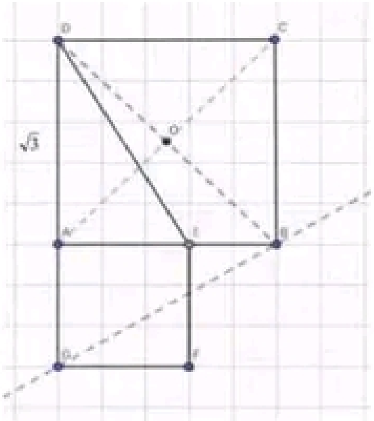
Lycée Pilote Mahdia	Série d'exercices n°1 Thème : Produit scalaire	Prof : Yassine Baccar Niveau : $3^{ème}$ Maths

Exercice 1 :



Dans la figure ci-dessous ; $ABCD$ est un carré de centre O tel que $AD = \sqrt{3}$.

Soit E le point de $[AB]$ tel que $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$ et $AEFG$ soit un carré.

1. a) Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ puis déduire DE.
   b) Calculer AE et BG.
   c) Calculer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$ puis montrer que $(DE) \perp (BG)$.
2. Soit l'ensemble $\varphi = \{M \in P; MA^2 + MC^2 = 6\}$.
   Déterminer et construire l'ensemble φ.
3. La droite (BG) recoupe φ en H. Soit J le milieu de $[BG]$.
   a) Montrer que les points D, E et H sont alignés.
   b) En exprimant $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GD}$ en deux manières différentes, montrer que $GH = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
   c) Déduire que $JH = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
4. Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P; MG^2 - MB^2 = 2(\sqrt{3} - 1)\}$
   a) Déterminer l'ensemble Δ.
   b) Montrer que $HA^2 + HB^2 + HC^2 = 9 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2 :

Dans le plan, on considère un carré $ABCD$ tel que $AB = 3$. On désigne par E le symétrique de C par rapport à B et par J le point du segment $[DC]$ tel que $CJ = 1$ et par K le point du segment $[BE]$ tel que $EK = CJ$.

1. a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = -6$ et $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{AK} = -6$.
   b) En déduire que $(AJ) \perp (AK)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{KD} = 28$.
3. Soit I le milieu du segment $[JK]$.
   a) Montrer que $DI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
   b) On considère l'ensemble $\varphi = \{M \in P; \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MK} = 6\}$.
   Montrer que φ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Construire φ.
   c) La droite (DK) recoupe φ en F. En utilisant $D' = S_I(D)$, montrer que : $\overrightarrow{KF}.\overrightarrow{KD} = -6$.
4. a) Vérifier que D est le barycentre des points pondérés $(J, 3)$ et $(C, -2)$.
   b) Soit : $f(M) = 3MJ^2 - 2MC^2$; $g(M) = f(M) - MC^2$ et $H = D * C$.
   Montrer que $f(M) = MD^2 - 6$ et $g(M) = 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CD} - 6$.
   c) Déterminer les ensembles suivants :
   $$\xi = \{M \in P / f(M) = 3\} \ et \ \Delta = \{M \in P / g(M) = -6\}.$$

Exercice 3 :

On considère un carré $ABCD$ de coté $4\ cm$ inscrit dans un cercle ξ de centre O.
Soit $I = A * B$ et $J = C * I$ et P le symétrique de O par rapport à I.
La droite (PC) recoupe le cercle ξ en R et la droite (BD) en K.

1. a) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{JC}$.

LYCEE PILOTE DE SOUSSE *Mr.Hedi Souissi*	**Devoir de contrôle N°1** **MATHEMATIQUES**	*CLASSE : 1S7* *Le 20 – 10 - 2010* *DUREE : 45 mn*

Correction

Exercice01 :

1) **Question 1)** : réponse **B** ;**Question 2)** : réponse **C**
2) a) 31872=32000-128=16x2000-16x8)=16x(2000-8)
   Donc 31872 est divisible par 16
   b) comme 16 divise 31872 et que 3 divise aussi 31872 (car 3+1+8+7+2=21) et comme 16 et 3 sont premier entre eux et d'aprés le Théorème de Gauss , on peut conclure que le produit 16x3=48 divise 31872.

3) Pour tout entier naturel , $n \neq 7$, $\left(\frac{18}{7-n}\right) \in \mathbb{N}$ si $(7-n)$ un diviseur naturel de 18
   c'est à dire $(7-n) \in D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$
   - $7-n=1 \Rightarrow n=6$
   - $7-n=2 \Rightarrow n=5$
   - $7-n=3 \Rightarrow n=4$
   - $7-n=6 \Rightarrow n=1$
   - $7-n=9 \Rightarrow n=-2 \notin \mathbb{N}$ donc à rejeter .
   - $7-n=18 \Rightarrow n=-11 \notin \mathbb{N}$ donc à rejeter.

   Conclusion : Pour tout entier naturel , $n \neq 7$, $\left(\frac{18}{7-n}\right) \in \mathbb{N}$ si $n \in \{1;4;5;,6\}$

Exercice 02 :

a) on a : (6n+10)=(2n+3)x3+1

Donc le reste de la division euclidienne de (6n+10) par 3 est égale à 1 car ce reste doit être inférieur au diviseur qui est 3 (1 est inférieur à 3).

Donc le reste de la division euclidienne de (6n+10) par (2n+3) est 1 car 1<2n+3 pour tout entier naturel n .

b)

Dividende	6n+10	2n+3
Diviseur	2n+3	1
Reste	1	0

On en déduit que le **pgcd** (6n+10 ;2n+3)=1 (puisque 1 est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide)

c) **pgcd** (6n+10 ;2n+3)=**1** ,donc,(6n+10) et (2n+3) sont premier entre eux et par la suite $\frac{6n+10}{2n+3}$ est irréductible.

Comme on a : $\frac{2000003}{6000010} = \frac{2000000+3}{6000000+10} = \frac{2\times1000000+3}{6\times1000000+10}$; alors le rationnel $\frac{2000003}{6000010}$ est de la forme $\frac{2n+3}{6n+10}$ avec n=1000000 ;

Donc $\frac{2000003}{6000010}$ est irréductible.

	LYCEE PILOTE DE SOUSSE Mr.Hedi Souissi	Devoir de contrôle N°1 MATHEMATIQUES	CLASSE : 1S7 Le 20 – 10 - 2010 DUREE : 45 mn

Exercice 1 : (6 points)

1) Pour chaque question une seule réponse est correcte.

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	45 divise	65300	100170	78426
2	Le pgcd(72.160)	36	4	8

2) a) En remarquant que $31872 = 32000 - 128$ montrer que 16 divise 31872.
b) En déduire que 48 divise 31872 .

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour que $\left(\frac{18}{7-n}\right)$ soit entier naturel.

Exercice 2 : (6 points)

Pour tout entier naturel n on peut écrire $(6n + 10) = 3(2n + 3) + 1$.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de $(6n + 10)$ par 3 ? expliquer pourquoi.

Quel est le reste de la division euclidienne de $(6n + 10)$ par $(2n + 3)$?

b) on veut déterminer le $pgcd(6n + 10 , 2n + 3)$ par l'algorithme d'Euclide. Recopier et compléter le tableau suivant qui résume les divisions successives de l'algorithme d'Euclide :

Dividende	6n+10	2n+3	
Diviseur	2n+3	.....	
reste	1	....	

En déduire , pour tout entier naturel n , la valeur du $pgcd(6n + 10 , 2n + 3)$.

c) Justifier que la fraction : $\frac{2n+3}{6n+10}$ est irréductible . Déduire que $\frac{2000003}{6000010}$ est irréductible .

Exercice 3 : (8 points)

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de diamètre [AB] et C un point de $(\mathscr{C})$ autre que A et B , tel que $\widehat{CAB} = 27°$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$ coupe l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A du cercle $(\mathscr{C})$, en D.

1) a) Calculer $\widehat{COB}$.
   b) Calculer $\widehat{CDB}$.

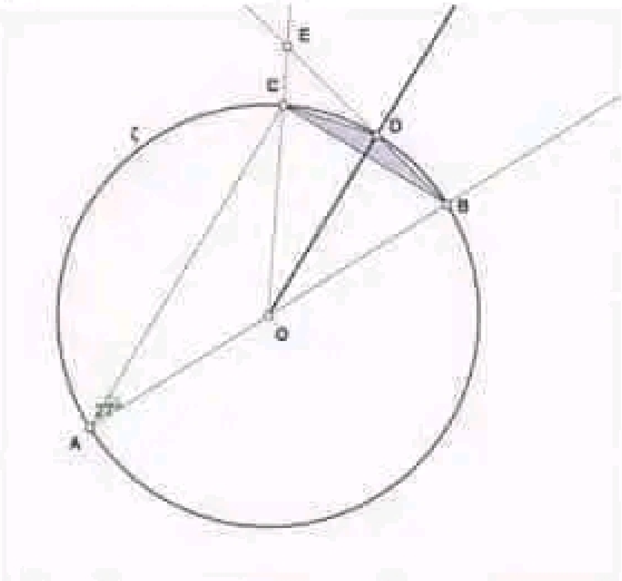
2) a) Quelle est la nature du triangle BCD ? (justifier la réponse donnée) .

   b) La droite (BD) coupe (OC) en E . Calculer $\widehat{BEC}$.

Exercice 03 :

1) a) $\widehat{COB} = 2 \times \widehat{CAB}$ car $\widehat{COB}$ C est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{CAB}$,
d'où : $\widehat{COB} = 2 \times 27° = 54°$; car($\widehat{CAB} = 27°$ *donné*).)

b) $\widehat{CDB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $[\widehat{CB}]$ qui contient A , son angle au centre associé est l'angle rentrant $\widehat{COB}$ qui intercepte le même arc $[\widehat{CB}]$ contenant A.
Cet angle au centre vaut 360°-54°=306° d'où
$\widehat{CDB} = = \frac{1}{2} \times \widehat{COB} = \frac{1}{2} \times 306 = 153°$



2)a) Le triangle OCB est un triangle isocèle en O , car (OC=OB rayons du cercle) et [OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$, donc on peut dire que la droite (OD) est la médiatrice de [CB] .
Comme le point D appartient à (OD) alors D est équidistant de C et B , d'où le triangle BCD est isocèle de sommet principal D .

b) **Première méthode :**
On sait que le triangle BCD est isocèle en D et que $C\hat{D}B = 153°$ et la droite (OD) est la médiatrice de [CB] la base du triangle isocèle BCD donc elle porte la bissectrice [DO) de $C\hat{D}B$; ainsi dans le triangle OBD on a :
$\widehat{OBD} = 180° - (\widehat{DOB} + \frac{\widehat{CDB}}{2}) = 180° - (27° + \frac{153°}{2}) = 76.5°$) et par la suite dans le triangle OBE
on a : $\widehat{BEO} = \widehat{BEC} = 180° - (\widehat{BOE} + \widehat{OBE}) = 180- (54+76,5) = 57,5°$.
Une autre idée pour 2)b)
on a : $\widehat{CBD} = \frac{1}{2} \times \widehat{COD} = 27 :2 = 13,5°$ ($\widehat{COD}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{CBD}$)
$\widehat{CBA} = 90-27 = 63°$ car $\widehat{CBA}$ *et* $\widehat{CAB}$ sont complémentaires (le triangle ABC est rectangle en C vu que $[AB]$ est diamètre du cercle et C un point de ce cercle.
Donc l'angle $O\hat{B}E = C\hat{B}D + C\hat{B}A = 13,5+63 = 76,5°$
Dans le triangle BOE , la somme des angles $\widehat{OBE}$, $\widehat{BEO}$ *et* $\widehat{BOE}$ est égale à 180)
D'où : $\widehat{BEO} = \widehat{BEC} = 180- (54+76,5) = 57,5°$.