrow \frac{1}{a} \succ a$

Activité 18

a) $\begin{cases} \frac{23}{21} \succ 1 \\ \frac{68}{88} \prec 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{23}{21} \succ \frac{68}{88}$

b) $\frac{0,062}{0,07} = \frac{62}{70} \prec 1$ et $\frac{5,34}{4,29} = \frac{534}{429} \succ 1 \Rightarrow \frac{5,34}{4,29} \succ \frac{0,062}{0,07}$

c)

- $\frac{3+\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}+\sqrt{5}} \prec 1$
- $\begin{cases} 1+\sqrt{3} \succ 2 \\ 2-\sqrt{2} \prec 2 \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{3} \succ 2-\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}} \succ 1$
- $\begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}} \succ 1 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} \prec 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}} \succ \frac{3+\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}$

Activité19

- $-2 \le a \le 3 \Rightarrow -2+4 \le a+4 \le 3+4 \Rightarrow 2 \le a+4 \le 7$
- $-2 \le a \le 3 \Rightarrow -2\times 2 \le 2a \le 3\times 2 \Rightarrow -4 \le 2a \le 6$
- $-2 \le a \le 3 \Rightarrow -3 \le -a \le 2$
- $-3 \le -a \le 2 \Rightarrow -3\times 3 \le -a\times 3 \le 2\times 3 \Rightarrow -9 \le -3a \le 6 \Rightarrow -9+5 \le -3a+5 \le 6+5$
  $\Rightarrow -4 \le -3a+5 \le 11$

Activité20

- $5,2 \le L \le 5,3 \Rightarrow \frac{1}{5,3} \le \frac{1}{L} \le \frac{1}{5,2}$
- $\begin{cases} \frac{1}{5,3} \le \frac{1}{L} \le \frac{1}{5,2} \\ 16,12 \le S \le 16,96 \end{cases} \Rightarrow 6,12\times\frac{1}{5,3} \le S\times\frac{1}{L} \le 16,96\times\frac{1}{5,2} \Rightarrow 3,04 \le l \le 3,26$

Activité21

1) L'aire du carré bleu est supérieure à la somme des aires des quatre triangles

$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge 4\times\frac{xy}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$

2)

a) $\forall x \succ 0 : x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0 \Rightarrow \forall x \succ 0 : x+\frac{1}{x}\geq 2$

b) $\forall x \succ 0, \forall y \succ 0 : \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$ (Autrement voir1)

$\Rightarrow \forall x \succ 0, \forall y \succ 0 : \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

c)

- $\forall x \succ 0, \forall y \succ 0 : (x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$
- $\forall x \succ 0, \forall y \succ 0 : \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Rightarrow 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 4 \Rightarrow (x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 4$

d) $\forall a \succ 0, \forall b \succ 0, \forall c \succ 0 : (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$\Rightarrow \forall a \succ 0, \forall b \succ 0, \forall c \succ 0 : (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})$

$\Rightarrow \forall a \succ 0, \forall b \succ 0, \forall c \succ 0 : (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 3+2+2+2$

$\Rightarrow \forall a \succ 0, \forall b \succ 0, \forall c \succ 0 : (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$

Activité22

- $\begin{cases}(\sqrt{a+b})^2=a+b \\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}=a+b+2\sqrt{ab}\end{cases} \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \succ (\sqrt{a+b})^2 \ (\forall a \succ 0, \forall b \succ 0$

  $\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}) \succ \sqrt{a+b} \ (\forall a \succ 0, \forall b \succ 0)$
- $\frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{ab-b(a+b)-a(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{ab-ba-b^2-a^2-ab}{ab(a+b)}$

  $\Rightarrow \frac{1}{a+b}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=-\frac{a^2+b^2+ab}{ab(a+b)} \prec 0 \quad (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R})$

  $\Rightarrow \frac{1}{a+b} \prec (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \quad (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R})$

Activité23

- $x=\sqrt{2003}+\sqrt{2005} \succ 0 \qquad y=2\sqrt{2004} \succ 0$
- $x^2=2003+2005+\sqrt{2003}\times\sqrt{2005} \Rightarrow x^2=2\times 2004+\sqrt{2003\times 2005}$

  $\Rightarrow x^2=2\times 2004+\sqrt{(2004-1)\times(2004+1)} \Rightarrow x^2=2\times 2004+\sqrt{2004^2-1}$
- $y^2=4\times 2004$

- $2004^2 \succ 2004^2-1 \Rightarrow \sqrt{2004^2} \succ \sqrt{2004^2-1} \Rightarrow 2004 \succ \sqrt{2004^2-1} \Rightarrow 2\times 2004 \succ 2\times\sqrt{2004^2-1}$

  $\Rightarrow 2\times 2004+2\times 2004 \succ 2\times 2004+2\times\sqrt{2004^2-1} \Rightarrow 4\times 2004 \succ 2\times 2004+2\times\sqrt{2004^2-1}$

  $\Rightarrow y^2 \succ x^2$

- $\begin{cases} y^2 \succ x^2 \\ y \succ 0 \\ x \succ 0 \end{cases} \Rightarrow y \succ x \Rightarrow 2\sqrt{2004} \succ \sqrt{2003}+\sqrt{2005}$

Activité24

1)

a)

- $AB = AH + HB = a+b$
- $OC = OA = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$

b) $OH = OA - HA = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$

c) $OC^2 = OH^2 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = OC^2 - OH^2$

$\Rightarrow HC^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2 = (\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}) = ab$

$\Rightarrow HC = \sqrt{ab}$

d)

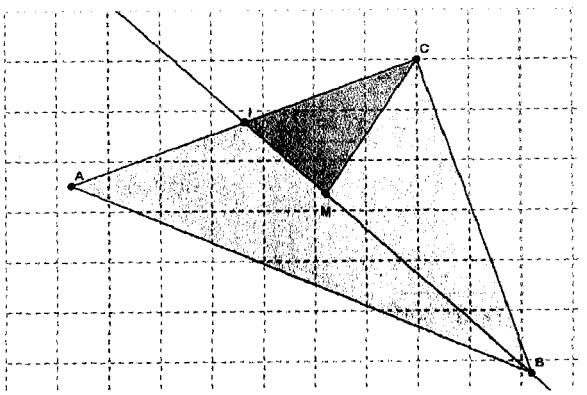
- $OC \geq HC \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- $\begin{cases} (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \\ (\sqrt{ab})^2 = ab \end{cases} \Rightarrow (\frac{a+b}{2})^2 - \sqrt{ab})^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} - ab = \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4}$

$\Rightarrow (\frac{a+b}{2})^2 - \sqrt{ab})^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{4} = (\frac{a-b}{2})^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2) $\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq 0 \\ \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \geq 0 \\ \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \times \frac{a+c}{2} \times \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{ab} \times \sqrt{ac} \times \sqrt{bc}$

$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8\sqrt{(abc)^2} \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$

Activité25



1)

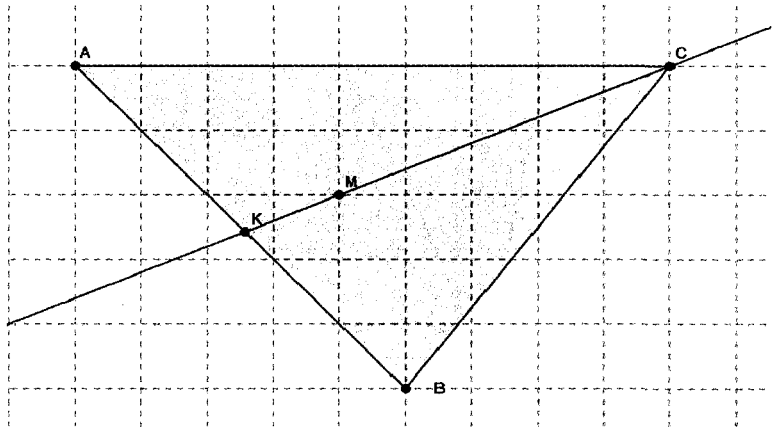
a)

- Inégalité triangulaire dans le triangle MCI : $MC \leq MI + IC$
- Inégalité triangulaire dans le triangle ABI : $BI \leq AI + AB \Rightarrow BM + MI \leq AI + AB$

b) $\begin{cases} MC \leq MI + IC \\ BM + MI \leq AB + AI \end{cases} \Rightarrow BM + MI + MC \leq MI + IC + AB + AI$

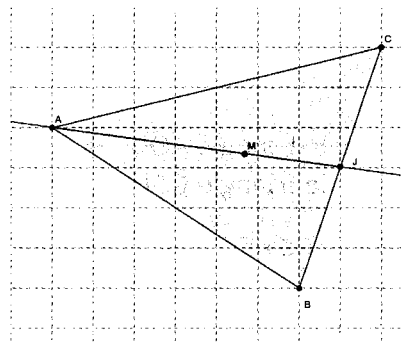
$\Rightarrow BM + MC \leq AB + AI + IC \Rightarrow BM + MC \leq AB + AC$

2)



- Inégalité triangulaire dans le triangle MAK : $MA \leq MK + KA$
- Inégalité triangulaire dans le triangle BCK : $CK \leq BK + BC \Rightarrow CM + MK \leq BK + BC$
- $\begin{cases} MA \leq MK + KA \\ CM + MK \leq BK + BC \end{cases} \Rightarrow MA + MK + MC \leq MK + KA + BK + BC$

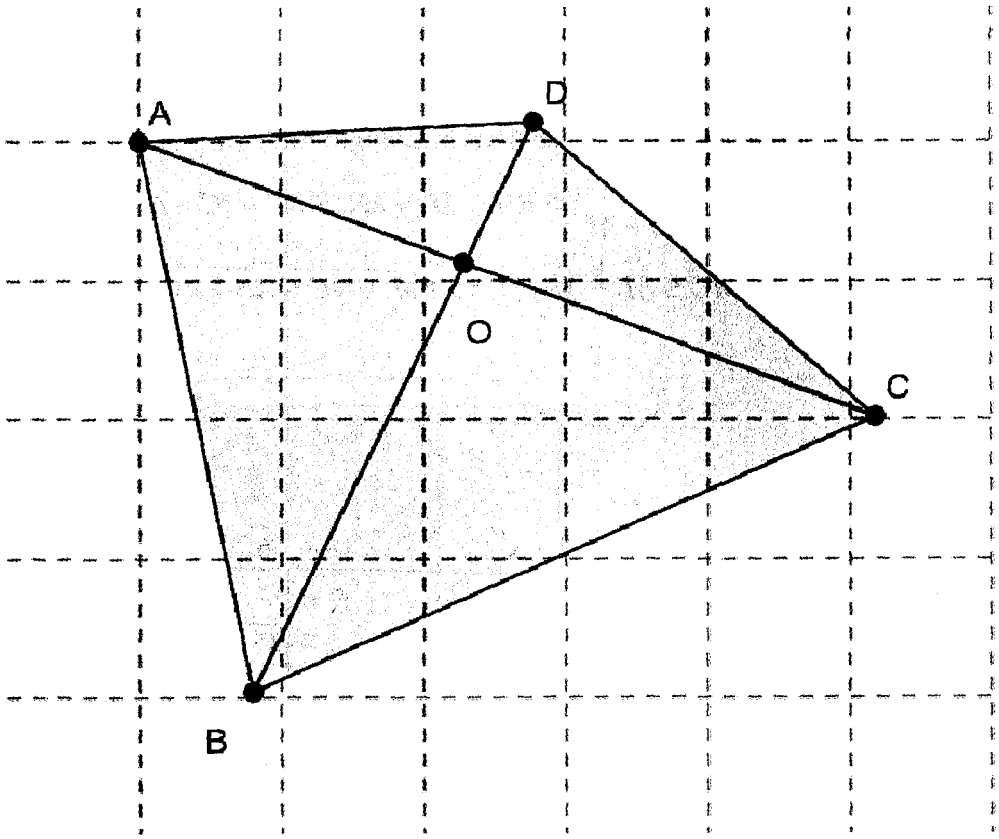
  $\Rightarrow MA + MC \leq BC + KA + BK \Rightarrow MA + MC \leq AB + BC$



- Inégalité triangulaire dans le triangle MBJ : $MB \leq MJ + JB$
- Inégalité triangulaire dans le triangle ACJ : $AJ \leq CJ + AC \Rightarrow AM + MJ \leq CJ + AC$
- $\begin{cases} MB \leq MJ + JB \\ AM + MJ \leq CJ + AC \end{cases} \Rightarrow MB + AM + MJ \leq MJ + JB + JC + AC$

  $\Rightarrow MB + AM \leq AC + JB + JC \Rightarrow MB + AM \leq BC + AC$

Activité26



a)

- Inégalité triangulaire dans le triangle AOB : $AB \leq AO + OB$
- Inégalité triangulaire dans le triangle COD : $DC \leq CO + OD$

- $\begin{cases} DC \leq CO + OD \\ AB \leq AO + OB \end{cases} \Rightarrow AB + DC \leq (CO + OA) + (OD + OB) \Rightarrow AB + DC \leq AC + DB$

b)

- Inégalité triangulaire dans le triangle AOD : $AD \leq AO + OD$
- Inégalité triangulaire dans le triangle COB : $BC \leq CO + OB$
- $\begin{cases} AD \leq OA + OD \\ BC \leq OC + OB \end{cases} \Rightarrow AD + BC \leq (CO + OA) + (OD + OB) \Rightarrow AD + BC \leq AC + DB$

c)

- $\begin{cases} AC + BD \geq AB + DC \\ AC + BD \geq\leq AD + BC \end{cases} \Rightarrow 2(AC + BD) \geq AB + BC + CD + AD$

  $\Rightarrow 2(AC + BD) \geq 2p \Rightarrow AC + BD \geq p$
- Inégalité triangulaire dans le triangle ABC : $AC \leq AB + BC$
- Inégalité triangulaire dans le triangle ADC : $AC \leq AD + DC$
- $\begin{cases} AC \leq AB + BC \\ AC \leq AD + DC \end{cases} \Rightarrow 2AC \leq AB + BC + CD + AD \Rightarrow 2AC \leq 2p \Rightarrow AC \leq p$
- Inégalité triangulaire dans le triangle ABD : $BD \leq AD + AB$
- Inégalité triangulaire dans le triangle BDC : $BD \leq DC + BC$

- $\begin{cases} BD \le AD + AB \\ BD \le BC + DC \end{cases} \Rightarrow 2BD \le AB + BC + CD + AD \Rightarrow 2BD \le 2p \Rightarrow BD \le p$
- $\begin{cases} AC \le p \\ BD \le P \end{cases} \Rightarrow 2BD \le AC + BD \Rightarrow 2p$

Activité27

- $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$
- $\dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{7}+2)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{35}+2\sqrt{5}}{5}$
- $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = -\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{6-2} = -\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- $\dfrac{2+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-2\sqrt{5}} = \dfrac{(2+\sqrt{11})(\sqrt{13}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{13}-2\sqrt{5})(\sqrt{13}+2\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{13}+\sqrt{143}+2\sqrt{55}+4\sqrt{5}}{(\sqrt{13})^2-(2\sqrt{5})^2}$

  $\Rightarrow \dfrac{2+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{13}+\sqrt{143}+2\sqrt{55}+4\sqrt{5}}{(\sqrt{13})^2-(2\sqrt{5})^2} = -\dfrac{2\sqrt{13}+\sqrt{143}+2\sqrt{55}+4\sqrt{5}}{7}$

Activité28

a)

- $A^2 = (\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}})^2 = (\sqrt{9-4\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{9+4\sqrt{5}})^2 + 2\sqrt{9-4\sqrt{5}}\times\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

  $\Rightarrow A^2 = 9-4\sqrt{5}+9+4\sqrt{5}+2\sqrt{(9-4\sqrt{5})\times(9+4\sqrt{5})}$

  $\Rightarrow A^2 = 18+2\sqrt{(9^2-(4\sqrt{5})^2}$

  $\Rightarrow A^2 = 18+2 = 20$
- $\begin{cases} A^2 = 20 \\ A \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{20} = \sqrt{5\times 4} = 2\sqrt{5}$

b) $OH = OA - HA = \dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{a+b-2a}{2} = \dfrac{b-a}{2}$

- $B^2 = (\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2 + 2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

  $\Rightarrow B^2 = 7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}+2\sqrt{(7-4\sqrt{3})\times(7+4\sqrt{3})}$

  $\Rightarrow B^2 = 14+2\sqrt{(7^2-(4\sqrt{3})^2}$

  $\Rightarrow B^2 = 14+2 = 16$
- $\begin{cases} B^2 = 16 \\ B \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow B = \sqrt{16} = 4$

Activité29

- $\sqrt{7+\sqrt{a}}=3 \Leftrightarrow 7+\sqrt{a}=9 \Leftrightarrow \sqrt{a}=2 \Leftrightarrow a=4$
- $\sqrt{b+\sqrt{36}}=7 \Leftrightarrow \sqrt{b+6}=7 \Leftrightarrow b+6=49 \Leftrightarrow b=43$
- $c=\sqrt{77+\sqrt{11+\sqrt{25}}}=\sqrt{77+\sqrt{11+5}}$

  $\Rightarrow c=\sqrt{77+\sqrt{16}}=\sqrt{77+4}=\sqrt{81}=9$

Activité30

- $97-56\sqrt{3}=7^2+(4\sqrt{3})^2-2\times7\times4\sqrt{3}=(7-4\sqrt{3})^2$
- $\begin{cases}7^2=49\\(4\sqrt{3})^2=48\end{cases} \Rightarrow 7\succ4\sqrt{3}\Rightarrow 7-4\sqrt{3}\succ0$
- $4-2\sqrt{3}=\sqrt{3}^2+(1)^2-2\times1\times\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})^2$
- $4\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{97-56\sqrt{3}}=4\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(7-4\sqrt{3})^2}=4\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|7-4\sqrt{3}\right|$

  $\Rightarrow 4\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{97-56\sqrt{3}}=4\times(\sqrt{3}-1)+7-4\sqrt{3}=4\sqrt{3}-4+7-4\sqrt{3}=3\in\mathbb{N}$

Activité31

- $\sqrt{243}=\sqrt{81\times3}=9\sqrt{3}$
- $\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=5\sqrt{3}$
- $\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}$
- $CA+AB=5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=9\sqrt{3}=BC\Rightarrow$ les points A,B et C sont alignés

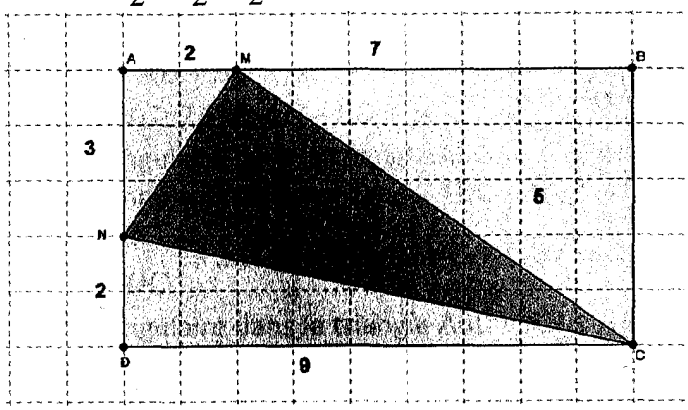
Activité32

1)

- $NM^2=5^2+3^2\Rightarrow MN=\sqrt{34}$
- $MC=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}$
- $NC^2=10^2+2^2\Rightarrow NC=2\sqrt{26}$
- $p=\sqrt{34}+7\sqrt{2}+2\sqrt{26}$
- $S=70-(\frac{15}{2}+\frac{20}{2}+\frac{49}{2})=28$

2)

- $13=3^2+2^2 \qquad 74=5^2+7^2 \qquad 85=9^2+2^2$
- $S=45-(\frac{18}{2}+\frac{35}{2}+\frac{6}{2})=15,5$



Activité33

a) $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})\times\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=(\sqrt{a+1})^2-(\sqrt{a})^2=a+1-a=1\ \forall a\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})et\dfrac{1}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\ \forall a\geq 0$ **b)**

$$E=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$E=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$\Rightarrow E=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$$

c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 100$

$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{1}\geq 100\Leftrightarrow \sqrt{n+1}\geq 101\Leftrightarrow n+1\geq 10201\Leftrightarrow n\geq 10200$

Activité34

1)

$\begin{cases}18^2=324\\24^2=576\Rightarrow 30^2=24^2+18^2\Rightarrow\\30^2=900\end{cases}$ il s'agit d'un triangle rectangle d'aire : $\dfrac{18\times 24}{2}=216$

2)

a)

- $p=\dfrac{18+24+30}{2}=36$
- $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{36\times(36-18)(36-24)(36-6)}$

  $\Rightarrow A=6\sqrt{18\times 12\times 6}=6\sqrt{9\times 2\times 2\times 2\times 3\times 2\times 3}=6\times 3\times 3\times 2\times 2=216$

b)

- $p=\dfrac{14+15+27}{2}=28$
- $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{28\times(28-14)(28-15)(28-27)}$

  $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{7\times 4\times 14\times 13}=\sqrt{7\times 4\times 7\times 2\times 13}=7\times 2\sqrt{26}=14\sqrt{26}$

Activité35

- $A=(x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$
- $B=(2x-3a)^2-12ax=4x^2-12ax+9a^2-12ax=4x^2-24ax+9a^2$
- $C=(a\sqrt{5}-b)(a+b\sqrt{5})=a^2\sqrt{5}+5ab-ab-b^2\sqrt{5}=a^2\sqrt{5}+4ab-b^2\sqrt{5}$
- $D=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=ab-ac+bc-ab+ac-ab=bc-ab$
- $E=a(a+b-c)+b(b+c-a)+c(c+a-b)=a^2+ab-ac+b^2+bc-ab+c^2+ac-ab$

  $\Rightarrow E=a^2+b^2+c^2+bc-ab$

- $F = xy - xz - y^2 + yz + yz - xy - z^2 + xz + xz - yz - x^2 + xy$
  $\Rightarrow F = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$
- $G = (2x-3)(-x+2) - x(5-4x) = -2x^2 + 4x + 3x - 6 - 5x + 4x^2 = 2x^2 + 2x - 6$

Activité36

- $A = (x-1)^3 - 3x(x+1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x^2 - 3x = x^3 - 6x^2 - 1$
- $B = (2x+3)^2 + (3x-2)^2 = 4x^2 + 12x + 9 + 9x^2 - 12x + 4 = 13x^2 + 13$
  $\Rightarrow B = (x-2)(3+x-2) = (x-2)(x+1)$
- $C = (2x+3y)^3 - (2x-3y)^3$
  $\Rightarrow C = \left[(2x+3y) - (2x-3y)\right]\left[(2x+3y)^2 + (2x-3y)^2 + (2x+3y)(2x-3y)\right]$
  $\Rightarrow C = 6y(4x^2 + 9y^2 + 12xy + 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x^2 - 9y^2) \Rightarrow C = 6y(12x^2 + 9y^2)$
- $D = 4(a-b)^2 - 3(b-3a)^2 = 4(a^2 - 2ab + b^2) - 3(b^2 - 6ab + 9a^2)$
  $\Rightarrow D = 4a^2 - 8ab + 4b^2 - (3b^2 - 18ab + 27a^2) = 4a^2 - 8ab + 4b^2 - 3b^2 + 18ab - 27a^2$
  $\Rightarrow D = b^2 + 10ab - 23a^2$

Activité37

- $A = 25x^2 - 9 = (5x)^2 - 3^2 \Rightarrow A = (5x)^2 - 3^2 = (5x-3)(5x+3)$
- $B = 3x - 6 + (x^2 - 4x + 4) = 3(x-2) + (x-2)^2 \Rightarrow B = (x-2)(3+x-2) = (x-2)(x+1)$
- $C = (2x-1)^2 - (1-x)^2 = (2x-1+1-x)(2x-1-1+x) \Rightarrow C = x(3x-2)$
- $D = 25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2\times 5x\times 3 + 3^2 = (5x-3)^2$
- $E = x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x-4)(x^2 + 4x + 4^2) = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$
- $F = 8 + 27x^3 = 2^3 + (3x)^3 = (2+3x)(2^2 - 6x + (3x)^2) = (2+3x)(4 - 6x + 9x^2)$
- $G = 4x^2 - 1 - (2x-1)(3x+7) = (2x)^2 - 1 - (2x-1)(3x+7)$
  $\Rightarrow G = (2x-1)(2x+1) - (2x-1)(3x+7)$
  $\Rightarrow G = (2x-1)\left[(2x+1) - (3x+7)\right] = (2x-1)(2x+1-3x-7)$
  $\Rightarrow G = (2x-1)(-x-6) = (x+6)(1-2x)$

Activité38

1)

- $A = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x-6) = (4x-1)\times(4x-1) - 3(4x-1)(x-2)$
  $\Rightarrow A = (4x-1)\times\left[(4x-1) - 3(x-2)\right]$
  $\Rightarrow A = (4x-1)(4x-1-3x+6) \Rightarrow A = (4x-1)(x+5)$
- $B = 1 - 9x^2 + 2(x-2)(3x-1) = 1^2 - (3x)^2 + 2(x-2)(3x-1)$
  $\Rightarrow B = (1-3x)(1+3x) - 2(x-2)(1-3x) \Rightarrow B = (1-3x)(1+3x-2x+4) = (1-3x)(x+5)$
- $A - B = (4x-1)(x+5) - (1-3x)(x+5) = (x+5)(4x-1-1+3x) \Rightarrow A - B = (x+5)(7x-2)$

2)

- $A = (4x-1)(x+5) = 4x^2 + 20x - x - 5 = 4x^2 + 19x - 5$
- $B = (1-3x)(x+5) = x + 5 - 3x^2 - 15x = 5 - 3x^2 - 14x$
- $A - B = 4x^2 + 19x - 5 - (5 - 3x^2 - 14x) = 4x^2 + 19x - 5 - 5 + 3x^2 + 14x$
  $A - B = 4x^2 + 19x - 5 - (5 - 3x^2 - 14x) = 7x^2 + 33x - 10$

3) $7x^2 + 33x - 10 = A - B \Rightarrow 7x^2 + 33x - 10 = (x+5)(7x-2)$

Activité39

1)

a) $E=(a^2+a\sqrt{2}+1)(a^2-a\sqrt{2}+1)=\left[(a^2+1)+a\sqrt{2}\right]\times\left[(a^2+1)-a\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow E=(a^2+1)^2-(a\sqrt{2})^2=(a^2)^2+1+2a^2-2a^2=a^4+1$

b) $(t-3)(t-5)=t^2-5t-3t+15=t^2-8t+15$

c) $\begin{cases}4y^2+(4-2y)^2=4y^2+16-16y+4y^2=8y^2-16y+16\\ 8(y-1)^2+8=8(y^2-2y+1)+8=8y^2-16y+8+8=8y^2-16y+16\end{cases}$

$\Rightarrow 4y^2+(4-2y)^2=8(y-1)^2+8$

2)

a) $\forall x\neq -1: 2+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+4}{x+1}=\dfrac{2x+2+4}{x+1}=\dfrac{2x+6}{x+1}$

b) $\forall x\geq 0: \sqrt{1+x+2\sqrt{x}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{x})^2+2\times 1\times\sqrt{x}}=\sqrt{(1+\sqrt{x})^2}=\left|1+\sqrt{x}\right|=1+\sqrt{x}$

Activité 40

1)

a)

- $A(0)=2$ $B(0)=2$ $C(0)=2$
- $A(1)=1-1+2+2=4$ $B(1)=(1+1)(1-1+2)=4$ $C(1)=1+1+2=4$
- $A(-1)=-1+1-2+2=0$ $B(-1)=(-1+1)(1+1+2)=0$
  $C(-1)=-1-1+2=0$

b) $(t-3)(t-5)=t^2-5t-3t+15=t^2-8t+15$

- $A(2)=8-4+4+2=10$ $B(2)=(2+1)(4-2+2)=12$
- $A(2)\neq B(2)\Rightarrow A(x)\neq B(x)$

2)

a) $A(x)-B(x)=x^3-x|x|+2x+2-(x^3-x^2+2x+x^2-x+2)$

$\Rightarrow A(x)-B(x)=x^3-x|x|+2x+2-(x^3+x+2)$

$\Rightarrow A(x)-B(x)=x^3-x|x|+2x+2-x^3-x-2$

$\Rightarrow A(x)-B(x)=-x|x|+x=x(1-|x|)$

b) $A(x)=B(x)\Leftrightarrow A(x)-B(x)=0\Leftrightarrow x(1-|x|)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } |x|=1\Leftrightarrow x\in\{-1,0,1\}$

3) $B(x)=(x+1)(x^2-x+2)=x^3-x^2+2x+x^2-x+2\Rightarrow B(x)=x^3+x+2=C(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Activité41

1)

a)

$$\begin{cases}\sqrt{5}^2=5\\ 2^2=4\\ 5\succ 4\end{cases}\Rightarrow \sqrt{5}\succ 2\Rightarrow\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$$

b) $\begin{cases} \sqrt{3}^2 = 3 \\ 2^2 = 4 \\ 4 \succ 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} \prec 2 \Rightarrow \left|\sqrt{3}-2\right| = 2-\sqrt{3}$

c)

- $(1+\sqrt{3})^2 = 1+3+2\sqrt{3}$
- $(2\sqrt{2})^2 = 8$
- $\begin{cases} 4^2 = 16 \\ (2\sqrt{3})^2 = 12 \Rightarrow 4 \succ 2\sqrt{3} \Rightarrow 4+4 \succ 2\sqrt{3}+4 \Rightarrow 8 \succ 2\sqrt{3}+4 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 \succ (1+\sqrt{3})^2 \\ 16 \succ 12 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2\sqrt{2})^2 \succ (1+\sqrt{3})^2 \\ 2\sqrt{2} \succ 0 \\ 1+\sqrt{3} \succ 0 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2} \succ 1+\sqrt{3} \Rightarrow \left|1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}$

2)

$\forall a \in \mathbb{R}_+ : |x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ ou \\ x = -a \end{cases}$

a) $|x+2| = 3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \ ou \ x+2 = -3 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = -5$

b) $\begin{cases} 1-\sqrt{2} \prec 0 \\ |4x-1| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$

c) $|2x+1| = |3-x| \Leftrightarrow 2x+1 = 3-x \ ou \ 2x+1 = x-3$

$\Leftrightarrow 3x = 2 \ ou \ x = -4 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \ ou \ x = -4$

$|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ ou \\ x = -y \end{cases}$

Activité42

1)

- $a \in [2,3] \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 3$
- $2 \leq a \leq 3 \Rightarrow 2-2 \leq a-2 \leq 3-2 \Rightarrow 0 \leq a-2 \leq 1$
  $\Rightarrow |a-2| = a-2$
- $2 \leq a \leq 3 \Rightarrow 2-3 \leq a-3 \leq 3-3 \Rightarrow -1 \leq a-3 \leq 0 \Rightarrow |a-3| = 3-a$
- $|a-2| + |a-3| = a-2+3-a = 1$

$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a \ \ si \ a \geq 0 \\ -a \ si \ a \leq 0 \end{cases}$

2)

a) $|x-1| \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec x-1 \prec 1 \Leftrightarrow -1+1 \prec x-1+1 \prec 1+1 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 2 \Leftrightarrow x \in [0,2]$

$\forall a \in \mathbb{R}_+ : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
$\Leftrightarrow x \in [-a,a]$

b) $|3-2x| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq \frac{1}{2} \\ 3-2x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq \frac{7}{2} \\ -2x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{4} \\ x \geq -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{7}{4}\right] \cup \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$

c) $|x\sqrt{2}+1| \succ 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2}+1 \succ 1+\sqrt{2} \\ x\sqrt{2}+1 \prec -1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} \succ \sqrt{2} \\ x\sqrt{2} \prec -2+\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 1 \\ x \prec \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 1 \\ x \prec \frac{(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 1 \\ x \prec \frac{2-2\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \succ 1 \\ x \prec 1-\sqrt{2} \end{cases}$

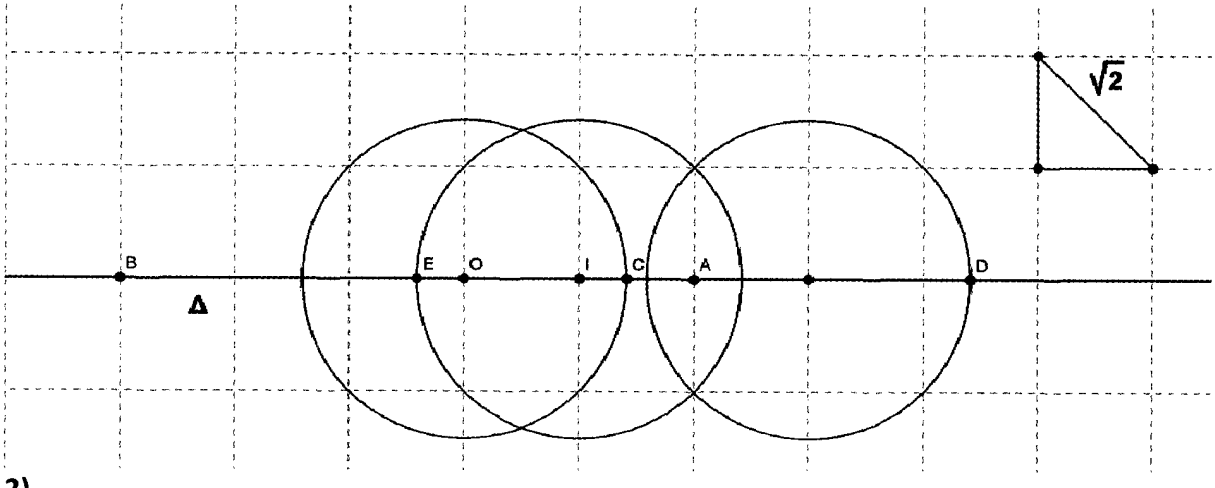
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$\forall a \in \mathbb{R}_+ : |x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[$

Activité43

1)



2)

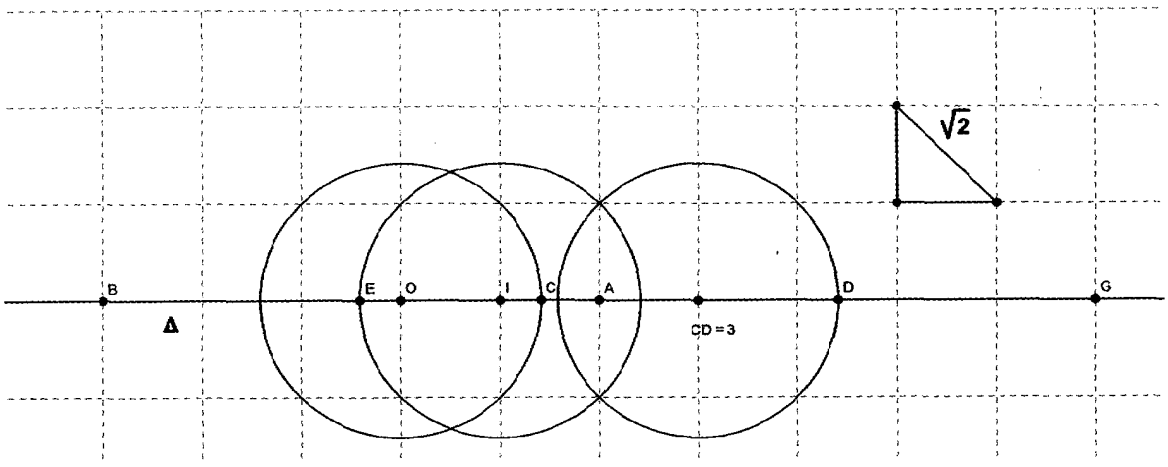
- $AB = |x_B - x_A| = |-3-2| = 5$
- $AC = |x_C - x_A| = |\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$
- $CD = |x_D - x_C| = |3+\sqrt{2}-\sqrt{2}| = 3$
- $IC = |x_C - x_I| = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$
- $IE = |x_E - x_I| = |1-\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}$

$AB = |x_B - x_A|$

3) $AM = 5 \Leftrightarrow |x_M - x_A| = 5 \Leftrightarrow (x_M - x_A = 5)$ ou $(x_M - x_A = -5)$

$\Leftrightarrow (x_M - 2 = 5)$ ou $(x_M - 2 = -5) \Leftrightarrow (x_M = 7)$ ou $(x_M = -3) \Leftrightarrow (x_M = 7)$ ou $(M = B)$

Autrement : $\begin{cases} M \in \Delta \\ AM = 5 \end{cases} \Leftrightarrow M \in \Delta \cap C(A,5) \Leftrightarrow M \in \{B,G\}, G = S_A(B)$



Activité44

- $\sqrt{5} : 2,2360679...$
- $\sin 85° : 0,996194...$
- $\pi : 3,41592...$

x	$\frac{75}{17}$	$\sqrt{5}$	$\sin 85°$	π
Valeur approchée de x à 10^{-2} prés par défaut	$4,41$	$2,23$	$0,99$	$3,41$
Valeur approchée de x à 10^{-2} prés par excès	$4,42$	$2,24$		$3,42$
Arrondi de x à 10^{-2}	$4,41$	$2,24$		$3,42$
Valeur approchée de x à 10^{-3} prés par défaut	$4,411$	$2,236$	$0,996$	$3,415$
Valeur approchée de x à 10^{-3} prés par excès	$4,412$	$2,237$	$0,997$	$3,416$
Arrondi de x à 10^{-3}	$4,412$	$2,236$	$0,996$	$3,416$

Activité45

- $\sqrt{6}$: 2,44948974...
- $\cos 23°$: 0,92050485...
- $\frac{2006}{2005}$: 1,0004987

x	10,419484076	$\sqrt{6}$	$\cos 23°$	$\frac{2006}{2005}$
Valeur approchée de x à 10^{-5} prés par défaut	10,41948	2,44948	0,92050	1,00049
Valeur approchée de x à 10^{-5} prés par excès	10,41949	2,44949	0,92051	1,00050
Arrondi de x à 10^{-5}	10,41948	2,44949	0,92050	1,00050

Activité46

$(1+10^{-3})^2 = 1+2\times10^{-3}+(10^{-3})^2 = 1+2\times10^{-3}+10^{-6} \approx 1+2\times10^{-3}$

Activité47

L'ordre de grandeur d'un nombre est le nombre sous la forme $a\times10^n$ le plus proche, a entier relatif ($1 \prec |a| \prec 10$) et n entier relatif.

Nombres	35215000	78,3548	0,5423100	–425462,12	0,0007845
Ecriture scientifique	$3,5215\times10^7$	$7,83548\times10^1$	$5,4231\times10^{-1}$	$-4,2546212\times10^5$	$7,845\times10^{-4}$
Ordre de grandeur	4×10^7	8×10^1	5×10^{-1}	-4×10^5	8×10^{-4}

Activité48

- $S = 8\times10^6 \text{km}^2$
- $g = 2\times10^9 / \text{m}^2$
- $n = 8\times10^6\times2\times10^9 = 16\times10^{15}$
- L'écriture scientifique de n est : $n = 1,6\times10^{16}$
- L'ordre de grandeur de n est : $n = 2\times10^{16}$

Activité49

- $S = 5{,}10 \times 10^8 \text{km}^2$
- $ST = 1{,}62 \times 10^5 \text{km}^2$
- $ST \times x = S \Rightarrow x = \dfrac{S}{ST} = \dfrac{5{,}10 \times 10^8}{1{,}62 \times 10^5} = \dfrac{510 \times 10^8}{162 \times 10^5} = \dfrac{510 \times 10^8}{162 \times 10^5} = 3{,}15 \times 10^3$

Activité50

a) $v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{150 \times 10^6}{3 \times 10^5} = 500s$

b) $t = 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31536 \times 10^3 s \Rightarrow d = 31536 \times 10^3 \times 3 \times 10^5$

$\Rightarrow d = 31536 \times 10^3 \times 3 \times 10^5 = 9{,}4608 \times 10^{12}$

CHAPITRE 2

PROBLEMES DU PREMIER DEGRE
PROBLEMES DU SECOND DEGRE (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

- $(7x-1)(0,4x-4)=0 \Leftrightarrow 7x-1=0 \ ou \ 0,4x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{7} \ ou \ x=\frac{4}{0,4}=10$.
- $y(y-2)=(y-2)(y+3) \Leftrightarrow y(y-2)-(y-2)(y+3)=0$
  $\Leftrightarrow (y-2)(y-y-3)=0 \Leftrightarrow -3(y-2)=0 \Leftrightarrow y-2=0 \Leftrightarrow y=2$
- $t^2-6t+9=0 \Leftrightarrow (t-3)^2=0 \Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3$
- $0,09m^2=1 \Leftrightarrow (0,3m)^2=1 \Leftrightarrow 0,3m=1 \ ou \ 0,3m=-1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{0,3}=\frac{10}{3} ou \ m=\frac{-1}{0,3}=\frac{-10}{3}$

Exercice n°2

a)

- $t \neq 1$.
- $\frac{6t+8}{1-t}=3 \Leftrightarrow 6t+8=3(1-t) \Leftrightarrow 6t+8=3-3t \Leftrightarrow 9t=-5 \Leftrightarrow t=\frac{-5}{9}$

b)

- $x \neq 0$.
- $\frac{4}{x}=\frac{x}{3} \Leftrightarrow x^2=12 \Leftrightarrow x=\sqrt{12} \ ou \ x=-\sqrt{12} \Leftrightarrow x=2\sqrt{3} \ ou \ x=-2\sqrt{3}$

c)

- $6m \neq 9 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$.
- $\frac{m^2}{6m-9}=1 \Leftrightarrow m^2=6m-9 \Leftrightarrow m^2-6m+9=0 \Leftrightarrow (m-3)^2=0 \Leftrightarrow m-3=0 \Leftrightarrow m=3$

d)

- $y \neq 0 \ et \ y \neq -1$.
- $\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}=0 \Leftrightarrow \frac{2y+1}{y(y+1)}=0 \Leftrightarrow 2y+1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$

Exercice n°3

a)

- $a-b+c=0 \Rightarrow x_1=-1$.
- $x_1=-1 \Rightarrow x_2=\frac{-c}{a}=\frac{1}{4}$
- $S=\left\{-1,\frac{1}{4}\right\}$

$(a^2+b^2=0) \Leftrightarrow a=b=0$

b)

1ere méthode :

- $(5x^2+(x-1)^2=0) \Leftrightarrow x=0 \text{ et } x=1 : \text{impossible}$.
- $S=\varnothing$

2emme méthode :

- $(5x^2+(x-1)^2=0) \Leftrightarrow 5x^2+x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow 6x^2-2x+1=0$.
- $\Delta=4-4\times 6 \prec 0 \Rightarrow S=\varnothing$

c)

$$x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{5})x-\sqrt{10}=0$$

$$\Delta=(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2+4\sqrt{10}=2+5-2\sqrt{10}+4\sqrt{10}=2+5+2\sqrt{10}=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$$

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{2}$$

$$S=\left\{-\sqrt{2},\sqrt{5}\right\}$$

d)

- $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\} \\ \dfrac{2x+3(x-1)}{(x-1)x}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\} \\ 5x-3=6x^2-6x \end{cases}$
- $6x^2-11x+3=0$:

$$\Delta=11^2-72=49=7^2$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11-7}{12}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11+7}{12}=\frac{3}{2}$$

$$S=\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right\}$$

e)

- $|x^2-2x|=|3x^2-x-10| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x-10=x^2-2x \\ \text{ou} \\ 3x^2-x-10=-x^2+2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-10=0 \\ \text{ou} \\ 4x^2-3x-10=0 \end{cases}$$

- $E_1 : 2x^2+x-10=0$

$$\Delta = 1^2 + 80 = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+9}{4} = 2$$

$$S_1 = \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$$

- $E_2 : 4x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\Delta = 9 + 160 = 169 = 13^2$$

$$x_3 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+13}{8} = 2 = x_2$$

$$x_4 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-13}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$S_2 = \left\{2, -\frac{5}{4}\right\}$$

- $S = S_1 \cup S_2 = \left\{2, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right\}$

f)

- $\sqrt{2x+6} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \\ 2x + 6 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 6 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 - 4x - 5 = 0$

$a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \; et \; x_2 = -\frac{c}{a} = 5$

$-1 \prec 1 \Rightarrow (-1)$ n'est pas solution

$5 \succ 1 \Rightarrow 5$ est une solution $\qquad S = \{5\}$

<u>Exercice n°4</u>

a)

- $4x^2 - |x| - 14 = 0$

On pose $y = |x| \Rightarrow y \geq 0 \; et \; 4y^2 - y - 14 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 4 \times 14 = 225 = 15^2$

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-15}{8} = -\frac{7}{4} \prec 0$$

$$y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+15}{8} = 2 \succ 0 \Rightarrow y = 2$$

- $y = 2 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2 \qquad S = \{-2, 2\}$

b)

- $x-2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ (x-2)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)^2 = x \end{cases}$
- $(x-2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x_1 = 1 \prec 2 \quad x_2 = \frac{c}{a} = 4 \succ 2 \Rightarrow x = 4 \qquad S = \{4\}$$

- Autrement : $x-2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x-\sqrt{x}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x-\sqrt{x}-2=0 \end{cases}$

On pose $y=\sqrt{x} \Rightarrow y \geq 0 \ et \ y^2 - y - 2 = 0$

$y' = -1 \prec 0 \quad y'' = -\frac{c}{a} = 2 \succ 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

c)

- $x^2 - \frac{10}{x^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^4 - 3x^2 - 10 = 0 \end{cases}$

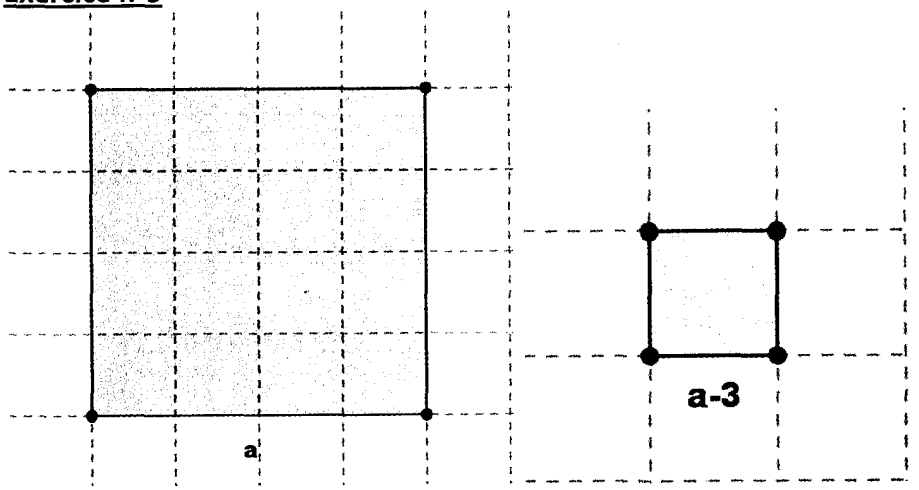
On pose $y = x^2 \Rightarrow y \geq 0 \ et \ y^2 - 3y - 10 = 0$

$\Delta = 9 + 49 = 7^2$

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{2} = -2 \prec 0 \qquad y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{2} = 5 \succ 0 \Rightarrow y = 5$$

- $y = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$
- $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

Exercice n°5



- $A = a^2 cm^2$
- $A' = (a-3)^2 cm^2$
- $A' = A - 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 3 \\ (a-3)^2 = a^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 3 \\ (a-3)^2 = a^2 - 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 3 \\ a^2 + 9 - 6a = a^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 3 \\ 6a = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 3 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$: Impossible

Exercice n°6

- $h \prec 3$
- $A = (3-h) \times h + \dfrac{h^2}{2} = 4 \Leftrightarrow h^2 - 6h + 8 = 0$
  - $\Delta = 36 - 4 \times 8 = 4 = 2^2$
  - $h_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2 \prec 3$
  - $h_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4 \succ 3$
- La hauteur h est h=4 .

Exercice n°7

a)

$$(1-x^2)(x^2-3x) \le 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)x(x-3) \le 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$			$+$		
$x-3$		$-$		$-$		$-$			0	$+$	
$x(x-3)(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S =]-\infty, -1] \cup [0,1] \cup [3, +\infty[$$

b)

- $x^4 \succ (x-2)^2 \Leftrightarrow x^4 - (x-2)^2 \succ 0 \Leftrightarrow (x^2 - (x-2))(x^2 + (x-2) \succ 0$
  $\Leftrightarrow (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 2) \succ 0$
- $x^2 - x + 2 = 0 \ \Delta = 1 - 8 \prec 0 : x^2 - x + 2 \succ 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + x - 2 = 0 : x_1 = 1 \quad x_2 = \dfrac{c}{a} = -2 \Rightarrow (x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)$
- $\begin{cases} (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 2) \succ 0 \\ x^2 - x + 2 \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 + x - 2) \succ 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \succ 0$

•

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$$

c)

- $x-\dfrac{1}{x}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x}-1\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{x^2-x-1}{x}\leq 0 \end{cases}$

- $x^2-x-1=0$:

$\Delta=1+4=5$ $\qquad x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\prec 0$ $\qquad x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\succ 0$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
x^2-x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-x-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$S=\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left]0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

d)

- $|x^2-2x|\prec|3x^2-x-10| \Leftrightarrow (x^2-2x)^2\prec(3x^2-x-10)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)^2-(3x^2-x-10)^2\prec 0$$
$$\Leftrightarrow \left[(x^2-2x)-(3x^2-x-10)\right]\times\left[(x^2-2x)+(3x^2-x-10)\right]\prec 0$$
$$\Leftrightarrow (-2x^2-x+10)\times(4x^2-3x-10)\prec 0$$

- $-2x^2-x+10=0$

$\Delta=81\Rightarrow x_1=2$ et $x_2=-\dfrac{5}{2}$ $\qquad \Rightarrow -2x^2-x+10=-2(x+\dfrac{5}{2})(x-2)$

- $4x^2-3x-10=0$

$\Delta=9+160=169=13^2$ $\qquad x_1=\dfrac{3-13}{8}=-\dfrac{5}{4}$ $\qquad x_2=\dfrac{3+13}{8}=2$

$$\Rightarrow 4x^2-3x-10=4(x+\frac{5}{4})(x-2)$$

- $(-2x^2-x+10)\times(4x^2-3x-10)\prec 0 \Leftrightarrow 4(x-2)(x+\frac{5}{4})\times(-2)(x-2)(x+\frac{5}{2})\prec 0$

  $\Leftrightarrow -8(x-2)^2(x+\frac{5}{4})(x+\frac{5}{2})\prec 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+\frac{5}{4})(x+\frac{5}{2})\succ 0$

-

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$x+\frac{5}{4}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{5}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+\frac{5}{2})(x+\frac{5}{4})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[\cup\left]-\frac{5}{4},2\right[\cup]2,+\infty[$$

e)

- $\sqrt{2x+6}\succ x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\prec 0 \\ 2x+6\geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2x+6\geq 0 \\ 2x+6\succ (x-1)^2 \end{cases}$

- $\begin{cases} x-1\prec 0 \\ 2x+6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3,1[$ $\qquad S_1=[-3,1[$

- $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2x+6\geq 0 \\ 2x+6\succ (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ -x^2+4x+5\succ 0 \end{cases}$

- $-x^2+4x+5=0 : -1-4+5=0 \Rightarrow x_1=-1$ et $x_2=\frac{-c}{a}=5$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_2=[1,5[$

- $S=S_1\cup S_2=[-3,1[\cup[1,5[=[-3,5[$

f)

- $4x^2-|x|-14\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ 4x^2+x-14\geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\geq 0 \\ 4x^2-x-14\geq 0 \end{cases}$

- $4x^2-x-14=0 : \Delta=225=15^2 \qquad x_1=\frac{1-15}{8}=-\frac{7}{4} \qquad x_2=\frac{1+15}{8}=2$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
$4x^2-x-14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1=[2,+\infty[$

- $4x^2+x-14=0 \qquad \Delta=225=15^2 \qquad x_1=\frac{-1-15}{8}=-2 \qquad x_2=\frac{-1+15}{8}=\frac{7}{4}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$4x^2+x-14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_2=]-\infty,-2]$

- $S=S_1\cup S_2=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

g)

- $x-2\prec\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ (x-2)^2\prec\sqrt{x} \end{cases}$

- $\begin{cases} x-2\leq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,2] \qquad S_1=[0,2]$

- $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 2 \\ (x-2)^2\prec x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-5x+4\prec 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ (x-1)(x-4)\prec 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_2=]1,4[$

$S=S_1\cup S_2=[0,2]\cup]1,4[=[0,4[$

Exercice n°8

- Soit x : l'heure cherchée.
- x vérifie $\frac{x}{4}+\frac{24-x}{2}=x$
- $\frac{x}{4}+\frac{24-x}{2}=x \Leftrightarrow 5x=48 \Leftrightarrow x=\frac{48}{5} \Leftrightarrow x=9$ heures et 36 minutes

Exercice n°9

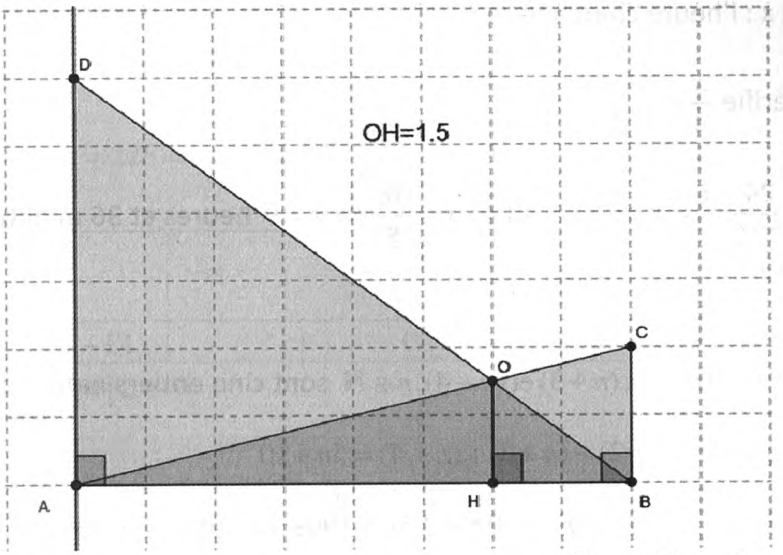
- $n,(n+1),(n+2),(n+3)$ et $(n+4), n\in\mathbb{N}$ sont cinq entiers naturels consécutifs
- $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$
- $2004\leq 5n+10\leq 2009 \Leftrightarrow 1994\leq 5n\leq 1999 \Leftrightarrow 398,8\leq n\leq 399,8$
- $n=399$
- Les cinq entiers naturels consécutifs dont la somme est comprise entre 2004 et 2009 est :399 ,400,401,402 et 403 .
- Vérification :S=399 +400+401+402+ 403=2005 .

Exercice n°10

- N_1 : Le nombre des candidats admis
- N_2 : Le nombre des candidats refusés
- N : Le nombre des candidats qui passent l'examen
- $13=\frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i}{N_1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_1} x_i=13N_1$
- $7=\frac{\sum_{i=1}^{N_2} x_i}{N_2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_2} x_i=7N_2=7(N-N_1)$
- $10,60=\frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i+\sum_{i=1}^{N_2} x_i}{N}=\frac{13N_1+7(N-N_1)}{N} \Rightarrow 10,60=\frac{6N_1+7N}{N}$

  $\Rightarrow 10,60=6\frac{N_1}{N}+7 \Rightarrow 3,60=6\frac{N_1}{N} \Rightarrow 10,60=6\frac{N_1}{N}+7 \Rightarrow \frac{N_1}{N}=\frac{3,60}{6}=0,6$
- Le pourcentage des admis est : $P=\frac{N_1}{N}\times 100=60\%$

Exercice n°11



1) Théorème de Thalès dans le triangle ABC : $(OH)//(BC) \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{OH}{BC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{x}{2} \Rightarrow b = \frac{a \times x}{2}$

2) Théorème de Thalès dans le triangle ABD : $(OH)//(AD) \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{OH}{AD} \Rightarrow \frac{AB - AH}{AB} = \frac{OH}{AD}$

$\Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{x}{6} \Rightarrow 1 - \frac{b}{a} = \frac{x}{6} \Rightarrow b = a - \frac{ax}{6}$

3) $\begin{cases} b = a - \frac{ax}{6} \\ b = \frac{ax}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a - \frac{ax}{6} = \frac{ax}{2} \Leftrightarrow 6a - ax = 3ax$

$(a \times b = 0) \Leftrightarrow (a = 0)$ ou $(b = 0)$

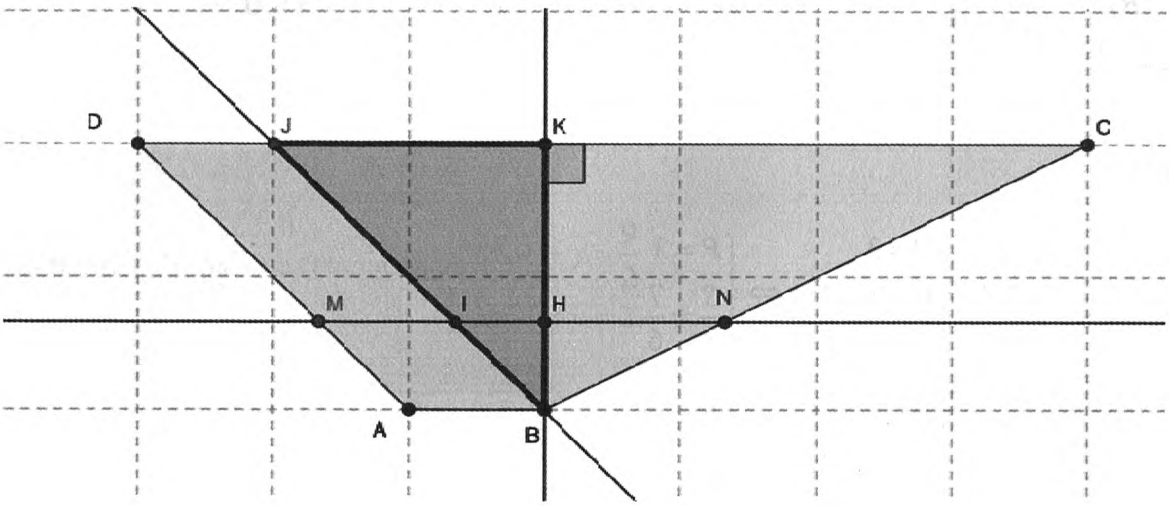
$\Leftrightarrow a(4x-6) = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \quad (\text{car } a \succ 0) \Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Exercice n°12

- $n, (n+1), (n+2), (n+3)$ et $(n+4), n \in \mathbb{N}$ sont cinq entiers naturels consécutifs
- $(n+3)^2 + (n+4)^2 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \Leftrightarrow n^2 - 8n - 20 = 0$
- $n^2 - 8n - 20 = 0$:
  - ✓ $\Delta = 64 - 4 \times (-20) = 144 = 12^2$
  - ✓ $n' = \frac{8-12}{2} \notin \mathbb{N}$
  - ✓ $n'' = \frac{8+12}{2} = 10$
- Les cinq entiers naturels consécutifs sont 10,11,12,13 et 14
- Vérification : $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$

  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$

Exercice n°13



1) Théorème de Thalès dans le triangle BJK : $(IH)//(JK) \Rightarrow \dfrac{BH}{BK} = \dfrac{BI}{BJ}$

2)

- $\begin{cases}(AB)//(DJ)\\ AB = DJ\end{cases} \Rightarrow ABJD$ est un parallélogramme
- $ABJD$ est un parallélogramme $\Rightarrow (DA)//(JB) \Rightarrow (DM)//(JI)$
- $\begin{cases}(MI)//(DC)\\ (MD)//(IJ)\end{cases} \Rightarrow MIJD$ est un parallélogramme
- $MIJD$ est un parallélogramme $\Rightarrow MI = DJ = 1$
- Théorème de Thalès dans le triangle BJC : $(IN)//(JC) \Rightarrow \dfrac{BI}{BJ} = \dfrac{IN}{JC} = \dfrac{MN - MI}{DC - DJ}$

  $\Rightarrow \dfrac{BI}{BJ} = \dfrac{x-1}{7-1} = \dfrac{x-1}{6}$

3)

- $\begin{cases}(DC)//(MN)\\ (BK)\perp(DC)\end{cases} \Rightarrow (BK)\perp(MN) \Rightarrow (BH)\perp(MN)$
- aire(ABMN) $= \dfrac{(AB+MN)\times BH}{2} = \dfrac{(1+x)\times BH}{2}$
- aire(MNCD)= aire(ABCD)-aire(ABMN) $= \dfrac{(AB+DC)\times BK}{2} - \dfrac{(1+x)\times BH}{2}$
- $\Rightarrow$ aire(MNCD) $= \dfrac{(7+1)\times BK}{2} - \dfrac{(1+x)\times BH}{2} = \dfrac{8BK-(1+x)\times BH}{2}$

4) aire(MNCD)= aire(ABMN) $\Leftrightarrow \dfrac{(1+x)\times BH}{2} = \dfrac{8BK-(1+x)\times BH}{2}$

$\Leftrightarrow (1+x)\times BH = 8BK-(1+x)\times BH \Leftrightarrow 2(1+x)\times BH = 8BK \Leftrightarrow (1+x)\times BH = 4BK$

$\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{4}{x+1} \quad (x \succ 0)$

5) $\begin{cases} \dfrac{BH}{BK}=\dfrac{4}{x+1} \\ \dfrac{BH}{BK}=\dfrac{BI}{BJ} \\ \dfrac{BI}{BJ}=\dfrac{x-1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{4}{x+1} \\ x \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)=24 \\ x \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=24 \\ x \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=25 \\ x \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

Exercice n°14

$\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$

x et y sont les solutions de l'équation

$x^2-Sx+P=0$

a)

- $\begin{cases} uv=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{7}{6}\dfrac{S}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3 \\ \dfrac{S}{3}=\dfrac{7}{6} \end{cases}$

- $\begin{cases} uv=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{7}{6}\dfrac{S}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3 \\ S=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

- u et v sont les solutions de $x^2-\dfrac{7}{2}x+3=0$

- $x^2-\dfrac{7}{2}x+3=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+6=0$

- $2x^2-7x+6=0 : \Delta=1 \quad x_1=\dfrac{7-1}{4}=\dfrac{3}{2} \qquad x_2=\dfrac{7+1}{4}=2$

- $S=\left\{(2,\dfrac{3}{2});(\dfrac{3}{2},2)\right\}$

b)

- $uv=4 \Rightarrow v=\dfrac{4}{u}$

- $u^2-v^2=-6 \Leftrightarrow u-\dfrac{16}{u^2}+6=0 \Leftrightarrow u^4-16+6u^2=0$

- $u^4-16+6u^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=u^2 \geq 0 \\ y^2+6y-16=0 \end{cases}$

- $y^2+6y-16=0 : \Delta=36+4\times16=100=10^2$

  $y_1=\dfrac{-6-10}{2} \prec 0 \qquad y_1=\dfrac{-6+10}{2}=2 \succ 0 \Rightarrow y=2$

- $y=2 \Rightarrow u=\sqrt{2} \ ou \ u=-\sqrt{2}$

- $u=\sqrt{2} \Rightarrow v=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

- $u=-\sqrt{2} \Rightarrow v=-\dfrac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$

- $S=\left\{(\sqrt{2},2\sqrt{2});(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})\right\}$

c)

- $\begin{cases}|u|+|v|=\dfrac{9}{2}\\ |u|\times|v|=2\end{cases} : \begin{cases}x=|u|\\ y=|v|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S=x+y=\dfrac{9}{2}\\ P=x\times y=2\end{cases}$

- x et y sont les solutions de $x^2-\dfrac{9}{2}x+2=0$

- $x^2-\dfrac{9}{2}x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2-9x+4=0$

  - ✓ $\Delta=81-4\times4\times2=49=7^2$

  - ✓ $x_1=\dfrac{9-7}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad x_2=\dfrac{9+7}{4}=4$

- $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ y_1=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|u|=\dfrac{1}{2}\\ |v|=4\end{cases}$

- $\begin{cases}|u|=\dfrac{1}{2}\\ uv=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\\ v=-4\end{cases} ou \begin{cases}u=-\dfrac{1}{2}\\ v=4\end{cases} \Rightarrow S_1=\left\{(\dfrac{1}{2},4);(-\dfrac{1}{2},-4)\right\}$

- $\begin{cases}x_2=4\\ y_2=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|u|=4\\ |v|=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

- $\begin{cases}|u|=4\\ uv=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=4\\ v=-\dfrac{1}{2}\end{cases} ou \begin{cases}u=-4\\ v=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow S_2=\left\{(4,-\dfrac{1}{2});(-4,\dfrac{1}{2})\right\}$

- $S=S_1\cup S_2=\left\{(4,-\dfrac{1}{2});(-4,\dfrac{1}{2});(\dfrac{1}{2},-4);(-\dfrac{1}{2},4)\right\}$

d)

- $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv \Leftrightarrow 4 = 8 + 2P \Leftrightarrow P = -2$
- $\begin{cases} P = -2 \\ S = 2 \end{cases} : x^2 - 2x - 2 = 0 : \Delta = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$
- $x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ $\qquad x_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$
- $S = \left\{(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}); (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})\right\}$
- Vérification : $(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) = 2$ et $(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 8$

<u>Exercice n°15</u>

- $\begin{cases} t_1 = \dfrac{AB}{v_1} \\ t_2 = \dfrac{AB}{v_2} \\ T = t_1 + t_2 \end{cases} \Rightarrow T = \dfrac{AB}{v_1} + \dfrac{AB}{v_2}$
- $T = AB \times (\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}) \Rightarrow T = AB(\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v-10})$
- $T = AB \times (\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}) \Rightarrow T = AB(\dfrac{2v-10}{v(v-10)})$
- $T = AB(\dfrac{2v-10}{v(v-10)}) \Leftrightarrow \dfrac{21}{4} v(v-10) = AB \times (2v-10)$

  $\Leftrightarrow \dfrac{21}{4} v(v-10) = 90 \times (2v-10)$

  $\Leftrightarrow \dfrac{21}{4} v^2 - \dfrac{21 \times 10}{4} = 180v - 900$

  $\Leftrightarrow 21v^2 - 210v = 720v - 3600$

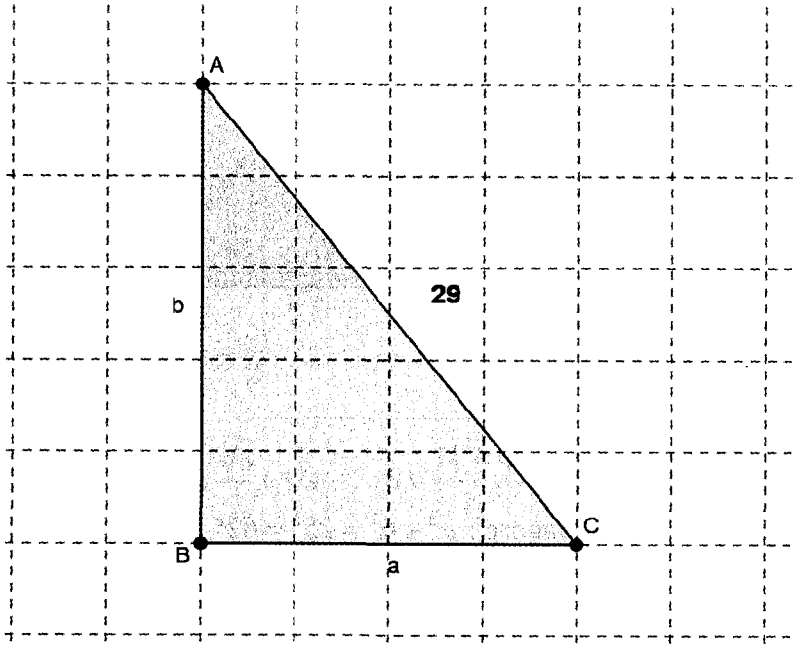
  $\Leftrightarrow 21v^2 - 930v + 3600 = 0$

  $\Leftrightarrow 7v^2 - 310v + 1200 = 0$

- $\Leftrightarrow 7v^2 - 310v + 1200 = 0$
  - $\Delta = (-310)^2 - 4 \times 7 \times 1200 = 250^2$
  - $v' = \dfrac{310 - 250}{2 \times 7} = \dfrac{36}{7}$
  - $v'' = \dfrac{310 + 250}{2 \times 7} = 40$

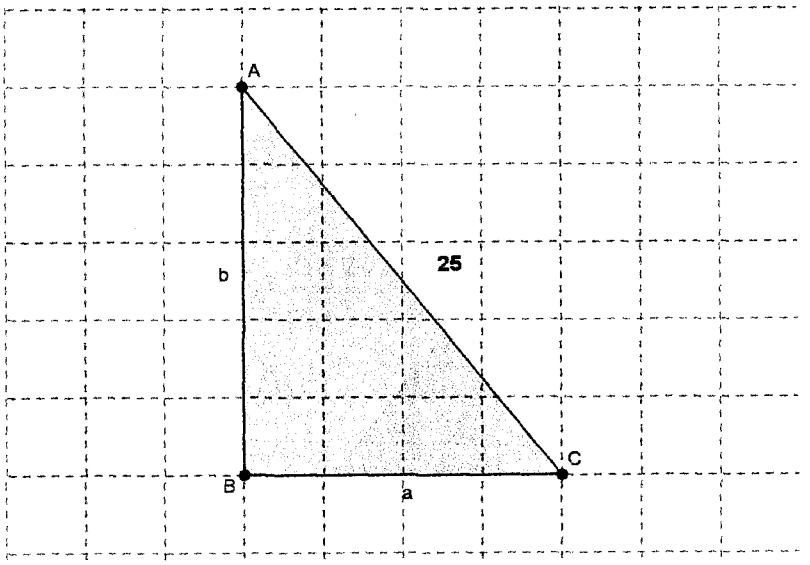
Exercice n°16

a)



- $\begin{cases} A = 210 \\ A = \dfrac{ab}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = 420$
- Théorème de Pythagore : $29^2 = a^2 + b^2$
- $\begin{cases} ab = 420 \\ a^2 + b^2 = 29^2 = 841 \end{cases} \Rightarrow a^2 + (\dfrac{420}{a})^2 = 841 \Rightarrow a^4 + 176400 - 841a^2 = 0$
- $y = a^2 \succ 0 \Rightarrow y^2 - 841y + 176400 = 0$
- $y^2 - 841y + 176400 = 0$:
  - ✓ $\Delta = (-841)^2 - 4 \times 176400 = 1681 = 41^2$
  - ✓ $y_1 = \dfrac{841 - 41}{2} = 400$
  - ✓ $y_2 = \dfrac{841 + 41}{2} = 441$
- $y_1 = 400 \Rightarrow a = 20 \Rightarrow b = \dfrac{420}{20} = 21$
- $y_2 = \dfrac{841 + 41}{2} = 441 \Rightarrow a = 21 \Rightarrow b = 20$
- Conclusion :L=21 et l=20

b)



- $\begin{cases} P = 56 \\ P = a + b + 25 \end{cases} \Rightarrow a + b = 31$
- Théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = 25^2 = 625$
- $\begin{cases} a + b = 31 \\ a^2 + b^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow a^2 + (31 - a)^2 = 625 \Rightarrow 2a^2 + 336 - 62a = 0 \Rightarrow a^2 - 31a + 168 = 0$
- $a^2 - 31a + 168 = 0$
  - ✓ $\Delta = (-31)^2 - 4 \times 168 = 289 = 17^2$
  - ✓ $a_1 = \dfrac{31 - 17}{2} = 7 \Rightarrow b_1 = 24$
  - ✓ $a_2 = \dfrac{31 + 17}{2} = 24 \Rightarrow b = 7$
- Conclusion : L=24 et l=7

<u>Exercice n°17</u>

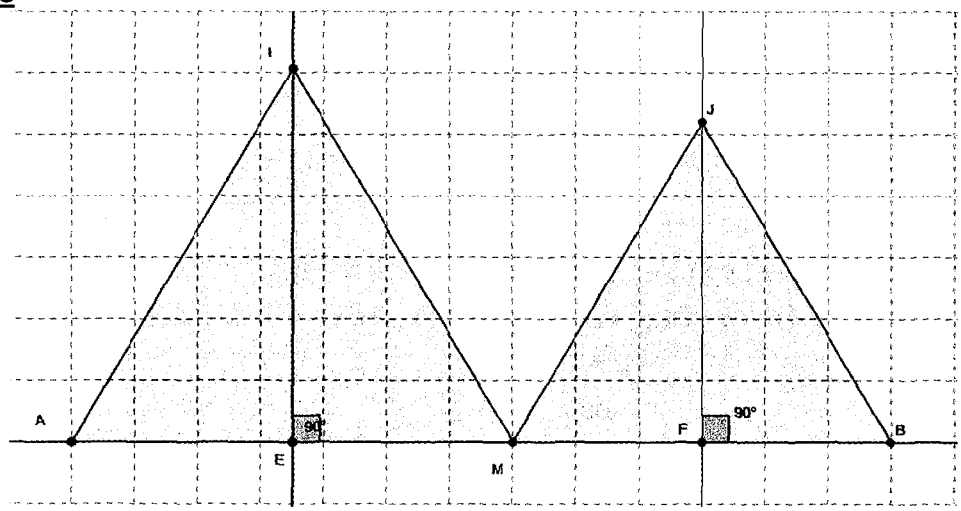
Soit t_1 le temps mis pour que la pierre touche l'eau du puit et Soit t_2 le temps mis pour que le son arrive du fond du puit à mon oreille

Soit x le profondeur du puit

Alors on a : $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ x = 5{t_1}^2 \\ x = 340t_2 \end{cases}$ $\Rightarrow 5{t_1}^2 - 340(3 - t_1) = 0 \Rightarrow {t_1}^2 - 68(3 - t_1) = 0 \Rightarrow {t_1}^2 + 68t_1 - 204 = 0$

$(\Delta')^2 = 34^2 + 204 = 1360$ ....achever les calculs

Exercice n°18



1)

- $EF = EM + MF = \frac{x}{2} + \frac{a-x}{2} = \frac{a}{2}$
- $\begin{cases} IE = AM\frac{\sqrt{3}}{2} \\ JF = MB\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow IE + JF = \frac{\sqrt{3}}{2}(AM + MB) = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
- $A(IJFE) = \frac{(IE+JF)\times EF}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{a}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$
- $A(IJM) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{1}{2}\times\frac{AM\times IE}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{MB\times IF}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x}{4} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2}{4}$

  $\Rightarrow A(IJM) = \frac{\sqrt{3}}{8}(a^2 - x^2 - (a^2 + x^2 - 2ax)) = \frac{\sqrt{3}}{4}(ax - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(a-x)$

  $\Rightarrow A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(a-x)$

2) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(a-x) = \frac{1}{2}\times\frac{AM\times IE}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}x(a-x) = \frac{x\times x\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}$

$\Leftrightarrow x(a-x) = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(\frac{3}{2}x - a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3} \quad (x \succ 0)$

3) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(a-x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - ax) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x-\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}\right]$

$\Rightarrow A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{a^2}{4} - (x-\frac{a}{2})^2\right] \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{a^2}{4}$

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{a^2}{4} - (x-\frac{a}{2})^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow M = A*B$

Exercice n°19

a)

- $x^2+3x-4=0$

  $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } x_2=\dfrac{c}{a}=-4 \Rightarrow x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

- $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
- $x^2+3x-4=x^3-1 \Leftrightarrow (x-1)(x+4)=(x-1)(x^2+x+1)$

  $\Leftrightarrow (x-1)(x+4)-(x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4-x^2-x-1)=0$

  $$\Leftrightarrow (x-1)(-x^2+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$$

- $S=\left\{1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\}$

b)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(3-x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$(x-1)(3-x^2) \prec 0 \Leftrightarrow x \in S=\left]-\sqrt{3},1\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$

Exercice n°20

1)

- $y=x+\dfrac{1}{x}, x\in \mathbb{R}^*$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow y+2y-3=0$

  $a+b+c=0 \Rightarrow y_1=1 \text{ et } y_2=\dfrac{c}{a}=-3$

- $y=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2-x+1=0 \end{cases}$

  $x^2-x+1=0 \qquad \Delta=1-4=-3\prec 0 \Rightarrow S_1=\varnothing$

- $y=-3 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases} \qquad x^2+3x+1=0$

  $\Delta=9-4=5 \; x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \; x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

  $S_2=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\} \qquad S=S_1\cup S_2=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

2)

- $(f)(y)=(y-1)(y+3)\Rightarrow f(x)=(x+\frac{1}{x}-1)(x+\frac{1}{x}+3)\forall x\in\mathbb{R}^*$

  $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}(x^2-x+1)(x^2+3x+1)\forall x\in\mathbb{R}^*$

  $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}(x^2-x+1)(x-x_1)(x-x_2)\forall x\in\mathbb{R}^*$
- $\forall x\in\mathbb{R}^*: x^2-x+1\succ 0$
- Signe de f(x) :

  $\forall x\in\left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[: f(x)\prec 0$

  $\forall x\in\left]-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2},0\right[\cup]0,+\infty[: f(x)\geq 0$
- L'ensemble des solutions de l'inéquation: $f(x)\prec 0$ est : $S=\left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[$

<u>Exercice n°21</u>

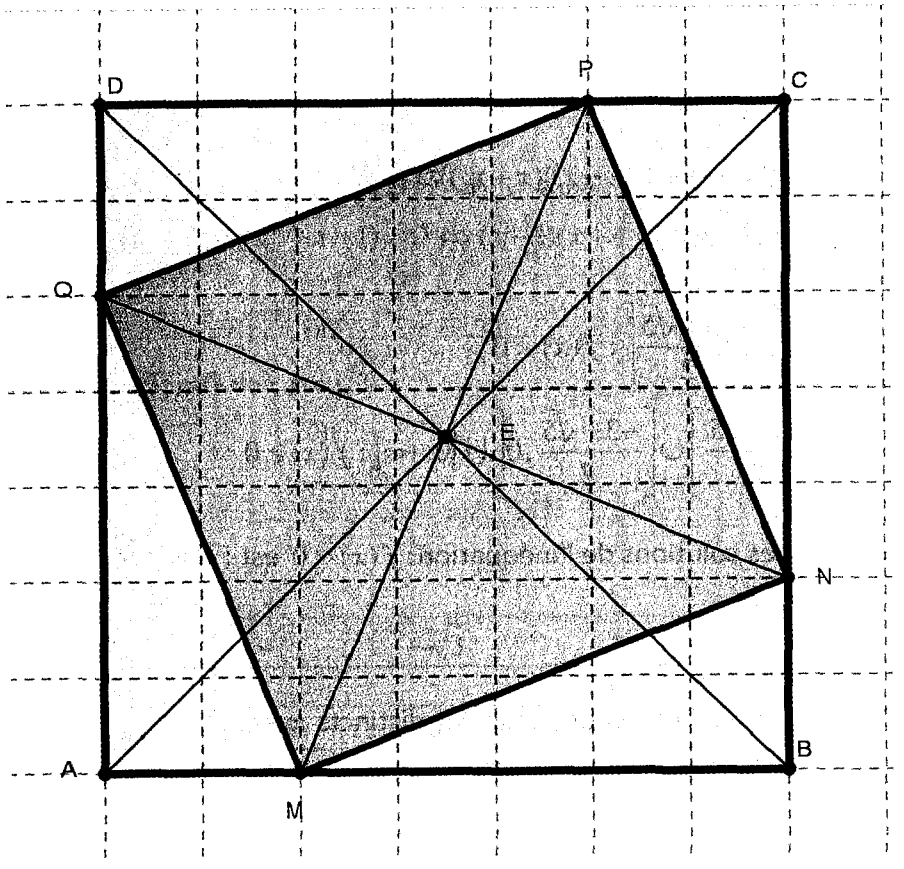
1) $\Delta=49+4\sqrt{3}\succ 0\Rightarrow$ A(x) admet deux racines distincts x_1 et x_2

2) $x_1\times x_2=P=\frac{c}{a}=-\sqrt{3}\prec 0\Rightarrow x_1$ et x_2 sont de signes opposés.

3) $x_1\times x_2\prec 0\Rightarrow\begin{cases}x_1\prec 0\\ x_2\succ 0\end{cases}$

- $x_1\prec 0\Rightarrow x_1\prec 1$
- $x_2-1=\frac{-\sqrt{3}}{x_1}-1=\frac{-\sqrt{3}-x_1}{x_1}=\frac{\sqrt{3}+x_1}{(-x_1)}$
- $x_1\prec 0\Rightarrow(-x_1)\succ 0$
- $\begin{cases}x_2\succ 0\\ x_1+x_2=-7\end{cases}\Rightarrow x_1\prec -7$
- $x_1\prec -7\Rightarrow x_1+\sqrt{3}\prec -7+\sqrt{3}\prec 0$
- $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}\prec 0\\ (-x_2)\succ 0\end{cases}\Rightarrow x_2-1\prec 0\Rightarrow x_2\prec 1$

Exercice n°22



1)

- $\begin{cases} S_E([AB)) = [CD) \\ M \in [AB) \\ AM = PC \end{cases} \Rightarrow S_E(M) = P \Rightarrow E = M * P$
- $\begin{cases} S_E([BC)) = [DA) \\ N \in [AB) \\ BN = DQ \end{cases} \Rightarrow S_E(N) = Q \Rightarrow E = N * Q$
- $\begin{cases} E = N * Q \\ E = M * P \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ est un parallélogramme
- $\begin{cases} \text{AMQ et MBN sont deux triangles rectangles} \\ AM = BN \\ AQ = MB \end{cases} \Rightarrow$ AMQ et MBN sont isométriques
- AMQ et MBN sont isométriques $\Rightarrow$ MQ=MN $\Rightarrow$ MNPQ est un losange.
- $\widehat{QPM} = 180 - \widehat{QPD} - \widehat{NPC} \Rightarrow \widehat{QPM} = 180 - \widehat{PNC} - \widehat{NPC}$

  $\Rightarrow \widehat{QPM} = 180 - (\widehat{PNC} + \widehat{NPC}) \Rightarrow \widehat{QPM} = 180 - 90 = 90 \Rightarrow MNPQ$ est un carré.

2)

a)

- $S(x)=49-4\times\frac{(7-x)\times x}{2}=49-2\times(7-x)\times x$
- $S(x)=25 \Leftrightarrow 25=49-2\times(7-x)\times x$

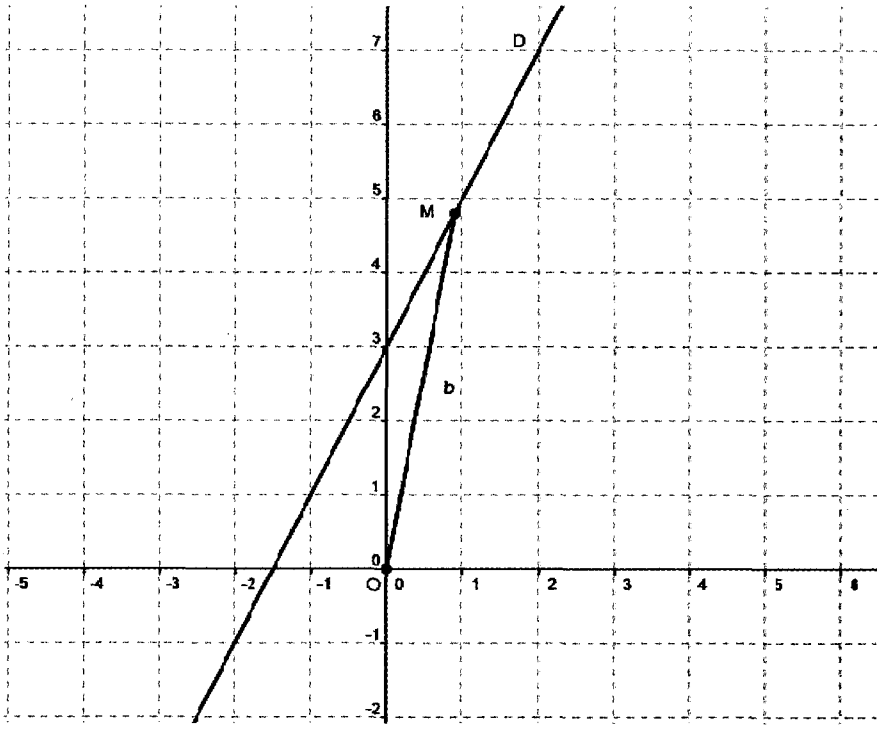
$\Leftrightarrow 49-25=2\times(7-x)\times x \Leftrightarrow 2\times(7-x)\times x=24$

$\Leftrightarrow (7-x)\times x=12 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0$

$$\Delta=49-48=1$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-1}{2}=3$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+1}{2}=4$$

b) $S(x)\geq 25 \Leftrightarrow S(x)-25\geq 0 \Leftrightarrow x\in\ ]0,3]\cup[4,+\infty[$

Exercice n°23



1)

a)

- $M(a,y)\in D \Rightarrow y=2a \Rightarrow M(a,2a+3)$
- $M(a,2a+3)\Rightarrow OM^2=a^2+(2a+3)^2=a^2+4a^2+9+12a=5a^2+9+12a$
- $5(a+\frac{6}{5})^2+\frac{9}{5}=5(a^2+2\times\frac{6}{5}a+\frac{36}{25})+\frac{9}{5}$

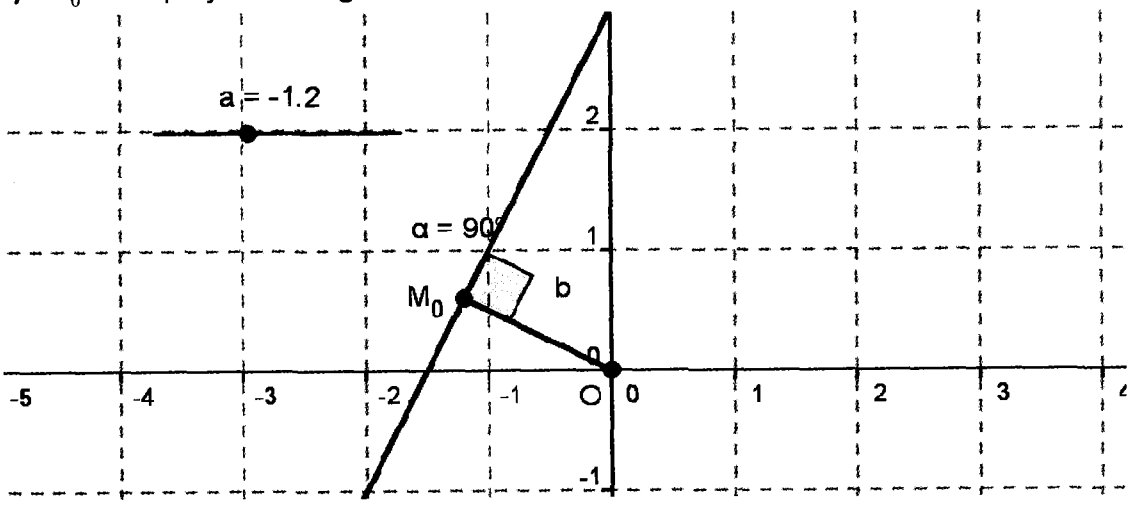
$\Rightarrow 5(a+\frac{6}{5})^2+\frac{9}{5}=5a^2+12a+\frac{36}{5}+\frac{9}{5}=5a^2+12a+\frac{45}{5}=5a^2+12a+9=OM^2$

b)

- $OM^2 = 5(a+\frac{6}{5})^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$
- OM est minimale $\Leftrightarrow OM^2$ est minimale

  $\Leftrightarrow OM^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 5(a+\frac{6}{5}) = 0 \Leftrightarrow a+\frac{6}{5} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{6}{5}$

2) M_0 est le projeté orthogonal de O sur D :



Exercice n°24

Soit a l'arête du petit cube :

- $(a+3)^3 - a^3 = 279 \Leftrightarrow 9a^2 + 27a + 27 = 279$
- $9a^2 + 27a + 27 = 279 \Leftrightarrow 9a^2 + 27a - 252 = 0$

  $\Leftrightarrow a^2 + 3a - 28 = 0$
  - $\Delta = 9 + 112 = 121$
  - $a_1 = \frac{-3-11}{2} \prec 0$
  - $a_2 = \frac{-3+11}{2} = 4 \succ 0 \Rightarrow a = 4$

L'arête du plus grand cube est $a+3 = 7$ cm

Exercice n°25

- $y = x^2 - x = x(x-1)$
- $y^2 - 7y + 10 = 0$:
  - ✓ $\Delta = 49 - 40 = 9 = 3^2$
  - ✓ $y_1 = \frac{7-3}{2} = 2$
  - ✓ $y_2 = \frac{7+3}{2} = 5$
- $y = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
  - ✓ $x_1 = -1$
  - ✓ $x_2 = -\frac{c}{a} = 2$
- $y = 5 \Leftrightarrow x^2 - x = 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0$

- ✓ $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-5) = 21$
- ✓ $x_3 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$
- ✓ $x_4 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ $\qquad S = \left\{-1, 2, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$

Exercice n°26

- $\begin{cases} S(x) = x\times y \\ x+y=18 \end{cases} \Rightarrow S(x) = x\times(18-x) = -x^2+18x$
- $S(x)-81 = x\times(18-x) = -x^2+18x-81 = -(x-9)^2 \leq 0 \Rightarrow S(x) \leq 81$
- $S(x) = 81 \Leftrightarrow -(x-9)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 9$
- $x = 9 \Leftrightarrow L = l = 9$ L'arête du plus grandc'est le cas d'un carrée de côté a=9.

CHAPITRE 3

NOTIONS DE POLYNÔMES (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

- $f(x)-h(x)=x^4+x^2-5x+1-(2x^2-7x-2)=x^4+x^2-5x+1-2x^2+7x+2$

  $\Rightarrow f(x)-h(x)=x^4-x^2+2x+7x+3$
- $2g(x)-5h(x)=2x^3+2x+2-5(2x^2-7x-2)=2x^3+2x+2-10x^2+35x+10$

  $2g(x)-5h(x)=2x^3+2x+2-10x^2+35x+10=2x^3-10x^2+37x+12$
- $f(x)+g(x)+h(x)=x^4+x^2-5x+1+5x^3+x+1+2x^2-7x-2$

  $\Rightarrow f(x)+g(x)+h(x)=x^4+5x^3+3x^2-11x$
- $f(x)\times h(x)=(x^4+x^2-5x+1)\times(2x^2-7x-2)=2x^6-7x^5-17x^3+35x^2+3x-2$
- $f(x)\times g(x)=(x^4+x^2-5x+1)\times(5x^3+x+1)=5x^7+6x^5-24x^4+6x^3-4x^2-4x+1$

Exercice n°2

$a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$f(1-\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{3})^2-8(1-\sqrt{3})-6$

$\Rightarrow f(1-\sqrt{3})=1-3\sqrt{3}+3(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}^3-8+8\sqrt{3}-6+1-2\sqrt{3}+$

$\Rightarrow f(1-\sqrt{3})=1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}-14+8\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+3=0$

$\Rightarrow 1-\sqrt{3}$ est une racine de f

Exercice n°3

$P(1)=n\times 1^{n+1}-(n+1)\times 1+1 \Rightarrow P(1)=n-n-1+1=0 \Rightarrow$ 1 est un zéro de P.

Exercice n°4

- $f(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2\times(-1)-1 \Rightarrow f(-1)=0^{2n}-1+2-1=0$

  $\Rightarrow 0$ est une racine de f
- $f(0)=(0+1)^{2n}-0-0-1=1-1=0$

  $\Rightarrow 0$ est une racine de f
- $f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}+1)^{2n}-(-\frac{1}{2})^{2n}-2\times(-\frac{1}{2})-1 \Rightarrow f(-\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^{2n}-(\frac{1}{2})^{2n}+1-1=0$

  $\Rightarrow -\frac{1}{2}$ est une racine de f

Exercice n°5

- $A(4)=4^3-4\times 4^2-2\times 4+8=4^3-4^3-8+8=0$

  $\Rightarrow 4$ est une racine de A
- $B(3)=3^4-3^3-8\times 3^2+2\times 3+12=81-27-72+18=0$

  $\Rightarrow 3$ est une racine de B
- $B(-2)=(-2)^4-(-2)^3-8\times(-2)^2+2\times(-2)+12=16+8-32-4+12=0$

  $\Rightarrow (-2)$ est une racine de B

Exercice n°6

a) et $P(2)=6\times 2^3-11\times 2^2+6\times 2-16=0$ s

b)

- $P(x)=(x-2)(6x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=6x^3+(a-12)x^2+(b-2a)x-2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-12=-11 \\ b-2a=6 \\ -2b=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 8-2\times 1=6 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow P(x)=(x-2)(6x^2+x+8)$$

$\Leftrightarrow P(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $6x^2+x+8=0$

- $6x^2+x+8=0 : \Delta=1-4\times 6\times 8 \prec 0 \Rightarrow S_1=\varnothing \Rightarrow E=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

c)

- $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(6x+x+8)} \ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{6x^2+x+8} \ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2\} \Rightarrow f(x)\geq 0 \ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\Rightarrow$ L'inéquation $f(x)\prec 0$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°7

a)

- $x^2+x-2=0 : x_1=1$ et $x_2=\dfrac{c}{a}=-2 \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

- $x^2+x-2=(x-1)(x+2) \Rightarrow$ f est définie sur $E=\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$

- $x^2+2x-3=0 : x_1=1$ et $x_2=\dfrac{c}{a}=-3 \Rightarrow x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

- $x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \Rightarrow$ g est définie sur $E'=\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$

b)

- $x^2+5x+6=0 : \Delta=25-24=1$, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-1}{2}=-3$ et

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \Rightarrow x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

- $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+3}{x-1} \ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$

- $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$g(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+3}{x-1} \ \forall x\in \mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$

Exercice n°8

a)

- $x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+a) \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1=x^3+ax-x-a \Leftrightarrow a=1$

  $\Rightarrow x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+1)=(x+1)^2(x-1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

- $P(-1)=0 \Rightarrow P(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$

b) g est définie sur $E=\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$

c) $\forall x\in E: g(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)}$

$$\Rightarrow \forall x\in E: g(x)=\frac{(x+1)^2+2(x-1)(x+1)+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in E: g(x)=\frac{x^2+1+2x+2(x^2-1)+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in E: g(x)=\frac{x^2+1+2x+2x^2-2+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in E: g(x)=\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2(x-1)}=x\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-1)}$$

d) $\forall x\in E: \dfrac{1}{x^3+x^2-x-1}\prec\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow \forall x\in E: \dfrac{1}{x^3+x^2-x-1}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{x+1}\prec 0$

$$\Leftrightarrow \forall x\in E: \frac{1}{x^3+x^2-x-1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\prec 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in E: g(x)\prec 0 \Leftrightarrow \forall x\in E: \frac{x(3x+2)}{(x+1)^2(x-1)}\prec 0 \Leftrightarrow \forall x\in E: \frac{x(3x+2)}{x-1}\prec 0$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		1		$+\infty$
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S=]-\infty,-1[\cup\left]-1,-\frac{2}{3}\right[\cup]0,1[$$

Exercice n°9

a)

- $x^2-5x-6=0: x_1=-1$ et $x_2=\dfrac{-c}{a}=6 \Rightarrow E=\mathbb{R}\setminus\{-1,6\}$

- $f(x)=\dfrac{x^3-7x-6}{(x+1)(x-6)}=\dfrac{P(x)}{g(x)}$

- $P(-1)=0 \Rightarrow P(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$

- $P(x)=(x+1)(x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ a+b=-7 \\ b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ -1-6=-7 \\ b=-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$

- $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-x-6)}{(x+1)(x-6)}=\dfrac{x^2-x-6}{x-6} \forall x \in E$

- $x^2-x-6=0 : \Delta=25=5^2 \quad x_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+5}{2}=3$

-

x	$-\infty$		-2		-1		3		6		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$			
$x-6$		$-$		$-$		$-$			0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$S=]-2,-1[\cup]-1,3[\cup]6,+\infty[$$

b)

- $E=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- $\dfrac{x^4+2x^3-1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^4+2x^3-1}{x+1}-1 \leq 0$

- $\dfrac{x^4+2x^3-1}{x+1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4+2x^3-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-x-2}{x+1} \leq 0$$

- $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x+1}=\dfrac{P(x)}{g(x)} \forall x \in E$

- $P(x)=x^4+2x^3-x-2$

  ✓ $P(1)=1+2-1-2=0$

  ✓ $P(-2)=2^4-2^4+2-2=0$

- $P(x)=x^4+2x^3-x-2$

- $P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=(x^2+x-2)(x^2+ax+b)$

$$\Leftrightarrow P(x)=x^4+(a+1)x^3+(a+b-2)x^2+(b-2a)x-2b \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=2 \\ a+b-2=0 \\ b-2a=-1 \\ -2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1+1-2=0 \\ 1-2=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x)=(x^2+x-2)(x^2+x+1)=(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$$

- $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}{x+1}$

- $T(x)=x^2+x+1 : \Delta=1-4 \prec 0 \Rightarrow T(x) \succ 0$

- $\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ T(x)\succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}\leq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty,-2]\cup]-1,1]$

Exercice n°10

- $f(a)=(a-a+2)^3-(a^3-a^3+8)=2^3-8=0 \Rightarrow$ a est une racine de f

- $f(-2)=(-2-a+2)^3-((-2)^3-a^3+8)=(-a)^3+a^3=0 \Rightarrow (-2)$ est une racine de f

Exercice n°11

a) n solution de P $\Leftrightarrow n^3+6n^2+12n=56 \Leftrightarrow n(n^2+6n+12)=56$:

- n divise $n^3+6n^2+12n \Rightarrow n$ divise 56 $\Rightarrow n\in D_{56}$
- $56=7\times 2^3$

	$7^0=1$	$7^1=7$
$2^0=1$	1	7
$2^1=2$	2	14
$2^2=4$	4	28
$2^3=8$	8	56

- Si n=1 $\Rightarrow 1+6+52 \neq 56$
- Si n=2 $\Rightarrow 8+24+24=56$

b)

- $P(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$

  $\Leftrightarrow P(x)=(x-2)(x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=x^3+ax^2+bx-2x^2-2ax-2b$

  $\Leftrightarrow P(x)=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=6 \\ b-2a=12 \\ -2b=-56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ 28-2\times 8=12 \\ b=28 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow P(x)=(x-2)(x^2+8x+28)$

- $\Leftrightarrow P(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x^2+8x+28=0$
- $x^2+8x+28=0$: $\Delta=64-112 \prec 0 \Rightarrow S_1=\varnothing$
- $P(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Exercice n°12

a)

- $(x+5)^3=x^3+15x^2+75x+125 \qquad (x+5)^2=x^2+10x+25$
- $f(x)=x^3+15x^2+75x+125+ax^2+10ax+25a+bx+5b+c$

  $\Leftrightarrow f(x)=x^3+(15+a)x^2+(75+10a+b)x+125+25a+5b+c \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 15+a=16 \\ 75+10a+b=86 \\ 125+25a+5b+c=156 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=86-10-75=1 \\ c=1 \end{cases}$

- $f(x)=(x+5)^3+(x+5)^2+(x+5)+1$

b)

$f(x)=(x+5)^3+(x+5)^2+(x+5)+1$ alors

$f(x)=(x+5)^2\left[(x+5)+1\right]+\left[(x+5)+1\right]\times 1$ alors $f(x)=\left[(x+5)+1\right]\times\left[(x+5)^2+1\right]$

alors $f(x)=(x+6)\times\left[(x+5)^2+1\right]$

Exercice n°13

a) 3 est une racine commune car :

- $f(3)=3^2+3-12=0$
- $g(3)=-(3)^3+4\times(3)^2-4\times 3+3=-27+36-12+3=0$

b)

- $g(x)=(x-3)(-x^2+ax+b) \Leftrightarrow g(x)=-x^3+(a+3)x^2+(b-3a)x-3b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3=4 \\ b-3a=-4 \\ -3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -1-3=-4 \\ b=-1 \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} : g(x)=(x-3)(-x^2+x-1)$

c)

- $-x^2+x-1=0:$
- $\Delta=1-4=-3 \prec 0 \Rightarrow -x^2+x-1 \prec 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} g(x) \prec 0 \\ -x^2+x-1 \prec 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x-3 \prec 0 \Leftrightarrow x \prec 3$
- $x^2+x-12=0:$
  - $x'=3$
  - $x''=\dfrac{c}{3\times a}=\dfrac{-12}{3\times 1}=-4$
  - $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$
- $g(x) \succ f(x) \Leftrightarrow g(x)-f(x) \succ 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(-x^2+x-1)-(x-3)(x+4) \succ 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[(-x^2+x-1)-(x+4)\right] \succ 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+5) \prec 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \prec 0 \Leftrightarrow x \prec 3$

<u>Exercice n°14</u>

a)

- $P(-1)=2\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-4=0$
- $P(x)=(x+1)(2x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=2x^3+(a+2)x^2+(a+b)x+b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=-5 \\ a+b=-11 \\ b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ -7-4=-11 \\ b=-4 \end{cases}$$

Alors $P(x)=(x+1)(2x^2-7x-4)$

- $P(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \ ou \ 2x^2-7x-4=0 \Leftrightarrow x=-1 \ ou \ 2x^2-7x-4=0$
- $2x^2-7x-4=0:$
  - $\Delta=81=9^2$
  - $x'=\dfrac{7-9}{4}=-\dfrac{1}{2}$
  - $x'=\dfrac{7+9}{4}=4$
- $P(x)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1,-\dfrac{1}{2},4\right\}$
- $Q(x)=x(2x^3-15x^2+36x-28)=x\times R(x)$
- $R(2)=2\times 2^3-15\times 4+36\times 2-28=0$
- $R(x)=(x-2)(2x^2+ax+b) \Leftrightarrow R(x)=2x^3+(a-4)x^2+(b-2a)x-2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-4=-15 \\ b-2a=36 \\ -2b=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-11 \\ 14+2\times 11=36 \\ b=14 \end{cases}$$

$\Rightarrow R(x)=(x-2)(2x^2-11x+14)$

- $2x^2-11x+14=0$:
  - $\Delta=121-4\times 2\times 14=9=3^2$

    $x'=\dfrac{11-3}{4}=2$ et $x''=\dfrac{11+3}{4}=\dfrac{7}{2}$

$\Rightarrow R(x)=(x-2)\times 2(x-2)(x-\dfrac{7}{2})=2(x-2)^2(x-\dfrac{7}{2})$

$\Rightarrow Q(x)=2x(x-2)^2(x-\dfrac{7}{2})$

- $Q(x)=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)^2(x-\dfrac{7}{2})=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ ou $x=\dfrac{7}{2}$
- $S=\left\{0,2,\dfrac{7}{2}\right\}$

b)

-

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{7}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

<u>Exercice n°15</u>

1)

a)

- $f(-3)=-(-3)^3-3\times(-3)^2-6+9=3$
- $g(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2+3=3$

b) $h(-3)=f(-3)-g(-3)=3-3=0 \Rightarrow (-3)$ est une racine de h

2)

a)

- $h(x)=f(x)-g(x)$
  $\Rightarrow h(x)=(-x^3-3x^2+2x+9)-(x^3+3x^2-x)$
  $\Rightarrow h(x)=-2x^3-6x^2+3x+9$

- $\begin{cases} h(x)=-2x^3-6x^2+3x+9 \\ h(-3)=0 \end{cases} \Rightarrow h(x)=(x+3)(-2x^2+ax+b)$

- $h(x)=(x+3)(-2x^2+ax+b) \Leftrightarrow h(x)=-2x^3+(a-6)x^2+(b+3a)x+3b$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} a-6=-6 \\ b+3a=3 \\ 3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3+3\times 0=3 \\ b=3 \end{cases}$

  $\Rightarrow h(x)=(x+3)(-2x^2+3)=(x+3)(x+\frac{\sqrt{6}}{2})(x-\frac{\sqrt{6}}{2})$

b) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow h(x)\le 0$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+\frac{\sqrt{6}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=]-\infty,-3]\cup\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

<u>Exercice n°16</u>

- x vérifie $12x+x^3=6x^2+35$
- $x^3-6x^2+12x-35=0$
- Posons $P(x)=x^3-6x^2+12x-35$
- Si a est une racine entière de P alors a divise 35.
- $P(5)=5^3-6\times 5^2+12\times 5-35=0 \Rightarrow$ 5 est une racine de P.
- 5 est une racine de P $\Rightarrow P(x)=(x-5)(x^2+ax+b)$
- $P(x)=(x-5)(x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=x^3+(a-5)x^2+(b-5a)x-5b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-5=-6 \\ b-5a=12 \\ -5b=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 7-5\times(-1)=12 \\ b=7 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x)=(x-5)(x^2-x+7)$

- $P(x)=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x^2-x+7=0$
- $x^2-x+7=0 : \Delta=(-1)^2-4\times 7 \prec 0 \Rightarrow S_1=\varnothing$
- $P(x)=0 \Leftrightarrow x=5$

Exercice n°17

1)

$f(a)=(b-c)(a-a)\left[(a+a)^2+(b+c)^2\right]+(c-a)(a-b)\left[(a+b)^2+(c+a)^2\right]+(a-b)(a-c)\left[(a+c)^2+(a+b)^2\right]$

$\Rightarrow f(a)=\left[(a+b)^2+(a+c)^2\right]\left[(a-b)(a-c+c-a)\right]=0$

$f(b)=(b-c)(b-a)\left[(b+a)^2+(b+c)^2\right]+(c-a)(b-b)\left[(b+b)^2+(c+a)^2\right]+(a-b)(b-c)\left[(b+c)^2+(a+b)^2\right]$

$\Rightarrow f(a)=\left[(a+b)^2+(b+c)^2\right]\left[(b-c)(b-a+a-b)\right]=0$

$f(c)=(b-c)(c-a)\left[(c+a)^2+(b+c)^2\right]+(c-a)(c-b)\left[(c+b)^2+(c+a)^2\right]+(a-b)(c-c)\left[(c+c)^2+(a+b)^2\right]$

$\Rightarrow f(a)=\left[(a+c)^2+(b+c)^2\right]\left[(c-a)(b-c+c-b)\right]=0$

2)

- f est un polynôme de degré ≤ 3 qui admet 3 racines donc c'est un polynôme nul ou de degré 3 $\Rightarrow f(x)=\alpha(x-a)(x-b)(x-c), \alpha\in\mathbb{R}$
- $f(0)=-a(b-c)\left[a^2+(b+c)^2\right]-b(c-a)\left[b^2+(c+a)^2\right]-c(a-b)\left[c^2+(a+b)^2\right]$

$\Rightarrow f(0)=(-ab+ac)(a^2+b^2+c)^2+2bc)+(-bc+ab)(a^2+b^2+c)^2+2ac)+(-ac+bc)(a^2+b^2+c)^2+2ab)$

$\Rightarrow f(0)=(-ab+ac-bc+ab-ac+bc)(a^2+b^2+c^2)+2(-acb^2+abc^2-abc^2+bca^2-bca^2+acb^2)$

$\Rightarrow f(0)=0$

- $\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \alpha\times(-a)(-b)(-c)=0 \Rightarrow \alpha=0$ et f est le polynôme nul

Exercice n°18

1)

a)

- $(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+2=4-2\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}+2=0 \Rightarrow \sqrt{2}$ est une racine de P
- $(-\sqrt{2})^4-(-\sqrt{2})^3-3(-\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+2=4+2\sqrt{2}-6-2\sqrt{2}+2=0 \Rightarrow (-\sqrt{2})$ est une racine de P

b) $P(x)=(x^2-2)(x^2+ax+b) \Leftrightarrow P(x)=x^4+ax^3+(b-2)x^2-2ax-2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b-2=-3 \\ -2a=2 \\ -2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ -1-2=-3 \\ -2\times(-1)=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P(x)=(x^2-2)(x^2-x-1) \Rightarrow Q(x)=x^2-x-1$$

2)

a)

- $x^4-4=(x^2)^2-2^2=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
- $x^2-x-1=0$
  - $\Delta=(-1)^2-4\times(-1)=5=\sqrt{5}^2$
  - $x'=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - $x''=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: Le nombre d'or
- f est définie sur $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
- $f(x)=\dfrac{3x}{(x^2+2)(x^2-2)}+\dfrac{1}{(x^2-2)(x^2-x-1)}\ \forall x\in E$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3x(x^2-x-1)+x^2+2}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3x^3-2x^2-3x+2}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3x^3-3x+2-2x^2}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3x(x^2-1)-2(x^2-1)}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(3x-2)(x^2-1)}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}\quad \forall x\in E$$

b)

$$\forall x\in E\ ,f(x)=0\Leftrightarrow\frac{(3x-2)(x^2-1)}{(x^2-2)(x^2-x-1)(x^2+2)}=0\ \forall x\in E$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\text{ ou } x=1\text{ ou } x=-1$$

$$S=\left\{-1,1,\frac{2}{3}\right\}$$

Exercice n°19

a)

- $x^2-1=(x+1)(x-1)$
- $x^2+x-2=0: x'=1, x''=\dfrac{c}{a}=-2$
- f est définie sur $E=\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,1\}$
- $\forall x\in E: f(x)=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}-\dfrac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$

$$\Rightarrow \forall x \in E : f(x) = \frac{3(x+1) - 2x^2(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \frac{-2x^3 - 4x^2 + 3x + 3}{(x-1)(x+2)(x+1)}$$

- $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 3x + 3$, $P(1) = 0$
- $P(x) = (x-1)(-2x^2 + ax + b) \Leftrightarrow P(x) = -2x^3 + (a+2)x^2 + (b-a)x - b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = -4 \\ b-a = 3 \\ -b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ -3+6 = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

Par suite $P(x) = (x-1)(-2x^2 - 6x - 3)$

- $\forall x \in E : f(x) = \dfrac{(x-1)(-2x^2 - 6x - 3)}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \dfrac{-2x^2 - 6x - 3}{(x+2)(x+1)} = -\dfrac{2x^2 + 6x + 3}{(x+2)(x+1)}$

b)

- $\dfrac{3}{x^2 + x - 2} \geq \dfrac{2x^2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) \geq 0$
- $(\forall x \in E : f(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\dfrac{2x^2 + 6x + 3}{(x+2)(x+1)} \leq 0 \ \ \forall x \in E)$
- $2x^2 + 6x + 3 = 0$:
  - $\Delta = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2$
  - $x' = -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
  - $x'' = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$
  - $2x^2 + 6x + 3 = 2(x - x')(x - x'')$
-

x	$-\infty$		x'		-2		x''		-1		1		$+\infty$
$2x^2+6x+3$		+	0	−		−	0	+		+		+	
$x+2$		−		−	0	+		+		+		+	
$x+1$		−		−		−		−	0	+		+	
$f(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	‖	−	‖	−	

$$S = \left[-\frac{3+\sqrt{3}}{2}, -2\right[\cup \left[\frac{-3+\sqrt{3}}{2}, -1\right[$$

CHAPITRE 4

ARITHMETIQUES (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

- $104 = 13 \times 8 \Rightarrow r = 0$
- $613 = 74 \times 8 + 5 \Rightarrow r = 5$
- $765 = 95 \times 8 + 5 \Rightarrow r = 5$
- $264 = 33 \times 8 \Rightarrow r = 0$

Le reste de la division euclidienne d'un entier, supérieur ou égal à 100, par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres.

Exercice n°2

- $92 = 3 \times 25 + 17 \Rightarrow r = 17$
- $06 = 25 \times 0 + 6 \Rightarrow r = 6$ Autrement : $1006 = 25 \times 40 + 6 \Rightarrow r = 6$
- $63 = 25 \times 2 + 13 \Rightarrow r = 13$
- $150 = 25 \times 6 \Rightarrow r = 0$
- $175 = 25 \times 7 \Rightarrow r = 0$

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 25 est égal au reste de la division euclidienne par 25 du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

Exercice n°3

- Le reste de division euclidienne par 9 de 7x62 est le reste de la division euclidienne de $S = 15 + x$ par 9

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 9 est égal au reste de la division euclidienne par 9 de la somme de ses chiffres par 9.

-

x	$S = 15 + x = 9q + 2$ $q \in \mathbb{N}$	
0	$13 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
1	$14 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
2	$15 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
3	$16 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
4	$17 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
5	$18 = 9q$	$q \in \mathbb{N}$
6	$19 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
7	$20 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
8	$21 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$
9	$22 = 9q$	$q \notin \mathbb{N}$

Conclusion : x=5

Exercice n°4

Soit n un entier naturel.

S_1 : La somme des chiffres de n de rang impairs

S_2 : La somme des chiffres de n de rang pairs.

d= $S_1 - S_2$

a) $d \geq 0$:Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal au reste de la division euclidienne de d par 11.

b) $d \prec 0$:Le reste de la division euclidienne de n par 11 est d+11p, p est le plus petit entier naturel tel que d+11p soit positif ou nul.

u	n	d=u-7	p	d+11p	Le reste
0	5130	-7	1	4	4
1	5131	-6	1	5	5
2	5132	-5	1	6	6
3	5133	-4	1	7	7
4	5134	-3	1	8	8
5	5135	-2	1	9	9
6	5136	-1	1	10	10
7	5137	0			0
8	5138	1			1
9	5139	2			2

Autrement :

u	n	La division euclidiènne de n par 11
0	5130	$5130 = 11 \times 466 + 4$
1	5131	$5131 = 11 \times 466 + 5$
2	5132	$5132 = 11 \times 466 + 6$
3	5133	$5133 = 11 \times 466 + 7$
4	5134	$5134 = 11 \times 466 + 8$
5	5135	$5135 = 11 \times 466 + 9$
6	5136	$5136 = 11 \times 466 + 10$
7	5137	$5137 = 11 \times 467$
8	5138	$5138 = 11 \times 467 + 1$
9	5139	$5139 = 11 \times 467 + 2$

Conclusion : u=0

Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice n°5

- 73a2 est divisible par 9 si et seulement si $S = 12 + a$ est divisible par 9
-

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
S est divisible par 9	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	Non	Non	Non

Alors $a = 6$

Exercice n°6

Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

- 2a3b est divisible par 4 si et seulement si 3b est divisible par 4.
-

b	3b	
0	30	3b n'est pas divisible par 4
1	31	3b n'est pas divisible par 4
2	32	3b est divisible par 4
3	33	3b n'est pas divisible par 4
4	34	3b n'est pas divisible par 4
4	35	3b n'est pas divisible par 4
6	36	3b est divisible par 4
7	37	3b n'est pas divisible par 4
8	38	3b n'est pas divisible par 4
9	39	3b n'est pas divisible par 4

- 2a3b est divisible par 4 si et seulement si $b \in \{2, 6\}$.
- Le cas b=2.

a	S=7+a	
0	7	S n'est pas divisible par 3
1	8	S n'est pas divisible par 3
2	9	S est divisible par 3
3	10	S n'est pas divisible par 3
4	11	S n'est pas divisible par 3
5	12	S est divisible par 3
6	13	S n'est pas divisible par 3
7	14	S n'est pas divisible par 3
8	15	S est divisible par 3
9	16	S n'est pas divisible par 3

- Le cas b=6.

a	S=11+a	
0	11	S n'est pas divisible par 3
1	12	S est divisible par 3
2	13	S n'est pas divisible par 3
3	14	S n'est pas divisible par 3
4	15	S est divisible par 3
5	16	S n'est pas divisible par 3
6	17	S n'est pas divisible par 3
7	18	S est divisible par 3
8	19	S n'est pas divisible par 3
9	20	S n'est pas divisible par 3

- $(a,b) \in \{(2,2);(5,2);(8,2);(1,6);(4,6);(7,6)\}$

Exercice n°7

- 513ab est divisible par 5 si et seulement si b=0 ou b=5

Un entier est divisible par 5 si et seulement son chiffre des unités est 0 ou 5.

-

	b=0	**b=5**
a	$S=9+a$	$S'=14+a$
0	$S=9$	$S'=14$
1	$S=10$	$S'=15$
2	$S=11$	$S'=16$
3	$S=12$	$S'=17$
4	$S=13$	$S'=18$
5	$S=14$	$S'=19$
6	$S=15$	$S'=20$
7	$S=16$	$S'=21$
8	$S=17$	$S'=22$
9	$S=18$	$S'=23$

$(a,b) \in \{(0,0);(1,5);(3,0);(4,5);(6,0);(7,5);(9,0)\}$

Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exercice n°8

a)

- b421a est divisible par 2 si et seulement si $a \in \{0,2,4,6,8\}$
- b421a est divisible par 3 si et seulement si $S = 7 + a + b$ est divisible par 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	S=7	S=8	**S=9**	S=10	S=11	**S=12**	S=13	S=14	**S=15**	S=16
2	**S=9**	S=10	S=11	**S=12**	S=13	S=14	**S=15**	S=16	S=17	**S=18**
4	S=11	**S=12**	S=13	S=14	**S=15**	S=16	S=17	**S=18**	S=19	S=20
6	S=13	S=14	**S=15**	S=16	S=17	**S=18**	S=19	S=20	**S=21**	S=22
8	**S=15**	S=16	S=17	**S=18**	S=19	S=20	**S=21**	S=22	S=23	**S=24**

$(a,b) \in \{(0,2);(0,5);(0,8);(2,0);(2,3);(2,6);(2,9);(4,1);(4,4);(4,7);(6,2);(6,5);(6,9);(8,0);(8,3);(8,6);$

b)

- a1215b est divisible par 2 si et seulement si $b \in \{0,2,4,6,8\}$
- a1215b est divisible par 9 si et seulement si $S = 9 + a + b$ est divisible par 9 si et seulement si $a + b$ est divisible par 9
-

a / b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
2	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11
4	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13
6	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

$$(a,b) \in \{(9,0);(7,2);(5,4);(6,3)\}$$

Exercice n°9

- $175 = 11 \times 15 + 10$
- $249 = 11 \times 22 + 7$
- $517 = 11 \times 47$
-

n	d	p	d+11p	n est divisible par 11	Le reste de la division euclidienne de n par 11
8291	1+2-8-9=-14	2	8	NON	8
20042005	5		.	NON	5
1234321	**0**			**OUI**	**0**

Exercice n°10

Soit n un entier naturel.

S_1 : La somme des chiffres de n de rang impairs

S_2 : La somme des chiffres de n de pairs.

d= $S_1 - S_2$

a) $d \geq 0$: n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11.

b) $d \prec 0$: n est divisible par 11 si et seulement si d+11p est divisible par 11, p est le plus petit entier naturel tel que d+11p soit positif ou nul.

x	n	d=x-8	p	d+11p	n est divisible par 11
0	4073	-8	1	3	NON
1	4173	-7	1	4	NON
2	4273	-6	1	5	NON
3	4373	-5	1	6	NON
4	4473	-4	1	7	NON
5	4573	-3	1	8	NON
6	4673	-2	1	9	NON
7	4773	-1	1	10	NON
8	4873	0			OUI
9	4973	1			NON

Conclusion : x=8

Exercice n°11

- 13x45y est divisible par 8si et seulement si le nombre ($45y$) est divisible par 8

Un entier, supérieur ou égal à 100, est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

y	$45y$	$45y$ est divisible par 8
0	450	NON
1	451	NON
2	452	NON
3	453	NON
4	454	NON
5	455	NON
6	$456 = 8 \times 57$	OUI
7	457	NON
8	458	NON
9	459	NON

Conclusion : y=6

- $13x456$ est divisible par 9 si et seulement si $S = x+1+3+4+5+6 = x+19$ est divisible par 9

Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

x	$13x456$	$S = x+19$	$13x456$ est divisible par 9
0	130456	19	NON
1	131456	20	NON
2	132456	21	NON
3	133456	22	NON
4	134456	23	NON
5	135456	24	NON
6	136456	25	NON
7	137456	26	NON
8	138456	27	OUI
9	139456	29	NON

Alors x=8

Conclusion : $(x, y) = (8, 6)$

Exercice n°12

- 28xy5 est divisible par 25si et seulement si le nombre ($y5$) est divisible par 25 si et seulement si $y \in \{2, 7\}$
- $y = 2$

x	n	d=x-3	p	d+11p	n est divisible par 11
0	28025	-3	1	8	NON
1	28125	-2	1	9	NON
2	28225	-1	1	10	NON
3	28325	0			OUI
4	28425	1			NON
5	28525	2			NON
6	28625	3			NON
7	28725	4			NON
8	28825	5			NON
9	28925	6			NON

- $y = 7$

x	n	d=x-8	p	d+11p	n est divisible par 11
0	28075	-8	1	3	NON
1	28175	-7	1	4	NON
2	28275	-6	1	5	NON
3	28375	-5	1	6	NON
4	28475	-4	1	7	NON
5	28575	-3	1	8	NON
6	28675	-2	1	9	NON
7	28775	-1	1	10	NON
8	28875	0			OUI
9	28975	1			NON

Conclusion : $(x, y) \in \{(3,2);(8,7)\}$

Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice n°13

Pour y=0 -----→ x=4 --→ N=94230 d = 4→ N n'est pas divisible par 11
Pour y= 1 -----→ x=3 --→ N=93231 d = 6→ N n'est pas divisible par 11
Pour y=2 -----→ x=2 --→ N=92232 d = 8 → N n'est pas divisible par 11
Pour y=3 -----→ x=1 --→ N=91233 d = 10 → N n'est pas divisible par 11
Pour y=4 -----→ x=0 --→ N=90234 d = 12 → N n'est pas divisible par 11
Pour y= 5 -----→ x= 8 --→ N=98235 d = 5 → N n'est pas divisible par 11
Pour y= 6 ----→ x= 7 --→ N=97236 d = 7→ N n'est pas divisible par 11
Pour y= 7-----→ x=6 --→ N=96237 d = 9→ N n'est pas divisible par 11
Pour y=8 -----→ x=5 --→ N=95238 **d = 11→ N est divisible par 11**
Pour y= 9-----→ x= 4 --→ N=94239 d = 13 → Nn'est pas divisible par 11

Comclusion : N=9x23y est divisible par 9 et 11 pour x=5 et y=8

Exercice n°14

a)

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ il existe un couple d'entiers naturels (q,r) tels que :
$a = bq + r \quad 0 \le r \prec b$

- $\begin{cases} n = 5q + q \\ 0 \le q \prec 5 \end{cases} \Rightarrow q \in \{0,1,2,3,4\}$
- $q = 0 \Rightarrow n = 0$
- $q = 1 \Rightarrow n = 5 \times 1 + 1 = 6$
- $q = 2 \Rightarrow n = 5 \times 2 + 2 = 12$
- $q = 3 \Rightarrow n = 5 \times 3 + 3 = 18$
- $q = 5 \Rightarrow n = 5 \times 4 + 4 = 24$

Comclusion : Les nombres dont la division euclidenne par 5 donne un reste égal au quotient Sont : 0 ;6 ;12 ;18 ;24.

b)

- $\begin{cases} a = 4q + r \\ 0 \leq r \prec 4 \\ q = 3r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \times 3r + r = 13 \times r \\ r \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$
- $r = 0 \Rightarrow a = 0$
- $r = 1 \Rightarrow a = 13$
- $r = 2 \Rightarrow a = 26$
- $r = 3 \Rightarrow a = 39$

Comclusion : Les nombres dont le quotient de la division euclidenne par 4 est égal au triple du reste Sont : 0 ;13 ; 26 ; 39 .

Exercice n°15

- $\begin{cases} 2005 = n \times q_1 + 10 \\ 5002 = n \times q_2 + 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1995 = n \times q_1 \\ 4970 = n \times q_2 \end{cases} \Rightarrow n \in D_{1995} \cap D_{4970}$
- $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$ et $4970 = 2 \times 5 \times 7 \times 71$

$$n \in D_{1995} \cap D_{4970} \quad \text{et } n \succ 32 \Rightarrow n = 35$$

Exercice n°16

- $n = 29q + q^2 \qquad 0 \leq q^2 \prec 29$
- $\begin{cases} 0 \leq q^2 \prec 29 \\ q \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow q^2 \in \{0,1,4,9,16,25\} \Rightarrow q \in \{0,1,2,3,4,5\}$
- $q = 0 \Rightarrow n = 0$
- $q = 1 \Rightarrow n = 29 \times 1 + 1 = 30$
- $q = 2 \Rightarrow n = 29 \times 2 + 4 = 62$
- $q = 3 \Rightarrow n = 29 \times 3 + 9 = 96$
- $q = 4 \Rightarrow n = 29 \times 4 + 16 = 132$
- $q = 5 \Rightarrow n = 29 \times 5 + 25 = 170$

Exercice n°17

- $\begin{cases} a - b = 709 \\ a = 16 \times b + 19 \Rightarrow 709 + b = 16 \times b + 19 \\ 19 \prec b \end{cases}$

  $\Rightarrow 709 - 19 = 15 \times b \Rightarrow b = 46$
- $b = 46 \Rightarrow a = 755$

Exercice n°18

$$N = 12345679 \Rightarrow \begin{cases} 9N = 111111111 \\ 18N = 222222222 \\ 27N = 333333333 \\ 36N = 444444444 \end{cases}$$

On peut faire la conjecture suivante : k.9.N= kkkkkkkkk pour k ϵ{1,2,3,4,5,6,7,8,9}

En effet k.9.N= 9.111111111=kkkkkkkkk

Exercice n°19

- $\frac{n+25}{n+4} = \frac{n+4+21}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} + \frac{21}{n+4} = 1 + \frac{21}{n+4}$
- $\frac{n+25}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 + \frac{21}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{21}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+4) \in D_{21}$
  $\Leftrightarrow (n+4) \in \{1,3,7,21\}$
- $n+4 = 1 \Leftrightarrow n = -3 \notin \mathbb{N}$
- $n+4 = 3 \Leftrightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$
- $n+4 = 7 \Leftrightarrow n = 3 \in \mathbb{N}$
- $n+4 = 21 \Leftrightarrow n = 17 \in \mathbb{N}$
- $\frac{n+25}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{3,17\}$

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$:
Le quotient $\frac{a}{b}$ est un entier naturel si b divise a

$a \in \mathbb{N}$:
D_a : L'ensemble des diviseurs de a

Exercice n°20

- $\frac{p+11}{p-1} = \frac{p-1+12}{p-1} = \frac{p-1}{p-1} + \frac{+12}{p-1} = 1 + \frac{12}{p-1} \quad \forall p \succ 1$
- $\frac{p+11}{p-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 + \frac{12}{p-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{12}{p-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (p-1) \in D_{12}$
  $\Leftrightarrow (p-1) \in \{1,2,3,4,6,12\} \Leftrightarrow p \in \{2,3,4,5,7,13\}$

Exercice n°21

- $\begin{cases} a \le 5000 \\ a = b \times 93 + 51 \end{cases} \Rightarrow b \times 93 + 51 \le 5000 \Rightarrow b \times 93 \le 4949$
  $\Rightarrow b \le 53$
- $\begin{cases} a \le 5000 \\ a = b \times 93 + 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 51 = b \times 93 \\ a - 51 \le 4949 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-51) \in M_{93} \\ a - 51 \le 4949 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a-51) \in \left\{ \begin{array}{l} 0, 93, 186, 279, 372, 465, 558, 651, 744, 837, 930, 1023, 1116, 1209, 1212, 1305, 1398 \\ 1491, 1584, 1677, 1770, 1863, 1956, 2049, 2142, 2235, 2338, 2421, 2514, 2604, 2700, \\ 2793, 2886, 2979, 3072, 3165, 3258, 3351, 3444, 3537, 3630, 3723, 3816, 3909, 4002, \\ 4095, 4188, 4281, 5374, 4467, 4560, 4653, 4662, 4755, 4848, 4941 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a \in \left\{\begin{array}{l} 51,144,237,279,372,465,558,651,744,837,930,1023,1116,1209,1212,1305,1398 \\ 1491,1584,1677,1770,1863,1956,2049,2142,2235,2338,2421,2514,2604,2700, \\ 2793,2886,2979,3072,3165,3258,3351,3444,3537,3630,3723,3816,3909,4002, \\ 4095,4188,4281,5374,4467,4560,4653,4662,4755,4848,4941 \end{array}\right\}$$

- $a \leq 5000 \Rightarrow a-51 \leq 4949$

Exercice n°22

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique couple d'entiers naturels (q,r) tels que :
$a = bq + r \quad 0 \leq r \prec b$

- $\begin{cases} a = (a-b)\times q + r \\ 0 \leq r \prec a-b \end{cases}$
- $\begin{cases} b = (a-b)\times q' + r' \\ 0 \leq r' \prec a-b \end{cases}$
- $\begin{cases} b = a-(a-b) \\ a = (a-b)\times q + r \\ b = (a-b)\times q' + r' \end{cases} \Rightarrow (a-b)\times q' + r' = (a-b)\times q + r - (a-b)$

$\Rightarrow (a-b)\times q' + r' = (a-b)(q-1) + r$ avec r< a-b et b< a-b $\Rightarrow \begin{cases} q' = q-1 \\ r' = r \end{cases}$

Exercice n°23

- $N = xyztn$ avec $x \in \{2,4,6,8\}$
- $N = xyztn$ avec $x + y = 15 \Rightarrow x \notin \{2,4\} \Rightarrow x \in \{6,8\}$
- $si\ x = 6 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow N = 69ztn$
- $si\ x = 8 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow N = 87ztn$
- $z = 9-6 \ \ ou \ \ z = 8-7 \Rightarrow \begin{cases} N = 693tn \\ N = 871tn \end{cases}$
- $\begin{cases} 6 = 3\times t \\ 8 = 1\times t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ ou \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 6932n \\ ou \\ N = 8718n \end{cases}$
- N est diviible par 9 si et seulement si

$$\begin{cases} 20 + n\ est\ divisible\ par\ 9 \\ ou \\ 24 + n\ est\ divisible\ par\ 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ ou \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 69327 \\ ou \\ N = 87183 \end{cases}$$

Conclusion :La combinaison secrète du coffre est 69327 ou 87183

Exercice n°24

$n = 3k + r,\ r \in \{0,1,2\}$

- ✓ $r = 0 \Rightarrow n = 3k \Rightarrow A = 3k(9k^2+5) \Rightarrow A = 3k'$
- ✓ $r = 1 \Rightarrow n = 3k+1 \Rightarrow A = (3k+1)((3k+1)^2+5) \Rightarrow A = (3k+1)(9k^2+6k+1+5)$
  $\Rightarrow A = (3k+1)(9k^2+6k+6) \Rightarrow A = 3(3k+1)(3k^2+2k+2) \Rightarrow A = 3p$

✓ $r=2 \Rightarrow n=3k+2 \Rightarrow A=(3k+2)((3k+2)^2+5) \Rightarrow A=(3k+2)(9k^2+12k+4+5)$

$\Rightarrow A=(3k+2)(9k^2+12k+9) \Rightarrow A=3(3k+2)(3k^2+4k+3) \Rightarrow A=3p'$

Exercice n°25

$n=3k+r,\ r\in\{0,1,2\}$

- $r=0 \Rightarrow n=3k \Rightarrow n^2=9.k^2=3.(3k^2)$ est divisible par 3 (r' =0)
- $r=1 \Rightarrow n=3k+1 \Rightarrow (3k+1)^2=9k^2+6k+1 \Rightarrow r'=1$
- $r=2 \Rightarrow n=3k+2 \Rightarrow (3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1 \Rightarrow r'=1$

$n=59873120=3\times 19957706=2 \Rightarrow r=2 \Rightarrow r'=1$

$\Rightarrow n^2=3\times p+1 \Rightarrow n^2-1=3\times p \Rightarrow (59873120)^2-1=3\times p$

Exercice n°26

$n\in\{20,21,22,23,24\}$

1. **On fera 7 groupes**

En effet on ne peut pas faire plus que 7 groupes car 8x20 =160 >158

Et on ne peut pas faire moin que 7 groupes car 6x24 =144<158

Première formation : $(158=6\times 23+20)$: 6 groupes de 23 et un groupe de 20

Seconde formation : (158=5x23+22+21) : 5 groupes de 23 un groupe de 22 et un groupe de 21

b) **On fera 9 ou 10 groupes**

En effet on ne peut pas faire plus que 10 groupes car 11x20 =220 >212

Et on ne peut pas faire moin que 9 groupes car 8x24 =192<212

Première formation : $(212=8\times 24+20)$: 8 groupes de 24 et un groupe de 20

Seconde formation : $(212=9\times 21+23)$: 9 groupes de 21 et un groupe de 23

Exercice n°27

1) 123 =7x17+4 → après 123 j sera notre jours avancé de 4j

2)

- $365=7\times 52+1$
- $366=7\times 52+2$

$\Rightarrow$ En passant d'une année à l'autre le jour de la semaine du 1er Janvier avance de 2 jours ou d'un seul jour suivant que l'année est bissextile ou non :

- Le 1er Janvier 2014 : mercredi.
- Le 1er Janvier 2020 : le mercredi avance de 4x1+2x2=8j ca donnera un jeudi

Exercice n°28

- $\begin{cases} n=q_1\times 20+3 \\ n=q_2\times 21+3 \\ n=q_3\times 35+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-3=q_1\times 20 \\ n-3=q_2\times 21 \\ n-3=q_3\times 35 \end{cases} \Rightarrow n-3 \text{ est un multiple commun de } 20;21 et 35$

Donc n-3 =420 ===> n = 423

Exercice n°29

- $\begin{cases} n = 20q_1 + 19 \\ n = 21q_2 + 20 \\ n = 35q_3 + 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 20q_1 + 20 - 1 \\ n = 21q_2 + 21 - 1 \\ n = 35q_3 + 35 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 = 20q_1 + 20 \\ n+1 = 21q_2 + 21 \\ n+1 = 35q_3 + 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 = 20(q_1+1) \\ n+1 = 21(q_2+1) \\ n+1 = 35(q_3+1) \end{cases} \Rightarrow$

(n+1) est un multiple commun de 20,21 et 35 donc n+1 = 420 ⇨ n= 419

Exercice n°30

- $L = 200\ l = 120\ h = 180 \Rightarrow V = 200 \times 120 \times 180 = 2^6 \times 3^3 \times 5^4$
  $\Rightarrow V = 5 \times (2^2)^3 \times 3^3 \times 5^3$
  $\Rightarrow V = 5 \times (2^2 \times 3 \times 5)^3 = 5 \times a^3$
- $a = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60$

Exercice n°31

- $n = abcd$
- $a = p, b = p+1, c = p+2$ et $d = p+3$
- n est divisible par 9 alors p+p+1+p+2+p+3=9k, k $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 4p + 6 = 9k$
-

p	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4p+6	**6=9k**	**10=9k**	**14=9k**	**18=9k**	**20=9k**	**26=9k**	**30=9k**	**34=9k**	**38=9k**	**60=9k**
	Impossible	Impossible	Impossible	**alors n=3456**	Impossible	Impossible	Impossible	Impossible	Impossible	Impossible

- Conclusion : n=3456

CHAPITRE 5

CALCUL VECTORIEL (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}+\frac{4}{5}\vec{u}+\vec{v}=(\vec{u}+\frac{4}{5}\vec{u})+\vec{v}-2\vec{v}=\frac{9}{5}\vec{u}-\vec{v}$.
- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}-(\frac{4}{5}\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}-2\vec{v}-\frac{4}{5}\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}-\frac{4}{5}\vec{u}-2\vec{v}-\vec{v}=\frac{1}{5}\vec{u}-3\vec{v}$
- $\overrightarrow{2a}+5\vec{b}=2(\vec{u}-2\vec{v})+5(\frac{4}{5}\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}-4\vec{v}+4\vec{u}+5\vec{v}=2\vec{u}+4\vec{u}+5\vec{v}-4\vec{v}=6\vec{u}+\vec{v}$

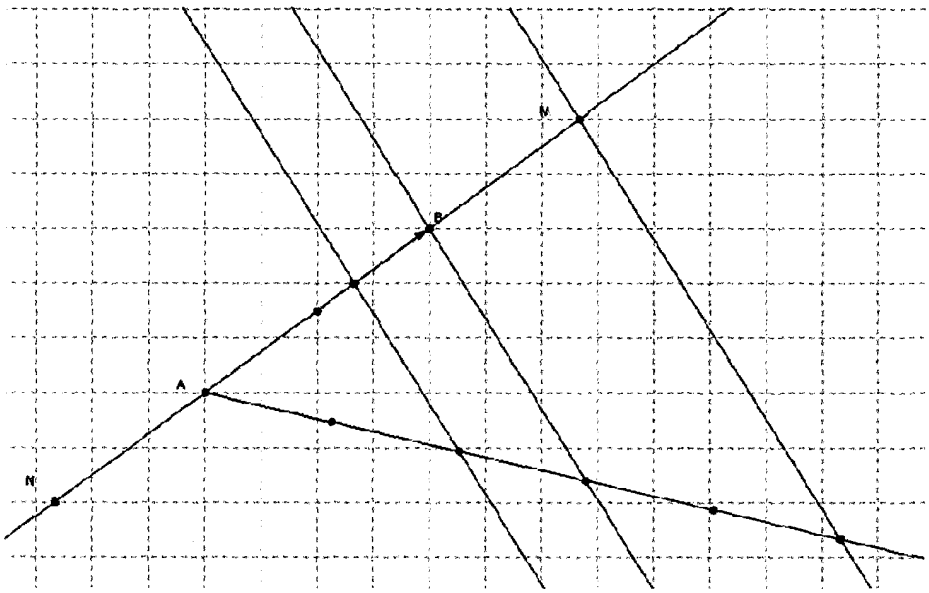
Exercice n°2

- $\begin{cases}2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}\\ \vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow 2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}+\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow 3\vec{u}+2\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow 3\vec{u}=-2\vec{w}\Rightarrow \vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{w}$.
- $\begin{cases}2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}\\ \vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=\vec{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}\\ 2\vec{u}-2\vec{v}+6\vec{w}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow 2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}-(\overrightarrow{2u}-2\vec{v}+6\vec{w})=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}-\vec{w}+2\vec{v}-6\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow 3\vec{v}-7\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow 3\vec{v}=7\vec{w}\Rightarrow \vec{v}=\frac{7}{3}\vec{w}$

- $\begin{cases}\vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{w}\\ \vec{v}=\frac{7}{3}\vec{w}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{w}=-\frac{3}{2}\vec{u}\\ \vec{w}=\frac{3}{7}\vec{v}\end{cases}\Rightarrow -\frac{3}{2}\vec{u}=\frac{3}{7}\vec{v}\Rightarrow \vec{u}=-\frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{2}}\vec{v}\Rightarrow \vec{u}=-\frac{2}{7}\vec{v}$

Exercice n°3



- Supposons que $I = A*B$ et montrons que $I = N*M$
- $I = A*B \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$
- Montrons que $\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BA} + (\frac{5}{3} - \frac{2}{3})\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Exercice n°4

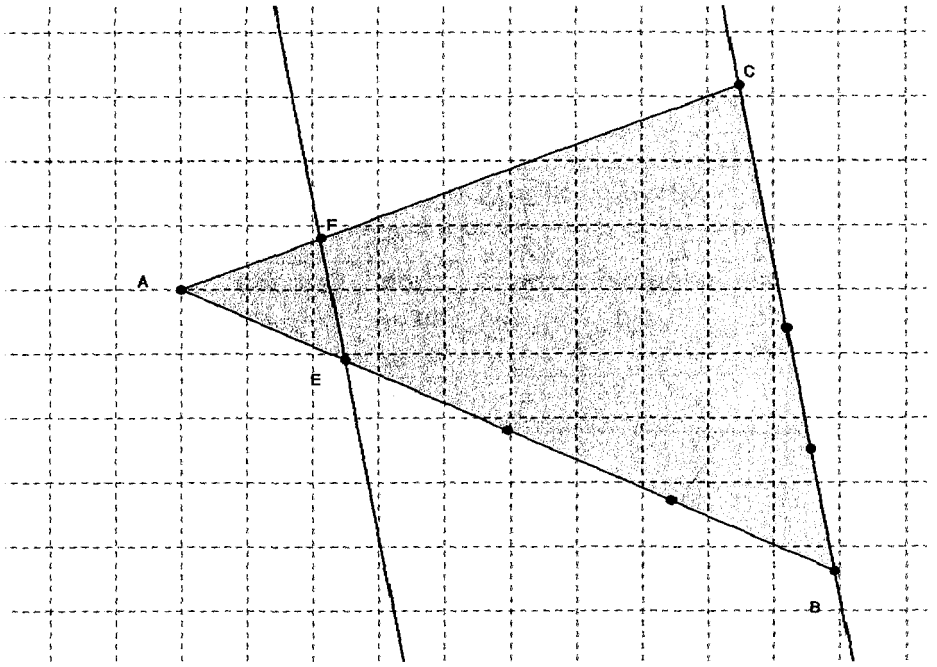
a)

- $3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

- $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \Rightarrow$ Le point E appartient à la droite (AB) .

b) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ Le point F appartient à la parallèle à (BC) passant par E.



c) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ⇨ A ; C et F sont alignés

Exercice n°5

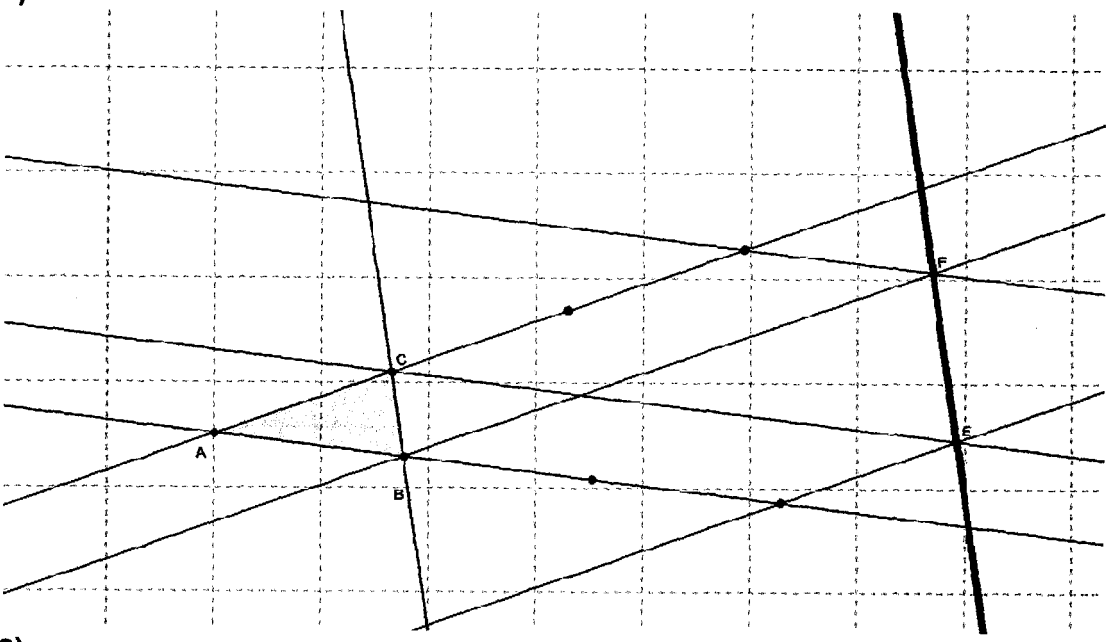
$5\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \vec{0}=3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et par suite les points B,C et D sont alignés.

Exercice n°6

1)

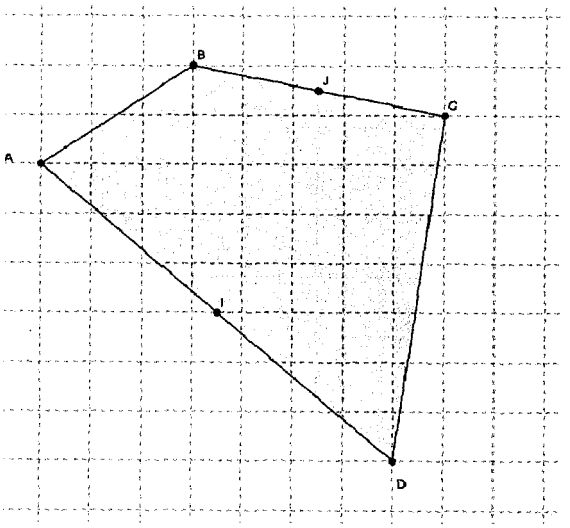


2)

$\begin{cases}\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\end{cases}$ alors $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ alors

$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}$ alors $\overrightarrow{FE}=2(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$ alors $\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{CB}$ alors $(EF)//(BC)$

Exercice n°7



- $\begin{cases} I = A*D \\ J = B*C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0} \\ \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} \end{cases}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI})+(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}+\vec{0}+\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}$

Exercice n°8

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2m \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut $2m\times 10-6\times\frac{4}{3}=0$

équivaut $10\,m=4$

équivaut $m=\frac{2}{5}$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires)

Équivaut

($\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}=0$) Équivaut $xb-ay=0$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut $0\times(m+1)-(-1)\times(-3)=0$

équivaut $0=3$:impossible

$\forall m\in\mathbb{R}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m-2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut $1\times(-1)-(m+2)(m-2)=0$

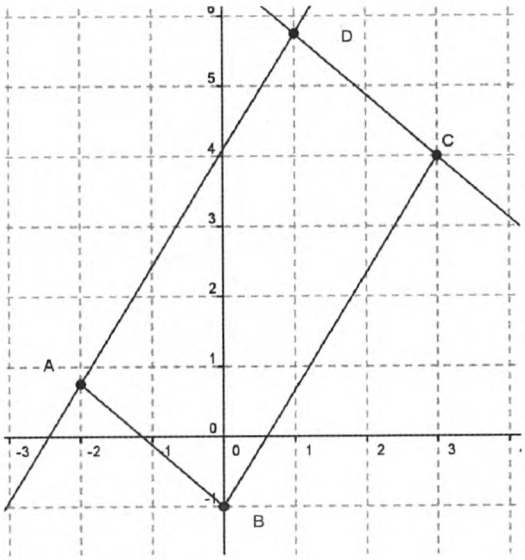
équivaut $-1-(m^2-4)=0$ équivaut $m^2=3$

équivaut $m=3$ ou $m=-3$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\forall a\in\mathbb{R}\quad\forall b\in\mathbb{R}$

Exercice n°9



ABCD parallélogramme signifie $\left(\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\right)$ signifie $\begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases}$ signifie

$$\begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 1 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = \dfrac{23}{4} \end{cases}$$

Exercice n°10

a)

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3+4 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0+4 \\ a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ a-2 \end{pmatrix}$

- Les points A,B et C sont alignés signifie $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut $1\times(a-2)-12=0$ équivaut $a=14$

b)

- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-(2a+1) \\ 6-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2a \\ 5 \end{pmatrix}$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$:

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires)

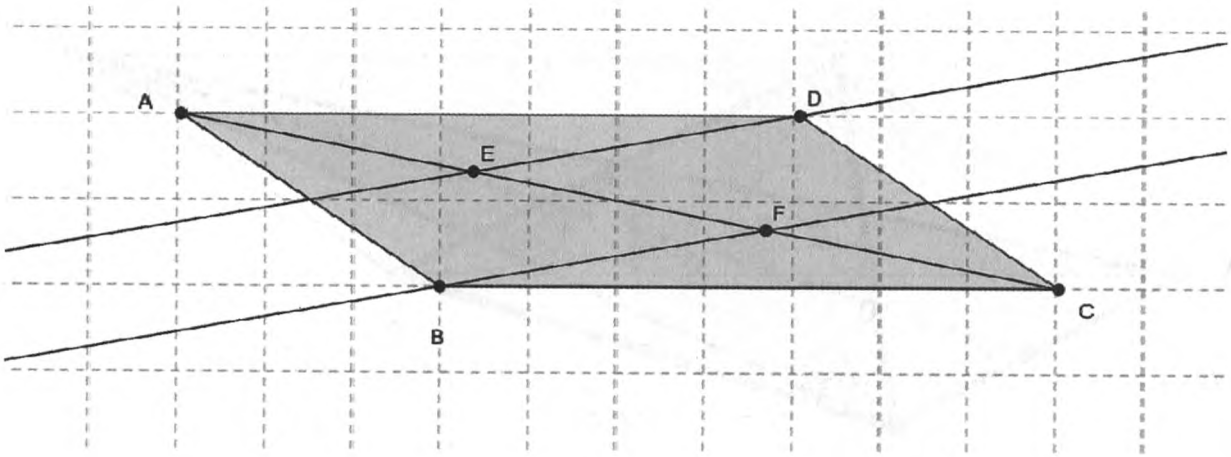
Équivaut

($\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = 0$) Équivaut $xb-ay=0$

- Les points A,B et C sont alignés signifie $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires équivaut $-2\times5-(-4)\times(-2a)=0$ équivaut $a=-\dfrac{5}{4}$

Exercice n°11

1)



2)

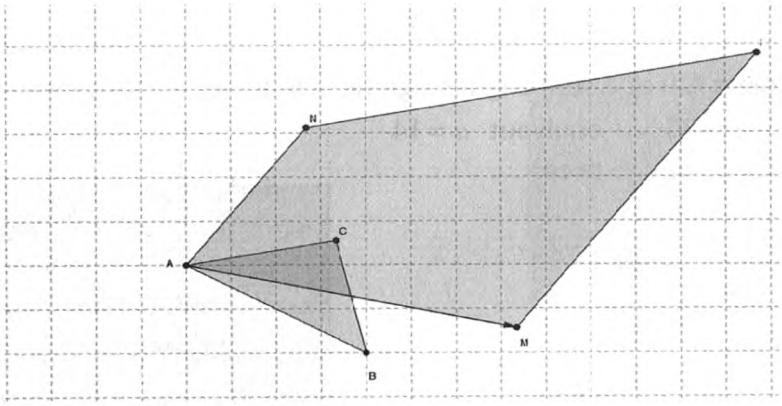
- ABCD est un parallélogramme alors $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AE}$

  $\Rightarrow \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ED} \Rightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et par suite les droites (DE) et (BF) sont parallèles.

Exercice n°12

a)

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow ACMB$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{NI} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ I est un point de la parallèle à (AC) passant par N.



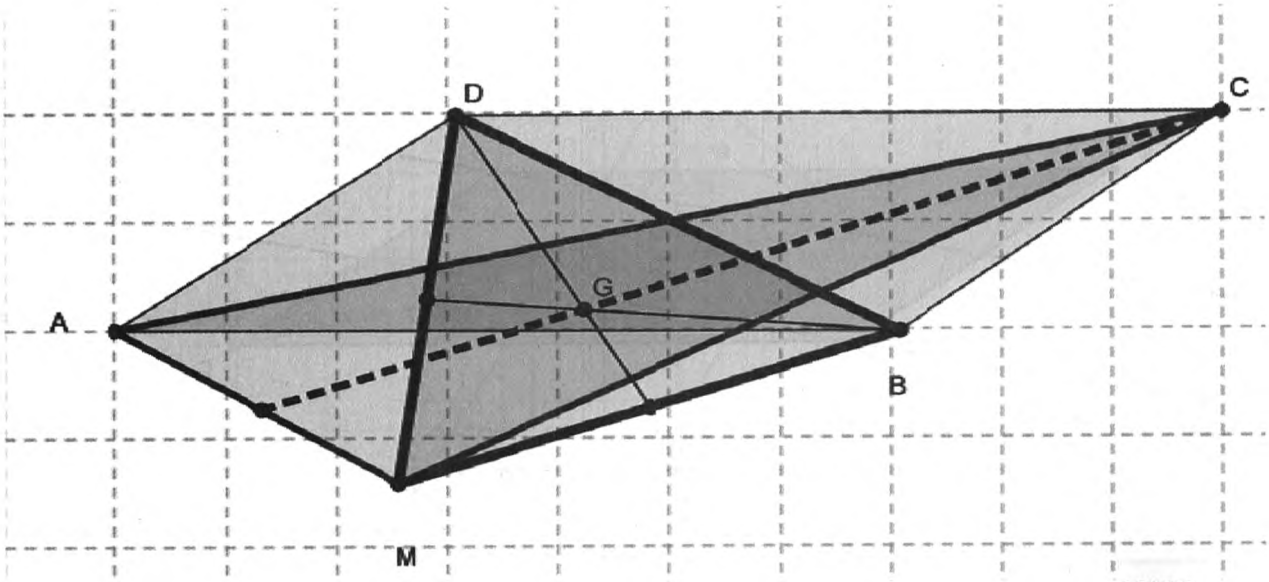
b) $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow$

AMIN est un trapèze de bases $[IM]$ et $[NA]$

Exercice n°13



- $ABCD$ est un parallélogramme $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
- Soit G le centre de gravité du triangle ACM alors

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}$$

(G centre de gravité d'un triangle ABC) signifie ($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

- Montrons que G le centre de gravité du triangle BDM :

$$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{MG}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{MG}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{MG}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{MG})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$ $\Rightarrow$ G le centre de gravité du triangle BDM

Exercice n°14

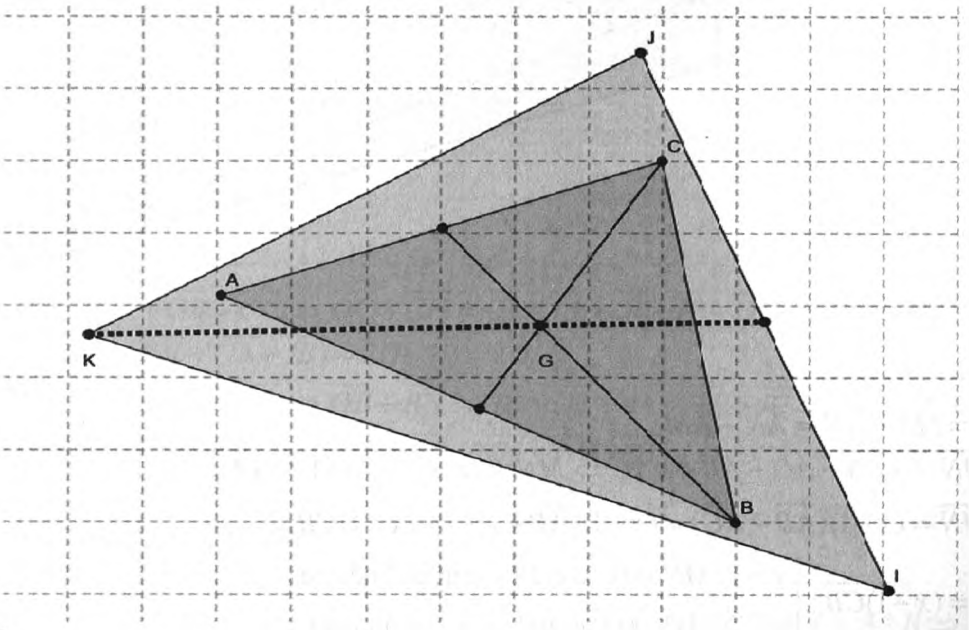
- Soit G le centre de gravité du triangle ABC alors

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

(G centre de gravité d'un triangle ABC) signifie ($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

- Montrons que G le centre de gravité du triangle IJK :

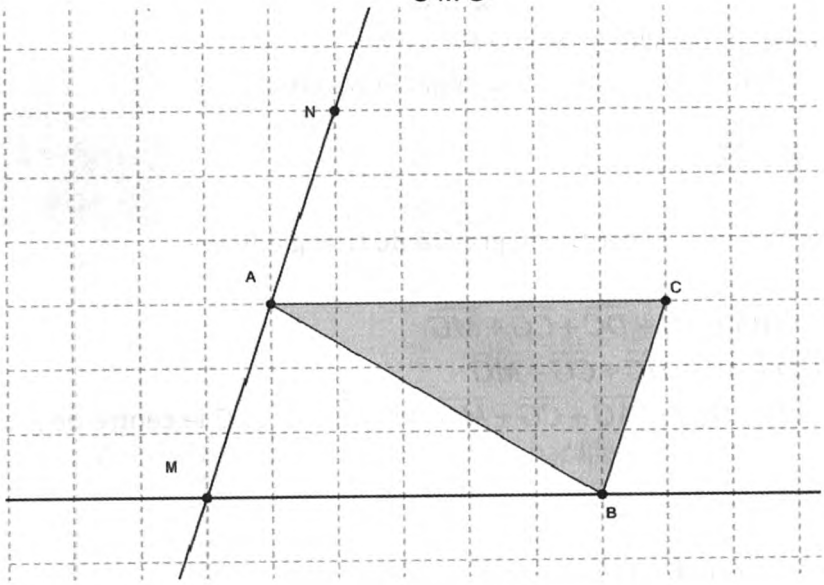
$$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CK}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\alpha\overrightarrow{BA}+\alpha\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{CA}=\alpha(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\alpha\times\vec{0}=\vec{0}$$ $\Rightarrow$ G le centre de gravité du triangle IJK



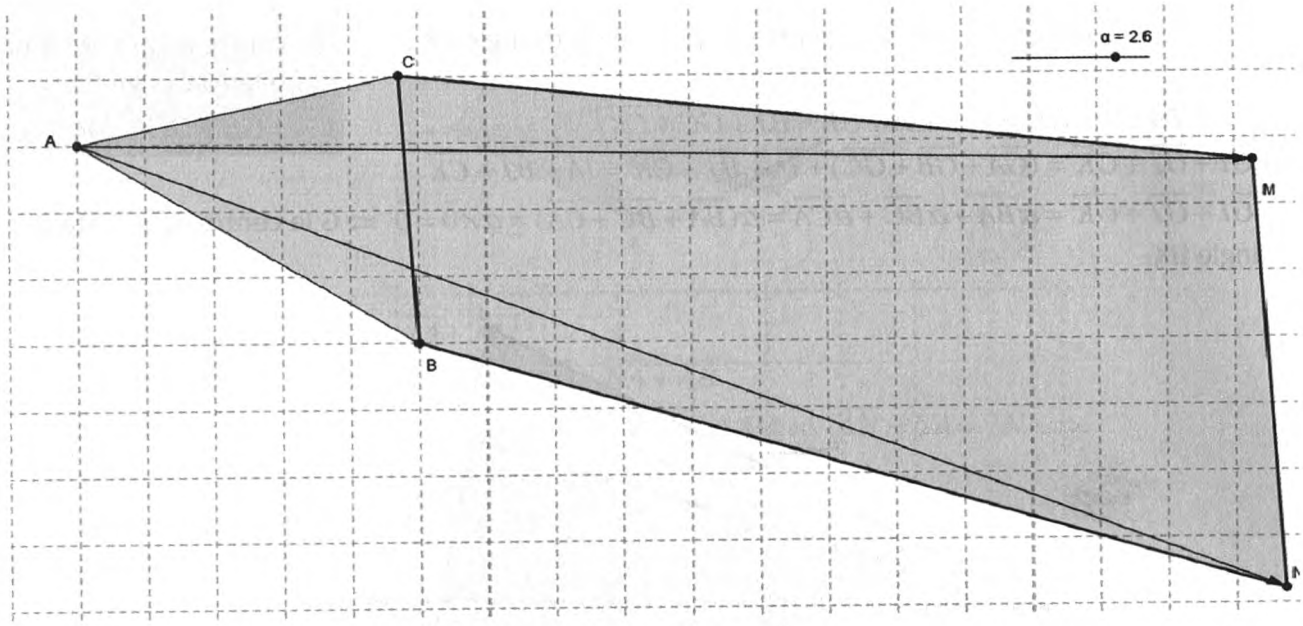
Exercice n°15

1)

- $x=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow AMBC$ est un parallélogramme
- $x=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA}$
- $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow A=M*N \Leftrightarrow N=S_A(M)$



2)

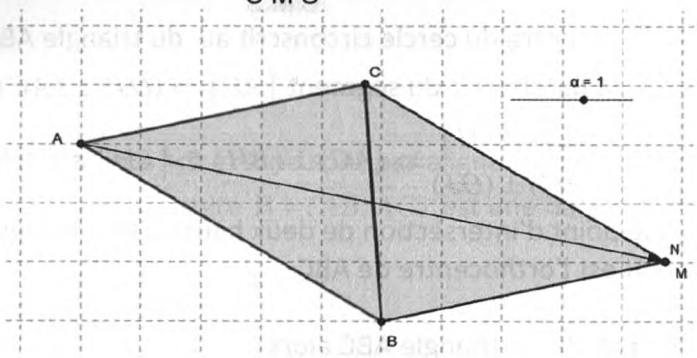


- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$
  $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x-1)\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AC}$
  $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x-1)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = (x-1)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = (x-1)\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{MN} = (x-1)\overrightarrow{CB} : \begin{cases} x = 1 : \overrightarrow{MN} = \vec{0},\ \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

3)

a) On a: $\overrightarrow{MN} = (1-x)\overrightarrow{BC}$:

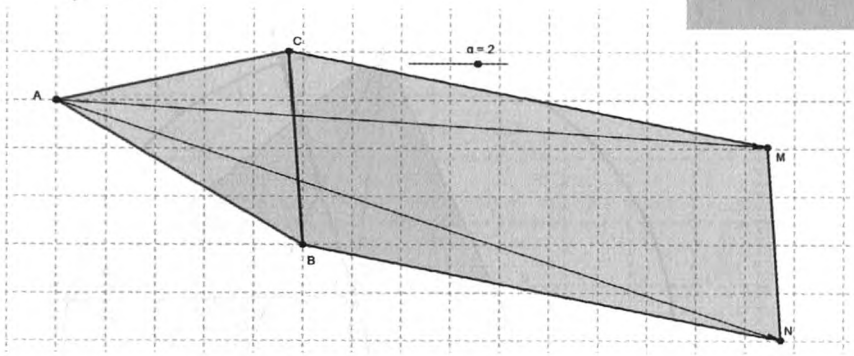
- Si $M = N \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0} \Rightarrow (1-x)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ $\overrightarrow{MN} = (1-x)\overrightarrow{BC}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (1-x)\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BC} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$



b)

- BCMN est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -(1-x)\overrightarrow{BC}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = (x-1)\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = (x-1-1)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
- $\begin{cases} (x-2)\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BC} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$\alpha \in \mathbb{R}$
$((\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$



Exercice n°16

1)

a)

- $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}$
  $\Rightarrow \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{OI}$
- $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} \Rightarrow \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OJ} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC})$
  $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OJ} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC}) \Rightarrow \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OJ} + \vec{0} = 2\overrightarrow{OJ}$

b)

- $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow (CH)//(OI)$

  ✓ O centre du cercle circonscrit au du triangle ABC et $I = A*B \Rightarrow (OI)$ est la médiatrice du segment $[AB] \Rightarrow (OI) \perp (AB)$

  ✓ $\begin{cases} (CH)//(OI) \\ (AB) \perp (OI) \end{cases} \Rightarrow (AB) \perp (CH) \Rightarrow [CH]$ est la hauteur issue de C.
- $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OJ} \Rightarrow (BH)//(OJ)$

✓ O centre du cercle circonscrit au du triangle ABC et $J = A*B \Rightarrow (OJ)$ est la médiatrice du segment $[AC] \Rightarrow (OJ) \perp (AC)$

✓ $\begin{cases} (BH)//(OJ) \\ (AC) \perp (OJ) \end{cases} \Rightarrow (AC) \perp (BH) \Rightarrow [BH]$ est la hauteur issue de B

- H est le point d'intersection de deux hauteurs du triangle ABC alors H est l'orthocentre de ABC.

2)

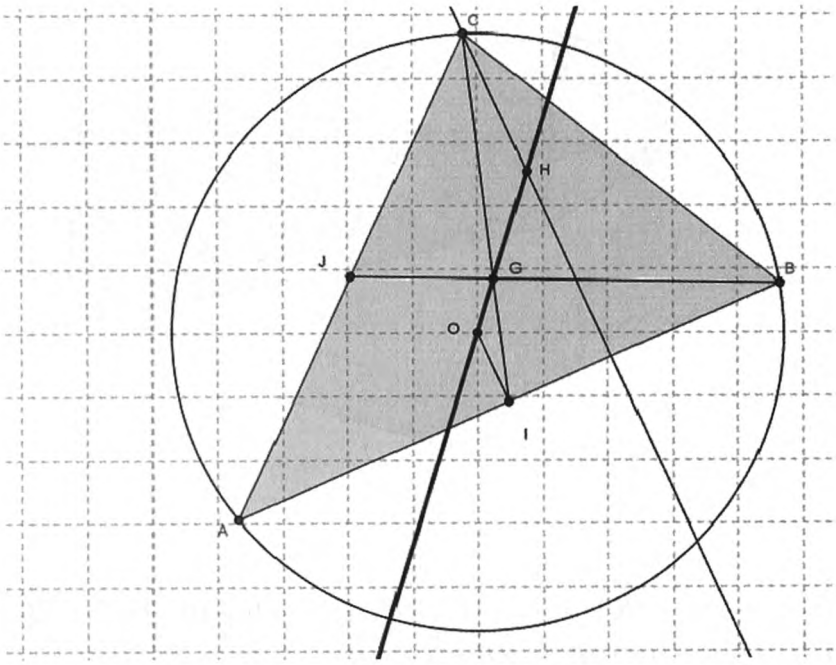
a)G centre de gravité du triangle ABC alors :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

b) On a : $\begin{cases} 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH} \Rightarrow$

Les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et par suite les points O, G et H sont alignés.



Exercice n°17

a)

- $I = A*B \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$
- $J = A*C \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{MJ}+(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC})=2\overrightarrow{MJ}+\vec{0}=2\overrightarrow{MJ}$
- $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MJ}\right\| \Leftrightarrow MI=MJ \Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice du segment $[IJ]$

b) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=BC \Leftrightarrow 2MJ=2IJ \Leftrightarrow MJ=IJ \Leftrightarrow M$ décrit le cercle de centre J et passant par I

Exercice n°18

- ABC triangle alors les points A,B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite $\mathrm{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan .
- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathrm{B}}$
- $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathrm{B}}$
- $dét(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 1\times(-1) = 7 \neq 0 \Rightarrow$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par suite $\mathrm{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

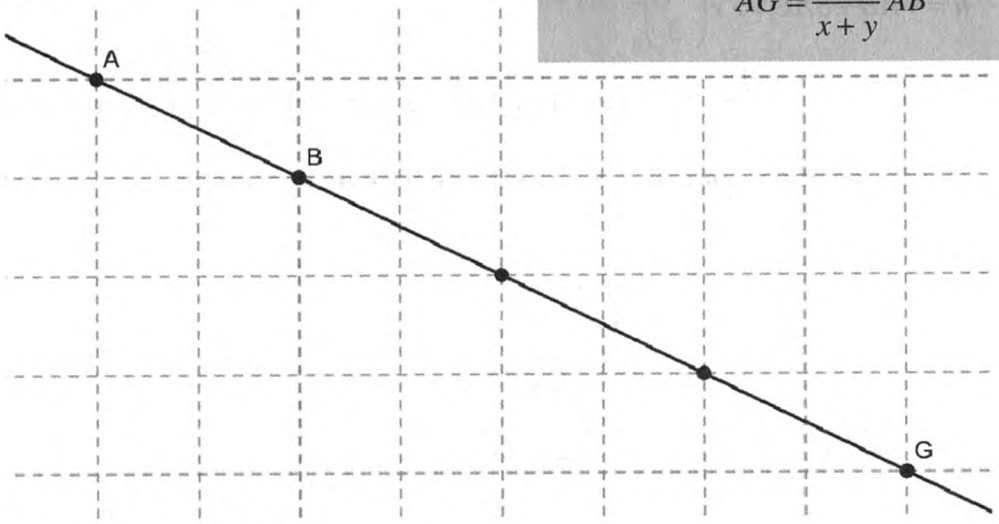
CHAPITRE 6

BARYCENTRE (Exercices et problèmes)

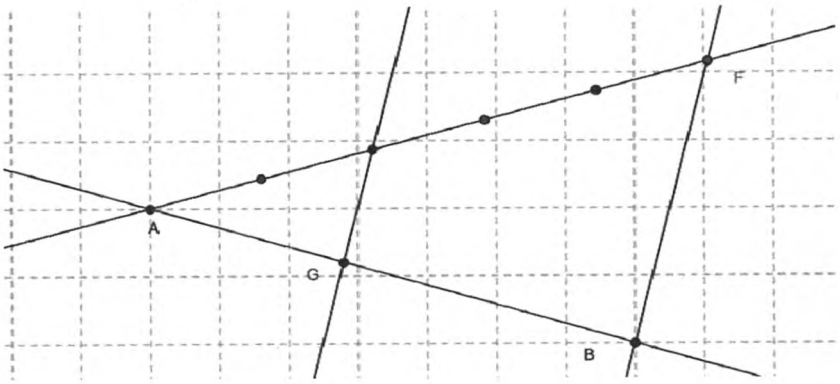
Exercice n°1

$x+y\neq 0$
G Barycentre de (A,x) et (B,y) alors
$\overrightarrow{AG}=\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G=t_{4\overrightarrow{AB}}(A)$



- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



Exercice n°2

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G$ est barycentre de (A,1),(B,-1) et (C,1)
- $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$
  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G$ est barycentre de (A,-2),(B,2) et (C,1)
- $2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA})+3(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G$ est barycentre de (A,2),(B,-5) et (C,2)

Exercice n°3

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{MI}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}$

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MJ}=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ})=2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OJ})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\times 2\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}$

e) $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{MO}$

f) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{EA}$

g) **on a** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IO}\Rightarrow \overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{HO}\Rightarrow 3\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{BO}\Rightarrow 3\overrightarrow{BH}-2\overrightarrow{BO}=\vec{0}$

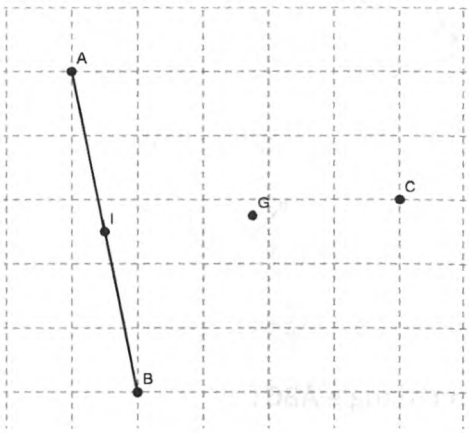
on a $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MO}\Rightarrow \overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}-3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MO}-3\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BO}-3\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BM}$

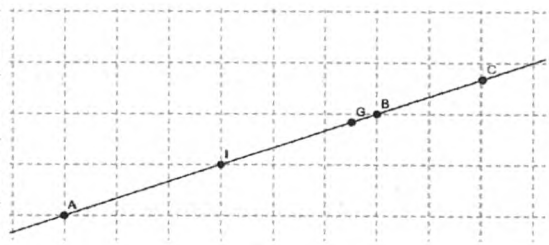
Conclusion $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}-3\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{BM}$

Exercice n°4

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Soit $I=A*B\Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow G=I*C$

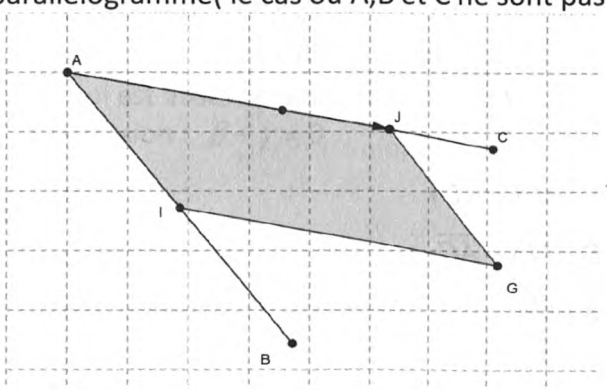


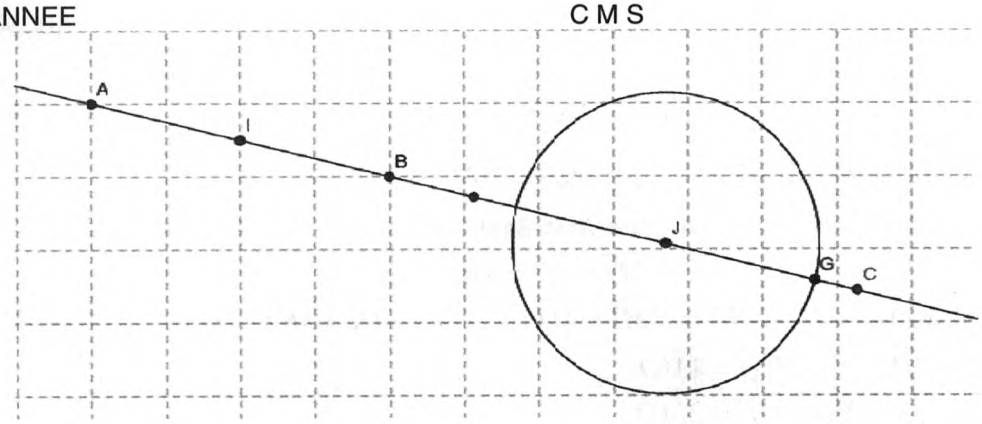


b) $-\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow -\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

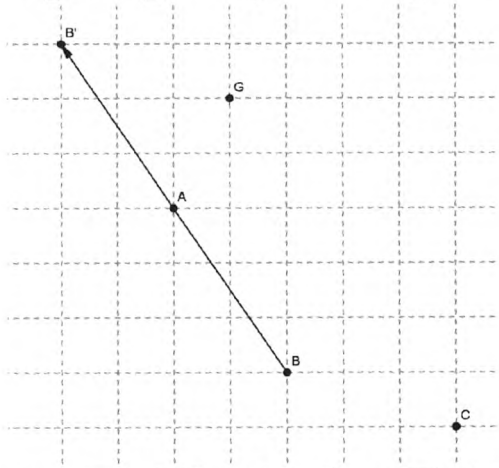
$\Rightarrow 4\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

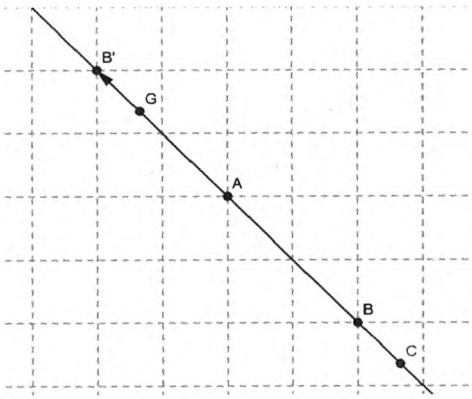
Soient $I=A*B$ et le point J tel que : $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\Rightarrow AIGJ$ est un parallélogramme(le cas ou A,B et C ne sont pas alignés)





c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Rightarrow\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GC}\Rightarrow\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{BA}\Rightarrow G=t_{2\overrightarrow{BA}}(C)$





d) $-2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GB}\Rightarrow G=t_{2\overrightarrow{CA}}(B)$

Exercice n°5

- $\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow O$ est le centre de gravité du triangle ABC .
- $OA=OB=OC\Rightarrow\begin{cases}OA=OB\\OA=OC\end{cases}\Rightarrow$ O est un point commun à la médiatrice du segment $[AB]$ et la médiatrice du segment $[AC]$ de alors O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
- O est à la fois le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et son centre de gravité alors ABC est un triangle équilatéral.

Exercice n°6

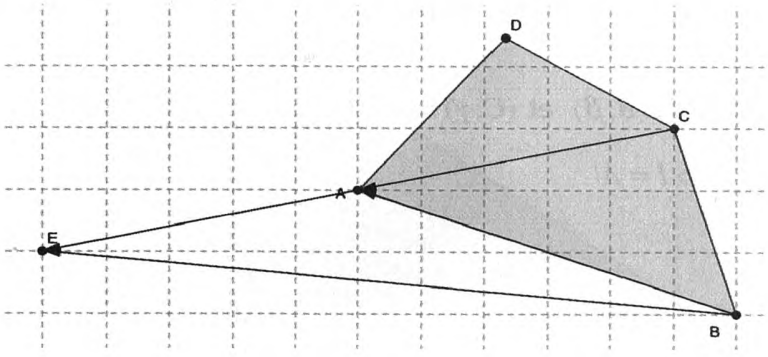
1)

- $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$

- Soit $E = S_A(C) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE}$



2)

a)

- $\Gamma_1 = \left\{ M \,/\, \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$
- $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{BE} \right\| = BE$

$\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \right\| = BE$

$\Leftrightarrow \left\| 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \right\| = BE \Leftrightarrow \left\| 3\overrightarrow{MG} \right\| = BE$ (G isobarycentre des points A, B et C)

$\Leftrightarrow 3GM = BE \Leftrightarrow GM = \dfrac{BE}{3} \Leftrightarrow \Gamma_1 = (C)$ le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{BE}{3}$

(G isobarycentre des points A, B et C)
Signifie
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b)

- $\Gamma_2 = \left\{ M \,/\, \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| \right\}$
- $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 3MG = \left\| 2(\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{G'C}) + \overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{G'D} \right\|$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 3MG = \left\| 3\overrightarrow{MG'} + 2\overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} \right\| \Leftrightarrow 3MG = \left\| 3\overrightarrow{MG'} + 2\overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} \right\|$

$\Leftrightarrow 3MG = \left\| 3\overrightarrow{MG'} \right\| \Leftrightarrow 3MG = 3MG' \Leftrightarrow MG = MG'$

Γ_2 est alors la médiatrice du segment $[GG']$

$x + y \neq 0$
G Barycentre de (A,x) et (B,y) alors
$x\overrightarrow{GA} + y\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice n°7

1) Supposons que $\beta + \gamma = 0$: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} - \beta\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (GA)//(BC)$)
ce qui est absurde puisque (AG) coupe (BC) en un point A'
Conclusion : $\beta + \gamma \neq 0$

2)

a)

- I barycentre de (B, β) et $(C, \gamma) \Rightarrow \beta\overrightarrow{BI} + \gamma\overrightarrow{CI} = \vec{0}$
- G barycentre de (A, α) , (B, β) et $(C, \gamma) \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

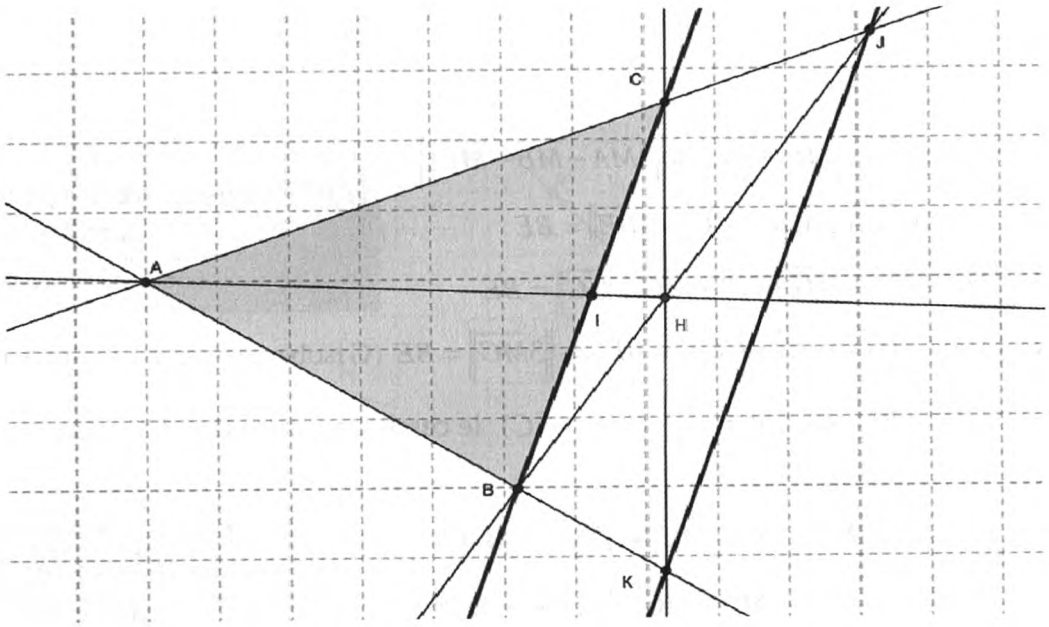
$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG}+\beta(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IG})+\gamma(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IG})=\vec{0} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG}+(\beta\overrightarrow{BI}+\gamma\overrightarrow{CI})+(\beta+\gamma)\overrightarrow{IG}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{IG}=\vec{0} \Rightarrow (\beta+\gamma)\overrightarrow{IG}=\alpha\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{IG}=\alpha\frac{\overrightarrow{GA}}{\beta+\gamma} \Rightarrow I\in(AG)$$

b)

- I barycentre de (B,β) et $(C,\gamma) \Rightarrow I\in(BC)$
- $\begin{cases} I\in(BC) \\ I\in(AG) \end{cases} \Rightarrow I=A'$

<u>Exercice n°8</u>



H un point de (AI) autre que A et I $\Rightarrow$ H barycentre de (I,1) et (A,α)

$$\Rightarrow 2\alpha\,\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\alpha\,\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ H barycentre de (A,2α) ,(B,1) et (C,1)

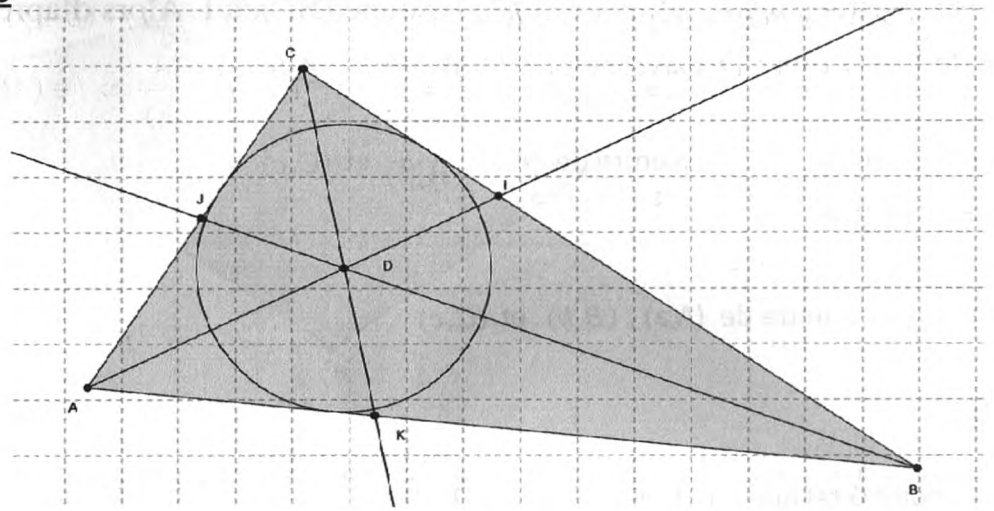
H barycentre de (A,2α) ,(B,1) et (C,1) $\Rightarrow$ d'après le resultas de l'ex précedant (CH) coupe (AB) en K <u>barycentre de (A,2α) et (B,1)</u>

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{1+2\alpha}\overrightarrow{AB}$ (1)

De meme on obtient J <u>barycentre de (A,2α) et (C,1)</u> $\Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{1+2\alpha}\overrightarrow{AC}$ (2)

(1) Et (2) $\Rightarrow$ (BC) //(KJ)

Exercice n°9



1)

- $$\frac{Aire(AIB)}{Aire(AIC)} = \frac{IB.h}{IC.h} = \frac{AB.d(I,(AB))}{AC.d(I,(AC))}$$

[AI) bissectrice ⇒ d(I,(AB))= d(I,(AC))

$$\Rightarrow \frac{Aire(AIB)}{Aire(AIC)} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

- $$\begin{cases} \frac{IB}{IC} = \frac{c}{b} \\ \overrightarrow{IB} \text{ et } \overrightarrow{IC} \text{ sont de signes contraires} \end{cases} \Rightarrow b\overrightarrow{IB} = -c\overrightarrow{IC} \Rightarrow b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow$$

I barycentre de (B,b) et (C,c)

2)

- $$\frac{Aire(BJA)}{Aire(BJC)} = \frac{JA.h'}{JC.h'} = \frac{AB.d(J,(AB))}{BC.d(J,(BC))}$$

$$\Rightarrow \frac{JA}{JC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

- $$\begin{cases} \frac{JA}{JC} = \frac{c}{a} \\ \overrightarrow{JA} \text{ et } \overrightarrow{JC} \text{ sont de signes contraires} \end{cases} \Rightarrow a\overrightarrow{JA} = -c\overrightarrow{JC} \Rightarrow a\overrightarrow{JA} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow$$

J barycentre de (A,a) et (C,c)

- $$\frac{Aire(CKA)}{Aire(CKB)} = \frac{KA.h''}{KB.h''} = \frac{CA.d(K,(AC))}{CB.d(K,(BC))}$$

$$\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

- $$\begin{cases} \frac{KA}{KB} = \frac{b}{a} \\ \overrightarrow{KA} \text{ et } \overrightarrow{KB} \text{ sont de signes contraires} \end{cases} \Rightarrow a\overrightarrow{KA} = -b\overrightarrow{KB} \Rightarrow a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow$$

K barycentre de (A,a) et (B,b)

3) on a I barycentre de (B,b) et (C,c) et (AD) coupe (BC)en I Alors d'après le resultat de l'ex 7 ona : D barycentre de (A,α) , (B,b) et (C,c)

De meme on montre : D barycentre de (A,a) ,(B,β) et (C,c)

Alors a=α et β=b

Donc D barycentre de (A,a) , (B,b) et (C,c)

Exercice n°10

2) Soit un point G tel que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}\Rightarrow G=I*K\Rightarrow G$ est unique

2)

- $\begin{cases} I=A*B \\ K=C*D \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \\ \overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

  $\Rightarrow\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{IG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}++\overrightarrow{GD})+2\overrightarrow{KG}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{KG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{KG}=\vec{0}\Rightarrow G=I*K$

- $\begin{cases} L=A*D \\ K=C*B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LD}=\vec{0} \\ \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

  $\Rightarrow\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{LG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})+2\overrightarrow{JG}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{LG}+2\overrightarrow{JG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{JG}=\vec{0}\Rightarrow G=L*J$

- $\begin{cases} M=A*C \\ K=D*B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\ \overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

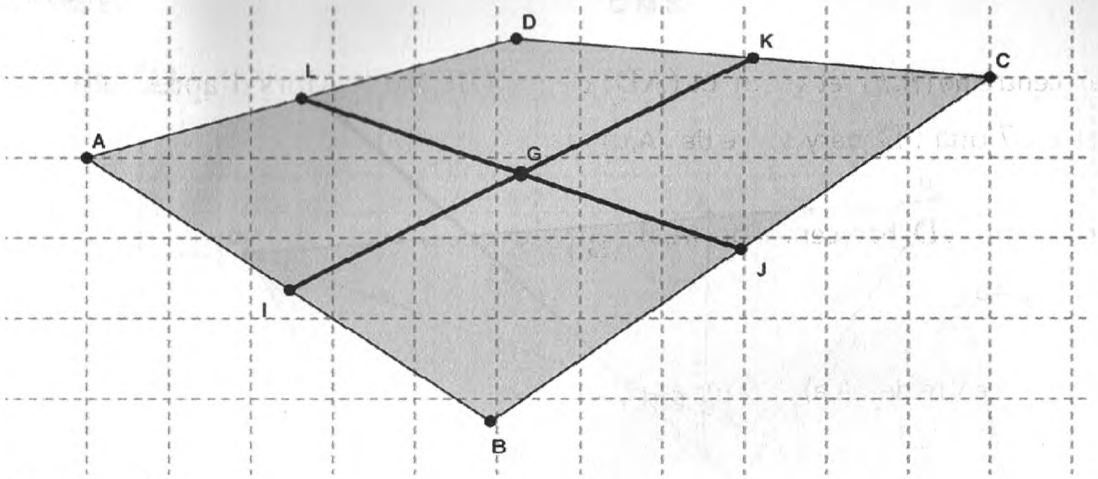
  $\Rightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})+2\overrightarrow{NG}=\vec{0}$

  $\Rightarrow 2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{NG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}=\vec{0}\Rightarrow G=M*N$

3)

- On construit les milieux de 4 côtes .
- G est l'intersection des médianes $[IK]$ et $[LJ]$.



Exercice n°11

a) Thalès dans le triangle OEB : $(EB)\parallel(DF) \Rightarrow \frac{OE}{OF}=\frac{OB}{OD}=\frac{EB}{FD}=1 \Rightarrow OE=OF$ et $FD=EB$

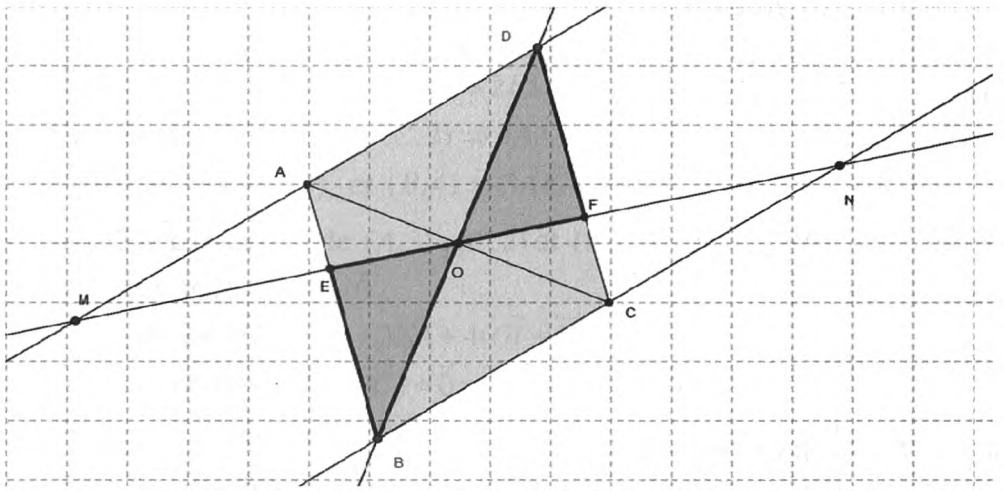
$OE=OF$ alors O=E*F.

Autrement :

- $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO})+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$ (car $O=A*C$)

  $\Leftrightarrow O=E*F$



b) EB=DF=2FC et (FC)//(EB) ⇒ EN= 2 FN ⇒ EF =FN

DF=EB=2AE et (DF)//(AE)⇒FM=2EM ⇒ EF = EM

Donc les points E et F partagent [MN] en trois segments de meme longeur.

c) **F=E*N** et (FC)//(EB) ⇒ C=N*B ⇒(DF) une mediane du triangle DBN

O=B*D⇒(NF) une mediane du triangle DBN

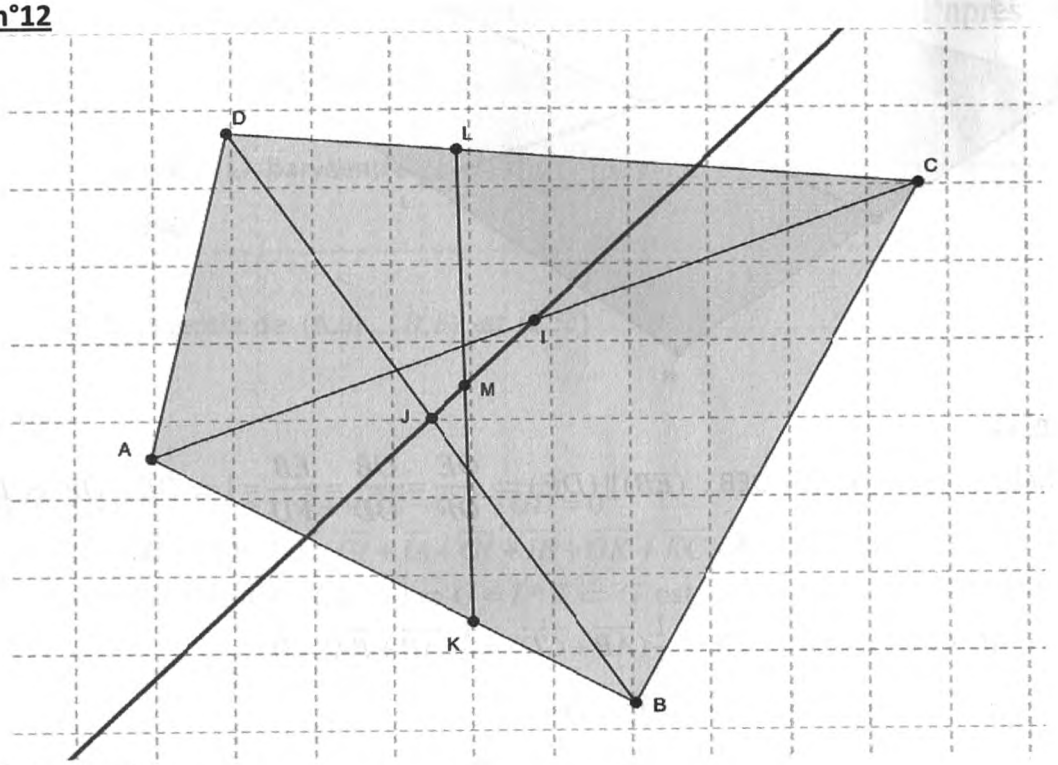
Alors le point F est l'intersection des medianes donc F est le centre de gravité du triangle BDN .

on a ABCD losange donc (BO)⊥(OC)

d'autre part on a : O est le milieu de [BD] et C le mileu de [BN] donc (DN)//(OC)

alors (BO)⊥(DN) donc BDN est un triangle rectangle en D.

Exercice n°12



Les hypothèses sont :

- $I = A*C : \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
- $J = B*D : \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$
- K barycentre de (A,1) et (B,2) : $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BK}$
- $M = L*K : \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML} = \vec{0}$
- $3\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0}$$

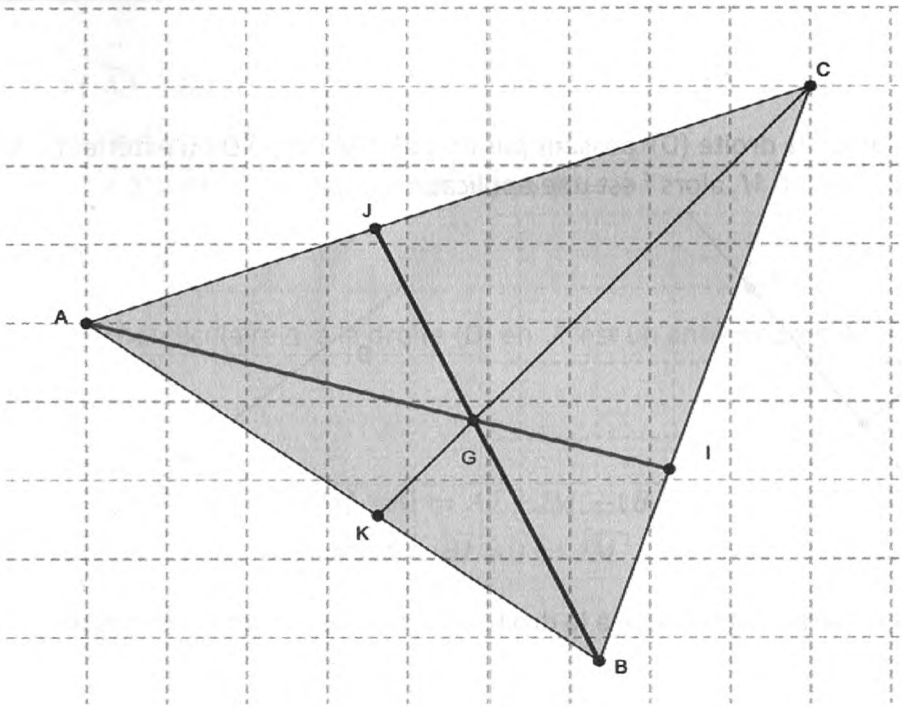
$$\Rightarrow (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MJ} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{JI} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ et par suite les points I,J et M sont alignés.

Exercice n°13



- I barycentre de $(B,2)$ et $(C,1) \Rightarrow 2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$
- J barycentre de $(A,3)$ et $(C,2) \Rightarrow 3\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{CJ}=\vec{0}$
- K barycentre de $(A,3)$ et $(B,4) \Rightarrow 3\overrightarrow{AK}+4\overrightarrow{BK}=\vec{0}$
- Soit G le barycentre de $(A,3)$, $(C,2)$ et $(B,4)$
  $\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+4(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})+2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC})=\vec{0}$
  $\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GI}+2(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GI}=\vec{0}$
  $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{IG} \Rightarrow G\in(AI)$
- $3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{GB}+3(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JA})+2(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC})=\vec{0}$
  $\Rightarrow 4\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GJ}+(3\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC})=\vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$
  $\Rightarrow 4\overrightarrow{GB}=5\overrightarrow{JG} \Rightarrow G\in(JB)$
- $3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GC}+3(\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KA})+4(\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KB})=\vec{0}$
  $\Rightarrow 2\overrightarrow{GC}+7\overrightarrow{GK}+(3\overrightarrow{KA}+4\overrightarrow{GK})=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GC}+7\overrightarrow{GK}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GC}=7\overrightarrow{KG} \Rightarrow G\in(KC)$

Conclusion : Les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

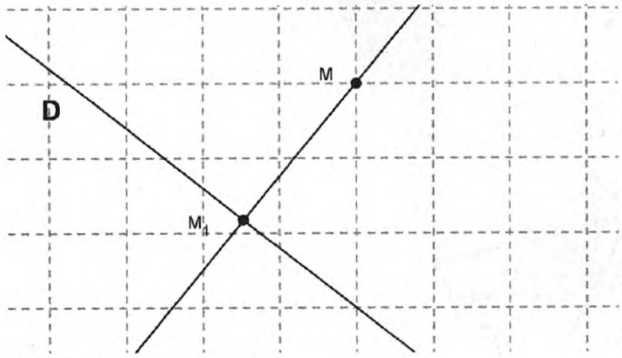
CHAPITRE 7

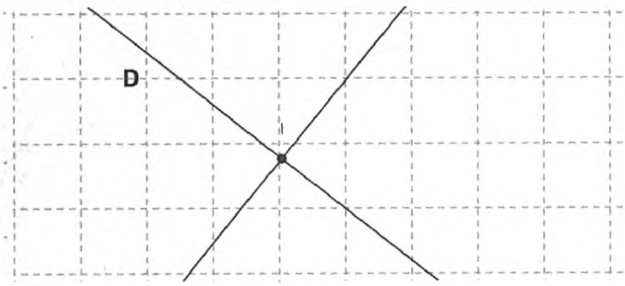
TRANSLATION (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

1)

a) La perpendiculaire à la droite (D) passant par un point M (M de D ou extérieur à D) est unique et coupe D en un seul point M_1 alors f est une application.



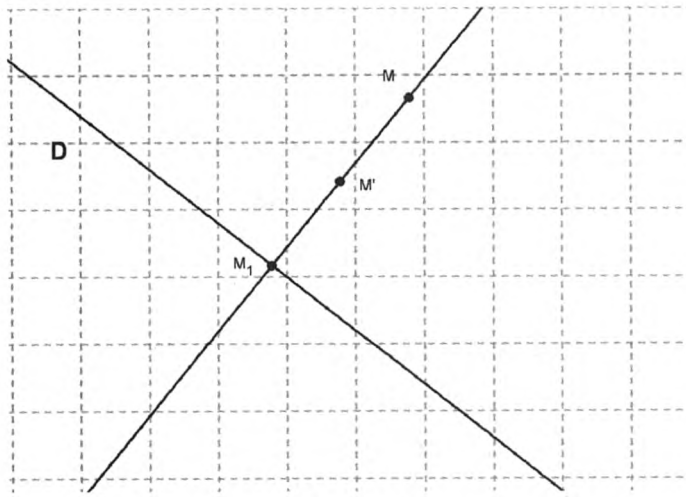


b) $I \in D \Rightarrow f(I) = I$

c) Tout point de la perpendiculaire Δ à la droite (D) en J' est un antécédents de J'.

2)

a)



b)

- $E \in D \Rightarrow f(E) = E$
- $E' = E * f(E) = E * E = E \Rightarrow g(E) = E$

c) Soit N' un point du plan.

- On construit de la perpendiculaire Δ à la droite (D) en N'
- Δ coupe (D) en un point N_1
- On construit $N = S_{N'}(N_1) \Rightarrow N$ est l'antécédent de N' par g.

Exercice n°2

1) M' barycentre des points pondérées (A,1) , (B,-1) et (C,1) signifie $\overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

a)

- $f(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AA'}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A'=S_A(B)$
- $f(B)=B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BB'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}=\vec{0} \Leftrightarrow B'=A$

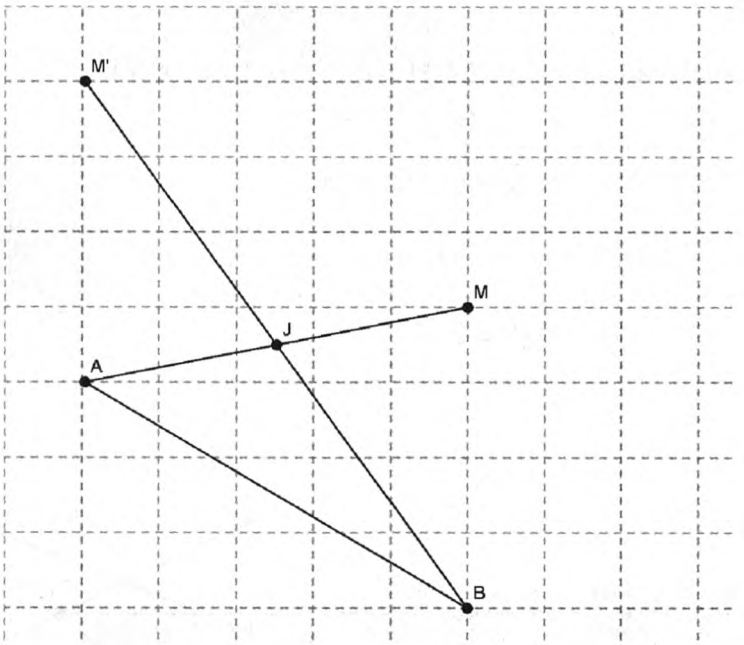
b) $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}\\ B'=A\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$

c) Tout point de la perpendiculaire Δ à la droite (D) en J' est un antécédents de J'.

2)

a)

- Soit J=A*M $\Rightarrow \overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$
- $f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{MM'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JM'}-(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JM'})+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JM'}=\vec{0}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{JM'}-\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{JM'}+\overrightarrow{JM'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM'}-\overrightarrow{BJ}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM'}=\overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow M'=S_J(B)$

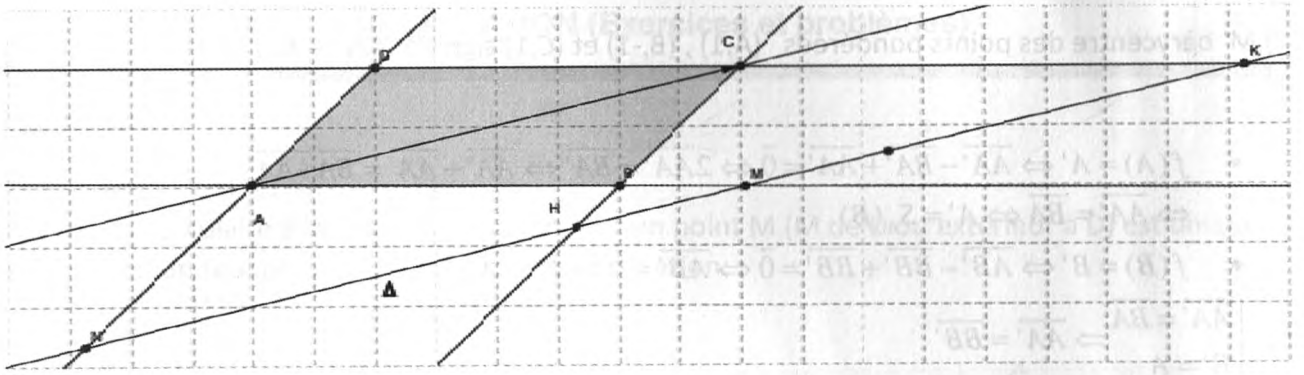


b) $f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{MM'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BM'}-\overrightarrow{AM'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{M'A} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M'=t_{\overrightarrow{BA}}(M)$: $f=t_{\overrightarrow{BA}}$

Exercice n°3



1)

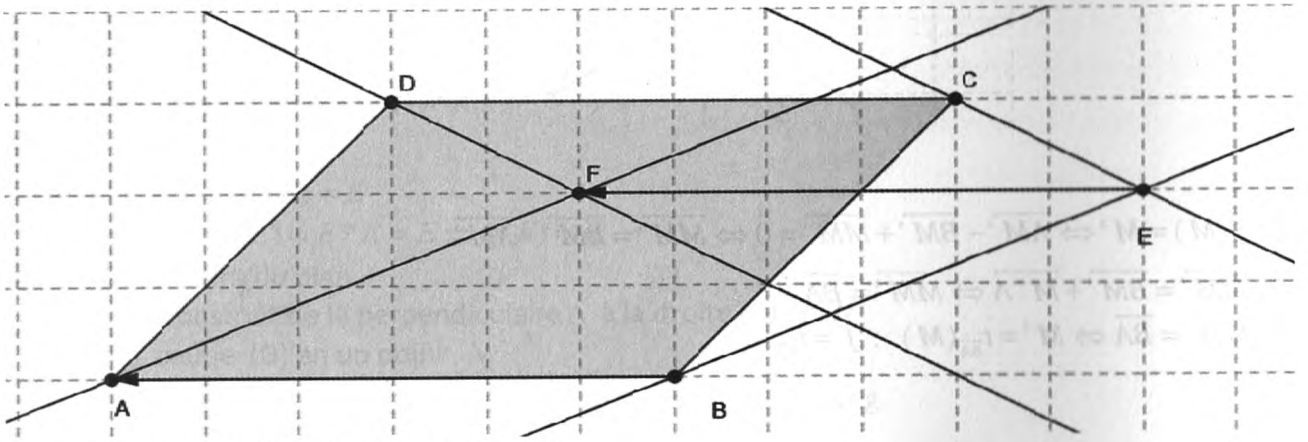
- $ABCD$ est un parallélogramme $\Rightarrow (AB)//(DC) \Rightarrow (AM)//(CK)$
- $\Delta//(AC) \Rightarrow (MK)//(AC)$
- $\begin{cases}(AM)//(CK)\\(MK)//(AC)\end{cases} \Rightarrow AMKC$ est un parallélogramme
- $AMKC$ est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AC}}(M) = K$

2)

- $ABCD$ est un parallélogramme $\Rightarrow (AD)//(BC) \Rightarrow (AN)//(CH)$
- $\Delta//(AC) \Rightarrow (NH)//(AC)$
- $\begin{cases}(AN)//(CH)\\(NH)//(AC)\end{cases} \Rightarrow ACHN$ est un parallélogramme
- $ACHN$ est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AC}}(N) = H$
- $\begin{cases}t_{\overrightarrow{AC}}(N) = H\\t_{\overrightarrow{AC}}(M) = K\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KH} \Rightarrow MN = KH$

$\begin{cases}t_{\vec{u}}(A) = E\\t_{\vec{u}}(B) = F\end{cases} \Rightarrow EF = AB$

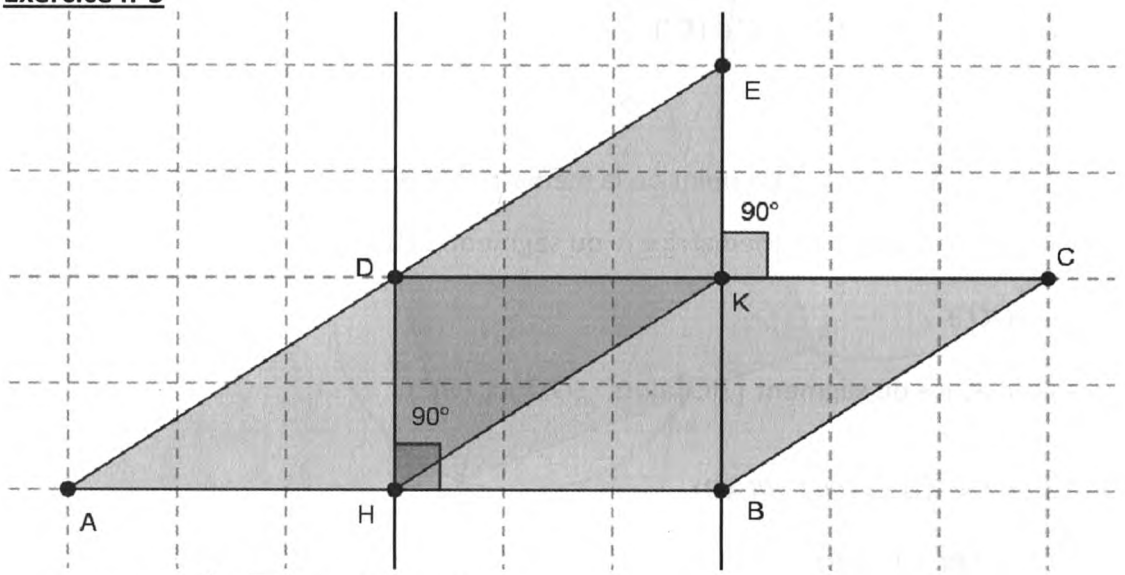
Exercice n°4



- D_1 : La parallèle à (BE) passant par A .
- D_2 : La parallèle à (CE) passant par D .
- $t_{\overrightarrow{BA}}(BE)$ est la parallèle à (BE) passant par l'image de B qui est A $\Rightarrow t_{\overrightarrow{BA}}(BE) = D_1$.

- $t_{\overrightarrow{BA}}(CE) = t_{\overrightarrow{CD}}(CE)$ (car ABCD est un parallélogramme) $\Rightarrow t_{\overrightarrow{BA}}(CE)$ est la parallèle à (CE) passant par l'image de C qui est D $\Rightarrow t_{\overrightarrow{BA}}(CE) = D_2$
- $\begin{cases} \overrightarrow{BA}(BE) = D_1 \\ \overrightarrow{BA}(CE) = D_2 \\ (BE) \cap (CE) = \{E\} \\ D_1 \cap D_2 = \{F\} \end{cases} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BA}}(E) = F \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$

Exercice n°5



- Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow t_{\vec{u}}(A) = D$
- $S_D(A) = E \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow t_{\vec{u}}(D) = E$
- ABCD est un parallélogramme alors : $(DC)//(AB)$
- $\begin{cases} (DC)//(AB) \\ (EK) \perp (DC) \end{cases} \Rightarrow (EK) \perp (AB)$
- $\begin{cases} (DH) \perp (AB) \\ (EK) \perp (AB) \end{cases} \Rightarrow (EK)//(DH)$
- $t_{\vec{u}}(DH)$ est la parallèle à (DH) passant par l'image de D qui est E $\Rightarrow t_{\vec{u}}((DH)) = (EK)$
- $t_{\vec{u}}(AB)$ est la parallèle à (AB) passant par l'image de A qui est D $\Rightarrow t_{\vec{u}}((AB)) = (DC)$
- $\begin{cases} t_{\vec{u}}((DH)) = (EK) \\ t_{\vec{u}}((AB)) = (DC) \\ (AB) \cap (DH) = \{H\} \end{cases} \Rightarrow t_{\vec{u}}(H) \in (EK) \cap (DC) \Rightarrow t_{\vec{u}}(H) = K$
- $\begin{cases} t_{\vec{u}}(H) = K \\ t_{\vec{u}}(D) = E \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HK} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HK} \Rightarrow$ DEKH est un parallélogramme.

Exercice n°6

1)

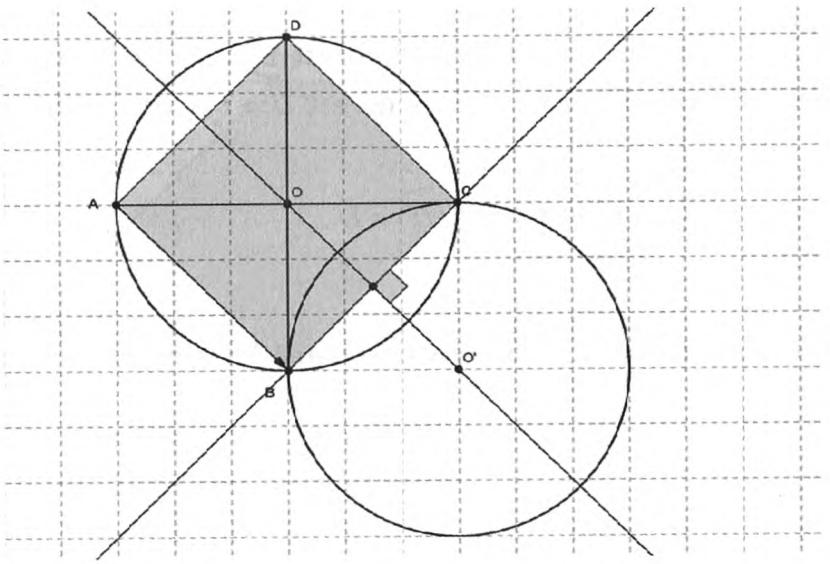
- $ABCD$ est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$
- $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \\ t_{\overrightarrow{AB}}((C)) = (C') \Rightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(A) \in (C') \Rightarrow B \in (C') \\ A \in (C') \end{cases}$
- $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C \\ t_{\overrightarrow{AB}}((C)) = (C') \Rightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(D) \in (C') \Rightarrow C \in (C') \\ D \in (C) \end{cases}$

2)

- $C \in (C') \Rightarrow O'C = O'B \Rightarrow O'$ est un point de la médiatrice Δ du segment $[BC]$
- $OC = OB \Rightarrow O$ est un point de la médiatrice Δ du segment $[BC]$
- $\begin{cases} O \in \Delta \\ O' \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (OO')$
- (OO') est la médiatrice du segment $[BC]$ alors $(OO') \perp (BC)$

3)

- $t_{\overrightarrow{AB}}(O) = O' \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow (OO') // (AB)$
- $\begin{cases} (OO') \perp (BC) \\ (OO') // (AB) \end{cases} \Rightarrow (BC) \perp (AB)$
- $OC = OB \Rightarrow O$ est un point de la médiatrice Δ du segment $[BC]$
- $\begin{cases} O \in \Delta \\ O' \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (OO')$
- ABCD est un parallélogramme tel que $(BC) \perp (AB) \Rightarrow$ ABCD est un rectangle.



Exercice n°7

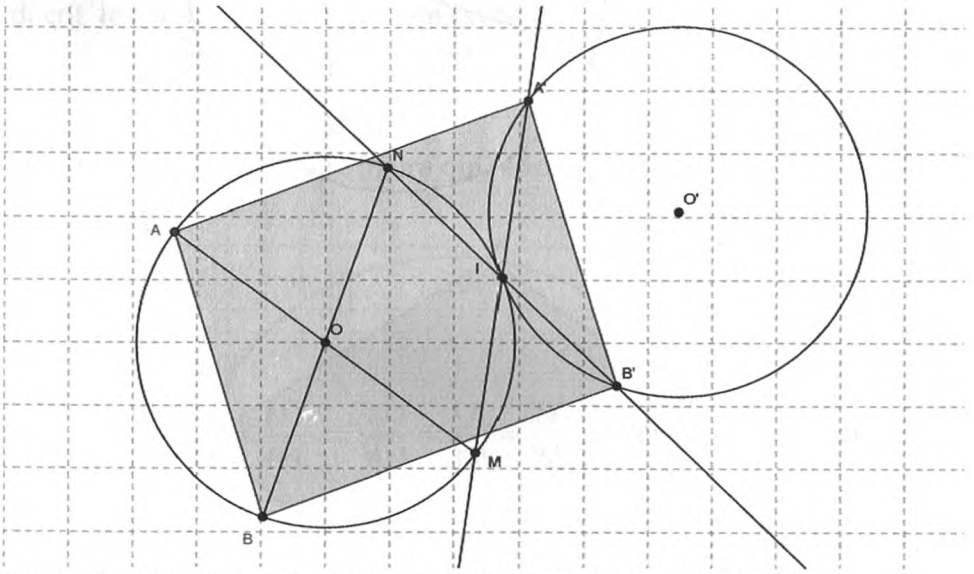
1)

a) Soit I=O*O' $\Rightarrow (C') = S_I(C)$

b) Soit Δ la médiatrice du segment $[OO'] \Rightarrow (C') = S_\Delta(C)$

c) $(C') = t_{\overrightarrow{OO'}}(C)$

2)



$S_I(N) = B'$ (car S_I transforme (C) en (C') et conserve la droite (IN)) et $S_I(M)=A'$

$\Rightarrow$ I=N*B'=M*A' $\Rightarrow$ NMB'A' est un parallelogramme $\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{A'B'}$

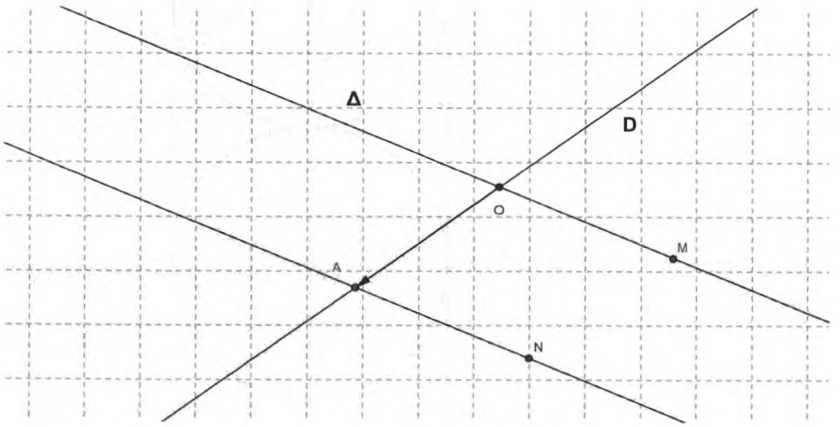
D'autre part ABMN est un parallelogramme $\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB}$

Ce qui donne $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et Par suite AA'B'B est un parallelogramme.

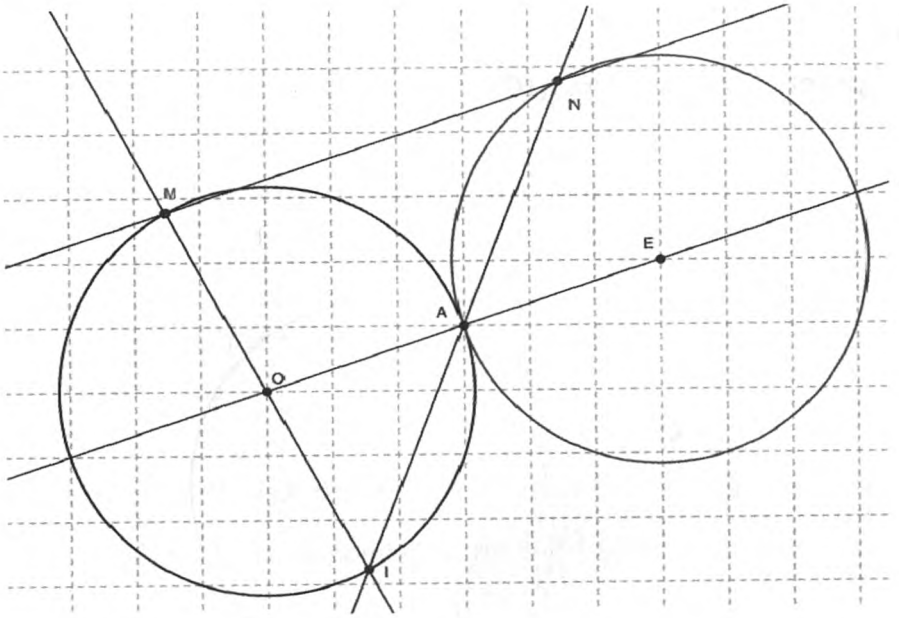
Exercice n°8

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow$ OANM est un parallélogramme $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow N = t_{\overrightarrow{OA}}(M)$

M décrit Δ et N=$t_{\overrightarrow{OA}}(M)$ $\Rightarrow$N décrit $t_{\overrightarrow{OA}}(\Delta)$$\Rightarrow$N décrit la parallèle à Δ passant par A.

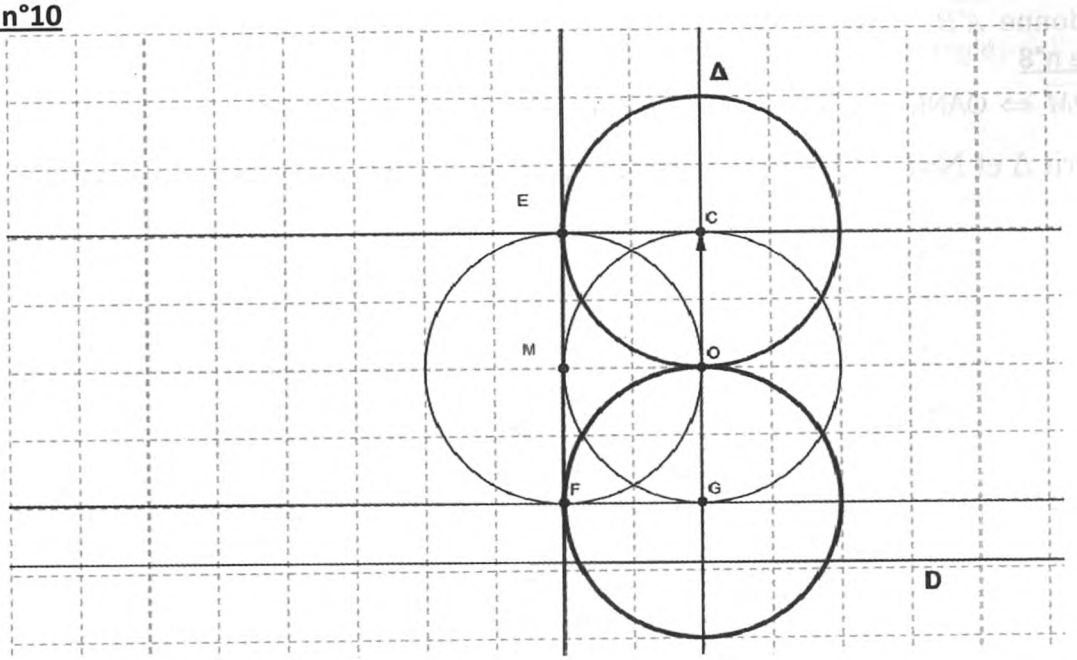


Exercice n°9



- INM triangle, $(OA)//(MN) \Rightarrow \frac{IA}{IN} = \frac{IO}{IM} = \frac{OA}{MN} \Rightarrow \frac{OA}{MN} = \frac{IO}{IM} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = 2OA$
- $\begin{cases} MN = 2OA \\ (MN)//(OA) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow N = t_{2\times\overrightarrow{OA}}(M)$
- Soit $E = S_A(O) \Rightarrow \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow E = t_{2\overrightarrow{OA}}(O)$
- $\begin{cases} N = t_{2\overrightarrow{OA}}(M) \\ M\ décrit\,(C) \end{cases} \Rightarrow N\ décrit\ t_{2\overrightarrow{OA}}(C) \Rightarrow \Rightarrow N\ décrit\ le\ cercle\ (C')\ de\ centre\ E\ et\ de\ rayon\ r$

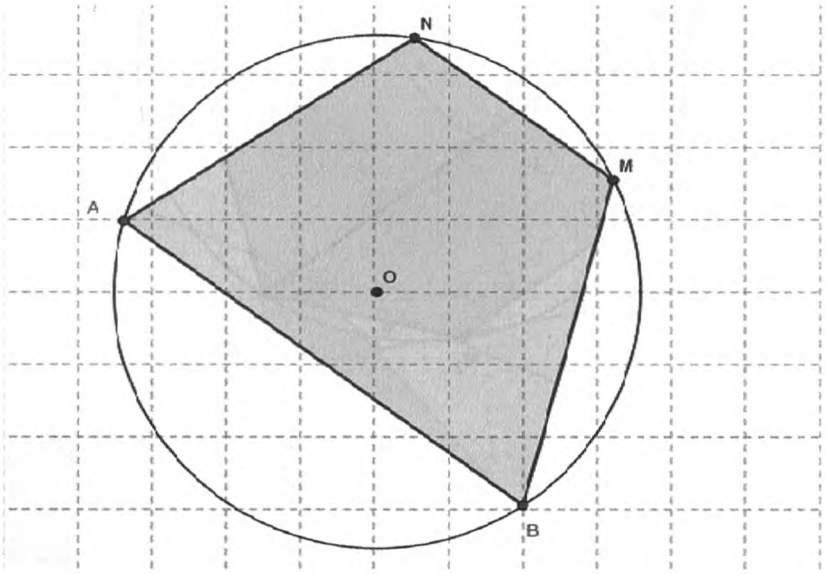
Exercice n°10



- Δ est la perpendiculaire à D passant par O.
- Δ coupe (C) en deux points C et G .
- $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow E = t_{\overrightarrow{OC}}(M) \Rightarrow E$ décrit le cercle de centre C et de rayon R lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon R.
- $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{OG} \Rightarrow F = t_{\overrightarrow{OG}}(M) \Rightarrow F$ décrit le cercle de centre G et de rayon R lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon R.

Exercice n°11

La 1 ère étape : réalisation d'une figure qui répond à la question :



La seconde étape : Analyse de la figure :

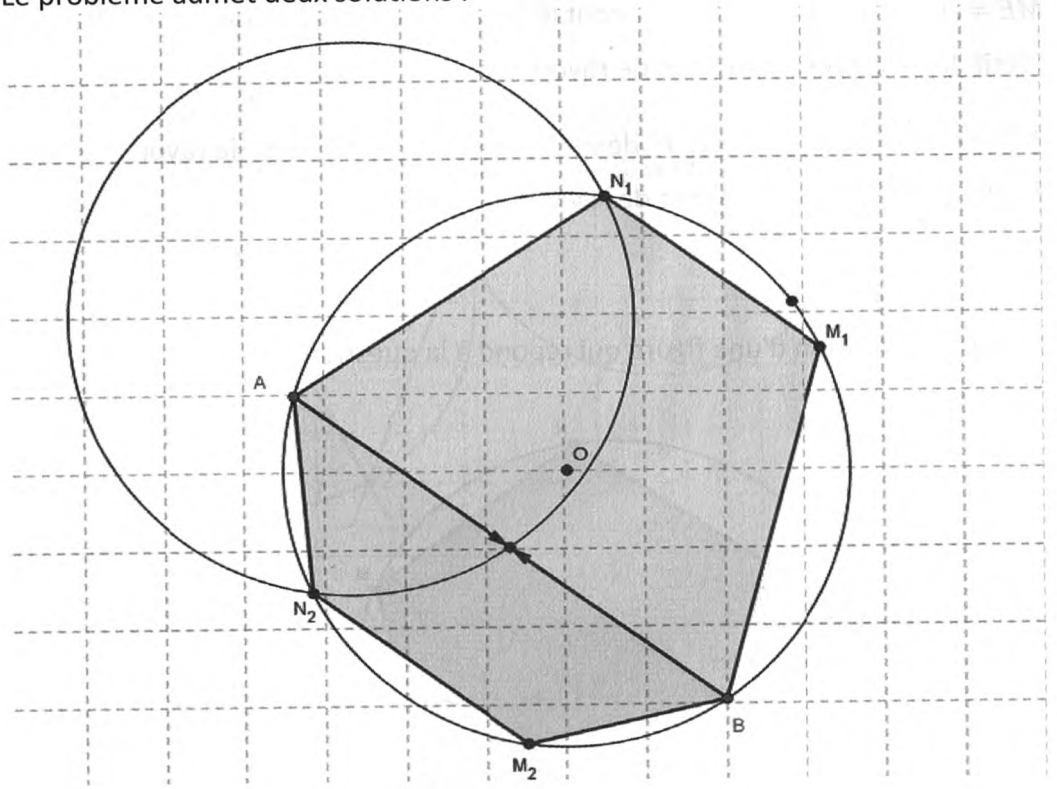
- (ABMN est un trapèze de base $[AB]$ **et** $[MN]$ de plus AB =2MN alors $N = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(M)$
- Posons $((C')) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(C)$ alors $N \in (C) \cap (C')$ et $M = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(N)$

La troisième étape : Les étapes de la construction **:**

- On construit $((C')) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(C)$
- On constate que $(C) \cap (C') = \{N_1, N_2\}$ $(\frac{1}{2}AB \prec AB)$
- On construit $(M_1) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(N_1)$
- On construit $(M_2) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(N_2)$
- On construit le trapèze ABM_1N_1
- On construit le trapèze ABM_2N_2

Conclusion :

Le problème admet deux solutions :



CHAPITRE 8

HOMOTHETIE (Exercices et problèmes)

Exercice n°1

- M' est le barycentre des points (A,2) et (M,3)

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{M'A}+3\overrightarrow{M'M}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{M'A}+3\overrightarrow{M'A}+3\overrightarrow{AM}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{M'A}=3\overrightarrow{MA}$

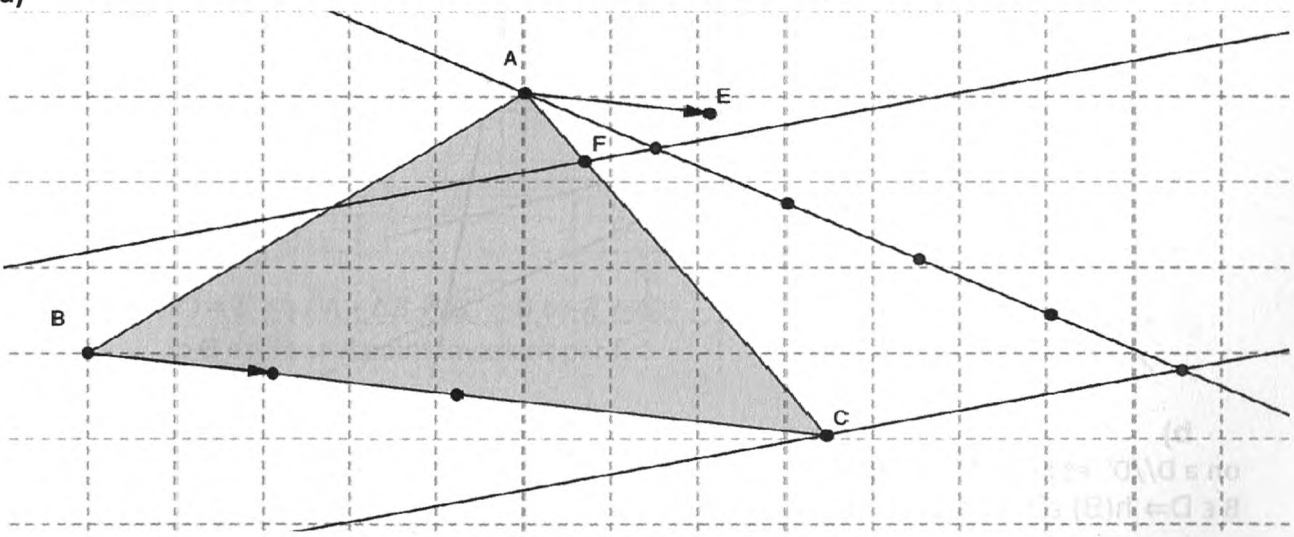
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M'=h(A,\frac{3}{5})(M)$

- $\overrightarrow{MM'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow M'=h(A,\frac{2}{3})(M)$

Exercice n°2

a)



b)

- $4\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CF}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+BC$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{AE}-4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{BF}=4(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=4(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})=4\overrightarrow{BE}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow F=h(B,\frac{4}{5})(E)$

Exercice n°3

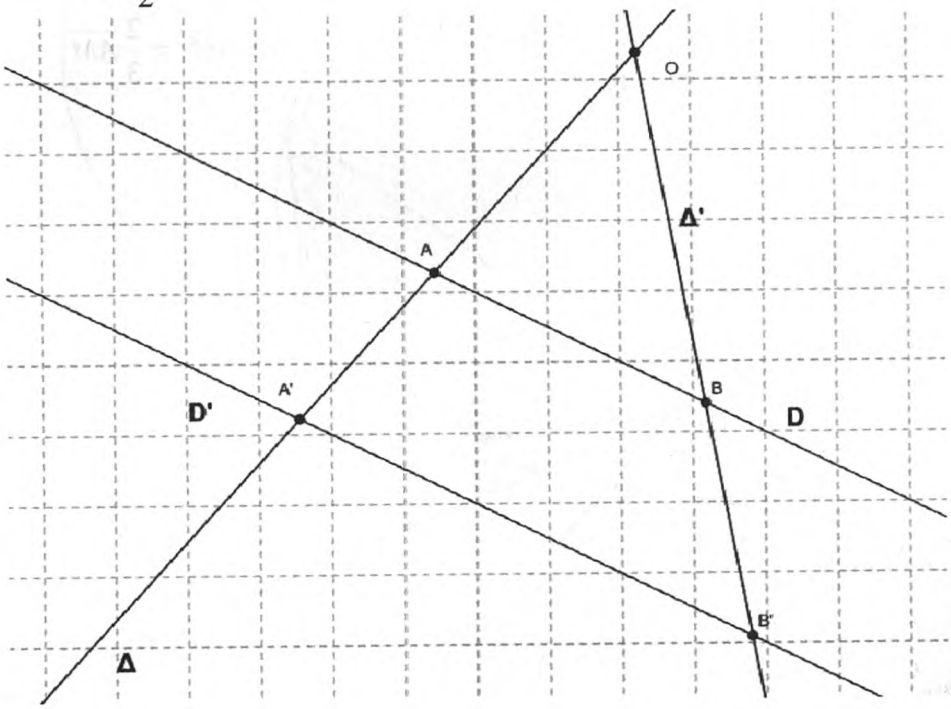
a)

$h(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A0} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$



b)

on a D//D' et h(A)=A' ⇒ h(D) =D'

B ϵ D⇒ h(B) ϵD' et h(B)ϵΔ' donc h(B)=B'

Exercice n°4

a)

$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OM}$

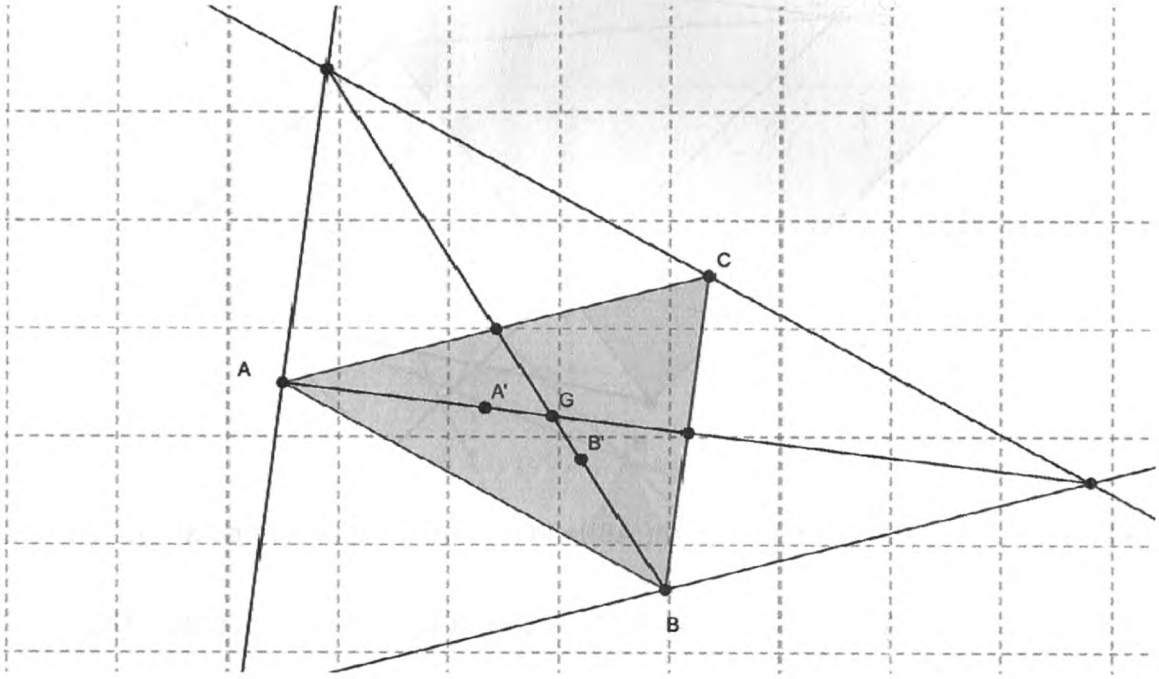
b)

- $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow MM' = 2OM$
- $\Gamma = \{M / MM' = 8\}$
- $M \in \Gamma \Leftrightarrow MM' = 8 \Leftrightarrow 2OM = 8$
  $\Leftrightarrow OM = 4 \Leftrightarrow \Gamma = (C(O,4))$: Le cercle de centre O et de rayon 4

Exercice n°5

a)

- $f(A) = A' \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- $f(B) = B' \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$



b)

$f(E) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow E = G$

$\Rightarrow$ G est le seul point invariant par f.

c)

$f(M) = M' \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$

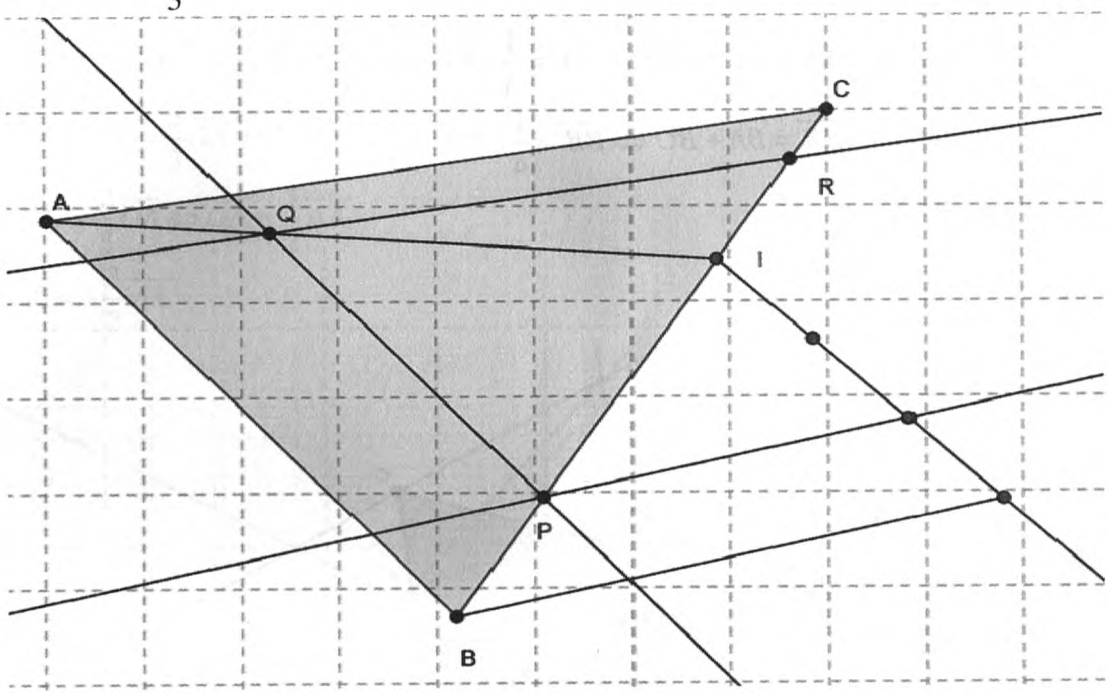
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{GM'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow f$ est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{4}$.

Exercice n°6

a) $P = h(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$



b)

- IAB triangle, (PQ)//(AB) et h(B)=P ⇒h((AB))=(PQ)⇒h(A)ϵ(PQ) et comme h(A)ϵ(IA)⇒h(A)=Q

- IAC triangle, (RQ)//(AC) et h(A)=Q ⇒h((AC))=(RQ)⇒h(C)ϵ(RQ) et comme h(C)ϵ(IC)⇒h(C)=R

c)

$$\begin{cases} h(B) = P \\ h(C) = R \\ I = B * C \end{cases} \Rightarrow h(I) = P * R \Rightarrow I = P * R$$

Exercice n°7

a) M' barycentre des points pondérées (A,1), (B,-2) et (M,3) $\Rightarrow \overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{BM'} + 3\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$

- $h(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{BA'} + 3\overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{BA'}$

  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA'} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA}$

  $\Leftrightarrow A' = S_A(B)$

- $h(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} - 2\overrightarrow{BB'} + 3\overrightarrow{BB'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BB'}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow B' = B * A$

- $h(C)=C' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}-2\overrightarrow{BC'}+3\overrightarrow{CC'}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}-2\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CC'}+3\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

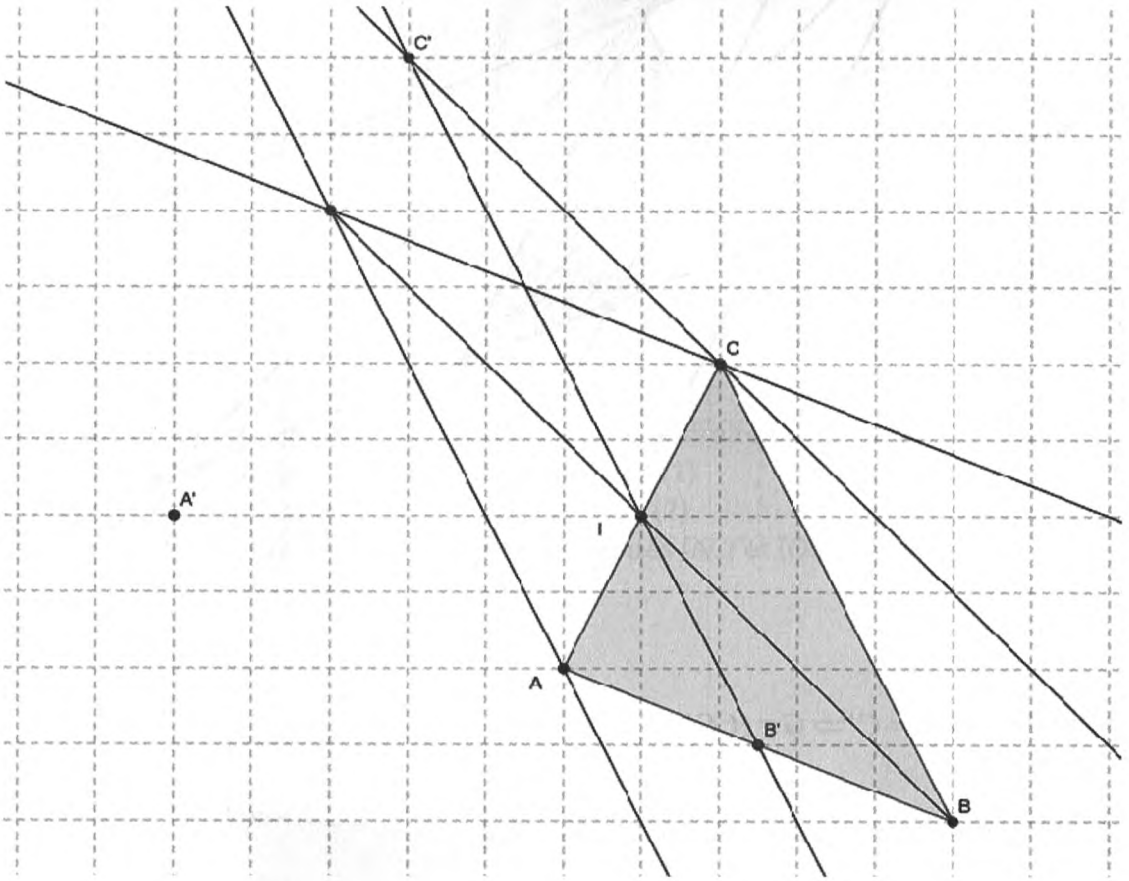
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CC'}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{2CC'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{2CC'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{2CC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

- Soit le point I tel que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BI} \Rightarrow C'=t_{\overrightarrow{BI}}(C)$

  (I=A*C)

-



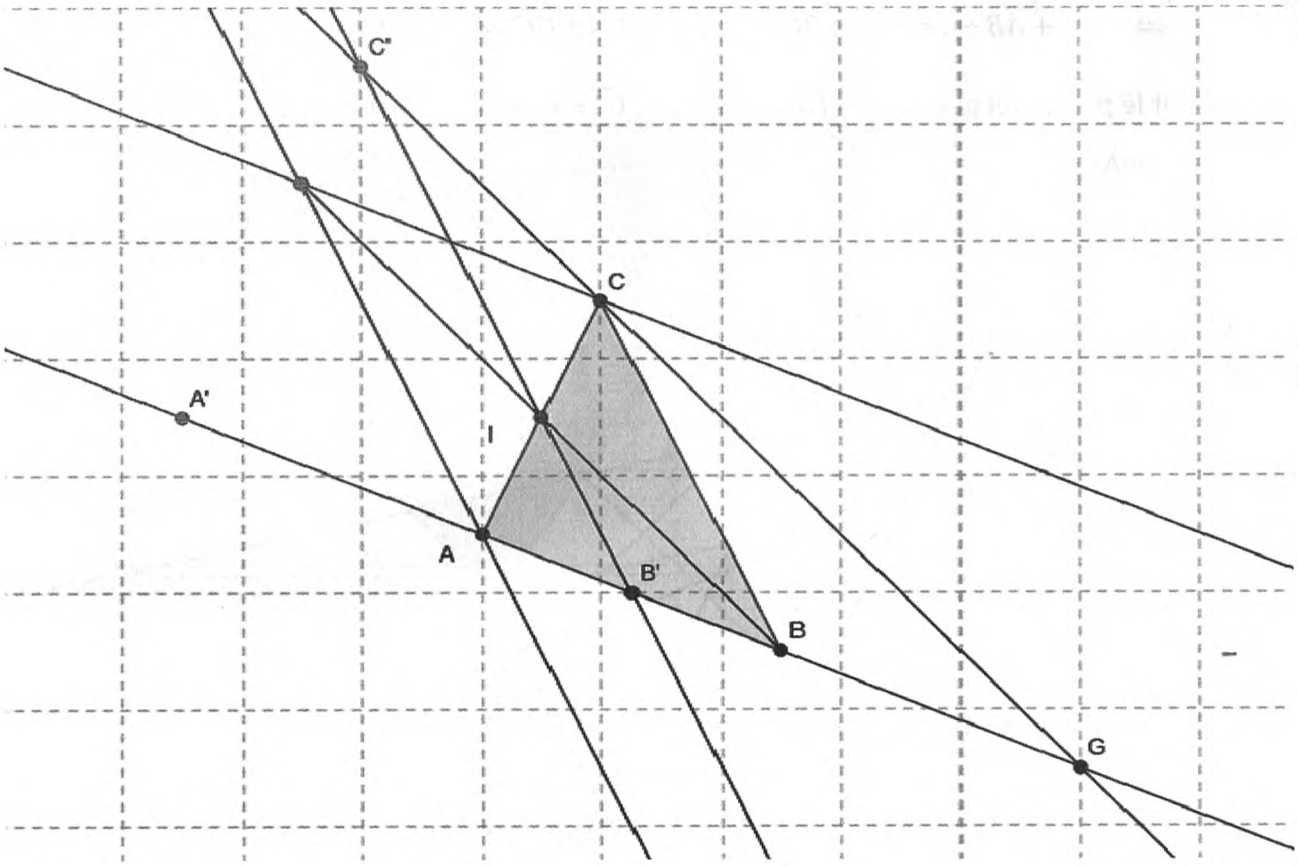
b)

- Soit G le barycentre de (A,1) et (B,-2) : $\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

- $h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}-2\overrightarrow{BM'}+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM'}-2\overrightarrow{BG}-2\overrightarrow{GM'}+3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GM'}=\vec{0}$

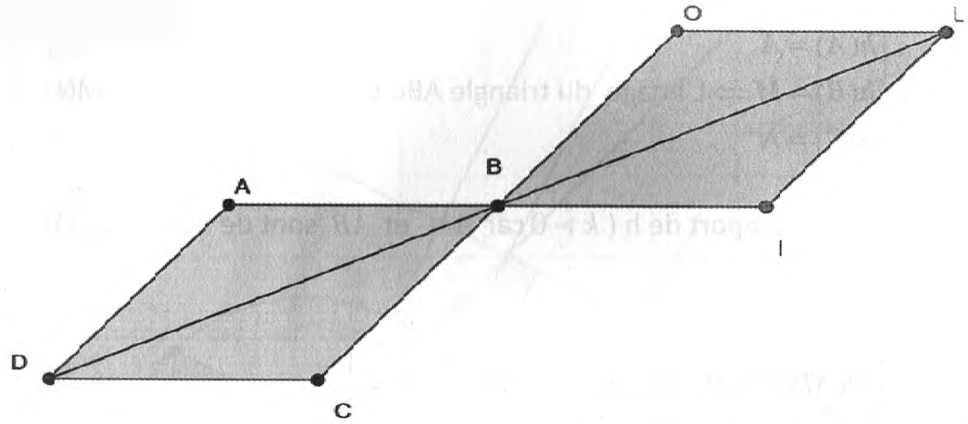
  $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow M'=h(G,\frac{3}{2})(M)$



c)

- Soit G le centre de h: $h(C) = C' \Rightarrow G \in (CC')$
- $h(A) = A' \Rightarrow G \in (AA')$
- $\begin{cases} G \in (CC') \\ G \in (AA') \end{cases} \Rightarrow G$ est le point d'intersection de (CC') et (AB).
- Soit k le rapport de h : k=$\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2}$

Exercice n°8



L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Soit h l'homotétie de centre B qui transforme L en D

(IL)//(BO)//(DA)⇒ h((IL))=(AD) (car h((IL)) est une droite passant par A et // à (IL))

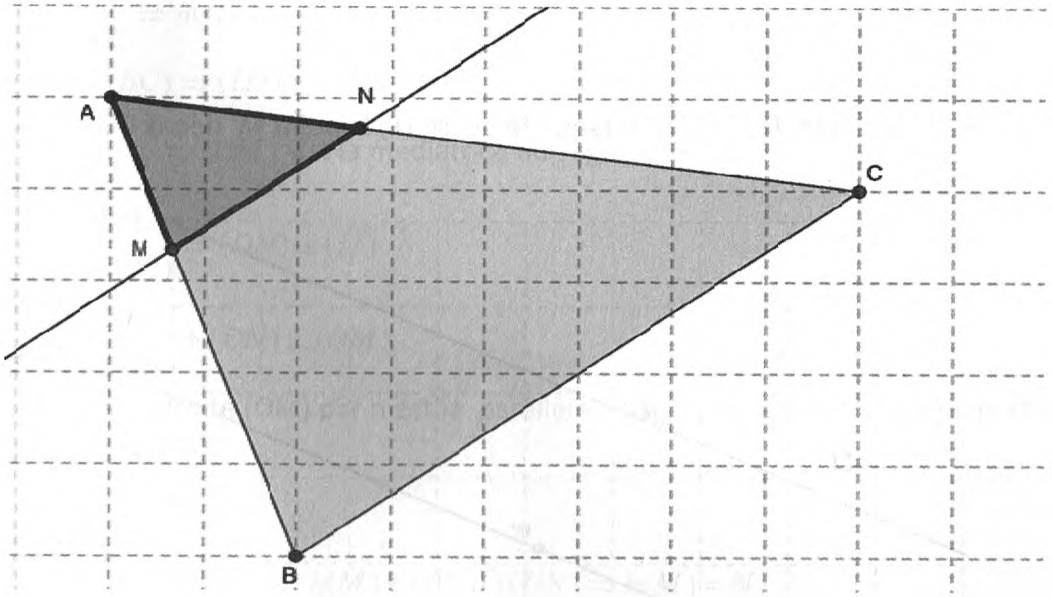
⇒ h(I) ϵ (AD) et comme h(I) ϵ(BI) Donc h(I)=A (1)

On montre de meme que h(O)=C (2)

(1) et (2) ⇒ h((OI))= (AC) et par suite les droites (AC) et (OI) sont parallèles

Exercice n°9

a)



(MN) // (BC) ⇒ l'homothétie h de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N .

- $\begin{cases} h(A) = A \\ h(B) = M \\ h(C) = N \end{cases}$ ⇒ L'image du triangle ABC par h est le triangle AMN

- Soit k le rapport de h ($k \succ 0$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens)

- $\frac{1}{3}P(ABC) = P(AMN) = kP(ABC) \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

Conclusion : pour que le périmètre du triangle AMN soit le tiers de celui de ABC il faut Choisir M l'image de B par l'homotétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(AMN) = k^2 Aire(ABC) \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow M = A * B$

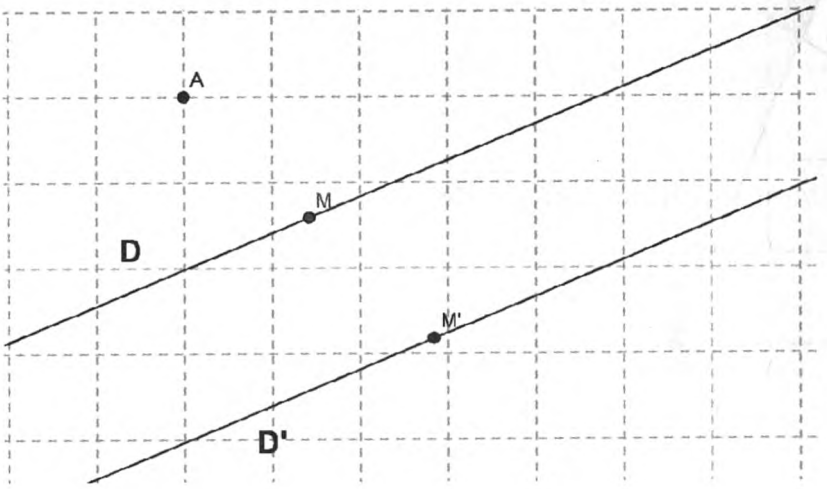
Conclusion : pour que l'aire du triangle AMN soit le quart de celui de ABC il faut Choisir M l'image de B par l'homotétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

Exercice n°10

- $S_M(A) = M' \Leftrightarrow M = A * M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

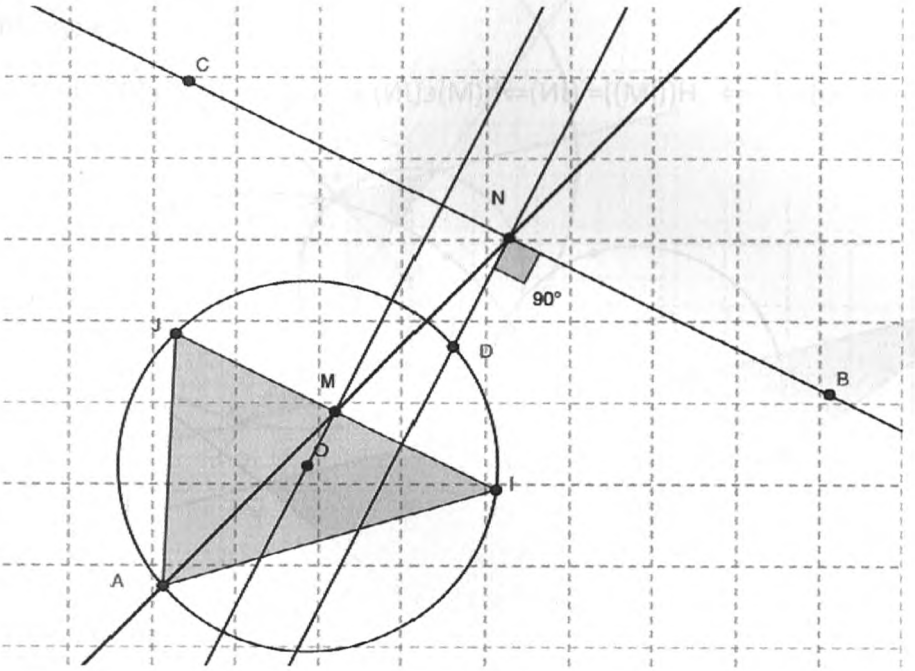
  $\Leftrightarrow M' = h(A,2)(M)$

- Soit la droite $D' = h(D)$ lorsque M décrit D , le point M' décrit D'.



Exercice n°11

1)



- $B = S_I(A) \Rightarrow I = A*B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow h(I) = B$
- $C = S_J(A) \Rightarrow J = A*C \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ} \Rightarrow h(J) = C$
- $O = A*D \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} \Rightarrow h(O) = D$

2)

- $\begin{cases} h(I) = B \\ h(J) = C \end{cases} \Rightarrow h((IJ)) = (BC)$
- $h((IJ)) = (BC) \Rightarrow (IJ) // (BC)$
- $\begin{cases} OI = OJ = r \\ M = I*J \end{cases} \Rightarrow (OM)$ est la médiatrice du segment $[IJ] \Rightarrow (OM) \perp (IJ)$
- $\begin{cases} (IJ) // (BC) \\ (DN) \perp (BC) \end{cases} \Rightarrow (DN) \perp (IJ)$
- $\begin{cases} (OM) \perp (IJ) \\ (DN) \perp (IJ) \end{cases} \Rightarrow (DN) \perp (OM)$
- L'image de la droite (OM) par h est la parallèle à (OM) passant par D image de O par h alors h(OM)=(DN).

3)

- $\begin{cases} h(IJ) = (BC) \\ h(OM) = (DN) \\ (IJ) \cap (OM) = \{M\} \end{cases} \Rightarrow h(M) \in (BC) \cap (DN) \Rightarrow h(M) = N$
- $h(M) = N \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow$ les points A,N et M sont alignés.

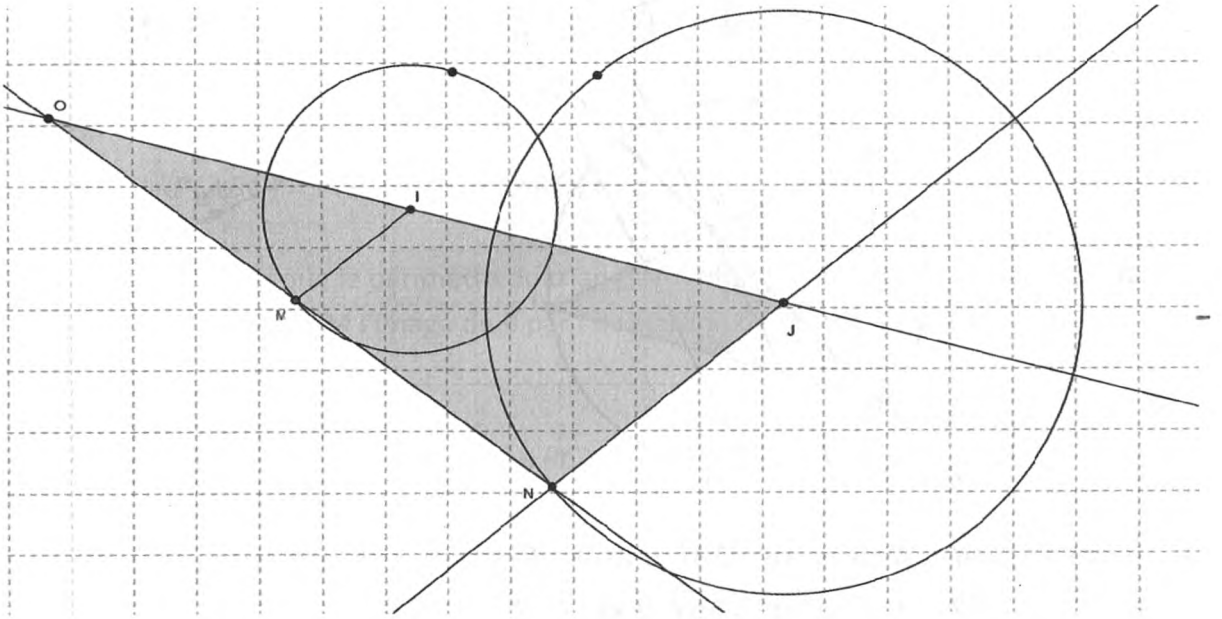
Exercice n°12

1)

- h l'homothétie de centre O qui transforme I en J.

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

(IM)//(JN) et h(I)= J ⇒ H((IM))= (JN)⇒h(M)ϵ(JN) et comme h(M)ϵ(OM)ϵh(M)=N



2) on a h(I)=J et h(M)=N donc l'image du cercle (C_1) de centre le point I et passant par M est le cercle de centre le point J et passant par N Donc h((C_1))= (C_2).

Exercice n°13

on choisi un entier naturel n suffisament grand pour que le quadrilatère AB'C'D' image de ABCD par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{n}$ soit sur la feuille puis on trace l'image de (B'D') par l'homothétie h de centre A et de rapport n. h((B'D'))= (BD)

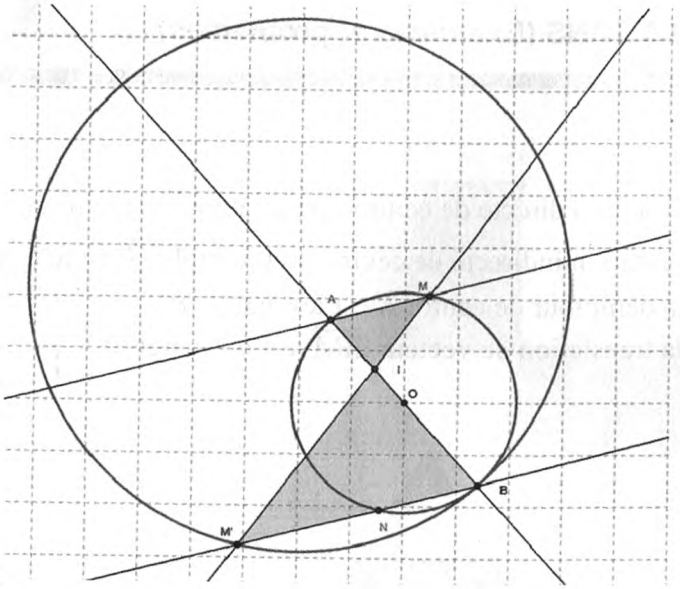
Exercice n°14

On a : O =A*B=M*N ⇒ (MA)//(BN)

⇒ l'homothétie h de centre I et qui transforme A en B transforme M sur la droite (BN)

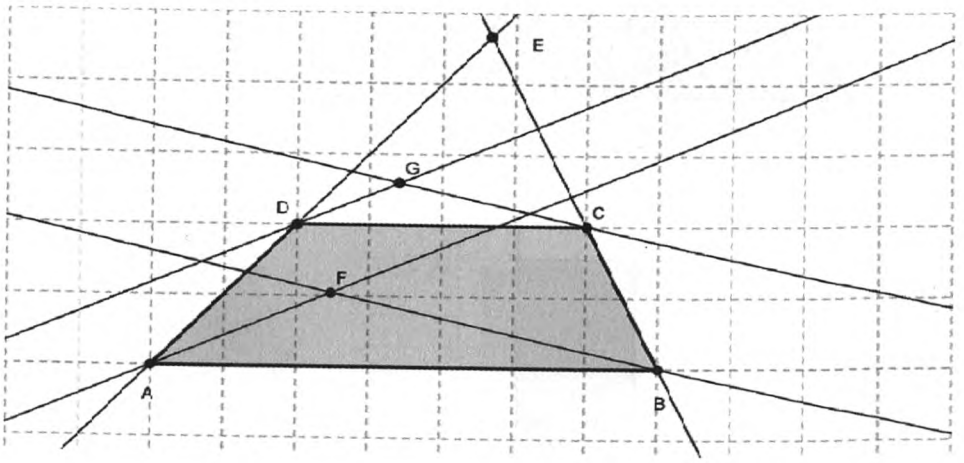
Et comme h(M) ϵ(IM) donc h(M)=M'

L'orsque M décrit (C) alors M' décrit l'image de (C) par h.



Exercice n°15

a) L'image de (AF) par h est la parallèle à (AF) passant par D image de A par h donc l'image de (AF) par h est la droite (DG).



b)

h(A)= D et (AB)//(DC) ⇒h(B)∈(DC) et comme h(B)∈(EB) **Alors** h(B)= C

- L'image de (BF) par h est la parallèle à (BF) passant par C image de B par h donc l'image de (BF) par h est la droite (CG).

c)

- $F \in (AF) \cap (BF) \Rightarrow h(F) \in h(AF) \cap h(BF)$

  $\Rightarrow h(F) \in (DG) \cap (CG) \Rightarrow h(F) = G$
- $h(F) = G \Rightarrow \overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EG} \Rightarrow$ Les points E,F et G sont alignés.

CHAPITRE 9

ROTATIONS (Exercices et problèmes)

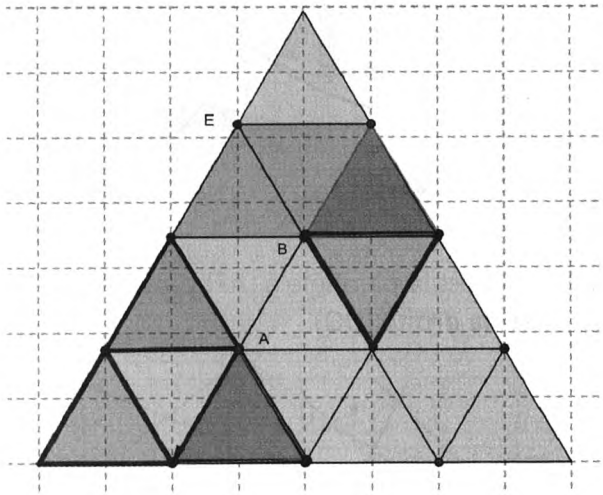
Exercice n°1

a) l'image du triangle 2 par la rotation directe de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est le triangle 3

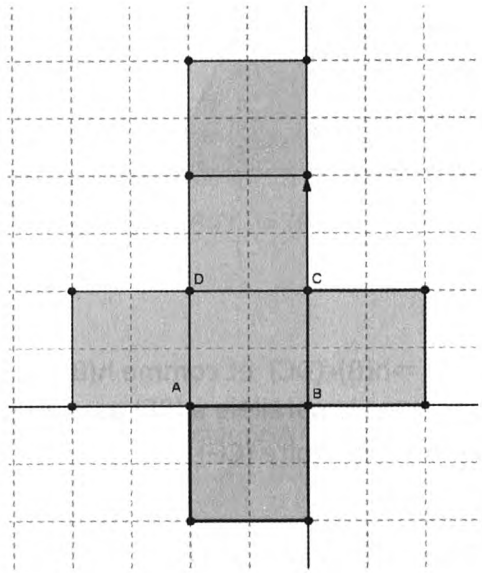
b) l'image du triangle 5 par la rotation indirecte de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le triangle 7.

c) l'image du triangle 10 par la demi tour de centre A est le triangle 8

d) l'image du triangle 4 par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$ est le triangle 12



Exercice n°2



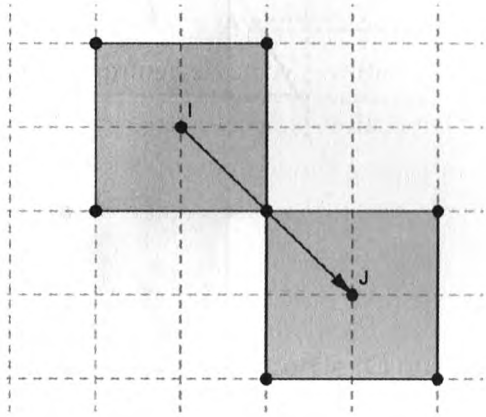
La figure obtenue est le patron d'un cube

Exercice n°3

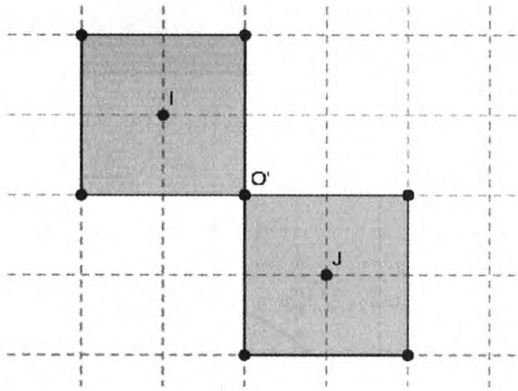
1)

a)

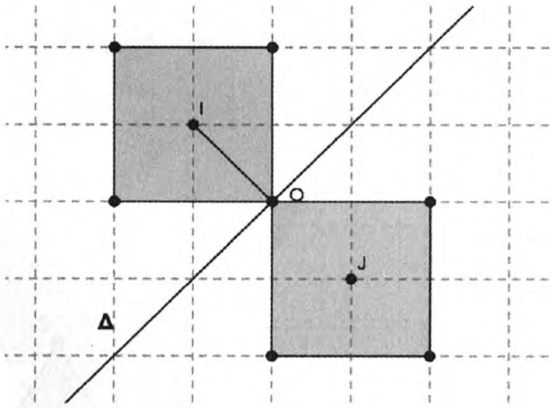
- $T = t_{\overrightarrow{IJ}}$



- $S = S_O$



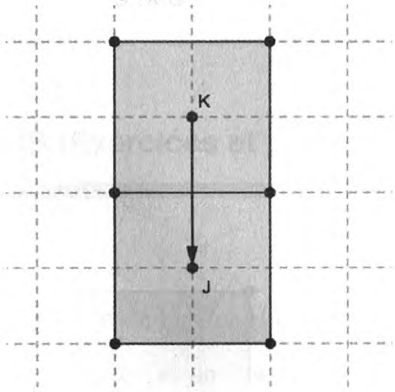
- $S = S_\Delta$



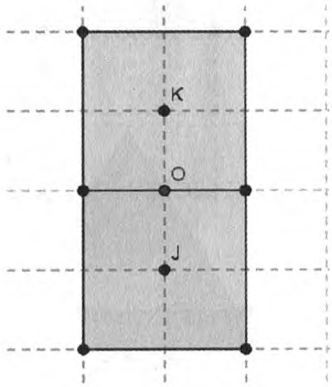
b) $R = S_O = R(O, \pi)$

2)

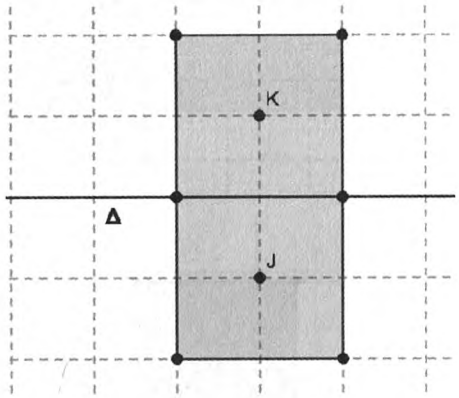
- $T = t_{\overrightarrow{KJ}}$



- $S = S_O$



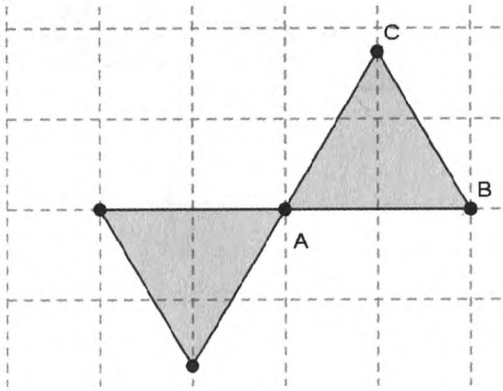
- $S = S_\Delta$



- $R = S_O = R(O, \pi)$

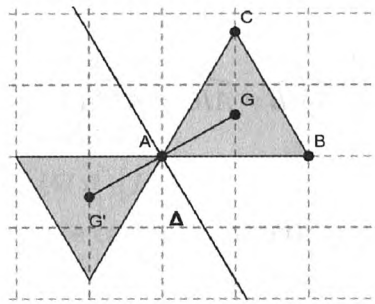
3)

- $S = S_O$



- $R = S_O = R(O, \pi)$

- $S = S_{\Delta}$

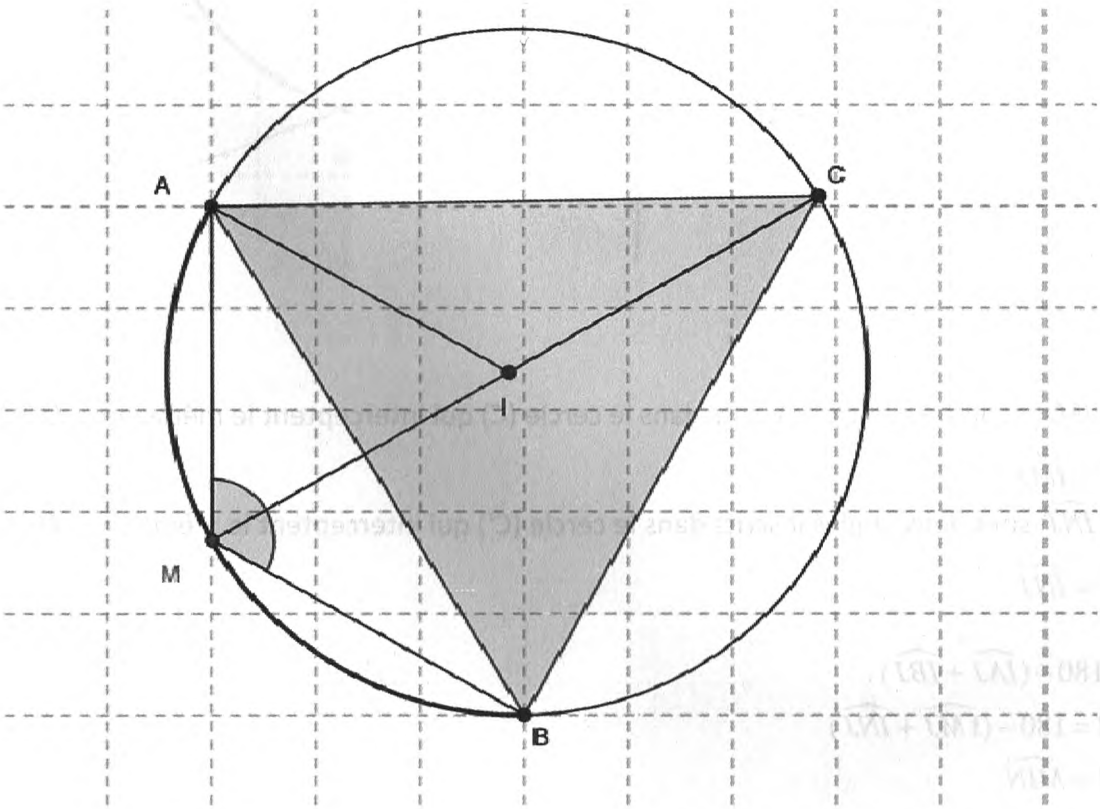


Exercice n°4

1) $\widehat{AMB} = \pi - \widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Autrement :

- $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C) qui interceptent le même arc $\left[\widehat{BC}\right] \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$
- $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ABC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C) qui interceptent le même arc $\left[\widehat{AC}\right] \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$
- $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{CMB} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



2)

a) $\begin{cases} r(A)=A \\ r(M)=I \Rightarrow r(\widehat{AMB})=\widehat{AIC} \Rightarrow \widehat{AMB}=\widehat{AIC}=\widehat{AMB}=\dfrac{2\pi}{3} \\ r(B)=C \end{cases}$

Une rotation conserve les angles

b)

- $r(M)=I \Rightarrow \widehat{AIM}=\dfrac{\pi}{3}$
- $r(M)=I \Rightarrow \widehat{AIM}=\dfrac{\pi}{3} \begin{cases} \widehat{AIM}=\dfrac{\pi}{3} \\ \widehat{AIC}=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MIC}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}=\pi \Rightarrow I \in [CM]$

c)

- $\widehat{AMI}=\widehat{AMC}=\dfrac{\pi}{3}$
- $\begin{cases} \widehat{AMI}=\dfrac{\pi}{3} \\ MI=IA \end{cases} \Rightarrow AMI$ est un triangle équilatéral
- AMI est un triangle équilatéral alors MA=MI
- $\begin{cases} r(B)=C \\ r(M)=I \end{cases} \Rightarrow MB=IC$
- $I \in [CM] \Rightarrow MI+IC=MC$
- $\begin{cases} MI+IC=MC \\ MI=MA \\ IC=MB \end{cases} \Rightarrow MA+MB=MC$

<u>Exercice n°5</u>

1)

a)

- $\widehat{IAJ}$ et $\widehat{IMJ}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C) qui interceptent le même arc $\left[\widehat{IJ}\right]$

  $\Rightarrow \widehat{IAJ}=\widehat{IMJ}$
- $\widehat{IBJ}$ et $\widehat{INJ}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C') qui interceptent le même arc $\left[\widehat{IJ}\right]$

  $\Rightarrow \widehat{IBJ}=\widehat{INJ}$

b)

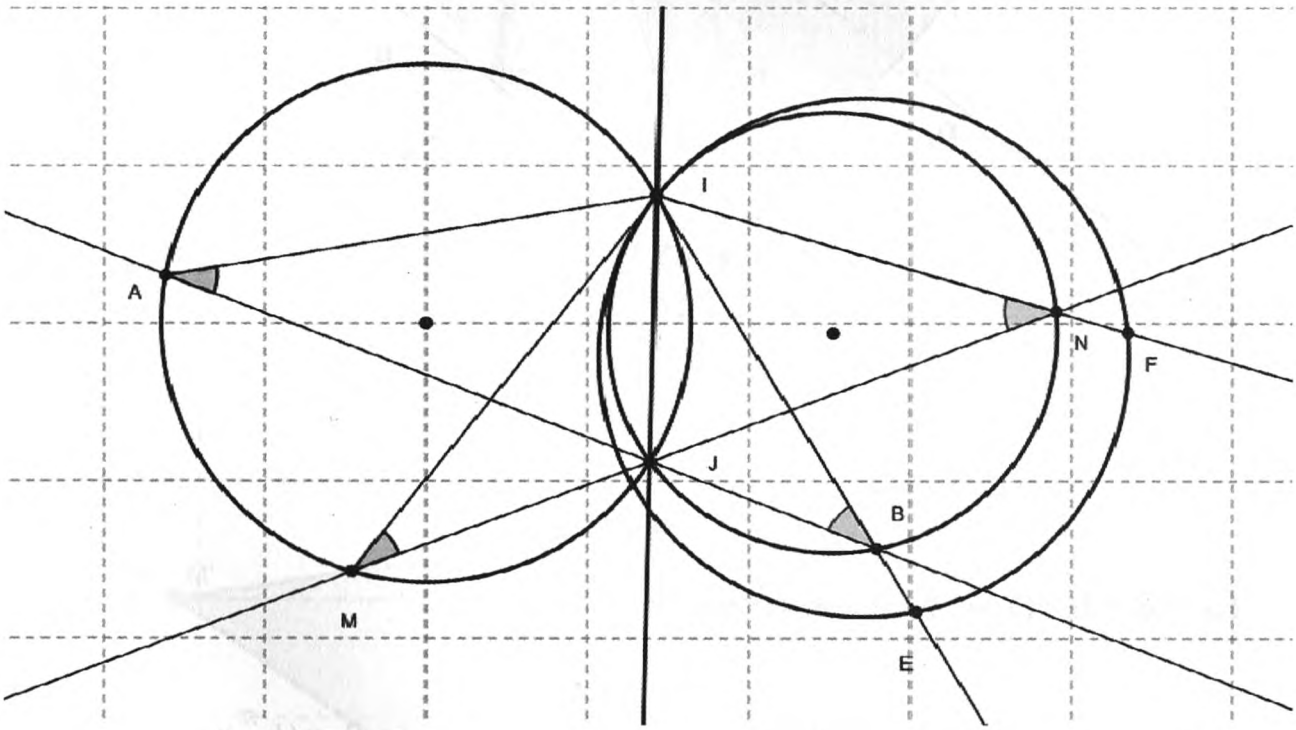
$\widehat{AIB}=180-(\widehat{IAJ}+\widehat{IBJ})$.

$\Rightarrow \widehat{AIB}=180-(\widehat{IMJ}+\widehat{INJ})$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=\widehat{MIN}$

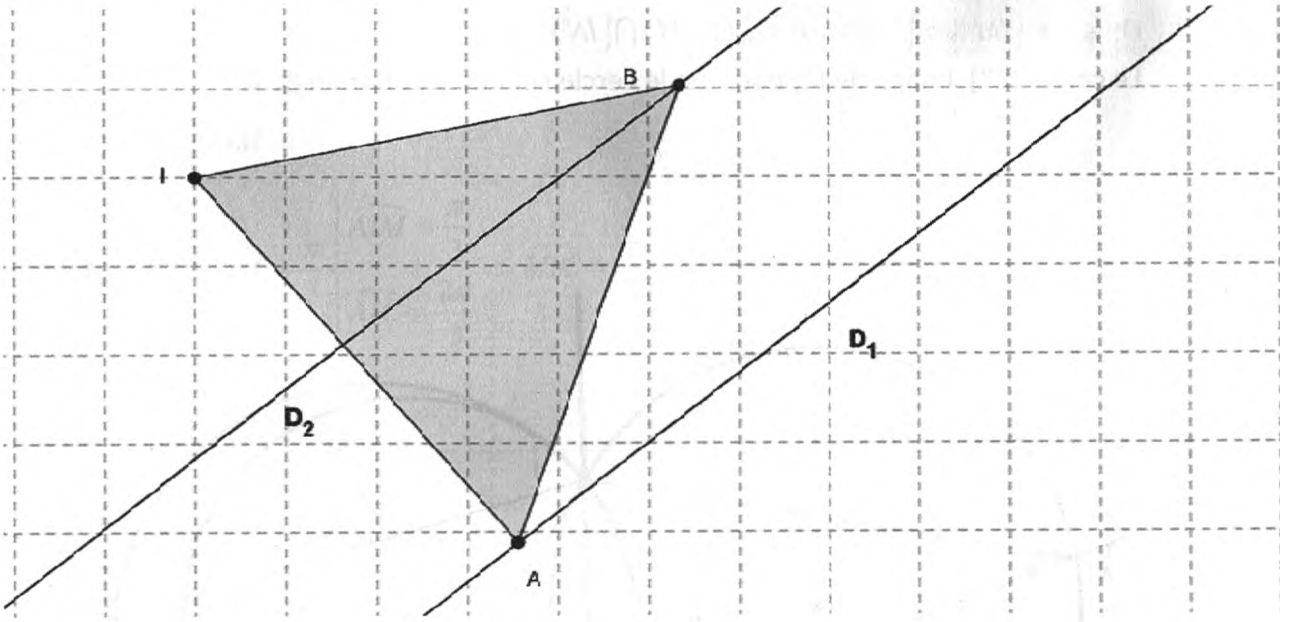
2)

- Posons E=r(A) et F=r(M) .
- On a : $r([IA)) = [IB) \Rightarrow E \in \zeta(I, IA) \cap [IB)$
- On a : $r([IM)) = [IN) \Rightarrow F \in \zeta(I, IM) \cap [IN)$
- Le cercle (C'') image de (C) par r est le cercle circonscrit au triangle IEF



Exercice n°6

La 1 ère étape : réalisation d'une figure qui répond à la question :



La seconde étape : Analyse de la figure :

- IAB est un triangle équilatéral alors $\begin{cases} IA = IB \\ \widehat{AIB} = \frac{\pi}{3} rad = 60° \end{cases} \Rightarrow B = r(I, \frac{\pi}{3})(A)$

  (r : la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$)

- Posons $(D) = r(D_1)$ alors $B \in D_2 \bigcap (D)$ et $A = r'(B)$ (r ': la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$)

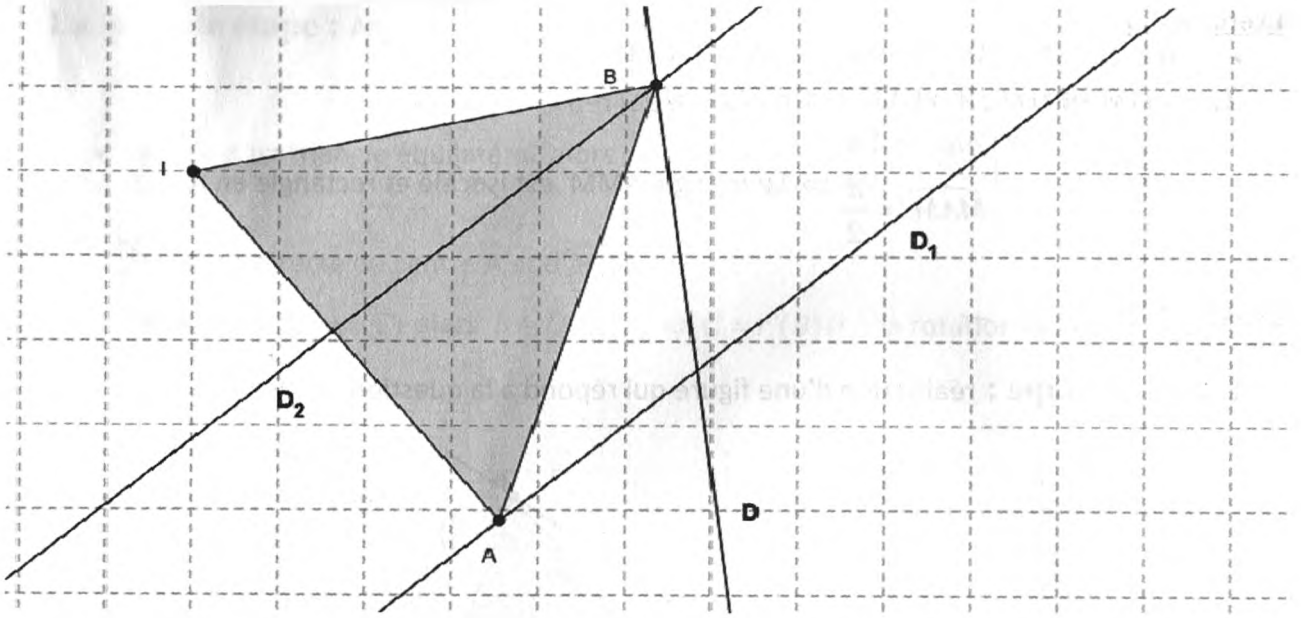
La troisième étape :

Les étapes de la construction **:**

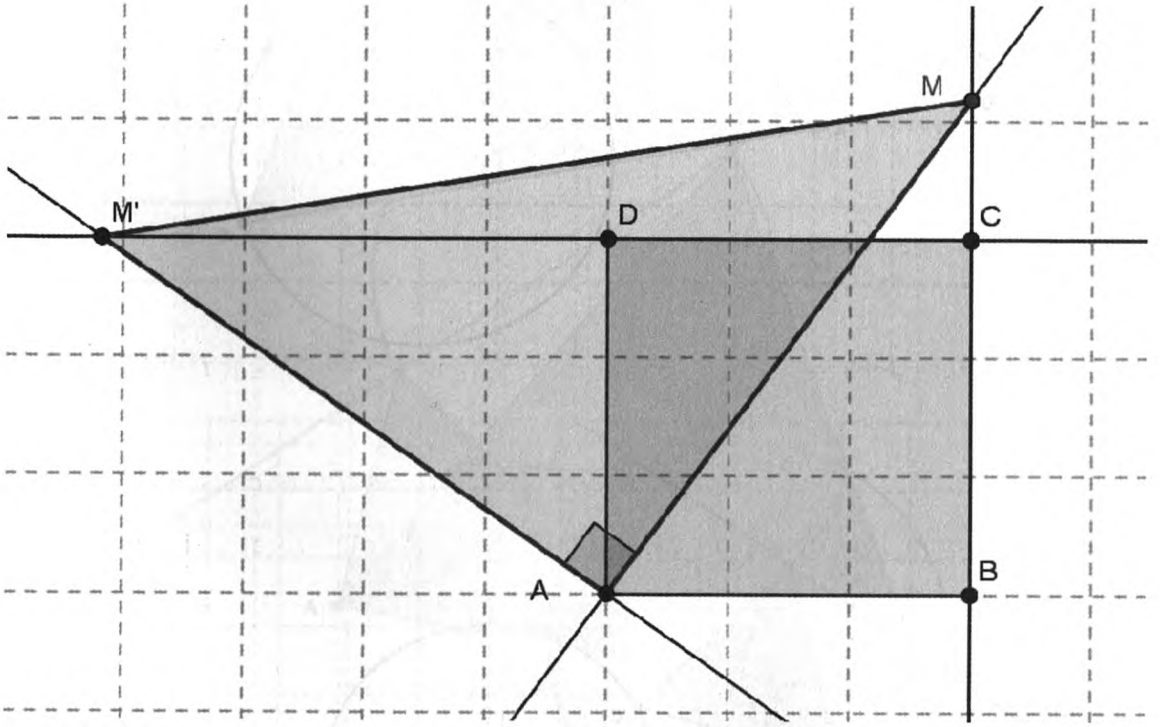
- On construit $(D) = r(D_1)$
- On construit B intersection de D et D_2
- On construit $A = r'(B)$
- On construit le triangle IAB

La quatrième étape :

Le problème admet une unique solution ($D_1 // D_2, D$ coupe $D_1 \Rightarrow D$ coupe D_2)



Exercice n°7



a)

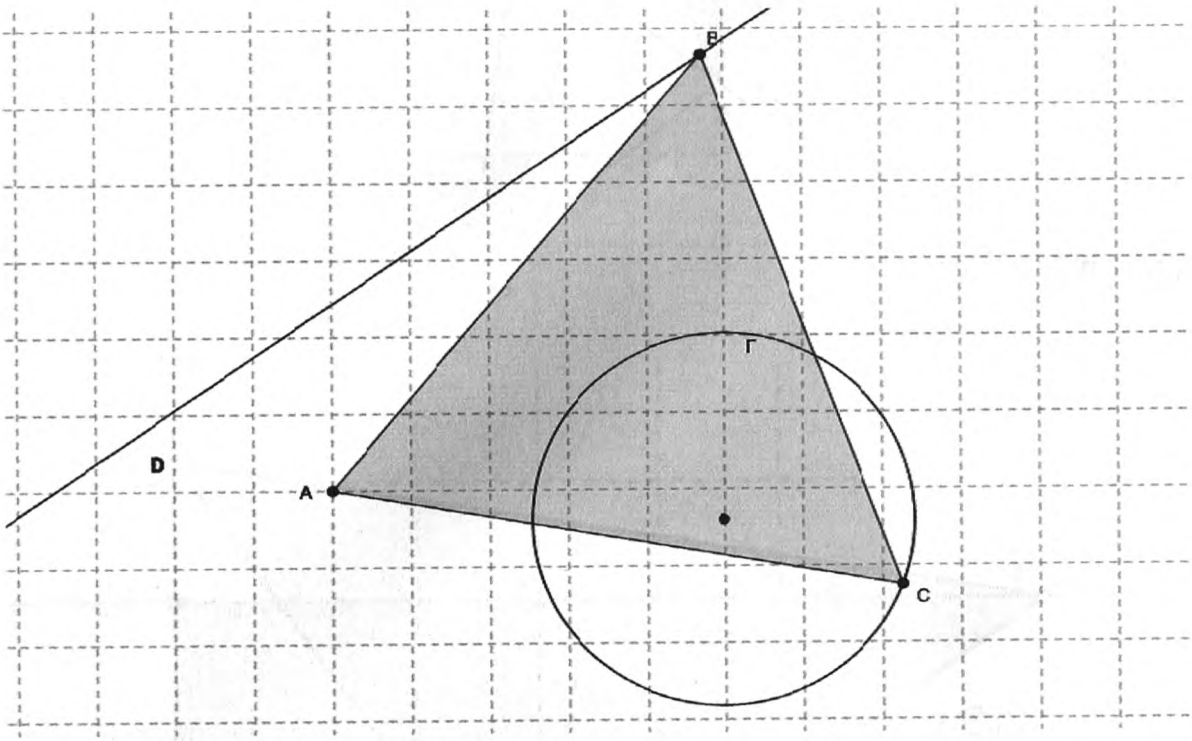
- L'image de la droite (AM) par r est la perpendiculaire à (AM) passant par A image de A par r alors $r((AM)) = (AM')$
- L'image de la droite (BC) par r est la perpendiculaire à (BC) passant par D image de B par r alors $r((BC)) = (DC) = (DM')$

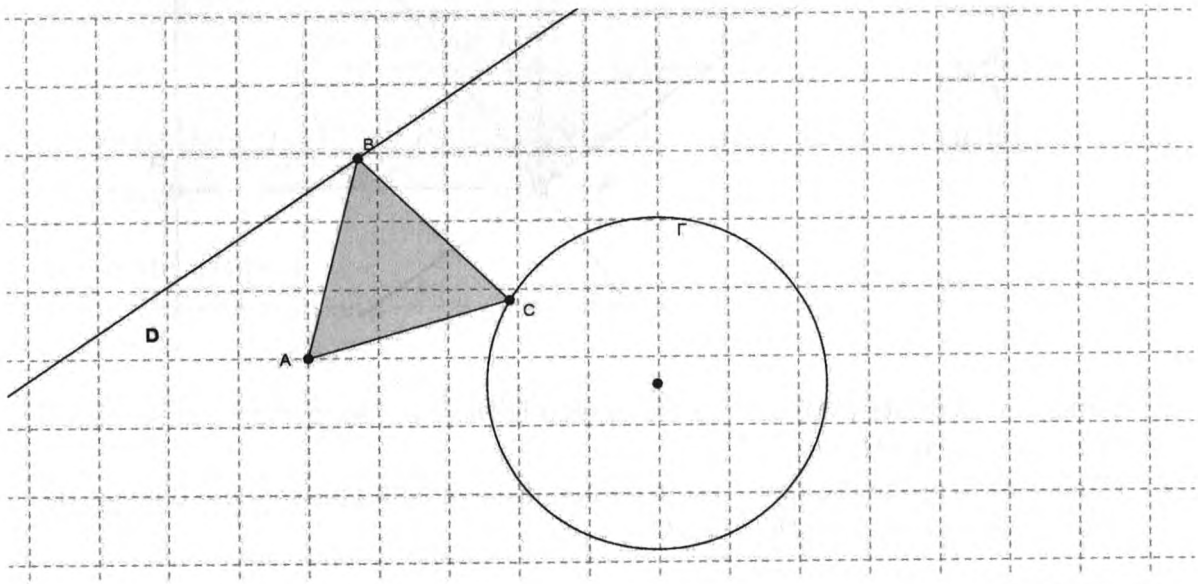
b)

- $M \in (BC) \bigcap (AM) \Rightarrow r(M) \in r(BC) \bigcap r(AM)$
  $\Rightarrow r(M) \in r(DC) \bigcap r(AM') \Rightarrow r(M) = M'$
- $r(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ \widehat{MAM'} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Le triangle AMM' est isocèle et rectangle en A.

Exercice n°8

La 1 ère étape : réalisation d'une figure qui répond à la question :





La seconde étape : Analyse de la figure :

- ABC est un triangle équilatéral alors $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{CAB} = \frac{\pi}{3} rad = 60° \end{cases} \Rightarrow B = r(A, \frac{\pi}{3})(C)$ (r : la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$)
- Posons $((\Gamma')) = r(\Gamma)$ alors $B \in D \bigcap (\Gamma')$ et $C = r'(B)$ (r ': la rotation indirecte de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$)

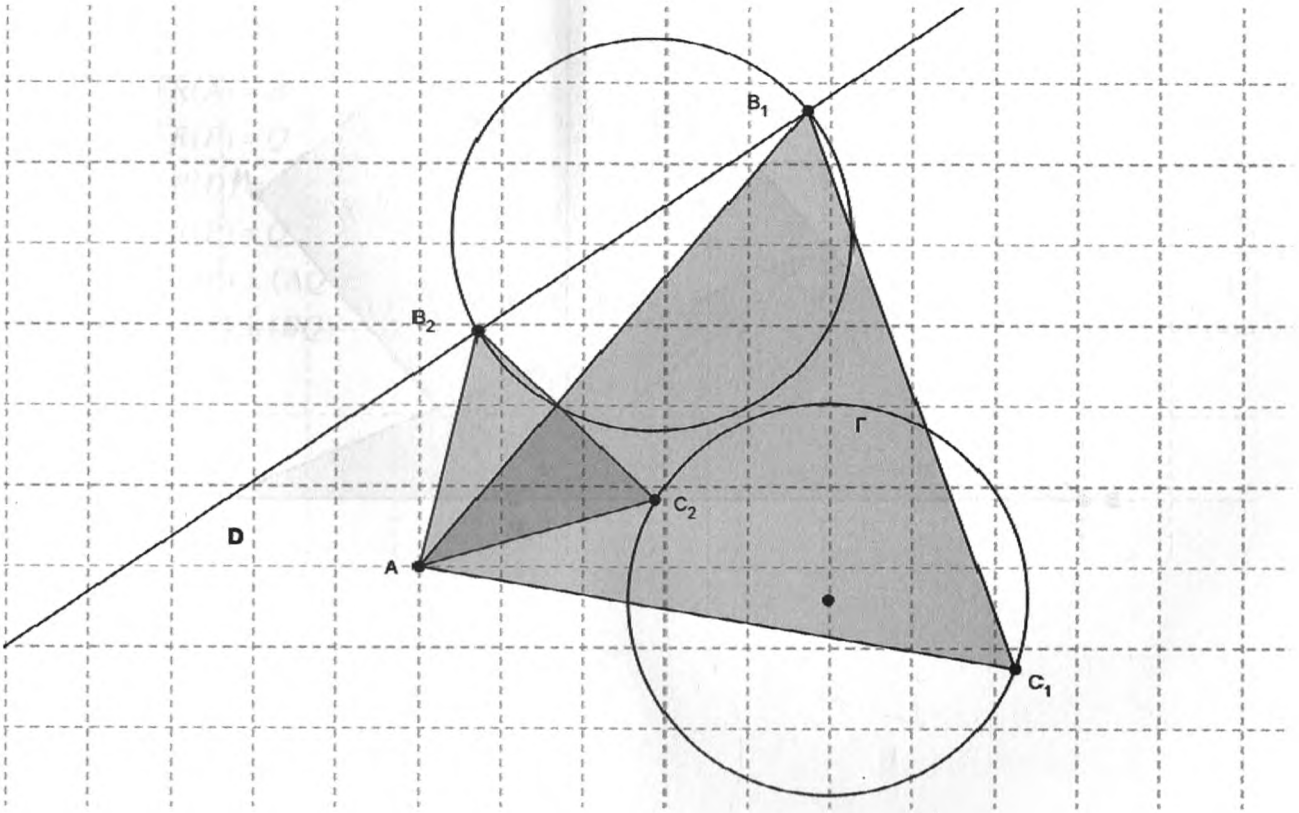
La troisième étape :

Les étapes de la construction **:**

- On construit $((\Gamma')) = r(\Gamma)$
- On construit $B = D \bigcap \Gamma'$
- On construit $C = r'(B)$
- On construit le triangle ABC

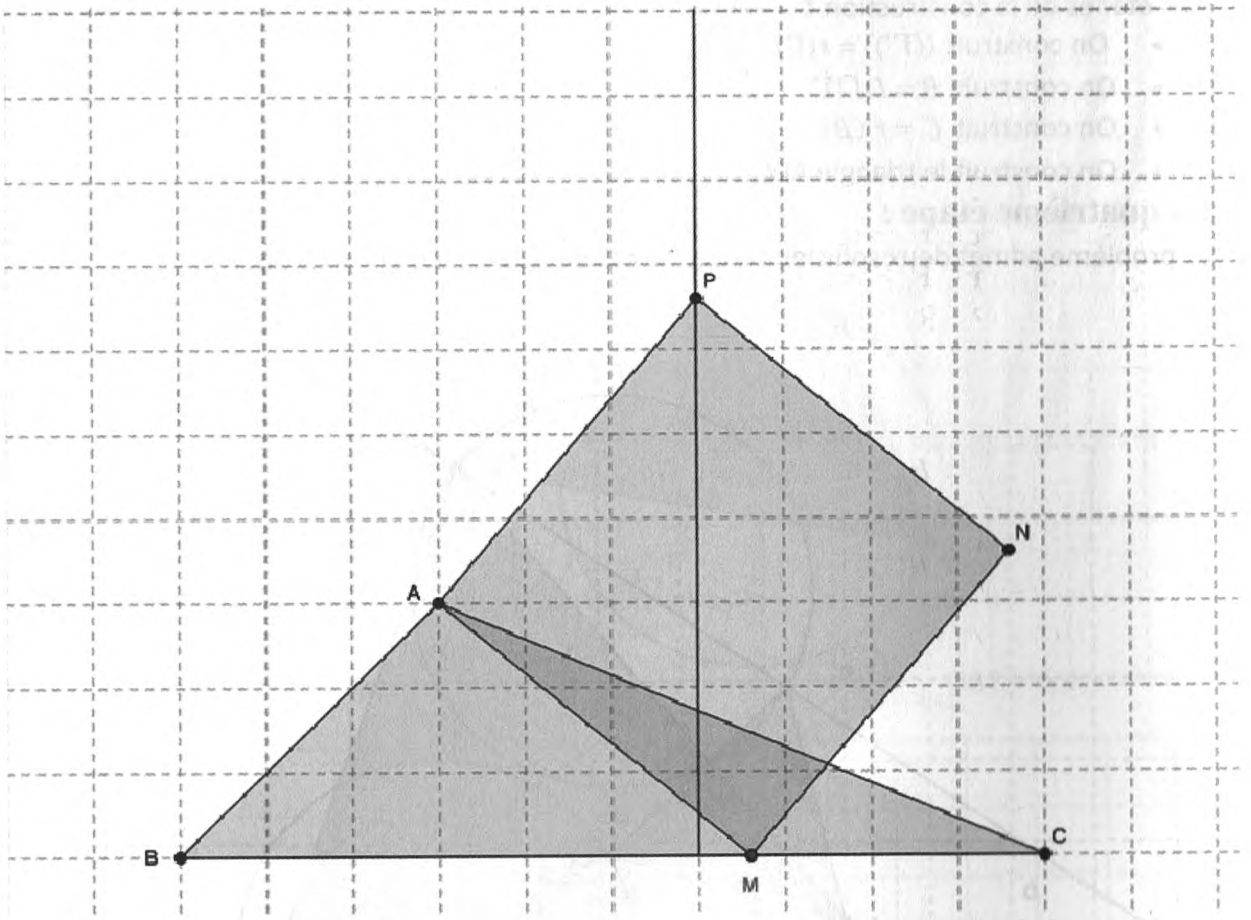
La quatrième étape :

Le problème admet deux solutions (Pour ce cas de figure : $D \bigcap \Gamma' = \{B_1, B_2\}$

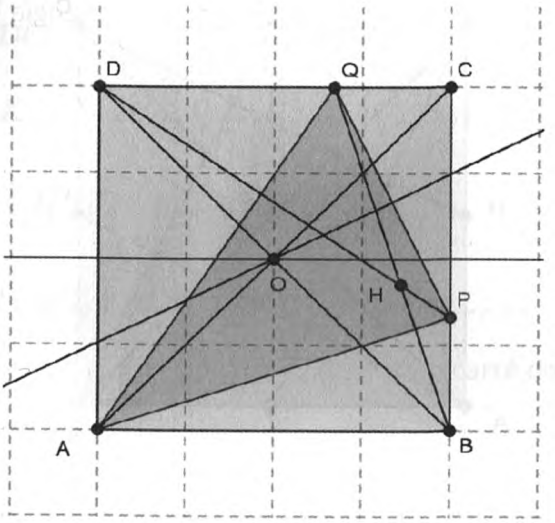


Exercice n°9

- Soit $R = r(A, \frac{\pi}{2})$: la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- On a : $\begin{cases} AM = AP \\ \widehat{MAP} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow R(M) = P$
- $\begin{cases} R(M) = P \\ M \text{ décrit } [BC] \end{cases} \Rightarrow P \text{ décrit } R([BC])$
- $R([BC])$ est le segment isométrique à $[BC]$ et qui est perpendiculaire à $[BC]$ en P.



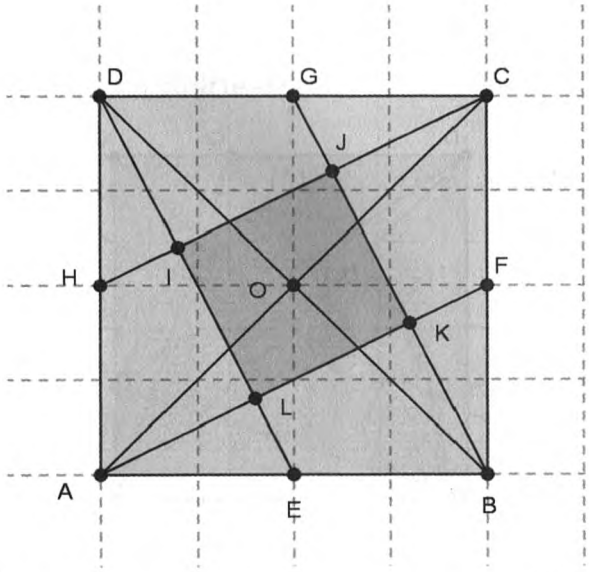
Exercice n°10



- Soit R : le quart de tour directe de centre le point O
  On a alors R(B)=C et R(C)= D⇒r([BC]=[CD]
  Posons P'=R(P) alors P'ϵ [CD] et CP'=BP ⇒P'=Q **Donc** R(P)=Q

- $\begin{cases} R(A)=B \\ R(P)=Q \end{cases} \Rightarrow R(AP)=(BQ) \Rightarrow (AP)\perp(BQ)$
- $\begin{cases} R(D)=A \\ R(P)=Q \end{cases} \Rightarrow R(PD)=(AQ) \Rightarrow (AQ)\perp(PD)$
- $\begin{cases} (DP)\perp(AQ) \\ (AP)\perp(BQ) \end{cases} \Rightarrow$ H est l'orthocentre du triangle APQ

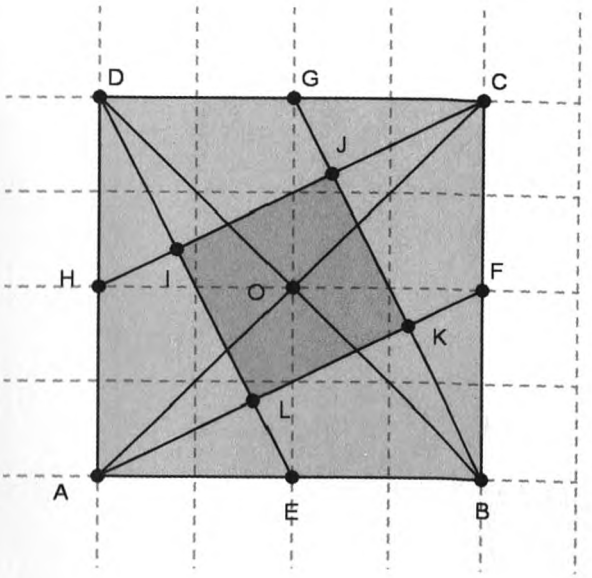
Exercice n°11



- Soit $R = r(O, \frac{\pi}{2})$: la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- On a : $\begin{cases} R(A) = B \\ R(F) = G \end{cases} \Rightarrow R((AF)) = (BG)$
- On a : $\begin{cases} R(B) = C \\ R(G) = H \end{cases} \Rightarrow R((BG)) = (CH)$
- On a : $\begin{cases} R(C) = D \\ R(H) = E \end{cases} \Rightarrow R((CH)) = (DE)$
- On a : $\begin{cases} R(D) = A \\ R(E) = F \end{cases} \Rightarrow R((DE)) = (AF)$
- $\begin{cases} R((AF)) = (BG) \\ R((BG)) = (CH) \\ \{K\} = (AF) \cap (BG) \\ \{J\} = (CH) \cap (BG) \end{cases} \Rightarrow R(K) = J$
- $\begin{cases} R((CH)) = (DE) \\ R((BG)) = (CH) \\ \{I\} = (DE) \cap (CH) \\ \{J\} = (CH) \cap (BG) \end{cases} \Rightarrow R(J) = I$
- $\begin{cases} R((DE)) = (AF) \\ R((CH)) = (DE) \\ \{I\} = (DE) \cap (CH) \\ \{L\} = (AF) \cap (DE) \end{cases} \Rightarrow R(I) = L$

- $\begin{cases} R((DE)) = (AF) \\ R((AF)) = (BG) \\ \{K\} = (AF) \cap (BG) \\ \{L\} = (AF) \cap (DE) \end{cases} \Rightarrow R(L) = K$
- $\begin{cases} R(K) = (J) \\ R(J) = (I) \end{cases} \Rightarrow KJ = IJ$ et $(KJ) \perp (IJ)$
- $\begin{cases} R(J) = I \\ R(I) = L \end{cases} \Rightarrow LI = IJ$ et $(IJ) \perp (IL)$
- $\begin{cases} R(I) = L \\ R(L) = K \end{cases} \Rightarrow LI = LK$ et $(LK) \perp (IL)$
- $LI = LK = JK = IJ$ et $(LK) \perp (IL) \Rightarrow IJKL$ est un carré de coté a'=LI.
- $\begin{cases} R([DE]) = [AF] \\ R([CH]) = [DE] \\ R([AF]) = [BG] \end{cases} \Rightarrow DE = AF = BG = CH \Rightarrow$ Les triangles rectangles DCH,GCB,ABF et ADE sont isométriques donc de même aire : $A = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$
- Théorème de Pythagore dans le triangle ADE : $DE^2 = AD^2 + AE^2 \Rightarrow DE^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$

  $\Rightarrow DE^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{5}\,a}{2}$
- Aire (ABCD)=AIRE(DGBE)+2A alors $a^2 = 2 \times \frac{a^2}{4} + a' \times DE$
- $a^2 = 2 \times \frac{a^2}{4} + a' \times DE \Rightarrow \frac{a^2}{2} = a' \times \frac{\sqrt{5} \times a}{2} \Rightarrow a = a' \times \sqrt{5}$
- $a = a' \times \sqrt{5} \Rightarrow$ Aire (ABCD)= $(a' \times \sqrt{5})^2 = 5 \times (a')^2 = 5 \times \text{Aire(IJKL)}$



Collection

CMS

1 ère - 2 ème - 3 ème - 4 ème

Prix : 9000

I.S.B.N : 978-9938-842-64-3

ISBN 978-9938-842-64-37
9 789938 842647