

C M S

4^{ème}

SECTION MATH

**CORRIGÉES
DES EXERCICES
DU MANUEL SCOLAIRE**

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principale

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principale



MATHEMATIQUES

C M S

4^{ème}

SECTION MATH

CORRIGÉES DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principale

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principale



MATHEMATIQUES

Avant - propos

Cher élève de 4^{ème} Math..

Voilà entre vos mains les corrigés détaillés de tous les exercices de votre manuel scolaire de mathématiques (tome 1 ; le Tome 2 ne tardera pas).

En s'exerçant en classe (A.S : 07-08) ; on était obligé de voir tous ces exercices, et c'est seulement en les manipulant qu'on s'est rendu compte de leur importance , de leur richesse et qu'on a apprécié la compétence et le professionnalisme du groupe rédacteur de ce manuel et des efforts considérables qu'ils ont déployés pour le bon choix des exercices.

Cher élève :

C'est pour vous faire attacher encore plus à votre livre scolaire et à ses précieuses séries d'exercices ,que vient donc cet ouvrage ,par le quel nous voulons dire à chacun de vous : vous n'êtes pas seul ; on est là près de vous à chaque instant ; pour vous rassurer lorsque vous répondez juste ; pour vous corriger lorsque vous vous trompez et pour vous débloquer lorsque vous en avez besoin.

Cher élève :

Nous sommes sûrs que vous avez suffisamment de conscience qui vous incite à ne pas se précipiter à la correction avant de déployer le temps nécessaire et l'effort personnel convenable pour la résolution.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du groupe rédacteur de ce manuel scolaire et un merci spécial pour M^{er} **Charrada Taoufik** secrétaire général de notre fameuse association **A.T.S.M** qui a encouragé l'idée de ce livre.

Les auteurs
ABROUG FETHI & BOUSSETTA JALLOULI

Nous prions nos collègues et tous ceux qui utilisent ce document de bien vouloir nous faire part de leurs remarques qui seront les bienvenues (à l'adresse :f_abroug@yahoo.fr) et dont nous les remercions vivement.

Sommaire

TOME 1 :

1. Continuité et limites.....	1
2. Suites réelles	14
3. Dérivabilité	34
4. Fonctions réciproques.....	62
5. Primitives	90
6. Nombres complexes	105
7. Isométries du plan	142
8. Déplacement-Antidéplacement.....	158
9. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	187
10. Identité de Bézout	199

QCM :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
 2) $f(2)=3$ et $f(5)=1$
 3) admet au moins une solution dans $[-2,5]$

VRAI-FAUX :

- 1) (vrai)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x' \rightarrow -\infty} f(x') = -\infty$$

- 2) (faux)

contre exemple : $f(x)=x$ f est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- 3) (faux)

contre exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

 f n'est pas bornée

$$(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty)$$

- 4) (faux)

contre exemple : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

 $\Delta : x = 0$ n'est pas une asymptote à (ζ_r)

- 5) (faux)

contre exemple : $f(x) = 4 + \sin x$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad h(x) = 5 + \frac{1}{1+x^2}$$

on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 5$$

mais f n'a pas de limite en $+\infty$

EX 1 :

pour $x > 0$ on a : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x}$ pour $x < 0$ on a : $f(x) = -\sqrt{-2x}$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{-2x} = 0 = f(0)$$

 f est continue en 0* la fonction : $x \mapsto 2x$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ d'où f est continue sur $]0, +\infty[$ * de même f est continue sur $]-\infty, 0[$ conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

EX 2 :

* la fonction : $x \mapsto 1 + \frac{1}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

(fonction rationnelle)

* la fonction : $x \mapsto x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ d'où la fonction : $x \mapsto |x-2|$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par suite f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ * continuité en 2 : $f(2) = 1$ pour $x > 2$ on a : $f(x) = (1 + \frac{1}{x-2})(x-2)$

$$f(x) = x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 = f(2)$$

pour $x < 2$: $f(x) = (1 + \frac{1}{x-2})(-x+2) = -x+1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+1) = -1 \neq f(2)$$

 f n'est pas continue en 2

EX 3 :

$$f(x) = \frac{-3x^2 - x + 10}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2, 3\}$$

$$\text{on a : } -3x^2 - x + 10 = (x+2)(-3x+5)$$

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x-3)(x+2)^2$$

$$d'où f(x) = \frac{-3x+5}{(x-3)(x+2)}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3x+5}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$

(de la forme $\frac{-4}{0^-}$)

f n'admet pas une limite finie en 3

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en 3

$$2) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \quad (\text{de la forme } \frac{11}{0^-})$$

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en (-2)

EX 4 :

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}}$$

$$1) x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad x' = -3 \quad \text{et} \quad x'' = 2$$

$$d'où D_f = \mathbb{R} / \{-3, 2\}$$

2)

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
x^2+x-6		+	-	+

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

• pour $x \in]-\infty, -3[$

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{(x+3) \cdot \sqrt{x^2+x-6}}{(x+3)(x-2)}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)} = 0$$

• pour $x \in]-3, 2[$

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-x+6}} = \frac{-\sqrt{-x^2-x+6}}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = 0$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = 0$$

f est prolongeable par continuité en (-3)

son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R} / \{2\}$

$$\text{par : } g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}} & \text{si } x \neq 2 ; x \neq -3 \\ g(-3) = 0 \end{cases}$$

EX 5 :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-3}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-3}{x-1} \right) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-3x}{x^2-1} \right) = -\infty \quad (\text{de la forme } \frac{-3}{0^-})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-3x}{x^2-1} \right) = +\infty$$

3)

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-3x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-3x+2} = -\infty$$

4) * pour $x > 0$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

* pour $x < 0$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

EX 6 :

$$\text{soit } P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$$

$$P(-1) = 0$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$$

$$= x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$$

$$\text{identification } \begin{cases} a+1=3 \\ a+b=-2 \\ b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 4)$$

pour $x \neq -1$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 + 2x - 4)}{x+1} = x^2 + 2x - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x - 4) = -5$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 4 & \text{si } x \neq -1 \\ -5 & \text{si } x = -1 \end{cases} \text{ est le}$$

prolongement par continuité de f en (-1)

$$2) \text{ pour } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) = \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}$$

Rappelons que :

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} = -\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$d'où : f(x) = -\operatorname{tg}\left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$$

$$d'où : g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{4} \\ -1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

3) pour $x \neq 0$

$$f(x) = -16 \left[\frac{1 - \cos(4x)}{(4x)^2} \right]$$

on pose $X = 4x$ $x \rightarrow 0, X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} -16 \left[\frac{1 - \cos X}{X^2} \right] = -16 \times \frac{1}{2} = -8$$

$$d'où g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4) on pose : $U(x) = (x-1)^2$

$$V(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

$$f = V \circ U$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} U(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \end{cases}$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EX 7 :

$$\Delta : y = -x + 2$$

$$1) * \lim_{x \rightarrow -x} f(x) = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 2) = 0$$

2)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$		$+\infty$	1	$+\infty$	

Diagram showing the behavior of f(x) near critical points: near 0, f(x) goes to +∞; near 1, f(x) has a local maximum at 1; near 2, f(x) goes to +∞. Arrows indicate the direction of the function's path between these points.

$$3) * m \in]-\infty, 0] \cup \{1\}$$

l'équation : $f(x) = m$ admet trois solutions

$$* m \in]0, 1[$$

l'équation $f(x) = m$ admet quatre solutions

$$* m \in]1, +\infty[$$

l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions

EX 8 :

$$1) \text{ On pose } U(x) = \frac{\pi x + 1}{x} \text{ et } V(x) = \cos(x)$$

$$f = V \circ U$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -x} U(x) &= \pi \\ \lim_{x \rightarrow \pi} V(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow -x} f(x) = -1$$

$$2) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3) f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} \text{ on pose } X = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin(X)}{X^2} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin(X)}{X} \cdot \frac{1}{X} = +\infty \end{aligned}$$

$$4) f(x) = \frac{\cos(x^2 - 1) - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f = V \circ U \text{ avec } U(x) = x^2 - 1 \text{ et } V(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} U(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} V(x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

EX 9 :

$$x \in [0, +\infty[$$

$$f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot \sin x$$

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{(x+2) - x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$d'où f(x) = \frac{2 \cdot \sin x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$2) x > 0$$

$$|f(x)| = \frac{2 \cdot |\sin x|}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow 2|\sin x| \leq 2$$

$$d'où \frac{2 \cdot |\sin x|}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

EX 10 :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}) - x^2}{\sqrt{1+x^2} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0$$

d'où $y=0$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

d'où $\Delta: y=2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$ **EX 11 :**

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$1) * \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad (\text{de la forme } \frac{1}{0})$$

$$* f(x) - (x+2) = \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

 $\Delta: y=x+2$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

$$2) * \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

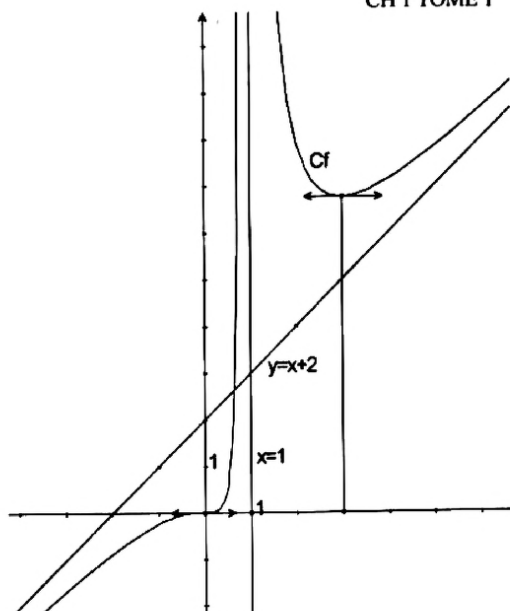
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

 Δ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

$$* f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x-3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	-	0	
$f(x)$			$+\infty$	$+\infty$	$27/4$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

**EX 12 :**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$1) a) x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 < 0$$

d'où $x^2 - x + 1 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$$b) x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{d'où } f(x) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$2) a) f(x) - (x - \frac{1}{2}) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - (x - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + (x - \frac{1}{2})} \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \frac{1}{2}) = 0$$

 $\Rightarrow$ $\Delta: y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

$$b) f(x) - (x - \frac{1}{2}) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + (x - \frac{1}{2})}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x - \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > |x - \frac{1}{2}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > (x - \frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - (x - \frac{1}{2}) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - (x - \frac{1}{2}) > 0$$

(ζ_r) est au dessus de D

$$3) * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$$

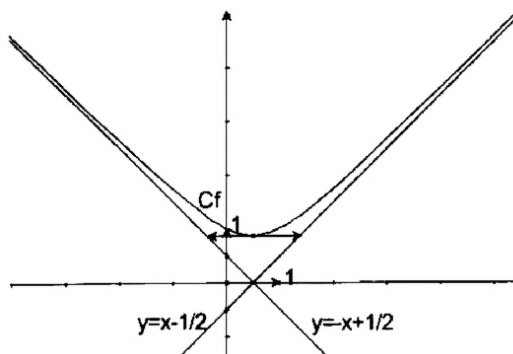
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x(1 - \frac{1}{x})}{-x \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

$D: y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_r) au voisinage $(-\infty)$

$$4) f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

**EX 13 :**

1) $(\zeta_r) = (\zeta_3)$

$(\zeta_g) = (\zeta_1)$

$(\zeta_h) = (\zeta_2)$

2) * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite $\Delta: y=x$ comme a symptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

EX 14 :

1) $D_f = [1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{x-1} = -\infty$$

d'où : la droite $\Delta: y=2x$ est une direction asymptotique à (ζ_r) au voisinage de $+\infty$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x+2}$$

$$D_f = [-2, +\infty[\setminus \{0\}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \sqrt{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (ζ_r)

Continuité et Limites

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{x+2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$$

(ζ_r) admet une branche infinie de direction

parabolique celle de $(O, \bar{i})$

$$3) f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x-1	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	0	-	+

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} \right) = -1$$

d'où $\Delta: y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_r) au voisinage $(+\infty)$

CH I TOME I

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} \right) = -1$$

$\Delta: y=x-1$ asymptote oblique à (ζ_r) au voisinage $(-\infty)$

EX 15 :

$$1) f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\text{pour } x \neq 0 \quad |f(x)| = |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{2}{x}\right) \right|$$

$$\text{on sait que : } \left| \sin\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow |x| \left| \sin\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq |x|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$2) f(x) = 1 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x \neq 0$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 + x^2$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x} + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$* \text{ pour } x > 0 : \cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq -1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \geq -1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$* \text{ pour } x < 0 \quad \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

conclusion : f n'admet pas de limite en 0

Continuité et Limites

EX 16 :

$$1) f(x) = \frac{2 + \cos x}{x}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$$

$$\bullet \text{ pour } x > 0 : \frac{1}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{x} \leq \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \text{ pour } x < 0 : \frac{3}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$2) f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{|x|}} \quad x \neq 0$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{|x|}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{|x|}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{|x|}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$3) f(x) = \frac{x \sin x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$|f(x)| = \frac{|x| \cdot |\sin x|}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\text{on a : } |\sin x| \leq 1 \Rightarrow |x| \cdot |\sin x| \leq |x|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{|x|}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x^4 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x^4 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^3} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$4) f(x) = \cos x - x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -x - 1 \leq f(x) \leq 1 - x$$

$$\begin{cases} f(x) \leq 1 - x \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} f(x) \geq -1 - x \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 - x) = +\infty \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

EX 17 :

$$1) f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \quad x \geq 1$$

$$\bullet |f(x)| \leq \frac{1 + |\cos x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{car } |\cos x| \leq 1$$

$$\bullet |g(x)| = \frac{x \sin^4 x}{2x^3 + 1} \quad \text{car } x \geq 1$$

$$2x^3 + 1 \geq 2x^3 \Rightarrow \frac{1}{2x^3 + 1} \leq \frac{1}{2x^3}$$

$$\Rightarrow |g(x)| \leq \frac{\sin^4 x}{2x^2} \Rightarrow |g(x)| \leq \frac{1}{2x^2} \quad \text{car } \sin^4 x \leq 1$$

$$\bullet \sin x \leq 1 \Rightarrow 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -x^3 + 3 \sin x \leq -x^3 + 3$$

$$\Rightarrow h(x) \leq -x^3 + 3$$

$$2) \text{ pour } x \geq 1$$

$$\bullet |f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet |g(x)| \leq \frac{1}{2x^2} \quad \text{pour } x \geq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\bullet \text{ pour } x \geq 1, \quad h(x) \leq -x^3 + 3$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3) = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

EX 18 :

$$f(x) = \frac{2 - \sin(\frac{1}{x})}{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^*$$

$$1) \text{ a) pour } x > 0$$

$$\sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow -\sin(\frac{1}{x}) \geq -1 \Rightarrow 2 - \sin(\frac{1}{x}) \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 - \sin(\frac{1}{x})}{x} \geq \frac{1}{x} \quad (\text{car } x > 0) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x}$$

Continuité et Limites

$$b) f(x) \geq \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$2) a) \text{ pour } x < 0$$

$$2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 \Rightarrow \frac{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (\text{car } x < 0)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$b) f(x) \leq \frac{1}{x} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EX 19 :

$$f(x) = \frac{2x \cdot \sin x}{1 + x^2}$$

$$1) a) |x \cdot f(x)| = \frac{2x^2 \cdot |\sin x|}{1 + x^2}$$

* pour $x = 0$ le resultat est evident

$$* \text{ pour } x \neq 0 \quad 1 + x^2 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 \cdot |\sin x|}{1 + x^2} \leq 2|\sin x| \Rightarrow |x \cdot f(x)| \leq 2 \quad (\text{car } |\sin x| \leq 1)$$

$$b) \text{ pour } x \neq 0$$

$$|x \cdot f(x)| \leq 2 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{|x|} = 0 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$2) \text{ on pose } X = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$X \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\pi - 2x) \cos x}{1 + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)}{1 + X^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X \cdot \sin X}{1 + X^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0$$

EX 20 :

$$1) -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$$

$$2) * f(x) = \frac{x}{2 - \cos x}$$

$$\text{pour } x > 0 : \frac{1}{2 - \cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$* g(x) = \frac{x + \cos x}{2 - \cos x}$$

$$\cos x \geq -1 \Rightarrow x + \cos x \geq x - 1$$

$$\text{pour } x > 1$$

$$x + \cos x \geq x - 1 \quad ; \quad \frac{1}{2 - \cos x} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } g(x) \geq \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(x - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

EX 21 :

$$1) f(x) = \frac{\cos(3x - 1)}{x}$$

$$-1 \leq \cos(3x - 1) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(3x - 1)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$2) f(x) = 4x^2 - 3\cos x$$

$$\cos x \leq 1 \Rightarrow -3\cos x \geq -3 \Rightarrow 4x^2 - 3\cos x \geq 4x^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 4x^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 - 3 = +\infty \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$3) -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{1 - 2x} \geq \frac{\sin x}{1 - 2x} \geq \frac{1}{1 - 2x} \quad \text{pour } x > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - 2x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{1 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 2x} = 0 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$4) f(x) = 2 + \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

pour $x > 0$ $-1 \leq \sin \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} ; \text{ pour } x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

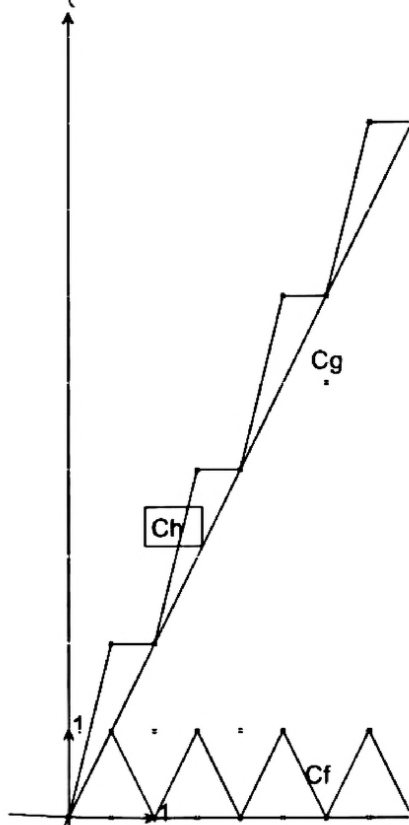
d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

EX 22 :

f est périodique de période 2

$$f(x+2) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2-2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ f(x-1) & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$$



2) • pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

• pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -2x \leq -2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 2 - 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

d'où $0 \leq f(x) \leq 1 ; \forall x \in [0, 1]$

• pour $x \in]1, 2]$

$$(x-1) \in]0, 1] \Rightarrow 0 \leq f(x-1) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 ; \forall x \in]1, 2]$$

par suite $0 \leq f(x) \leq 1 ; \forall x \in [0, 2]$

2 est une période de $f \Rightarrow f(x+2k) = f(x) ; k \in \mathbb{Z}$

d'où $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) (ζ_g) est la droite d'équation : $y = 2x$

4) a) $h(x) = f(x) + g(x)$

b) $0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq h(x) \leq g(x) + 1$

$$\Rightarrow 2x \leq h(x) \leq 2x + 1$$

* $h(x) \geq 2x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

* $h(x) \leq 2x + 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

Continuité et Limites

EX 23 :

$$1) f(x) = \frac{x+1}{x-2} ; I =]2, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

f est continue et strictement décroissante sur $]2, +\infty[$

$$\text{d'où } f(]2, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f, \lim_{x \rightarrow 2^+} f \right[=]1, +\infty[$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} ; I =]-\infty, 0]$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} < 0 \quad \forall x \in I$$

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$

$$f(]-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f \right[= [0, +\infty[$$

$$3) f(x) = tg(\pi x) ; I = \left] -\frac{1}{2}, 0 \right]$$

$$f'(x) = \pi(1 + tg^2(\pi x)) > 0$$

f est continue et strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right]$

$$\text{d'où } f\left(\left] -\frac{1}{2}, 0 \right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f, f(0) \right] =]-\infty, 0]$$

(car $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} tg(\pi x) = -\infty$)

EX 24 :

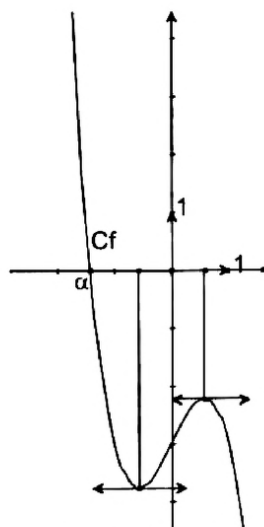
$$f(x) = -2x^3 + 2x - 3$$

$$1) f'(x) = -6x^2 + 2$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	0	-
f(x)	$+\infty$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$	$\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$$

(ζ_i) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O, \vec{j})$



2) l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α

3) f est continue sur $[-2, -1]$

$$f(-2) \times f(-1) = -27 < 0 \Rightarrow -2 < \alpha < -1 \text{ (calculatrice)}$$

EX 25 :

$$D_f = [-6, 4] \setminus \{2\}$$

1)

x	-6	-2	2	4
f(x)	6	1	$+\infty$	2

$$2) f(]-6, 2]) = [1, +\infty[$$

$$f(]2, 4]) = [2, +\infty[$$

$$3) h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

a) $D_h = [-6, 4] \setminus \{2\}$ car f ne s'annule pas

b) les variations de f et $\frac{1}{f}$ sont contraires sur un intervalle I sur lesquelles elles sont définies

D'où

x	-6	-2	2
h(x)	1/6	1	0

$$h(-6) = \frac{1}{6}$$

$$h(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$h([-6, 2]) =]0, 1]$$

x	2	4
h(x)	0	1/2

$$h[2, 4] =]0, \frac{1}{2}]$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

h est prolongeable par continuité en 2

EX 26 :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$$

$$D_f =]0, 5]$$

1) f est continue sur $]0, 5]$ comme étant somme de fonctions continues

2) • f est décroissante sur $]0, 1]$

• f est croissante sur $[1, 5]$

$$3) \cdot f[0, 1] = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow 0^+} f \right] = [0, +\infty[$$

$$\cdot f[1, 5] = [f(1), f(5)] = \left[0, 2\sqrt{5} - \frac{14}{5} \right]$$

$$4) a) 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

l'équation admet deux solutions

$$b) \varphi(x) = f(x) - 1 \quad (\text{calculatrice})$$

$$* \varphi(0,3) \cdot \varphi(0,4) < 0 \Rightarrow 0,3 < x' < 0,4$$

$$* \varphi(3,5) \cdot \varphi(3,6) < 0 \Rightarrow 3,5 < x'' < 3,6$$

EX 27 :

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$D_f = [0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$1) x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$

2) f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$

$$d'où f[0, 1[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow 1^-} f \right] = [1, +\infty[$$

• f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$

$$d'où f[1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^+} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$3) a) \text{ dans } \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

$$(x-1)\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\cdot f \text{ est continue sur } \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\right)(\sqrt{2} - 1) < 0$$

d'où l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution α

$$\text{dans } \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

comme f est strictement croissante alors α est unique

par suite : l'équation : $(x-1)\sqrt{x} = 0$ admet α comme

$$\text{unique solution dans } \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

$$b) f(1,7) \cdot f(1,8) < 0 \text{ donc } 1,7 < \alpha < 1,8$$

une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 1,7

QCM

1. $U_n = \frac{n^2+2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq n$

2. $U_n = \frac{n+\cos(n)}{n+1}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

3. $U_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

VRAI-FAUX

1. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n$

2. FAUX contre exemple : $U_n = -n$ et $V_n = \sqrt{1+n^2}$ $U_n + V_n = \frac{1}{n + \sqrt{1+n^2}}$

$U_n + V_n$ converge vers 0 mais U_n et V_n ne sont pas convergentes

3. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n \rightarrow (U_n)^2 = 1$
 $(U_n)^2$ converge vers 1 mais U_n ne converge pas

4. FAUX voir définition

5. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n$
 U_{2n} converge vers 1 ; U_{2n+1} converge vers -1 mais U_n n'est pas
 Convergente

Ex 1 :

1. *

$$\frac{1}{5} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \left(\frac{1}{5}\right)^n = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$$

2.

$$|U_n - 2| \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{5^n} \leq \frac{1}{10^6}$$

$$\Leftrightarrow 5^n \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 9$$

$$\text{pour } n \geq n_0 = 9 \quad |U_n - 2| \leq 10^{-6}$$

3.

$$|V_n - 2| = \frac{1}{n(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{n}})}$$

$$|V_n - 2| \leq 10^{-6} \quad \text{pour } n \geq n_1 = ?$$

EX 2 :

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^{n+1}} \quad ; n \geq 0$$

$$1. \quad a_{2n} = \frac{n+1}{2n-1} ; a_{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1}$$

2.

$$\lim a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim a_n = \frac{1}{2}$$

EX 3 :

$$U_n = \frac{2^{(-1)^n \cdot n}}{(-5)^{n+1}} \quad ; (n \in \mathbb{N})$$

$$*U_{2n} = \frac{2^{(-1)^{2n} \cdot 2n}}{(-5)^{2n+1}} = \frac{2^{2n}}{(-5) \cdot (-5)^{2n}}$$

$$U_{2n} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{2^{2n}}{5^{2n}} = \frac{-1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\frac{2}{5} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim U_{2n} = 0$$

$$*U_{2n+1} = \frac{2^{(-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)}}{(-5)^{2n+2}}$$

$$= \frac{2^{-(2n+1)}}{5^{2n+2}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim U_{2n+1} = 0 \quad \text{car } \frac{1}{10} \in]-1, 1[$$

$$\lim U_{2n} = \lim U_{2n+1} = 0 \quad \text{d'où} \\ \lim U_n = 0$$

EX4 :

$$U_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{2n + (-1)^n}$$

$$*U_{2n} = 1 + \frac{\sqrt{2n}}{4n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n} \cdot \left[2\sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}} = 1$$

$$*U_{2n+1} = 1 + \frac{\sqrt{2n+1}}{4n+2-1} = 1 + \frac{\sqrt{2n+1}}{4n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = 1 + \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{4\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

EX 5 :

$$U_n = (1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{n})$$

$$U_n = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n}$$

En simplifiant on aura :

$$U_n = \frac{n+1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

EX 6 : $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $x_n = 0,33\dots 3$
n fois

Démontrons par récurrence

* pour $n=1$ $x_1 = 0,3 = 3(10^{-1})$ (vrai)

* supposons que : $x_n = 3[10^{-1} + \dots + 10^{-n}]$

* montrons que :

$$x_{n+1} = 3 \cdot [10^{-1} + \dots + 10^{-n} + 10^{-(n+1)}]$$

$$x_{n+1} = 0,33\dots 3 = 0,33\dots 3 + 0,00\dots 03$$

(n+1) fois n fois n fois

$$x_{n+1} = x_n + 3 \cdot 10^{-(n+1)} = 3[10^{-1} + \dots + 10^{-n}] + 3 \cdot 10^{-(n+1)}$$

$$x_{n+1} = 3 \times [10^{-1} + \dots + 10^{-(n+1)}]$$

Conclusion : $x_n = 3 \times [10^{-1} + \dots + 10^{-n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $10^{-1} + \dots + 10^{-n} = 10^{-1} \left(\frac{1 - (10^{-1})^n}{1 - 10^{-1}} \right)$

somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 10^{-1} , d'où

$$10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} = \frac{1}{9} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right]$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right]$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3}$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = 0$

2) a) $y_1 = 0,35$

$$y_n = 0,353535\dots 35$$

n fois 35

$$y_n = 3 \times [10^{-1} + 10^{-3} + \dots + 10^{-(2n-1)}] +$$

$$5 \times [10^{-2} + 10^{-4} + \dots + 10^{-2n}]$$

$$10^{-1} + 10^{-3} + \dots + 10^{-(2n-1)} = 10^{-1} \cdot \left[\frac{1 - (10^{-2})^n}{1 - 10^{-2}} \right]$$

$$= \frac{10}{99} \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right]$$

$$10^{-2} + 10^{-4} + \dots + 10^{-2n} = 10^{-2} \cdot \left[\frac{1 - (10^{-2})^n}{1 - 10^{-2}} \right]$$

$$= \frac{1}{99} \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right]$$

d'où

$$y_n = \left(\frac{30}{99} + \frac{5}{99} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] = \frac{35}{99} \left[1 - \left(\frac{1}{100} \right)^n \right]$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{35}{99}$

b) $z_1 = 0,35$; $z_2 = 0,355$

$$z_n = 0,33\dots 355\dots 55$$

n fois n fois

$$z_n = x_n + 5 \times [10^{-1(n+1)} + \dots + 10^{-2n}]$$

$$z_n = x_n + 5 \times \left[\frac{1}{10^{n+1}} \left(\frac{1 - (10^{-1})^n}{1 - 10^{-1}} \right) \right]$$

$$z_n = x_n + \frac{5}{9 \times 10^n} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3}$$

EX 7 :

1) on pose $V_n = n$; $n \in \mathbb{N}^*$

(V_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n V_k = n \left[\frac{V_1 + V_n}{2} \right] = \frac{n(1+n)}{2}$$

2)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$$

$$U_{k+1} = U_k + 2k + 3$$

2)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n U_{k+1} = \sum_{k=0}^n (U_k + 2k + 3)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n U_{k+1} - \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n (2k + 3)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_0 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 3$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - 1 = n(n+1) + 3(n+1)$$

$$\Rightarrow U_n + 2n + 2 = (n+3)(n+1)$$

$$\Rightarrow U_n = (n+3)(n+1) - 2(n+1) = (n+1)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

EX 8 :

$$1) U_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b) 0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$2) V_n = n^{2n} \cdot \left[1 - \frac{(2n)^n}{n^{2n}}\right] = n^{2n} \cdot \left[1 - \left(\frac{2n}{n^2}\right)^n\right]$$

$$V_n = n^{2n} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{n}\right)^n\right] = n^{2n} \cdot [1 - U_n]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2n} = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

EX 9 :

$$1) U_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$$

$$2) a) S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k - 1}$$

$$U_k - 1 = \frac{-2 \times 4^k}{3^k + 4^k} \Rightarrow \frac{1}{U_k - 1} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 \right]$$

$$\text{d'où } S_n = \frac{-1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^n 1 \right]$$

$$S_n = \frac{-1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} + (n+1) \right]$$

$$S_n = \frac{-1}{2} \left[n+1 + 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \right]$$

$$S_n = \frac{-1}{2} \left[n+5 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

EX 10 :

$$W_n = \frac{n!}{3^n}, (n \in \mathbb{N})$$

$$1) \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

$$n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$$

$$2) \frac{W_4}{W_3} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{W_5}{W_4} \geq \frac{4}{3}$$

.

.

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} \geq \frac{4}{3}$$

multiplions membre à membre et simplifions

$$\text{on aura : } \frac{W_n}{W_3} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}$$

$$W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} \times W_3 \text{ pour } n \geq 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} \times W_3 = +\infty \text{ car } W_3 > 0 \text{ et } \frac{4}{3} > 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty$$

EX 11 :

$$U_n = \frac{n^2}{2^n} ; (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$1) a) A_0(0,0) ; A_1(1, \frac{1}{2}) ; A_2(2,1)$$

$$A_3(3, \frac{9}{8}) ; A_4(4,1) ; A_5(5, \frac{25}{32})$$

$$A_6(6, \frac{9}{16}) ; A_7(7, \frac{49}{128})$$

$$b) \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{8}{9}$$

$$c) \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{8}{9}$$

$$\frac{U_5}{U_4} \leq \frac{8}{9}$$

·
·

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{8}{9}$$

multiplions membre à membre et simplifions on aura :

$$\frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n-3} \Rightarrow U_n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n-3} \times U_3$$

$$\Rightarrow U_n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n-4} \text{ or } U_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } 0 \leq U_n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n-4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-4} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$2) S_n = \sum_{k=3}^n U_k ; (n \geq 3)$$

d'après 1) b) on a :

$$U_{k+1} \leq \frac{8}{9} U_k ; k \geq 3$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^n U_{k+1} \leq \frac{8}{9} \sum_{k=3}^n U_k \Rightarrow \sum_{k=3}^n U_{k+1} \leq \frac{8}{9} S_n$$

$$\Rightarrow S_n + U_{n+1} - U_3 \leq \frac{8}{9} S_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} S_n \leq U_3 - U_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{9} S_n \leq U_3 \text{ car } U_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow S_n \leq 9U_3$$

$$b) S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$$

d'où (S_n) est croissante et comme (S_n)

est majorée par $9U_3 = \frac{81}{8}$ alors (S_n) est convergente

EX 12 :

$$V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$1) V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n \text{ on a : } \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow V_n \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow V_n \geq \sqrt{n}$$

$$2) V_n \geq \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

EX 13 :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

* pour $x > 0$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} ; \forall x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$2) a) U_n = f\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\text{d'où } \lim U_n = 1$$

$$b) V_n = f(2^n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

$$c) W_n = f((-0, 3)^n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-0, 3)^n = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1$$

EX 14 :

$$1) U_n = \frac{-3}{3^n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

$$2) U_n = \frac{1}{(0,8) + (0,2)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^n = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}$$

$$3) U_n = \cos(4n) - 4^n$$

$$\cos(4n) \leq 1 \Rightarrow \cos(4n) - 4^n \leq 1 - 4^n$$

$$\Rightarrow U_n \leq 1 - 4^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 4^n) = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

$$4) U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \cos n$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq U_n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$5) U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \sin x - x$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad f \text{ est continue en } 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(0) = 0$$

$$6) U_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^3} ; n \geq 1$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n^2 - 1 \leq n^2 + \sin n \leq n^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \leq U_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$7) U_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{3n + 2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$U_{2n} = \frac{2n + \sqrt{2n}}{6n + 2} = \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}{6 + \frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \frac{1}{3} \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$U_{2n+1} = \frac{2 + \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{6 + \frac{5}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{3}$$

$$8) U_n = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi n}{2n-1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\pi}{2 - \frac{1}{n}} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

EX 15 :

$$\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$1)^* U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2(1 + \cos\theta)}$$

$$U_1 = \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\cos \frac{\theta}{2} \geq 0)$$

$$* U_2 = \sqrt{2 + U_1} = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\theta}{2})} = 2\cos \frac{\theta}{4}$$

2) par récurrence

* pour $n=0$: $U_0 = 2 \cos \theta = 2 \cos(\frac{\theta}{2^0})$ (vrai)* supposons que : $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$ * montrons que : $U_{n+1} = 2 \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n}))} = \sqrt{4 \cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})}$$

$$= 2 \left| \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) \right| = 2 \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) \quad \text{car } \frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

conclusion: $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$; $\forall n \in \mathbb{N}$ 3) $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n}) = f(\frac{\theta}{2^n})$ ($f(x) = 2 \cos x$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \quad f \text{ est continue en } 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(0) = 2$$

EX 16 :

$$U_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$$

1) en général : $x-1 \leq E(x) \leq x$ d'où $k\pi-1 \leq E(k\pi) \leq k\pi$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (k\pi-1) \leq \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \sum_{k=1}^n k\pi$$

$$\Rightarrow \pi \sum_{k=1}^n k - n \leq \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \pi \sum_{k=1}^n k$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{voir: ex7})$$

$$\text{donc } \frac{n(n+1)\pi}{2} - n \leq \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \frac{n(n+1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} - n \leq n^2 U_n \leq \frac{n^2\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$$

EX 17 :

$$U_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

$$1) V_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

2) pour : $1 \leq k \leq n$

$$\text{on a : } k^3 \leq n^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 \leq \sum_{k=1}^n n^3$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^3 \times n = n^4$$

3) pour $x \in [0, +\infty[$

* on pose : $f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, f est décroissante sur $[0, +\infty[$
 $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$ (1)

* on pose : $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$g''(x) = x - \sin x \geq 0 \quad (\text{d'après (1)})$$

g' est croissante sur $[0, +\infty[$

$$x \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) \Rightarrow g'(x) \geq 0$$

d'où g est croissante sur $[0, +\infty[$

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x ; \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$4) U_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\text{d'après 3) : } \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6} \leq U_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow V_n - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq U_n \leq V_n \quad (1)$$

$$* \text{ d'après 2) on a : } \sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4 \Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \geq -\frac{1}{6n^2}$$

$$\Rightarrow V_n - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \geq V_n - \frac{1}{6n^2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(V_n - \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \lim U_n = \frac{1}{2}$$

EX 18 :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstration par récurrence:

* pour $n=1$, $U_1 = 1 \leq 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq 3$

montrons que : $U_{n+1} \leq 3$

$$U_n \leq 3 \Rightarrow 3.U_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \leq 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3$$

conclusion : $U_n \leq 3 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2) U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n} - U_n = \frac{3U_n - U_n^2}{\sqrt{3U_n} + U_n} = \frac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3U_n} + U_n}$$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$$\Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3

elle est donc convergente

* soit ℓ : sa limite

$$(U_n) \text{ est croissante} \Rightarrow U_n \geq U_1 \Rightarrow U_n \geq 1$$

$$1 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 3$$

$$* U_{n+1} = f(U_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{3x}$$

f est continue sur $[1, 3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 3, 0 \notin [1, 3] \text{ d'où } \ell = 3$$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EX 19 :

$$\begin{cases} U_0 = a ; a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ U_{n+1} = \sin(U_n) \end{cases}$$

1) $f(x) = \sin x - x$

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	-
f(x)	0	$1 - \frac{\pi}{2}$

2) f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\pi}{2} \geq x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$$

3) * pour $n=0$, $U_0 = a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (vrai)

* supposons que : $U_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$

montrons que : $U_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$U_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 0 \leq \sin U_n \leq U_n \quad (\text{d'après 2})$$

$$\text{d'où } 0 \leq U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$4) \sin U_n \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$$

(U_n) est décroissante

5) * (U_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente

* soit $\ell = \lim U_n$

$$U_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

la fonction sin est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\ell = \sin \ell$

$$\Rightarrow \ell = 0 \quad (\text{d'après 1})$$

EX 20 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

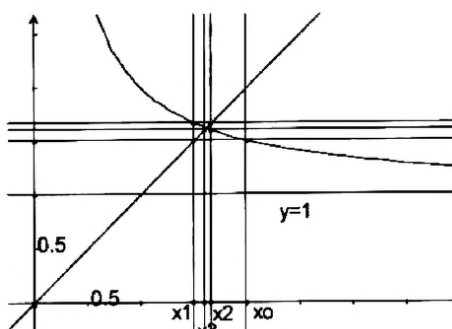
$$1) f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

x	0	$+\infty$
f'(x)		-
f(x)	$+\infty$	1

f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'où

$$f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f, \lim_{x \rightarrow 0^+} f[=]1, +\infty[$$

2)



$$3) \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(\varphi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$4) \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

$$a) x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3}$$

$$x_3 = \frac{8}{5}; x_4 = \frac{13}{8}$$

b) par récurrence

* $U_0 = 2 \in \mathbb{Q}$. (vrai)

* supposons que $x_n \in \mathbb{Q}$.

montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n} \in \mathbb{Q}.$$

c) * montrons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] ; \forall n \in \mathbb{N}$

* pour $n=0$: $x_0=2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

* supposons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

montrons que : $x_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$$x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$$

$$\Rightarrow f(2) \leq f(x_n) \leq f\left(\frac{3}{2}\right) \quad (\text{car } f \text{ est décroissante})$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq 2$$

conclusion: $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$* |x_{n+1} - \varphi| = |f(x_n) - f(\varphi)| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\varphi}\right| = \frac{|x_n - \varphi|}{\varphi \cdot x_n}$$

$$\text{comparons } \frac{1}{\varphi \cdot x_n} \text{ et } \frac{4}{9}$$

$$x_n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi \cdot x_n} \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varphi \cdot x_n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi \cdot x_n} \leq \frac{3(\sqrt{5}-1)}{9} \Rightarrow \frac{1}{\varphi \cdot x_n} \leq \frac{4}{9}$$

$$\text{d'où } |x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9} |x_n - \varphi|$$

$$d) |x_1 - \varphi| \leq \frac{4}{9} |x_0 - \varphi|$$

$$|x_2 - \varphi| \leq \frac{4}{9} |x_1 - \varphi|$$

$$|x_3 - \varphi| \leq \frac{4}{9} |x_2 - \varphi|$$

.

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{4}{9} |x_{n-1} - \varphi|$$

multiplions membre à membre et simplifions on a :

$$|x_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |2 - \varphi|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - \varphi) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \varphi$$

EX 21 :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$1) a) U_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = 1$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$U_3 = U_2 + \frac{1}{3^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$$

$$b) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

d'où (U_n) est croissante

2) a) $k \geq 2$

$$\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)} \geq 0$$

$$\text{d'où } \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) $n \geq 2$

$k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

c) (U_n) est croissante et majorée par 2
elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_3$, pour $n \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{49}{36} \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2 \quad \text{d'où} \quad \frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$$

3) $p \geq 3$

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \quad ; \quad n \geq 1$$

a) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)^p} \geq 0$ d'où (V_n) est croissante

b) pour $k \geq 1$ on a :

$$k^{p-2} \geq 1 \Rightarrow k^p \geq k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \Rightarrow V_n \leq U_n$$

c) $V_n \leq U_n$ et $U_n \leq 2$ d'où $V_n \leq 2$

(V_n) est croissante et majorée par 2
elle est donc convergente

soit ℓ' : sa limite

$$V_n \leq 2 \Rightarrow \ell' \leq 2$$

d) $p=3$

$$V_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^3} = 1$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^3} = \frac{9}{8}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{3^3} = \frac{9}{8} + \frac{1}{27} = \frac{61}{54}$$

pour $n \geq 3$

$$V_3 \leq V_n \leq 2 \Rightarrow \frac{61}{54} \leq V_n \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{61}{54} \leq \ell' \leq 2$$

EX 22 :

$n \in \mathbb{N}^*$

$$1) U_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$$

$$a) \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq 1 \quad \text{car } 2n+1 \leq 2n+2$$

(U_n) est à termes positifs et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

d'où (U_n) est décroissante

b) il est clair que : $U_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(U_n) est décroissante et minorée par 0.

elle est donc convergente $U_n \geq 0 \rightarrow \ell \geq 0$

$$2) V_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$

$$a) \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \leq 1$$

$V_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où $V_{n+1} \leq V_n$

(V_n) est décroissante

c) (V_n) décroissante et minorée par 0 ,

elle est donc convergente $V_n \geq 0 \rightarrow \ell' \geq 0$

$$3) W_n = U_n \cdot V_n$$

a) (W_n) converge vers $\ell \times \ell'$

$$b) W_n = \frac{1}{2n+1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \ell \times \ell'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

d'où $\ell \times \ell' = 0$

4) a) démonstration par récurrence:

* pour $n=1$: $U_1 = \frac{1}{2}$ et $V_1 = \frac{2}{3}$; $U_1 < V_1$ (vrai)

* supposons que $U_n < V_n$

montrons que : $U_{n+1} < V_{n+1}$

d'après 1) a) et 2) a), on a :

$$U_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \cdot V_n$$

$$\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{-1}{2(n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{2(n+1)}{2n+3} \Rightarrow \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot U_n < \frac{2(n+1)}{2n+3} \cdot V_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < V_{n+1}$$

conclusion : $U_n < V_n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $0 < U_n < V_n \Rightarrow 0 \leq \ell \leq \ell'$ or $\ell \times \ell' = 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \ell^2 \leq \ell \times \ell' \Rightarrow 0 \leq \ell^2 \leq 0 \Rightarrow \ell = 0$$

c) de la même manière que 4) a)

d) $2U_{n+1} > V_n \Rightarrow 2\ell \geq \ell' \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \ell'^2 \leq 2\ell\ell' \Rightarrow 0 \leq \ell'^2 \leq 0 \Rightarrow \ell' = 0$$

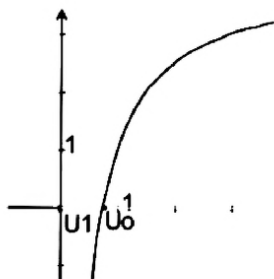
EX 23 :

$$x \in]0, +\infty[$$

1) $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	4



2) $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

a) $U_1 = f(U_0) = f(\frac{3}{4}) = 0$

b) $U_2 = f(U_1) = f(0)$ n'existe pas

d'où (U_n) n'est pas définie

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1 = f(U_0) = 3$; $U_2 = 3$; $U_3 = 3$

b) • pour $n=0$ on a $U_0 = 3$

• supposons que $U_n = 3$

montrons que : $U_{n+1} = 3$

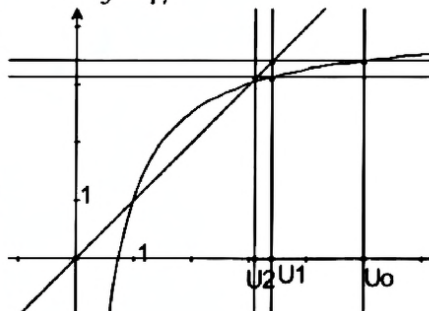
$$U_{n+1} = f(U_n) = f(3) = 3$$

d'où : $U_n = 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1 = f(5) = \frac{17}{5}$

$$U_2 = f(\frac{17}{5}) = \frac{53}{17}$$



b) montrons que : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$U_1 = \frac{17}{5} > 3 \quad (\text{vrai})$$

• supposons que : $U_n \geq 3$

montrons que $U_{n+1} \geq 3$

$$U_n \geq 3 \Rightarrow f(U_n) \geq f(3) \quad (\text{car } f \text{ est croissante})$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq 3$$

conclusion : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$* U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 3}{U_n}$$

$$= \frac{-(U_n - 1)(U_n - 3)}{U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \text{car } U_n \geq 3$$

d'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 3

donc elle est convergente

soit $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$U_n \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 3$$

f est continue sur $[3, +\infty[$

d'où $\alpha = f(\alpha)$

$$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \quad \text{ou } \alpha = 3$$

$$\text{or } \alpha \geq 3 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$d) U_n - 3 \leq 10^{-5} \quad (\text{pour } n \geq ?)$$

EX 24 :

$$1) \begin{cases} U_n = \frac{2}{n} \\ V_n = \frac{-3}{n} \end{cases} \quad n \geq 2$$

$$* V_n < 0 \text{ et } U_n > 0 \Rightarrow V_n \leq U_n$$

$$* V_{n+1} - V_n = \frac{-3}{n+1} - \frac{-3}{n} = \frac{3}{n(n+1)} \geq 0$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{-2}{n(n+1)} \leq 0 \quad \Rightarrow$$

on a : (V_n) est croissante

(U_n) est décroissante

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

$$2) \begin{cases} U_n = \frac{n+2}{n-1} \\ V_n = \frac{2n+3}{2n+5} \end{cases} \quad (n \geq 4)$$

$$* U_n - V_n = \frac{8n+13}{(n-1)(2n+5)} \geq 0$$

d'où $V_n \leq U_n$

• (V_n) est croissante

(U_n) est décroissante

$$* \lim (U_n - V_n) = 0$$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

$$3) \begin{cases} U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ V_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \end{cases} ; n \geq 2$$

pour $n \geq 2$, on a : $\frac{1}{n} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$$

$$* \cos \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow V_n \leq 0$$

d'où $V_n \leq U_n$

$$* \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \frac{1}{n+1} \leq \sin \frac{1}{n} \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$$

(U_n) est croissante

d'où (U_n) et (V_n) ne sont pas adjacentes

$$4) \begin{cases} U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ V_n = 2 + \frac{3}{n} \end{cases} (n \geq 2)$$

$$U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$* \text{on a : } U_n \leq V_n \quad (1)$$

$$* U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$$

$$\begin{cases} (U_n) \text{ est croissante} \\ (V_n) \text{ est décroissante} \end{cases} \quad (2)$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (3)$$

conclusion : (U_n) et (V_n) sont adjacentes

$$5) * U_n \geq 0 \text{ et } V_n \leq 0 \text{ d'où } V_n \leq U_n$$

$$* U_{n+1} - U_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0$$

d'où (U_n) est décroissante

$$V_n = -U_n \rightarrow (V_n) \text{ est croissante}$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

conclusion : (U_n) et (V_n) sont adjacentes

EX 25 :

$$\begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} ; \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

$$1) * \text{pour } n=0, \text{ on a : } U_0 \geq V_0$$

$$* \text{supposons que : } U_n \geq V_n$$

$$\text{montrons que } U_{n+1} \geq V_{n+1}$$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{12} \geq 0 \text{ d'où } U_{n+1} \geq V_{n+1}$$

$$\text{conclusion : } U_n \geq V_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) * U_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{3} \leq 0 \rightarrow (U_n) \text{ est décroissante}$$

$$* V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4} \geq 0 \rightarrow (V_n) \text{ est croissante}$$

$$* \text{on pose : } W_n = U_n - V_n$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{12} W_n \text{ (d'après 1))}$$

$$(W_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{12}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$$

$$\text{conclusion : } * V_n \leq U_n$$

$$* (V_n) \text{ croissante et } (U_n) \text{ décroissante}$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

par suite (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite

$$3) t_n = 3U_n + 8V_n$$

$$\begin{aligned} a) t_{n+1} &= 3U_{n+1} + 8V_{n+1} = (U_n + 2V_n) + 2(U_n + 3V_n) \\ &= 3U_n + 8V_n = t_n \end{aligned}$$

d'où (t_n) est constante

$$b) t_0 = 3U_0 + 8V_0 = 44 \text{ d'où } 3U_n + 8V_n = 44$$

$$\xrightarrow{\text{passage aux limites}} 3\alpha + 8\alpha = 44 \Rightarrow \alpha = 4$$

EX 26 :

$$a > 0$$

$$b_n = \frac{n}{(1+a)^n} ; n \in \mathbb{N}$$

$$1) (1+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k$$

$$\Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$$

2) pour $n \geq 2$

$$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

3) (x_n) suite géométrique de premier terme x_0 de raison $q \in]-1, 1[$ 1^{re} cas : $q=0$ ou $x_0=0$

$$|x_n|=0 ; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n|x_n|=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n|x_n|=0$$

2^{ème} cas : $q \neq 0$ et $x_0 \neq 0$

$$|x_n|=|x_0| \cdot |q|^n$$

$$\text{soit } a = \frac{1 \cdot |q|}{|q|} > 0 \Rightarrow q = \frac{1}{1+a}$$

$$\text{d'où } |x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0|b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \quad \text{d'où} : \lim_{n \rightarrow +\infty} n|x_n| = 0$$

$$\text{par suite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n x_n) = 0$$

4) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ est géométriquede raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$$

$$* x_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+2}$$

 (x_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{3} \in]-1, 1[$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+2} = 0$$

$$* (n+1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n = n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

$$x_n = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

 (x_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in]-1, 1[$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

$$\text{par suite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

EX 27 : $n > 1 ; x \in \mathbb{R}^*$ 1) soit $W_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (W_n) est géométrique de raison x de premier terme $W_0 = 1$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^n W_k = W_0 \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2) on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x_k$

$$g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$f_n'(x) = g_n'(x) \Rightarrow f_n'(x) = g_n'(x)$$

$$f_n'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

$$f_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1}$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$$

$$g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

d'où le résultat

$$3) a) U_n = \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$$

$$\frac{5}{3} \notin]-1, 1[$$

le résultat du 2) est vrai pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$$U_n = \frac{(n+1)\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} - (n+2)\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2}$$

$$U_n = \frac{-3}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \cdot \left[\frac{5(n+1)}{3} - (n+2) + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right]$$

$$U_n = \frac{9}{4} \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \cdot \left[\frac{2}{3}n - \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \quad \text{car } \frac{3}{5} \in]-1, 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} = +\infty \quad \text{car } \frac{5}{3} > 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

$$\text{b) } V_n = 2 \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$$

d'où :

$$V_n = 2 \cdot \frac{(n+1)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} - (n+2)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} + 1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

EX 28 :

$$0 < a < b$$

$$\begin{cases} U_1 = a + b \\ U_{n+1} = a + b - \frac{ab}{U_n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$1) U_2 = a + b - \frac{ab}{U_1} = (a + b) - \frac{ab}{a + b}$$

$$U_2 = \frac{(a + b)^2 - ab}{a + b} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b}$$

$$U_2 = \frac{(b - a)(a^2 + b^2 + ab)}{(b + a)(b - a)} = \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}$$

$$2) \bullet U_1 = a + b$$

$$\frac{b^{0+2} - a^{0+2}}{b^{0+1} - a^{0+1}} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)} = b + a = U_1$$

$$\bullet \text{ supposons que : } U_{n+1} = \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}}$$

$$\text{montrons que : } U_{n+2} = \frac{b^{n+3} - a^{n+3}}{b^{n+2} - a^{n+2}}$$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= (a + b) - \frac{ab}{U_{n+1}} = (a + b) - \frac{ab}{\frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}}} \\ &= (a + b) - \frac{ab(b^{n+1} - a^{n+1})}{b^{n+2} - a^{n+2}} \\ &= \frac{(a + b)(b^{n+2} - a^{n+2}) - ab(b^{n+1} - a^{n+1})}{b^{n+2} - a^{n+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= \frac{a.b^{n+2} - a^{n+3} + b^{n+3} - b.a^{n+2} - a.b^{n+2} + b.a^{n+2}}{b^{n+2} - a^{n+2}} \\ &= \frac{b^{n+3} - a^{n+3}}{b^{n+2} - a^{n+2}} \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } U_{n+1} = \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3) pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b^n - a^n} = \frac{b - a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$\frac{a}{b} \in]-1, 1[\quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = b$$

EX 29 :

$$\begin{cases} a_0 \text{ donné} \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n \end{cases}$$

$$1) a_{n+1} - a_n = a_n^2 \geq 0$$

$$\text{d'où } (a_n) \text{ est croissante}$$

$$2) \text{ si } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n \Rightarrow \ell = \ell^2 + \ell$$

$$\Rightarrow \ell^2 = 0 \Rightarrow \ell = 0$$

3) lorsque $a_0 > 0$

(a_n) est croissante $\Rightarrow a_n \geq a_0$

supposons que (a_n) converge vers un réel ℓ

on aura : $\ell \geq a_0 \Rightarrow \ell > 0$

(contradiction avec le résultat du 2))

d'où (a_n) est divergente

4) $a_1 = a_0^2 + a_0 = a_0(a_0 + 1)$

$a_0 < -1 \Rightarrow a_0 + 1 < 0 \Rightarrow a_0(a_0 + 1) > 0$

$\Rightarrow a_1 > 0$

(a_n) est croissante

$\Rightarrow a_n \geq a_1$ pour $n \geq 1$

supposons que (a_n) converge vers ℓ

on aura : $\ell \geq a_1 \Rightarrow \ell > 0$

(contradiction avec le résultat du 2))

d'où (a_n) est divergente

5)

$$-1 < a_0 < 0$$

a) démonstration par récurrence :

* $-1 < a_0 < 0$ (vrai)

* supposons que : $-1 < a_n < 0$

montrons que : $-1 < a_{n+1} < 0$

* $a_{n+1} = a_n(a_n + 1) < 0$ car $-1 < a_n < 0$

* $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1 = (a_n + 1)^2 - a_n > 0$ car $a_n < 0$

d'où $a_{n+1} > -1$

par suite : $-1 < a_{n+1} < 0$

conclusion : $-1 < a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) (a_n) est croissante et majorée par 0,

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

$-1 < a_n < 0 \Rightarrow -1 \leq \ell \leq 0$

$a_{n+1} = f(a_n)$ avec $f(x) = x^2 + x$

f est continue sur $[-1, 0]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$

(Rq : ou bien directement (a_n)

converge vers 0 d'après 2))

6) a) $a_0 = 0$

$a_n = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

b) $a_0 = -1$

$a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

EX 30 :

$$\begin{cases} U_0 = 0,1 \\ U_{n+1} = 1,6U_n(1 - U_n) \end{cases}$$

$$1) f(x) = 1,6x(1 - x)$$

$$f'(x) = 1,6[1 - 2x]$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0,4	$-\infty$

2) * pour $n=0$, on a : $0,1 \leq U_0 = 0,1 < \frac{3}{8}$

* supposons que : $0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$

montrons que : $0,1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

$$0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8} \Rightarrow f(0,1) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{3}{8}\right)$$

(car f est croissante sur $\left[0,1; \frac{3}{8}\right]$)

$$\Rightarrow 0,144 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow 0,1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$$

conclusion : $0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$3) U_{n+1} - U_n = U_n [1,6 - 1,6U_n - 1] = U_n [0,6 - 1,6U_n]$$

$$= \frac{U_n}{10} [6 - 16U_n] = \frac{8}{5} U_n \cdot \left[\frac{3}{8} - U_n \right]$$

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \text{car } 0,1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$$

d'où (U_n) est croissante

(U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$

elle est donc convergente

$$4) a) 1,6 \cdot \left(\frac{5}{8} - U_n \right) \cdot \left(\frac{3}{8} - U_n \right) = 1,6 \cdot \left[\frac{15}{64} - U_n + U_n^2 \right]$$

$$= \frac{16}{10} \times \frac{15}{64} - (1,6)(U_n - U_n^2) = \frac{3}{8} - (1,6)U_n(1 - U_n)$$

$$= \frac{3}{8} - U_{n+1}$$

$$b) V_n = \frac{3}{8} - U_n$$

$$* V_n \geq 0 \quad \text{car } U_n \leq \frac{3}{8}$$

$$* \text{ d'après 4) a) : } V_{n+1} = 1,6 \left(\frac{5}{8} - U_n \right) \cdot V_n$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = (1,6) \left(\frac{5}{8} - U_n \right)$$

$$U_n \geq 0,1 \Rightarrow -U_n \leq \frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{5}{8} - U_n \leq \frac{21}{40}$$

$$\Rightarrow (1,6) \left(\frac{5}{8} - U_n \right) \leq \frac{16}{10} \times \frac{21}{40} \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{4 \times 21}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 0,84$$

$$c) * V_0 = \frac{3}{8} - U_0 = \frac{3}{8} - \frac{1}{10}$$

$$V_0 = \frac{11}{40}$$

$$0 \leq V_0 \leq (0,84)^0 = 1 \quad (\text{vrai})$$

* supposons que : $0 \leq V_n \leq (0,84)^n$

montrons que : $0 \leq V_{n+1} \leq (0,84)^{n+1}$

• $V_{n+1} \geq 0$ d'après 4) b)

$$* \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 0,84 \Rightarrow V_{n+1} \leq (0,84) \cdot V_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} \leq (0,84) \cdot (0,84)^n$$

d'où $0 \leq V_{n+1} \leq (0,84)^{n+1}$

conclusion : $0 \leq V_n \leq (0,84)^n$

$$d) 0 \leq V_n \leq (0,84)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,84)^n = 0 \quad \text{car } 0,84 \in]-1, 1[$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

$$U_n = \frac{3}{8} - V_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{8}$$

$$c) \text{ on a : } 0 \leq \frac{3}{8} - U_n \leq (0,84)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(0,84)^n \leq 10^{-5} \Rightarrow (\text{calculatrice}) \quad n_0 \geq 67$$

EX 31 :

$a > 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

$$1) * f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - a}{x^2}$$

$$= \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{2x^2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)		$-\sqrt{a}$		$+\infty$	$-\sqrt{a}$	$+\infty$

$$2) \begin{cases} U_0 = E(\sqrt{a}) + 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) montrons par récurrence que :

$$* \text{ pour } n=0, U_0 = E(\sqrt{a}) + 1 > \sqrt{a}$$

$$* \text{ supposons que : } U_n > \sqrt{a}$$

montrons que : $U_{n+1} > \sqrt{a}$

$$U_n > \sqrt{a} \Rightarrow f(U_n) > f(\sqrt{a})$$

(car f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$)

$$\Rightarrow U_{n+1} > \sqrt{a}$$

$$\text{conclusion : } U_n > \sqrt{a} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$* U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right) - U_n$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{U_n} - U_n \right] = \frac{1}{2} \frac{a - U_n^2}{U_n} = \frac{(\sqrt{a} - U_n)(\sqrt{a} + U_n)}{2U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n < 0 \quad \text{car } U_n > \sqrt{a}$$

d'où (U_n) est décroissante

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \leq U_0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \sqrt{a} < U_{n+1} < U_n \leq U_0$$

* (U_n) décroissante et minorée par $\sqrt{a}$

elle est donc convergente

$$b) U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} - 2\sqrt{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{U_n^2 - 2\sqrt{a}U_n + a}{U_n} \right) = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{2U_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n} \right) (U_n - \sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{U_n} \right) (U_n - \sqrt{a})$$

$$(U_{n+1} - \sqrt{a}) - \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{a}) = \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{a}) \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{U_n} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{a}) \left(-\frac{\sqrt{a}}{U_n} \right) < 0 \quad \text{d'après 2) a)}$$

$$\text{d'où } U_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{a})$$

c)

$$* \text{ pour } n=0 \quad 0 < U_0 - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (U_0 - \sqrt{a}) \quad (\text{vrai})$$

$$* \text{ supposons que : } 0 < U_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$\text{montrons que : } 0 < U_{n+1} - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$\bullet U_{n+1} - \sqrt{a} > 0 \quad \text{d'après 2) a)}$$

$$\bullet U_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{a}) \quad \text{et } U_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$\text{d'où } 0 < U_{n+1} - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$\text{conclusion : } 0 < U_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (U_0 - \sqrt{a})$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (U_0 - \sqrt{a}) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{a}$$

EX 32 :

$$0 < b < a$$

$$1) a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$(\sqrt{ab})^2 = ab$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{d'où } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$$

$$\text{par suite } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$b) (a-b)^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2 - 2ab - a^2 + b^2 \\ = 2b^2 - 2ab = 2b(b-a) \leq 0 \quad (\text{car } 0 < b < a)$$

$$\text{d'où } (a-b)^2 \leq a^2 - b^2$$

$$2) \begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

a) * pour $n=0$

$$b_0 = b \leq a_0 = a$$

* supposons que : $b_n \leq a_n$ montrons que : $b_{n+1} \leq a_{n+1}$

$$b_{n+1} \leq a_{n+1} \quad \text{d'après 1) a)}$$

conclusion : $b_n \leq a_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$b) * a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$$

d'où (a_n) est décroissante

$$* b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n} [\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}]$$

$$b_{n+1} - b_n \geq 0 \quad \text{car } \sqrt{a_n} \geq \sqrt{b_n}$$

d'où (b_n) est croissante

$$3) a) \text{ d'après 1) b) : } (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{(a_n + b_n)^2}{4} - a_n b_n$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n}{4} - a_n b_n$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n}{4}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2$$

b) * pour $n=0$

$$a_0 - b_0 = a - b \leq \frac{a-b}{2^0} \quad (\text{vrai})$$

$$* \text{ supposons que : } a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$$

$$\text{montrons que : } a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$$

$$\text{on a : } a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - b_{n+1} \quad \text{or } a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$$

$$\text{d'où } a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$$

$$\text{conclusion : } a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$4) * b_n \leq a_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

* (b_n) est croissante et (a_n) décroissante

$$* 0 \leq a_n - b_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (a-b)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (a-b) = 0 \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$$

d'où (a_n) et (b_n) sont adjacentespar suite, elles convergent vers la même limite α 5) (a_n) est décroissante

$$\Rightarrow a_n \leq a_0 \Rightarrow a_n \leq a ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{on a : } b_n \leq a_n \quad \text{d'où } b_n \leq a$$

$$\left. \begin{array}{l} (b_n) \text{ est croissante et majorée par } a \\ \text{et } (b_n) \text{ converge vers } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{alors } b_n \leq \alpha ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{de même : } a_n \geq \alpha ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } b_n \leq \alpha \leq a_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n} \Rightarrow 0 \leq a_n - \alpha \leq \frac{a-b}{2^n}$$

pour $a=2$ et $b=1$

$$0 \leq a_n - \alpha \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^{10}$$

$$\text{on a : } 2^{40} \geq 10^{10} \leftarrow (\text{calculatrice})$$

$$\text{d'où } \alpha \approx a_{40} \quad (\text{à calculer})$$

QCM :

1. $f(x) = \sin(\pi x^2) \Rightarrow f'(x) = 2\pi x \cdot \cos(\pi x^2)$
2. a/ $f(-2) < f(-1)$
b/ $y = -\frac{1}{2}x$
3. $f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$
4. $x = 2$
5. (ζ_f) admet deux tangentes horizontales

VRAI – FAUX :

1. (VRAI) f est continue sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $] -1, 2[$ alors d'après le théorème des accroissements finis il existe au moins un réel $c \in] -1, 2[$ tel que $f(2) - f(-1) = f'(c)(2 - (-1)) \Leftrightarrow f'(c) = -1$
2. (FAUX)
Contre exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$
 $h(x) = (f \cdot g)(x) = x\sqrt{x}$ h est dérivable en 0 mais f n'est pas dérivable à droite en 0
3. (VRAI)
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\Delta' = 3 > 0$ alors l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions distinctes (Rq : on pourra utiliser le th acc fini)
4. (vrai) f est dérivable sur $[2, 5]$ et $|f'(t)| \leq 2 \forall t \in [2, 5]$ alors d'après le th des inégalités des Accroissements finis :
 $|f(5) - f(2)| \leq 2 \times (5 - 2) \Rightarrow$
 $|f(5) - f(2)| \leq 6$

EX 1 :

1. $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-3)$
 $f'(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-3) + (x-1)^2$
 $f'(2) = -1$ et $f(2) = -1$
 $T : y = -1 \cdot (x-2) + (-1)$
 $T : y = -x + 1$
2. $f(x) = \frac{2x^4}{(x+2)^2}$ $f'(x) = \frac{4x^4 + 16x^3}{(x+2)^3}$
 $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -12$
 $T : y = -12(x+1) + 2$
 $T : y = -12x - 10$
3. $f(x) = x(2\sqrt{x} - 3) \Rightarrow$
 $f'(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 3$
 $f(4) = 4$ et $f'(4) = 3$
 $T : y = 3x - 8$
4. $f(x) = \cos^3(x) + \sin(x)$
 $f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + \cos(x)$
 $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{4\sqrt{3}-9}{8}$ et $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{4+3\sqrt{3}}{8}$
 $T : y = \left(\frac{4\sqrt{3}-9}{8}\right) \cdot (x - \frac{\pi}{6}) + \frac{4+3\sqrt{3}}{8}$

EX 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2$
 $f(1) + f'(1) \cdot h$ est une approximation de $f(1+h)$ Donc

$1 - 2h$ est une approximation de $\frac{1}{(1+h)^2}$

* $1 - 2 \cdot (2 \cdot 10^{-10}) = 0,0000000006$ est une approximation de

$$\frac{1}{(1,0000000002)^2} = \frac{1}{(1 + 2 \cdot 10^{-10})}$$

* même travail pour $h = -2 \cdot 10^{-10}$ donne
 $1,0000000004$ est une approximation de

$$\frac{1}{0,9999999996}$$

EX 3 :

- $f(x) = 3x^{10} - \frac{5}{4}x^8 + 3x - 10$ est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 30x^9 - 10x^7 + 3$
- $f(x) = (1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (-1-9x^2)(x^2+2x)^3 + 3(2x+2)(x^2+2x)^2(1-x-3x^3)$$
 (à simplifier ...)
- $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et en particulier sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$
- $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}^*$ et en particulier sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3}$$
- les fonctions $x \mapsto \cos(3x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -3\sin(3x) - 2\cos(2x)$$
- $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ La fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ donc f est dérivable sur $]0, \pi[$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - \cos x}$$
- $f(x) = (1 + \sin(2x))^3$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant la puissance d'une fonction dérivable

$$f'(x) = 6 \cos(2x) \cdot [1 + \sin(2x)]^2$$

8. $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

la fonction $u: x \mapsto \frac{\pi}{2}x$ est dérivable sur

$[0, 1[$ et $u([0, 1[) = [0, \frac{\pi}{2}[$ et comme la

fonction tangente est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Alors f est dérivable sur $[0, 1[$ comme étant la composée de deux fonctions dérivables et

$$f'(x) = 2 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot (1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))\right]$$

$$= \pi \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot [1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)]$$

9. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et

strictement positive sur $]1, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

10. $x \mapsto \sqrt{x} - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)^2}$$

EX 4 :

- $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4$
 $f'(x) = 5x^4 - 6x^2$
 $f''(x) = 20x^3 - 12x$
 $f^{(3)}(x) = 60x^2 - 12$
 $f^{(4)}(x) = 120x$
 $f^{(5)}(x) = 120$
 $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n > 5$
- $f(x) = \cos x$
 $f'(x) = -\sin x$
 $f''(x) = -\cos x$
 $f^{(3)}(x) = \sin x$
 $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot \cos x$
 $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sin x$
 (on peut faire une démonstration par récurrence)
- $f(x) = \sin(2x)$
 $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \sin(2x)$
 $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot \cos(2x)$

EX 5 : $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c \\ f''(x) &= 6a \cdot x + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=1 \\ 6a+2b=1 \\ 6a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

EX 6

- $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$ $g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$
- $a/ \quad h(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$
 $(a=b=\frac{1}{2})$

$$h^{(3)}(x) = \frac{1}{2} [g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x)]$$

 $b/$

$$= -3 \left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4} \right]$$

EX 7 : $f(2)=0$; $f'(2)=3$

- Soit $h(x) = f(\sqrt{2+x})$ h est dérivable sur $] -2, +\infty[$ comme étant composée de fonctions dérivables et

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \cdot f'(\sqrt{2+x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} \quad \text{car } h(2) = 0$$

$$= h'(2) = \frac{1}{4} f'(2) = \frac{3}{4}$$

- Soit les fonctions $U(x) = 2\sin(\frac{\pi x}{4})$ et

$t(x) = f(U(x))$ t est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant composée de fonctions dérivables et

$$t'(x) = U'(x) \cdot f'(U(x)) = \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi x}{4}) \cdot f'(U(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2\sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{t(x) - t(2)}{x-2} = t'(2)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot f'(2) = 0$$

3. Soit la fonction $g(x) = \sin(f(x))$
 g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant
 composée de fonctions dérivables
 et $g'(x) = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(f(x))}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} \quad \text{car } g(2) = 0 \\ &= g'(2) = f'(2) \cdot \cos(f(2)) \\ &= 3 \cdot \cos(0) = 3 \end{aligned}$$

4. Soit la fonction $k(x) = f(x^2 + x + 2)$
 k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme
 étant composée de fonctions
 dérivables et

$$\begin{aligned} k'(x) &= (2x+1) \cdot f'(x^2+x+2) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+x+2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - k(0)}{x-0} \quad \text{car } k(0) = 0 \\ &= k'(0) = f'(2) = 3 \end{aligned}$$

EX 8 :

1. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; $I =]0, +\infty[$
 la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$ est
 dérivable et strictement positive
 sur I d'où f est dérivable sur I

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x + \sqrt{x})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

2. La fonction : $x \mapsto \sin x$ est
 dérivable et strictement positive
 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur
 $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

3. La fonction : $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ est dérivable
 sur $[1, +\infty[$ et comme la fonction
 sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ Alors f
 est dérivable sur $[1, +\infty[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{-\pi}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

4. $f(x) = \text{tg}(\sin(x))$

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
 $\forall x \in \mathbb{R}; \sin(x) \in [-1, 1]$; comme la fonction
 tangente est dérivable sur $[-1, 1]$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
 $f'(x) = \cos(x) \cdot [1 + \text{tg}^2(\sin(x))]$

EX 9: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

1. $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

$$f''(x) = 2 + 6x + 12x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$$

d'où f' est croissante sur $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{10} &\Rightarrow f'(0) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{10}\right) \\ &\Rightarrow 1 \leq f'(x) \leq 1,234 \\ &\Rightarrow 0 \leq f''(x) \leq 1,234 \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$, f est dérivable sur

$$[0, x] \text{ et } 0 \leq f'(t) \leq 1,234 \quad \forall t \in [0, x]$$

Alors d'après th. Ineg. Acc. fini

$$0 \leq f(x) - f(0) \leq 1,234 \cdot (x - 0)$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 1 + 1,234x$$

$$1 \leq f(0,0000000011) \leq 1 + 1,234 \cdot 11 \cdot 10^{-10}$$

3. $1 \leq f(0,0000000011) \leq 1 + 13,57 \cdot 10^{-10}$

$$\Rightarrow 1 \leq f(0,0000000011) \leq 1,000000001$$

EX 10 : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $I = [0, 1]$

1. la fonction : $x \mapsto 1+x$
 est dérivable et strictement positive sur
 $[0, 1]$ d'où f est dérivable sur $[0, 1]$

$$f'(x) = \frac{-1}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{2(\sqrt{1+x})^3}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2 \cdot (\sqrt{1+x})^3 \leq 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2(\sqrt{1+x})^3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

2. $x \in [0,1]$

f est dérivable sur $[0,1]$

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2}; \forall t \in [0,1]$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x - 0|$$

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

$$d'où $1 - \frac{1}{2}x \leq f(x)$ (1)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 + x \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 1 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1 \text{ pour } x \in [0,1]$$

3.

$$\alpha = 0,0000000002 = 2 \cdot 10^{-10}$$

$$1 - \frac{1}{2}\alpha \leq f(\alpha) \leq 1$$

$$1 - 10^{-10} \leq f(\alpha) \leq 1$$

$$0,999999999 \leq f(\alpha) \leq 1$$

Ex 11 :

Soit $f(t) = \cos(t)$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(t) = -\sin(t) \Rightarrow |f'(t)| \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}$$

Alors d'après th.In.Ac .finis

Pour tous réels x et y on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot |x - y| \Rightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

EX 12 :

1. Soit $f(t) = \sin(t)$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(t) = \cos(t)$

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ On a } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(t) = f'(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alors d'après th.Inég.Acc.finis :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (y - x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y - x) \leq \sin(y) - \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (y - x)$$

2. pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{24} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$$

EX 13 :

1. *La fonction tg est dérivable et ne s'annule pas sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où

la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\text{tg}(x)}$ est dérivable

sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2}) \text{tg}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cot g(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = (\cot g)' \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 = f'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Conclusion : f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

2.

$$*-2 \leq f'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \leq -1$$

$$* \text{ pour } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) = \frac{-(1 + \text{tg}^2(x))}{\text{tg}^2(x)}$$

$$f'(x) = -\left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2(x)}\right)$$

$$\text{pour } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{tg}(x) \geq 1 \Rightarrow \text{tg}^2(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\text{tg}^2(x)} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{\text{tg}^2(x)} \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq -\left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2(x)}\right) \leq -1$$

$$\Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq -1$$

Conclusion :

$$-2 \leq f'(x) \leq -1 \quad \text{pour tout } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$3. \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad f \text{ est dérivable sur } \left[\frac{\pi}{4}, x\right]$$

$$\text{et } -2 \leq f'(t) \leq -1 \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, x\right]$$

Alors d'après th des acc finis :

$$-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \text{tg}(x)}{\text{tg}(x)} \leq \frac{\pi}{4} - x$$

EX 14 :

$$1. \quad a/ \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et } h(x) = \text{tg}(x)$$

h est dérivable sur $[0, x]$ et

$$h'(x) = 1 + \text{tg}^2 x \geq 1 \quad \text{d'où}$$

$$h(x) - h(0) \geq 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \text{tg}(x) \geq x$$

$$b/ \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}; \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x^2} (x - \text{tg}(x)) \leq 0 \quad \text{car } x \leq \text{tg } x \text{ et } \cos x \geq 0$$

d'où f est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$2. \quad a/ \quad h(t) = \text{tg}(t), \quad h'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

pour $t \in [x, y]$ $\cos y \leq \cos t \leq \cos x$ car la

fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$$\Rightarrow \cos^2 y \leq \cos^2 t \leq \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \leq h'(t) \leq \frac{1}{\cos^2 y} \quad \text{Alors d'après le}$$

th. Inega. Acc. Finis :

$$\frac{1}{\cos^2 x} (y - x) \leq h(y) - h(x) \leq \frac{1}{\cos^2 y} (y - x)$$

$$\Rightarrow \frac{y - x}{\cos^2 x} \leq \text{tg}(y) - \text{tg}(x) \leq \frac{y - x}{\cos^2 y}$$

b/ d'après la question précédente :

pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\frac{x-0}{\cos^2 0} \leq tg(x) - tg(0) \leq \frac{x-0}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x \leq tg(x) \leq \frac{x}{\cos^2 x}$$

c/

$$x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos(x) \leq \sin(x) \leq \frac{x}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

3. pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow$$

$$\cos(x) - 1 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{1}{\cos(x)} - 1 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \leq \frac{g(x)-g(0)}{x} \leq \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$$

par suite g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$ donc C_g admet une demi-tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0 et comme g est une fonction paire alors g admet aussi une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 0 donc g est dérivable aussi à gauche en 0 et $g'_g(0)=0$

par suite g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$

EX 15 :

1) * f est dérivable sur $]0,1[\Rightarrow f$ est continue sur $]0,1[$ d'où : $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0,1[$

* continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'_d(0) = 0 = g(0)$$

g est continue à droite en 0 .

Par suite g est continue sur $[0,1]$

2) a) g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$; $g(0)=g(1)=0$

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]0,1[$ tq : $g'(c)=0$

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow c \cdot f'(c) - f(c) = 0$$

b) la tangente à (ζ) au point d'abscisse c a pour équation :

$$T : y = f'(c) \cdot (x-c) + f(c)$$

$$T : y = f'(c) \cdot x + f(c) - f'(c) \cdot c$$

$$T : y = f'(c) \cdot x$$

$$O(0,0) \in T$$

EX 16 :

$$(P) : y = x^2 + ax + b$$

$$\text{soit } f(x) = x^2 + ax + b$$

$$(\zeta_f) = (P)$$

$$f(x) = 2x + a$$

la tangente (T) à (P) au point d'abscisse $\frac{x_A + x_B}{2}$ a

pour coefficient directeur $f'\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) = x_A + x_B + a$

la droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = x_A + x_B + a$$

(T) et (AB) ont le même coefficient directeur
par suite (T) $\parallel$ (AB)

EX 17 :

$$1) (\zeta_r) \cap (Ox) = \{A, B\}$$

Désignons x_1 et x_2 les abscisses respectifs de A et B avec $x_1 < x_2$.

$$f(x_1)=0 \quad ; \quad f(x_2)=0$$

f est continue sur $[x_1, x_2]$ dérivable

sur $]x_1, x_2[$ et $f(x_1)=f(x_2)=0$

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c \in]x_1, x_2[$ tel que : $f'(c)=0$
 (ζ_r) admet une tangente horizontale au point d'abscisse c

$$2) (\zeta_r) \cap (Ox) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

designons par $x_1, x_2, \dots, x_n$ les abscisses respectifs de $A_1, A_2, \dots, A_n$

avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

f est dérivable sur $[x_i, x_{i+1}]$

$$f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$$

d'où il existe au moins un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$

$$\text{tq } f'(c_i) = 0$$

par suite l'équation $f'(x)=0$ admet au moins $(n-1)$ solutions

(ζ_r) admet au moins $(n-1)$ tangentes horizontales

EX 18 :

f dérivable sur $[-2, -1]$

$$f(-2)=f(-1)=0$$

d'après le théorème de Rolle il existe au

moins un réel $c_1 \in]-2, -1[$ tq : $f'(c_1)=0$

de même : il existe au moins un réel

$$x_2 \in]-1, 1[\text{ tq } f'(c_2)=0$$

et un réel $c_3 \in]1, 2[$ tq $f'(c_3)=0$

par suite l'équation $f'(x)=0$ admet au moins trois solutions

EX 19 :

Soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$

$f^{(k)}$: la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f .

montrons par récurrence sur k que :

$f^{(k)}$ s'annule pour $(n+1-k)$ valeurs distincts de $[a, b]$

* pour $k=1$:

f s'annule $(n+1)$ fois d'après l'exercice n°1

f' s'annule n fois

$f^{(1)}$ s'annule pour $(n+1-1)$ valeurs distincts de $[a, b]$ (vrai)

* supposons que $f^{(k)}$ s'annule $(n+1-k)$ fois

* montrons que : $f^{(k+1)}$ s'annule $(n-k)$ fois

D'après l'ex 17 : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ s'annule $((n+1-k)-1)$ fois

$\Rightarrow f^{(k+1)}$ s'annule $(n-k)$ fois

Conclusion : $f^{(k)}$ s'annule au moins pour $(n+1-k)$ valeurs distincts de $[a, b]$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

* pour $k=n$, $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$

EX 20 :

1. la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$

d'où la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

par suite f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme étant produit des fonctions continues.

***Etude de continuité de f en 0**

pour $x \neq 0$ on a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

D'où f est continue en 0

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

2. a/

$$\text{pour } x \neq 0 \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$$

b/ pour $x \neq 0$

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

 D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

 3) a) la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

 La fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

 D'où $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

 Par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

 Or f est dérivable en 0,

 d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left[\frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

 b) $n \neq 0$

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin(n\pi) - \cos(n\pi) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$$

$$\left| f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$$

 c) $f'(0) = 0$

 Supposons que f' est continue en 0

 Soit la suite $V_n = \left| f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right|$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad f' \text{ continue en } 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = f'(0) = 0$$

 Or $V_n = 1$ d'après b) (absurde)

 f' n'est pas continue en 0

EX 21 :

1)

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0	+
$f(x)$	0	↗ 2	↘ -2	↗ $+\infty$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -3$$

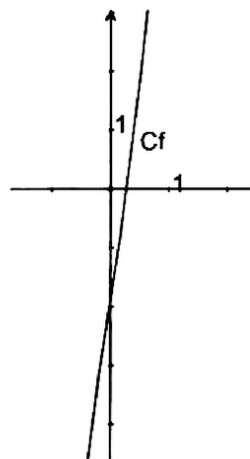
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 4) = 0$$

EX 22 : $f(x) = 4x^3 + 6x - 2$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 12x^2 + 6 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty$$

 La courbe de f admet deux branches infinies paraboliques de direction celle de $(O, \vec{j})$


EX 23 :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{2x}$$

$D_f = \mathbb{R}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

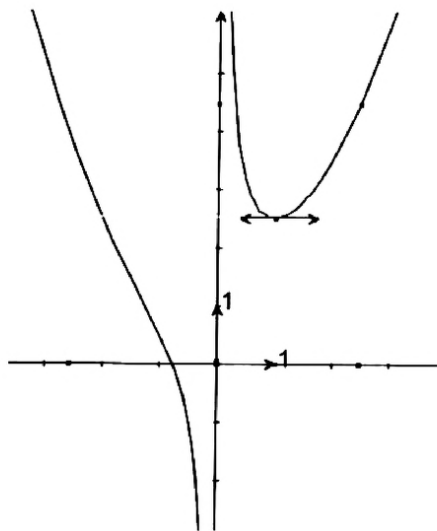
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $5/2$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

(ζ_r) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O, \vec{j})$

$x=0$ est une asymptote à (ζ_r)

**EX 24 :**

$$f(x) = x \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (fonction rationnelle)

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^3}$$

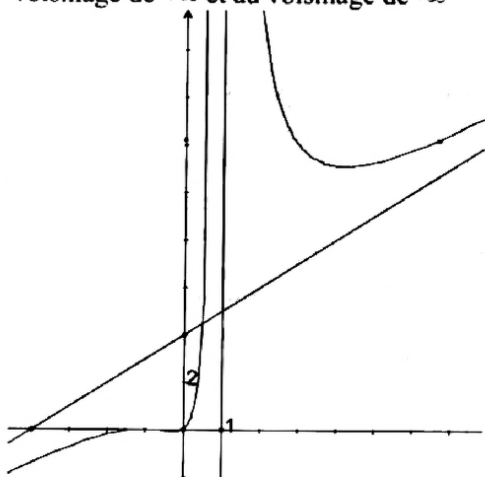
x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↘ $7-5\sqrt{2}$		$+\infty$ ↗ 0 ↘ $7+5\sqrt{2}$		$+\infty$ ↗ 0 ↘ $7+5\sqrt{2}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left[\frac{4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$\Delta : y = x + 4$ est une asymptote à (ζ_r) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$



EX 25 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta' = -2 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ car $x^2 + 2x + 3 > 0$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x} = 1$$

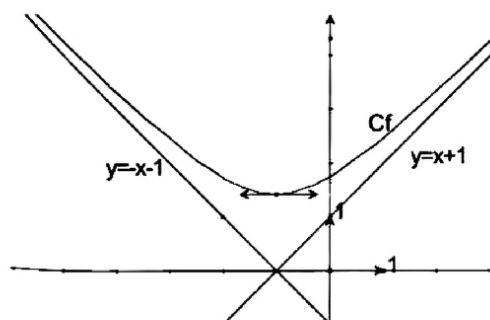
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}} = 1$$

$\Delta_1 : y = x + 1$ est une asymptote à (ζ) au voisinage $(+\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -1$$

(ζ) admet la droite $D_2 : y = -x - 1$ comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$



EX 26 :

$$f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x-1) + 3\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 5 + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

f non dérivable à droite en 1, de même f non dérivable à gauche en (-1)

* pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$f'(x) = 5 + 3 \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 5 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

• pour $x \in]1, +\infty[; f'(x) > 0$

• pour $x \in]-\infty, -1[$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -5 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{x^2 - 1} = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	///	+
$f(x)$	$-\infty$	-4	///	5	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3\sqrt{x^2 - 1} + 5x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9(x^2 - 1) - 25x^2}{3\sqrt{x^2 - 1} - 5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16x^2 + 9}{5x - 3\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16x + \frac{9}{x}}{5 + 3\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x + 3\sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + 3\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = 8$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 8x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3(\sqrt{x^2 - 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$\Delta_1 : y=8x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

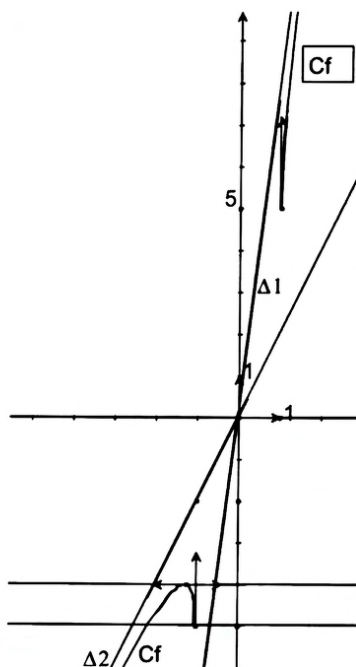
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + 3\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{3|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - 3\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3[\sqrt{x^2 - 1} + x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0$$

$\Delta_2 : y=2x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$



EX 27 :

$$f(x) = x + \sqrt{4 - x^2} \quad D_f = [-2, 2]$$

- la fonction : $x \mapsto 4 - x^2$ est dérivable et Strictement positive sur $] -2, 2[$ d'où f est dérivable sur $] -2, 2[$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2 + \sqrt{4 - x^2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{(2 - x) \cdot (2 + x)}{(x - 2) \cdot \sqrt{4 - x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 - \frac{(2 + x)}{\sqrt{4 - x^2}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2
La courbe de f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

- de même on montre que f n'est pas Dérivable à droite en -2

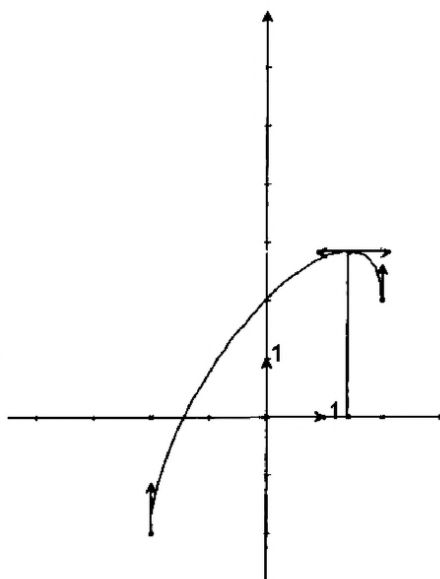
- pour $x \in] -2, 2[$ $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

- pour $x \in] -2, 0[$ $f'(x) > 0$

- pour $x \in] 0, 2[$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 > \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{4 - x^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 < 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 < 2 \\ &\Leftrightarrow x < \sqrt{2} \end{aligned}$$

X	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	-2	$2\sqrt{2}$	2



EX 28 : $f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

- $D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$
- f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

- pour $x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \cdot \left(\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \right) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \left[\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2} \right] \end{aligned}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $(x^2 + x - 1)$

$$\Delta = 5 \quad x' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \in D_f \quad x'' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \notin D_f$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	////	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	//// //// ////	$\nearrow +\infty$
	$-\infty$		$-\infty$	0	

$$f(x') = f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

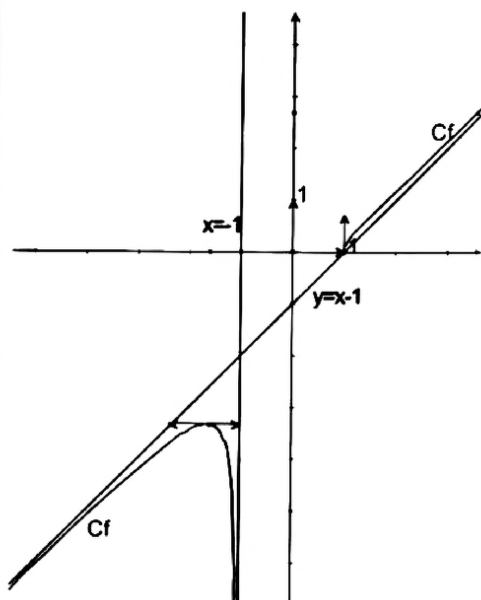
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\frac{x-1-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = -1 \end{aligned}$$

$\Delta_1 : y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $(+\infty)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -1$$

$\Delta_1 : y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$



EX 29 : $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$

1) a/ $f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) + \cos(x+2\pi)$
 $= \sin^2(x) + \cos(x) = f(x)$

Donc 2π est une période de f .

b/ * pour $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x) \in \mathbb{R}$

* $f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) = [\sin(-x)]^2 + \cos(x)$
 $= \sin^2(x) + \cos(x) = f(x)$

donc f est une fonction paire

donc la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f

2) a/ Domaine d'étude $D_E = [0, \pi]$

$f'(x) = 2\cos(x) \cdot \sin(x) - \sin(x)$

$= 2\sin(x) \cdot \left[\cos(x) - \frac{1}{2} \right]$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f'(x)	0	+	-
f(x)	1	$\frac{5}{4}$	-1

b/ f est continue et strictement croissante

sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $f\left[\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right] = \left[1, \frac{5}{4}\right]$ et comme

$0 \notin \left[1, \frac{5}{4}\right]$ alors l'équation $f(x)=0$ n'a pas de

solution dans $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

/ f est continue et strictement décroissante

sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ donc f réalise une bijection de

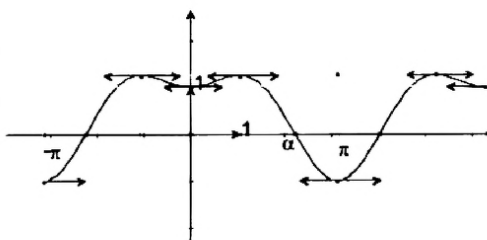
$\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ sur $f\left[\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right] = \left[-1, \frac{5}{4}\right]$ et comme

$0 \in \left[-1, \frac{5}{4}\right]$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une

seule solution α dans $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet α comme unique solution dans $[0, \pi]$

$f(2,2) \cdot f(2,3) < 0 \Rightarrow 2,2 < \alpha < 2,3$



EX 30 :

1. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x-3)}{(x-1)^3}$ le signe de $f'(x)$ est

celui de $(x-1) \cdot (x-3)$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
f'(x)	+	0	+	-	0
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{8}$	$+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

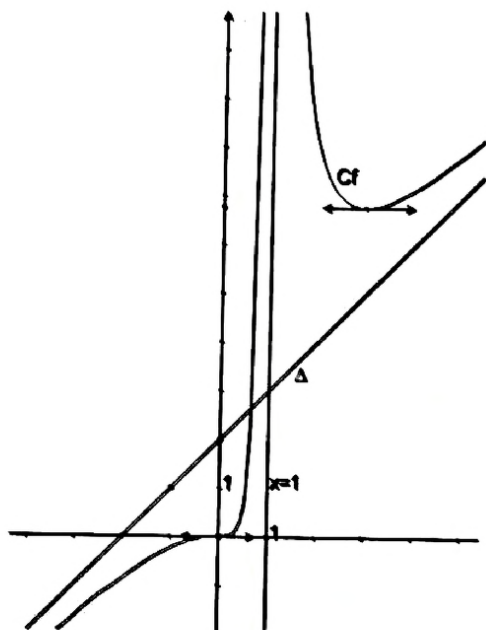
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$

$\Delta : y=x+2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$ et au voisinage de $(+\infty)$



$$\text{II. } h(x) = \frac{\sin^3(x)}{(\sin(x)-1)^2} = f(\sin(x))$$

$$1) \text{ a/ } \sin(x)-1=0 \Leftrightarrow \sin(x)=1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{b/ } h(x+2\pi) = f(\sin(x+2\pi)) = f(\sin(x)) = h(x)$$

donc 2π est une période de h .

$$\text{c/ } \bullet x \in D_h \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi - x \neq \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2\pi - x \neq \frac{\pi}{2} - x \in D_h$$

$$\bullet h(\pi-x) = f(\sin(\pi-x)) = f(\sin(x)) = h(x)$$

Conclusion: $\Delta: x = \pi/2$ est un axe de symétrie pour C_h

$$2) \text{ a/ } h(x) = f(\sin(x))$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} h(x) = +\infty$$

$$\text{b/ } h'(x) = \cos(x) \cdot f'(\sin(x))$$

$$\text{pour } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(x) \geq 0$$

$$\text{et } \sin(x) \in [-1, 1[\Rightarrow f'(\sin(x)) \geq 0 \Rightarrow$$

$$h'(x) \geq 0; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$h \text{ est croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

c/

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(\sin(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_h = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

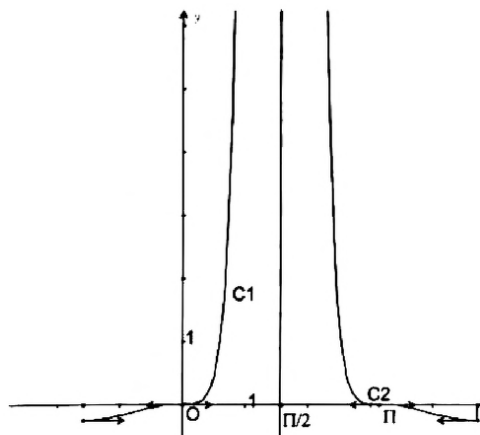
d/ h' s'annule et ne change pas de signe en 0 donc le point de coordonnées $(0, h(0))$ est un point d'inflexion pour C_h
Conclusion: l'origine du repère est un point d'inflexion pour C_h

$$3) \text{ Soit } C_1 \text{ la courbe de la restriction de } h \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et } \Delta: x = \pi/2$$

$$C_2 = S_{\Delta}(C_1) \text{ : la courbe de la restriction de } h \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$C_h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{2k\pi} (C_1 \cup C_2)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0
f(x)	$-\frac{1}{4}$		$+\infty$


EX 31 :

1) $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

 f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x' = 2 - \sqrt{6}$

$x'' = 2 + \sqrt{6}$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{6}$	2	$2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0
f(x)		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

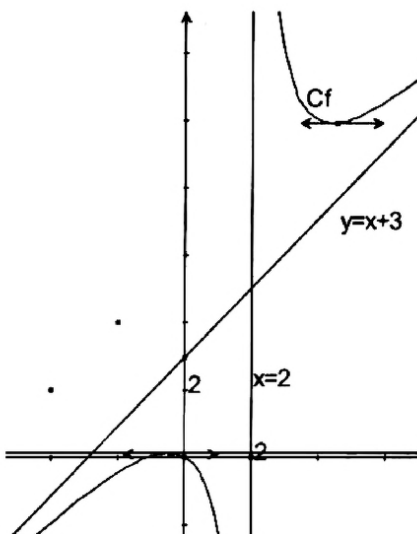
* $f(x) = x + 3 + \frac{6}{x-2}$

$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x-2} = 0$

 $\Delta : y = x + 3$ est une asymptote à (ζ_r)

$f(2 - \sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$

$f(2 + \sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}$


 2) dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x^2 + (1-m)x + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = m \cdot (x-2)$

$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x-2} = m \Leftrightarrow f(x) = m$

$1^{\text{er}} \text{ cas : } m \in]-\infty, 5 - 2\sqrt{6}[\cup]5 + 2\sqrt{6}, +\infty[$

l'équation admet deux solutions

$2^{\text{me}} \text{ cas : } m = 5 - 2\sqrt{6} \text{ ou } m = 5 + 2\sqrt{6}$

l'équation admet une unique solution

$3^{\text{me}} \text{ cas : } m \in]5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}[$

l'équation n'a pas de solution

$$3) (E) \Leftrightarrow f(\cos x) = m \quad \cos x \in [-1, 1]$$

$$f([-1, 1]) = [-2; 5-2\sqrt{6}]$$

$h(x) = f(\cos x)$ est périodique de période 2π

1^{er} cas : $m \notin [-2; 5-2\sqrt{6}]$ l'équation n'a pas de solution

2^{ème} cas : $m \in [-2; 5-2\sqrt{6}]$ l'équation admet une infinité de solutions

EX 32 :

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(-x) = -f(x)$: f est impaire

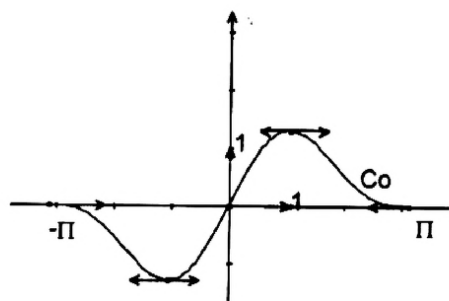
$f(x+2\pi) = f(x)$: 2π est une période de f

il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x + 1)(\cos x - \frac{1}{2})$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	2	0	0
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0



$$(\zeta_f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{2k\pi i}(\zeta_0)$$

EX 33 :

$$f(x) = \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} ; k \in \mathbb{Z}$$

f est dérivable sur D_f

$$f'(x) = \frac{-\sin x (2\cos x - 1) + 2\sin x \cos x}{(2\cos x - 1)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)^2}$$

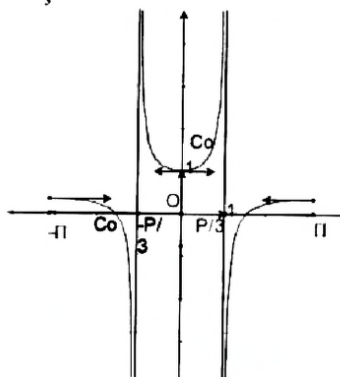
• 2π est une période de f

• $f(-x) = f(x)$: f est paire

$$D_f = [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	1	$+\infty$	$\frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos x}{2\cos x - 1} = +\infty$$



$$(\zeta_f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{2k\pi i}(\zeta_0)$$

EX 34 :

$$\begin{cases} f(x) = |x^2 + x| & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) la fonction : $x \mapsto x^2 + x$ est continue sur $]-\infty, 0[$

d'où f est continue sur $]-\infty, 0[$

• f est continue sur $]0, +\infty[$ (produit de 2 fonctions continues)

• continuité en 0 : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x^2 + x| = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\sqrt{x} = 0 = f(0)$$

f est continue en 0 d'où f est continue sur $\mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$	-1	0
$x^2 + x$	+	0	-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x^2 + x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(x + 1) = -1 = f'_g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 = f'_d(0)$$

f n'est pas dérivable en 0

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^2 + x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -x = 1 = f'_g(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x) = -1 = f'_d(-1)$$

f n'est pas dérivable en (-1)

3) * pour $x \in]0, +\infty[$

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

* pour $x \in]-1, 0[$

$$f(x) = -(x^2 + x)$$

$$f'(x) = -(2x + 1)$$

* pour $x \in]-\infty, -1[$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f'(x) = 2x + 1 < 0 \quad \forall x \in]-\infty, -1[$$

x	$-\infty$	-1	-1/2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	0	- +
$f(x)$	$+\infty$		$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

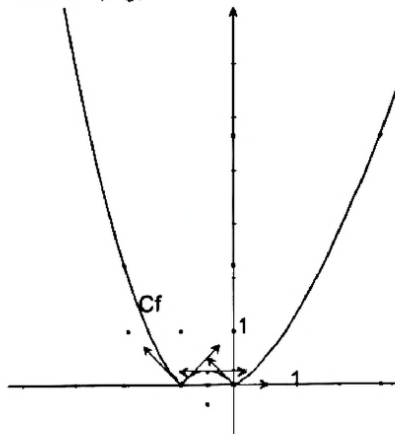
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$$

(ζ_i) admet 2 branches paraboliques de direction celle de $(O, \vec{j})$



EX 35 :

1) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

a) $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$

b) dans l'intervalle $[-1, +\infty[$, g admet 1 comme minimum absolu
 $\Rightarrow g(x) \geq 1$; $\forall x \in [-1, +\infty[$
 d'où l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solutions dans l'intervalle $[-1, +\infty[$
 * dans l'intervalle $]-\infty, -1]$
 g est continue sur $]-2, -1]$
 $g(-2) \times g(-1) = (-3)(2) < 0$
 d'où il existe un réel $\alpha \in]-2, -1[$ tq: $g(\alpha)=0$

comme g est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ alors α est l'unique solution de l'équation : $g(x)=0$ dans $]-\infty, -1]$
 conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet α comme unique solution dans $\mathbb{R}$
 $\alpha \in]-2, -1[$
 $\left. \begin{array}{l} g(-1,7) = -0,156 \\ g(-1,6) = 0,488 \end{array} \right\} \Rightarrow g(-1,7).g(-1,6) < 0$
 $\Rightarrow -1,7 < \alpha < -1,6$

Une valeur approchée à 10^{-1} près de α est -1,7

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2) $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^3}$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

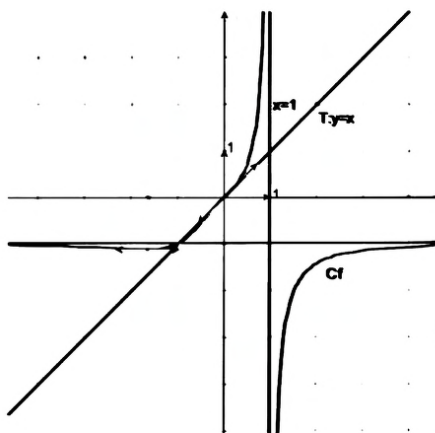
x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$	-1

b) $T: y = f'(0) \cdot (x-0) + f(0)$

$T: y = x$

c) $f(x) - x = \frac{x^3(1+x)}{1-x^3}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	-	+	-
Position relative	C/T	T/C	C/T	T/C	



EX 36 :

1) $g(x) = 2x^3 + x - 2$

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^2 + 1 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b)

g est continue sur $[0, 1]$

$g(0) \times g(1) = -2 < 0$

d'où il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tq: $g(\alpha) = 0$

comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors α est unique

c) $g(0,8) \cdot g(0,9) < 0$

$g(0,83) \cdot g(0,84) < 0$ donc 0,83 est une valeur approchée à 10^{-2} près

d)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$ car g est strictement croissante

$\Rightarrow g(x) > 0$

2) $f(x) = \sqrt{x^4 + (x-2)^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

a) la fonction $x \mapsto x^4 + (x-2)^2$ est dérivable et

strictement positive sur $\mathbb{R}$

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 2(x-2)}{2\sqrt{x^4 + (x-2)^2}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x^4 + (x-2)^2}}$$

b)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

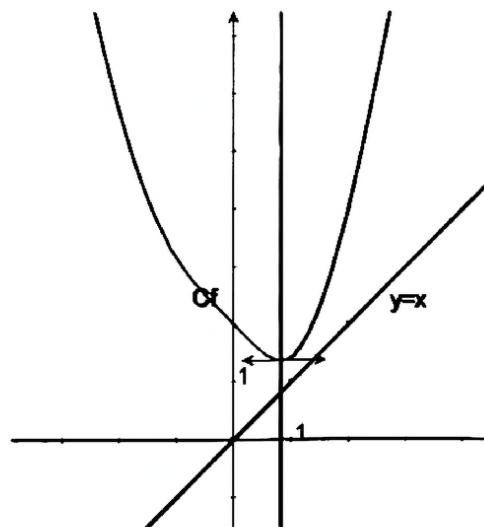
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^4 + (x-2)^2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + (x-2)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

branche parabolique de direction celle

de $(O, \vec{j})$



EX 37 :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

$$1) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$$

d'où (U_n) est croissante

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2} ; x \in]0, +\infty[$$

$$a) k \geq 1, f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow k^3 \leq x^3 \leq (k+1)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$$

$$f \text{ est dérivable sur } [k, k+1] \text{ et } \frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis:

$$\frac{-2}{k^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{2}{k^3}$$

b) pour $1 \leq k \leq n$

$$* f(k) - f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) - f(k+1)] \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow f(1) - f(n) \leq 2 \left[U_n - \frac{1}{n^3} \right]$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 2U_n - \frac{2}{n^3} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \quad (1)$$

$$* \frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^3} \leq f(1) - f(n) \Rightarrow 2[U_n - 1] \leq 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \Rightarrow U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) U_n \leq \frac{3}{2} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

d) (U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$$

EX 38 :

$$f(x) = \tan x ; x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$$

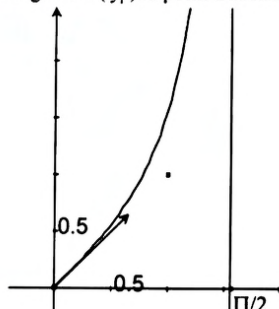
1) a) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$
	0	

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

$f'_d(0) = 1$: le coefficient directeur de la tangente à (ζ_f) au point d'abscisse 0



b) soit $\varphi(x) = \operatorname{tg} x - x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x \geq 0$

φ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x - x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \geq x$

2) a) on pose $h(x) = \operatorname{tg} x - 2x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$h'(x) = \operatorname{tg}^2 x - 1$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	0	$1 - \pi/2$	$+\infty$

* h est continue et strictement décroissante

sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ d'où $h\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$

$0 \in \left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$ d'où il existe un unique réel

$\beta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que : $h(\beta) = 0$

or $h(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

* $h\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[1 - \frac{\pi}{2}, +\infty\right]$

$0 \in \left[1 - \frac{\pi}{2}, +\infty\right]$

d'où il existe un réel $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ tq : $h(\alpha) = 0$

comme h est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

alors α est unique

conclusion : l'équation : $h(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) = 2x$

admet 0 et α comme seules solutions dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

* $h\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}, +\infty\right]$

$0 \in \left[\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}, +\infty\right] \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \alpha \geq \frac{\pi}{3}$

b) $h(x) = \operatorname{tg} x - 2x$

x	$-\infty$	α	$\pi/2$
$h(x)$	0	-	0
		+	$\parallel$

3) $\begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{3} \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

a) * pour $n=0 \quad 0 \leq U_0 = \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$

* supposons que : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{3}$

montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{3}$

$0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi(0) \leq \varphi(U_n) \leq \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{3}$

conclusion : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{3} ; \forall n \in \mathbb{N}$

b) d'après 2) b)

$U_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow h(U_n) \leq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} U_n - 2U_n \leq 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg} U_n - U_n \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c) (U_n) décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente ; soit ℓ sa limite

$\ell = \varphi(\ell) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \ell = 2\ell \Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{car } \ell \leq \frac{\pi}{3}$

EX 39 :

$$n \in \mathbb{N}^* \quad (E_n) : x^2 + x^3 = n$$

1) on pose : $f_n(x) = x^2 + x^3 - n$

$$f'_n(x) = 2x + 3x^2$$

x	$-\infty$	$-2/3$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-	+
$f_n(x)$	$-\infty$	$\frac{4}{27} - n$	$-n$	$+\infty$

* dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ f_n admet le réel

$(\frac{4}{27} - n)$ comme maximum absolu

$$\Rightarrow f_n(x) \leq \frac{4}{27} - n < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0]$$

d'où l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty, 0]$

* f_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$$\Rightarrow f_n([0, +\infty[) = [-n, +\infty[$$

comme $0 \in [-n, +\infty[$

alors l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, +\infty[$

conclusion : l'équation (E_n) admet a_n comme unique solution

2) a) Remarquons que : $a_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a_n est solution de (E_n)

a_{n+1} est solution de (E_{n+1})

$$\text{d'où } a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3 = n+1$$

$$a_n^2 + a_n^3 = n$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_{n+1}^3 - a_n^3) = 1$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n) [a_{n+1} + a_n + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_n^2] = 1$$

or a_n et a_{n+1} sont positifs d'où $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ d'où (a_n) est croissante

b) supposons que (a_n) est majorée

comme (a_n) est croissante

alors (a_n) converge vers un réel ℓ

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 + a_n^3 = \ell^2 + \ell^3$$

$$\text{or } a_n^2 + a_n^3 = n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \ell^2 + \ell^3 \quad (\text{absurde})$$

d'où (a_n) n'est pas majorée

c) (a_n) est croissante et non majorée

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

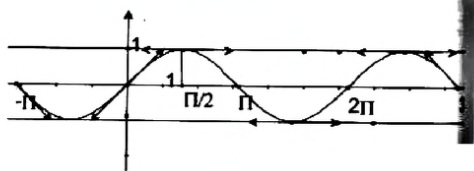
EX 40 :

$f(x) = \sin x$ f: impaire de période 2π

1) a) $f'(x) = \cos x$

$$D_f = [0, \pi]$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	1	0		



$$b) A(a, f(a)) \quad B(b, f(b))$$

supposons que : $a < b$

le coefficient directeur de (AB) est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
d'après le théorème des accroissements finis :

il existe un réel $c \in]a, b[$ tq: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\text{or } f'(c) = \cos c \Rightarrow -1 \leq f'(c) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 1$$

II / $g(x) = \sin(\sin x)$

1) a) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$

on a : $(x+2\pi) \in D_g$

$g(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin x) = g(x)$

d'où 2π est une période de g

b) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in D_g$

$g(-x) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -g(x)$

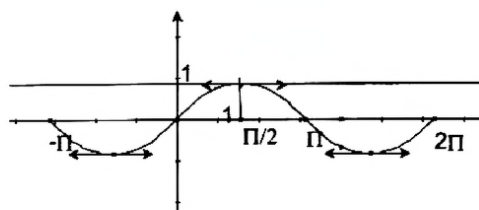
d'où g est impaire

c) $g'(x) = \cos x \cdot \cos(\sin x) \quad x \in [0, \pi]$

$\sin x \in [0, 1] \Rightarrow \cos(\sin x) > 0$

le signe de $g'(x)$ est celui de : $\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	2	+	0
$f(x)$	0	$\sin(1)$	0



EX 41 :

$D_f = \mathbb{R}$

I / $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - x}$

1)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	-	+

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sqrt{x^2 - x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \sqrt{x^2 - x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques

de direction celle de $(O, \vec{j})$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x} = 0$

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cdot \sqrt{x(x-1)}}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot \sqrt{x(1-x)}}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

f non dérivable en 1

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1

3) a) * pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - x}$

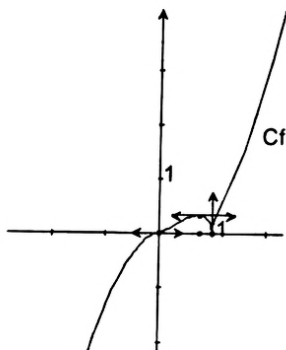
$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + \frac{(2x-1)x}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{x(4x-3)}{2\sqrt{x^2 - x}}$

* pour $x \in]0, 1[$; $f(x) = x \cdot \sqrt{x - x^2}$

$f'(x) = \sqrt{x - x^2} + \frac{(1-2x)x}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{x(3-4x)}{2\sqrt{x - x^2}}$

x	$-\infty$	0	$3/4$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	0	$+\infty$

b)



4) * g admet 0 comme minimum absolu

 * g admet $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ comme maximum absolu

$$// \quad g_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$$

 1) $n \geq 2$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^{n-1} \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x$$

$$\Rightarrow x^n \sqrt{1-x} \leq x \sqrt{1-x} \Rightarrow g_n(x) \leq g_1(x)$$

 d'où (ζ_n) est au dessous de (ζ_1)

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g_n(x) - g_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} \sqrt{1-x} = 0$$

 d'où g_n est dérivable à droite en 0 et $g_n'(0) = 0$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g_n(x) - g_n(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n \sqrt{1-x}}{-(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^n \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

g n'est pas dérivable à gauche en 1

 b) la fonction : $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0,1[$
 g_n est dérivable sur $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= n \cdot x^{n-1} \cdot \sqrt{x(1-x)} + x^n \cdot \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} \right) \\ &= \frac{2x(1-x) \cdot n \cdot x^{n-1} + x^n(1-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n \cdot [2n(1-x) + 1-2x]}{2\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \frac{x^n \cdot [2n+1-2(n+1)x]}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n \cdot \left[n + \frac{1}{2} - (n+1)x \right]}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

c)

x	0	$\frac{2n+1}{2(n+1)}$	
$g_n'(x)$	+	0	-
$g_n(x)$		$g\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$	

 g_n admet $g_n\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$ comme maximum local

$$\text{en } \alpha_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

3) a)

$$g_n(\alpha_n) = \left[1 - \frac{1}{2(n+1)} \right]^n \cdot \sqrt{\frac{1}{2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right)}$$

$$g_n(\alpha_n) = \left[1 - \frac{1}{2(n+1)} \right]^n \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$U_n = \left[\frac{2n+1}{2(n+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

 * $U_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

 * $U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n) \Rightarrow U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$ d'après 4

$$\text{d'où } 0 \leq U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

b) $U_n \geq 0$ d'après a)

* d'après II/ 1)

$$U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n)$$

$$\text{d'où } 0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$$

$$c) g_1(\alpha_n) = \alpha_n \cdot \sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}$$

$$g_1(\alpha_n) = \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} g_1(\alpha_n) = 0$$

$$0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_1(\alpha_n) = 0 \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

EX 42 :

$$1) (E): x^3 - 10x^2 - 1 = 0$$

$$\text{on pose } h(x) = x^3 - 10x^2 - 1$$

$$h(10) = -1 \quad ; \quad h(11) = 120$$

h est continue sur $[10, 11]$

$$h(10) \times h(11) < 0$$

d'où il existe un réel $a \in]10, 11[$ tq $h(a) = 0$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$h'(x) = 3x^2 - 20x$$

x	$-\infty$	0	20/3	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		-1	0	$+\infty$
	$-\infty$		$-\frac{4027}{27}$	

h est strictement croissante sur $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

d'où a est la seule solution de l'équation : $h(x) = 0$

dans $\left[\frac{20}{3}, +\infty\right[$

* dans l'intervalle $]-\infty, \frac{20}{3}[$

h admet (-1) comme maximum absolu

$$\Rightarrow h(x) \leq -1 \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, \frac{20}{3}[$$

d'où l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty, \frac{20}{3}[$

conclusion : a est la seule solution de (E)

2) 0 n'est pas une solution de (E)

$$\text{dans } \mathbb{R}^+ : (E) \Leftrightarrow x^3 = 10x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 10 + \frac{1}{x^2}$$

$$3) f(x) = 10 + \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x \in [10, +\infty[$$

$$a) f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall x \in [10, +\infty[$$

f est continue et strictement décroissante sur $[10, +\infty[$

$$f([10, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f, f(10)] =]10; 10.01]$$

$$b) \begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Remarquons que : $U_n \geq 10 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{pour } x \geq 10 \Rightarrow x^3 \geq 1000 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{500}$$

f est dérivable sur $[10, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

a et $U_n \in [10, +\infty[$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis:

$$|f(U_n) - f(a)| \leq \frac{1}{500} |U_n - a|$$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(a) = a$ (d'après 2))

$$\text{d'où } |U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{500} |U_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|U_1 - a| \leq \frac{1}{500} |U_0 - a|$$

$$|U_2 - a| \leq \frac{1}{500} |U_1 - a|$$

.

.

$$|U_n - a| \leq \frac{1}{500} |U_{n-1} - a|$$

multiplions membre à membre et simplifions on aura :

$$|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n \times |U_0 - a|$$

$$|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n \times |a - 10|$$

$$a \in]10, 11[$$

$$\text{d'où } |a - 10| \leq 1$$

$$\text{par suite : } |U_n - a| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n$$

$$\Rightarrow U_n - \left(\frac{1}{500}\right)^n \leq a \leq U_n + \left(\frac{1}{500}\right)^n$$

$$U_3 = 10,00998007$$

$$\left(\frac{1}{500}\right)^n = 8 \times 10^{-9}$$

$$10,009980062 \leq a \leq 10,009980078$$

$$\text{d'où } a = 10,009980...$$

FONCTIONS RECI PROQUES

QCM :

1) $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) f réalise une bijection de $[1,4]$ sur $[1,4]$

4) f est dérivable sur $]0, +\infty[$

VRAI-FAUX :

1) (faux)

Contre exemple : $f(x) = 3 - \frac{4x}{x^2 + 3}$

* $f(1) = 2$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

* f est dérivable sur $[1, +\infty[$

* $f'(x) = \frac{4(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^2}$

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	$3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	3

$f([1, +\infty[) = \left[3 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 3\right[$

2) (vrai)

* $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$

$f'(x) = a$

• si $a > 0$; f continue et strictement croissante

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

• si $a < 0$; f est continue et strictement décroissante

f : bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

3) (faux)

$\sqrt[3]{16} > 2$ car $16 > 2^3$

$\sqrt[3]{16} = 2$

$\sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{16}$

4) (vrai) pour $n \geq 2$

$f(x) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f^{-1}(x) = x^n$

$(f^{-1})'(0) = 0$

CH4 TOME I

5) (faux)

contre exemple :

$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \quad I = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0$

$f(I) =]0, +\infty[$

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{1+y^2} = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x - y \Leftrightarrow 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{2x}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$

f^{-1} ne garde pas un signe constant sur $]0, +\infty[$

FONCTIONS RECI PROQUES

EX 1 :

$$1) f(x) = -4x \quad I =]-\infty, 1] \quad f'(x) = -4 < 0$$

f est continue et strictement décroissante sur I
elle réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$

$$J = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[= [-3, +\infty[$$

$$\text{soit } y = f^{-1}(x) \quad x \in J, y \in I$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow -4y = x \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{4}$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(1-x)$$

$$2) f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad I = [2, +\infty[$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

f est continue et strictement croissante sur $I = [2, +\infty[$

elle réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$

$$J = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-3, +\infty[$$

$$\text{soit } y = f^{-1}(x) \quad x \in J, y \in I$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + (1-x) = 0$$

$$\Delta' = 4 - (1-x) = 3+x \geq 0$$

$$y_1 = 2 - \sqrt{3+x} \quad \text{et} \quad y_2 = 2 + \sqrt{3+x}$$

$$\text{or } y \in [2, +\infty[\rightarrow y \geq 2$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{3+x}$$

$$3) f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad I =]-1, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

f est continue et strictement croissante sur $I =]-1, +\infty[$

d'où f est une bijection de I sur $J = f(I)$

$$J = \left] \lim_{x \rightarrow -1^+} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f \right[=]-\infty, 2[$$

$$\text{soit } y = f^{-1}(x) \quad x \in J, y \in I$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{2y-1}{y+1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = xy+x \Leftrightarrow y = \frac{1+x}{2-x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{2-x}$$

CH4 TOME I

$$4) f(x) = \sqrt{x-3} + x \quad I = [3, +\infty[$$

$$f \text{ est dérivable sur }]3, +\infty[\text{ et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + 1 > 0$$

f est continue et strictement croissante sur $I = [3, +\infty[$

elle réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$

$$J = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [3, +\infty[$$

$$\text{soit } y = f^{-1}(x) \quad x \in J, y \in I$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y-3} + y = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-3} = x-y \Leftrightarrow y-3 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (2x+1)y + (x^2+3) = 0$$

$$\Delta = (2x+1)^2 - 4(x^2+3)$$

$$\Delta = 4x - 11 \geq 0$$

$$y = \frac{2x+1 - \sqrt{4x-11}}{2}$$

$$y = \frac{2x+1 + \sqrt{4x-11}}{2}$$

$$f(3) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 3$$

$$\text{pour } x=3 \xrightarrow{\text{à rejeter}} y'' = 4$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{2x+1 - \sqrt{4x-11}}{2}$$

EX 2 :

$$g(x) = ax + b \quad ; a \neq 0$$

$$1) \text{ 1er cas: } a > 0 \quad g'(x) = a > 0$$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f \right[= \mathbb{R}$$

$$\text{2ème cas: } a < 0 \quad g'(x) = a < 0$$

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$g(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g, \lim_{x \rightarrow +\infty} g \right[= \mathbb{R}$$

$$2) y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow ay + b = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \quad \text{Donc } g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$g^{-1}(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a \\ \frac{-b}{a} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

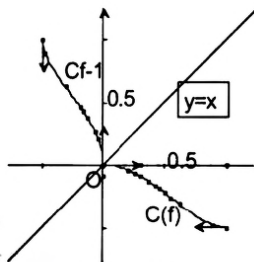
EX 3 :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 \quad ; \quad x \in [0,1]$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1)$$

x	0	1
f'(x)	0	-
f(x)	0	$-\frac{1}{2}$



2) a) f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur J

$$J = f([0,1]) = [f(1), f(0)] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_A(\zeta_f)$ avec $\Delta: y=x$

c) on pose : $y = f^{-1}(x) \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], y \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^4 - y^2 = x \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow |y^2 - 1| = \sqrt{2x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - y^2 = \sqrt{2x + 1} \quad \text{car } y \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1 - \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \sqrt{2x + 1}} \quad \text{car } y \geq 0$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2x + 1}}$$

EX 4 :

$$f(x) = \cos(\pi x) \quad ; \quad x \in [0,1]$$

1) $f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x)$

$$x \in [0,1] \rightarrow \pi x \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0$$

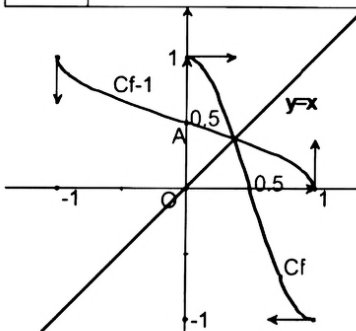
f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

d'où f réalise une bijection de $[0,1]$ sur

$$J = [f(1), f(0)] = [-1, 1]$$

2)

x	0	1
f'(x)	0	-
f(x)	1	-1



FONCTIONS RECI PROQUES

3) on pose : $\varphi(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$

• f est continue sur $[0,1]$

d'où f^{-1} est continue sur $[-1,1]$

par suite φ est continue sur $[-1,1]$

• f est dérivable sur $]0,1[$

et $f'(x) = -\pi \sin(\pi x) \neq 0 ; \forall x \in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[) =]-1,1[$

φ est dérivable sur $] -1,1[$

calculons $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in]-1,1[$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } y = f^{-1}(x), f(y) = x$$

$$= \frac{-1}{\pi \sin(\pi y)} = \frac{-1}{\pi \sqrt{1 - \cos^2(\pi y)}} \quad \text{car } \sin \pi y \geq 0$$

$$= \frac{-1}{\pi \sqrt{1 - f^2(y)}}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (f^{-1})'(x) - (f^{-1})'(-x) \\ &= \frac{-1}{\pi \sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\pi \sqrt{1 - (-x)^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$$

$$\varphi'(x) = 0 ; \forall x \in]-1,1[$$

d'où φ est constante sur $[-1,1]$

$$f(0) = 1 \rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

$$f(1) = -1 \rightarrow f^{-1}(-1) = 1$$

$$\varphi(1) = f^{-1}(1) + f^{-1}(-1)$$

$$\varphi(1) = 1$$

d'où $\varphi(x) = 1 ; \forall x \in [-1,1]$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 1 \quad \forall x \in [-1,1]$$

interprétation graphique :

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-x) = 1 - f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2 \times 0 - x) = 2 \times \frac{1}{2} - f^{-1}(x)$$

$A(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour $(\zeta_{f^{-1}})$

EX 5 :

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4+x} \quad ; D_f = \mathbb{R}_+$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{(4+x) - 4}{x \sqrt{4+x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4+x+2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{4+x}} > 0$$

f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = f([0, +\infty[$

$$J = [2, +\infty[$$

* f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{4+x}} \neq 0$$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0, +\infty[) =]2, +\infty[$

$$* \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^{-1}(x)}{x - 2}$$

(on pose $y = f^{-1}(x), x = f(y) ; x \rightarrow 2^+, y \rightarrow 0^+$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y) - 2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(y) - f'(0)} = 0$$

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 2 et $(f^{-1})'_d(2) = 0$

(Rq: on pourra résoudre le problème graphiquement)

conclusion : f^{-1} est dérivable sur $J = [2, +\infty[$

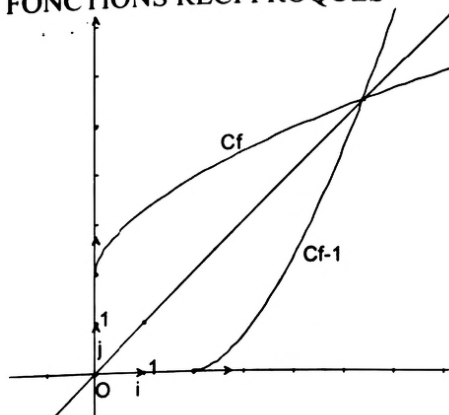
$$b) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{4+x}} > 0$$

x	0	+	+	+
f'(x)			+	
f(x)				+
	2			+

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}} = 0$$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$

FONCTIONS RECI PROQUES



EX 6 :

1) * $f(0)=-1 \Rightarrow g(-1)=0$

(ζ_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 d'où (ζ_g) admet une tangente verticale au point d'abscisse

$f(0)=-1$

par suite g n'est pas dérivable en (-1)

* $f(-2)=1 \Rightarrow g(1)=-2$

(ζ_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse (-2) d'où (ζ_g) admet une

tangente horizontale au point d'abscisse $f(-2)=1$ par suite : g est dérivable en 1 et $g'(1)=0$

2) * f est décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où g est décroissante sur $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

3) $(\zeta_g) = S_{\Delta}(\zeta_f)$ avec $\Delta : y=x$

CH4 TOME I

EX 7 :

1) * $f(1)=-1 \Rightarrow g(-1)=1$

f est dérivable en 1 et $f'(1)=-1 \neq 0$ d'où g est

dérivable en (-1) et $g'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = -1$

* $f(2)=-4 \Rightarrow g(-4)=2$

f n'est pas dérivable à gauche en 2

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point

d'abscisse 2 d'où (ζ_g) admet une demi tangente

horizontale au point d'abscisse (-4)

g est dérivable à droite en (-4) et $g'_d(-4)=0$

2)

x	-4	$+\infty$
$g(x)$	2	-1

3) $(\zeta_g) = S_{\Delta}(\zeta_f)$ avec $\Delta : y=x$

EX 8 :

$$A/ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$g(x) = \sin(2x) - x$$

1) g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$g'(x) = 2\cos(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\text{or } (2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$1 - \frac{\pi}{4}$

2) $\sin(2x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$

* g est continue et strictement décroissante sur

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ d'où

$$g\left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[1 - \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$$

FONCTIONS RECI PROQUES

$$0 \notin \left[1 - \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$$

d'où l'équation : $g(x)=0$ n'a pas de solutions dans

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

* g est continue et strictement croissante sur

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ d'où g réalise une bijection de

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right] \text{ sur } \left[\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$$

comme $0 \in \left[\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$ alors il existe un

unique réel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ tel que : $g(\alpha)=0$

conclusion : l'équation : $g(x)=0$ admet α comme

unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \text{ et } g\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$$

$$B/ f(x) = \sin(2x) \quad ; x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$1) a) f'(x) = 2 \cos(2x)$$

$$f'(0)=2 \quad ; f(0)=0 \quad T: y=2x$$

$$b) f''(x) = -4 \sin(2x)$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	+	0	-

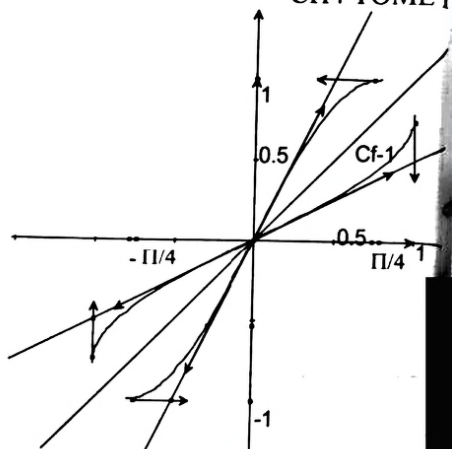
f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où le point de coordonnées $(0, f(0))$ est un point d'inflexion pour (ζ_f)

$f(0)=0$ d'où l'origine du repère est un point d'inflexion pour (ζ_f)

$$2) f'(x) = 2\cos(2x)$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	-1	1

CH4 TOME I



3) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ elle réalise donc une bijection de

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur

$$f\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] = \left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [-1, 1]$$

$$b) (\zeta_f) = S_\Delta(\zeta_f) \text{ avec } \Delta: y=x$$

4) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et

$f'(x) = 2\cos(2x) \neq 0$ d'où f^{-1} est dérivable sur

$$f\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] =]-1, 1[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad (\text{avec } y=f^{-1}(x), f(y)=x)$$

$$= \frac{1}{2\cos(2y)} = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2(2y)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-f^2(y)}}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

EX 9 :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}} \quad ; x \in [0,1[$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-x^2} \right)} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

(ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée

vers le haut au point d'abscisse 0

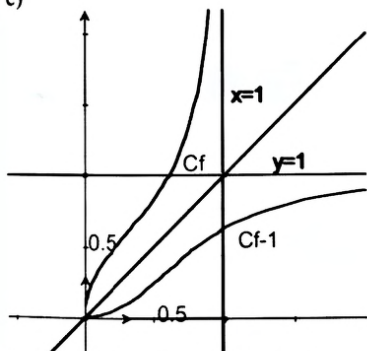
b) f est dérivable sur]0,1[

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1-x^2} \right)'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}} = \frac{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}} = \frac{1+x^2}{2\sqrt{x(1-x^2)} \cdot \sqrt{1-x^2}} > 0$$

x	0	1
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x^2}} = +\infty$$

c)



2) f est continue et strictement croissante sur [0,1[elle réalise donc une bijection de [0,1[sur]= [0, +∞[

3) a) (ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0 d'où la courbe de f^{-1} admet une demi-tgte horizontal à

droite au point d'abscisse 0

$\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable à droite en 0

et $(f^{-1})'_d(0)=0$

b) * $(f^{-1})'_d(0)=0$

* f est dérivable sur]0,1[

$$\text{et } f'(x) = \frac{1+x^2}{2\sqrt{x(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}} \neq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[) =]0, +\infty[$

* on pose $y = f^{-1}(x) \quad x \in]0, +\infty[, y \in]0,1[$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{1-y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{1-y^2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - x^2 y^2 \Leftrightarrow x^2 y^2 + y - x^2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4x^4 > 0 \quad \forall y$$

$$y' = \frac{-1 - \sqrt{1+4x^4}}{2x^2} < 0$$

$$y'' = \frac{-1 + \sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+4x^4}}{2x^2} \quad \text{pour } x \in]0, +\infty[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+4x^4}} \right] \quad \text{pour } x \in]0, +\infty[$$

c) ($\zeta_{f^{-1}}$) = $S_\Delta(\zeta_f)$ avec $\Delta : y = x$ (voir figure)

EX 10 :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad ; x \in [-1,1[$$

1) a)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
1+x	-	0	+	+
1-x	+	+	0	-
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-

la fonction : $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement

positive sur $] -1,1[$ d'où f est dérivable sur $] -1,1[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x + 1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse (-1)

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty$

la droite d'équation : $x=1$ est une asymptote à (ζ_f)

d) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} > 0 \quad \forall x \in]-1, 1[$

x	-1	1
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

2) a) $A(0,1)$

$(T) : y = f'(0) \cdot (x-0) + f(0)$

$(T) : y = x + 1$

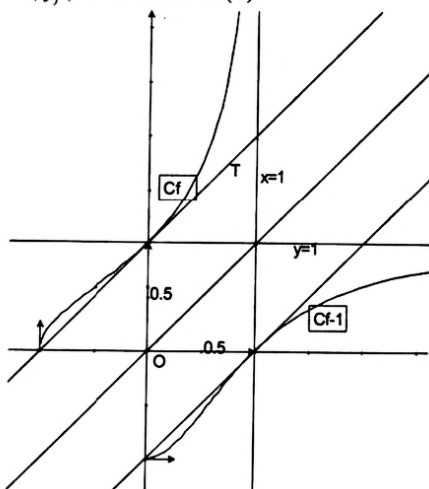
b)

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - (1+x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot [1 - \sqrt{1-x^2}]$$

$$1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) - (x+1) \geq 0$$

(ζ_f) est au dessus de (T)



3) a) f est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$ elle réalise donc une bijection de $[-1, 1]$ sur $J = f([-1, 1])$

$$J = f([-1, 1]) \quad J = [f(-1), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [0, +\infty[$$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_{\Delta}(\zeta_f) \quad \Delta : y=x$ (figure)

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}} > 0$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -1$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	-1	1

FONCTIONS RECI PROQUES

2) a) * pour $x \in D_f = \mathbb{R}$, $(-2-x) \in D_f$

$$\begin{aligned} * f(-2-x) &= \frac{(-2-x)+1}{\sqrt{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}} \\ &= \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = -f(x) \end{aligned}$$

d'où $I(-1,0)$ est un centre de symétrie pour (ζ_f)

$$b) f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$f''(x) = \frac{-3(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

f'' s'annule en changeant de signe en -1 d'où $I(-1, f(-1))$ est un point d'inflexion : $I(-1,0)$

3) a) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose $h(x)=f(x)-x$

$$h'(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1$$

$$x^2 + 2x + 2 = 1 + (1+x)^2 > 1$$

$\Rightarrow h'(x) < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

h est continue sur $[0,1]$

$$h(0) \times h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - 1\right) < 0$$

d'où l'équation $h(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]0,1[$

comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, alors

α est unique $(\zeta_f) \cap \Delta = \{A(\alpha, \alpha)\}$

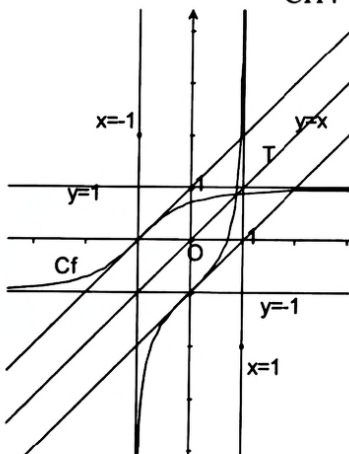
b)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-
Position relative	$(\zeta_f) / \Delta$	$A(\alpha, \alpha)$	$\Delta / (\zeta_f)$

4) T: $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

T: $y=x+1$

CH4 TOME I



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$J=f(\mathbb{R})=]-1,1[$$

$$b) (\zeta_{f^{-1}}) = S_\Delta(\zeta_f) \quad \Delta: y=x$$

EX 12 :

$$g(x) = tg(\pi x) \quad ; \quad x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$$

$$1) g \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$$

$$g'(x) = \pi \cdot (1 + tg^2(\pi x)) > 0$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (\pi x) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \\ \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} tg x &= +\infty \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g = +\infty$$

2) g est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sur

$$g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g, \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} g \right[= \mathbb{R}$$

FONCTIONS RECI PROQUES

3) g est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

et $g'(x) = \pi \cdot (1 + \tan^2(\pi x)) \neq 0$ d'où g^{-1} est

dérivable sur $g(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) = \mathbb{R}$

en particulier g est dérivable sur $]-\infty, 0[$

4) $x \in]-\infty, 0[$

$$G(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$

la fonction $U : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$

et $U(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$

g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$

d'où la fonction : $x \mapsto g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$

par suite G est dérivable sur $]-\infty, 0[$

$$G'(x) = (g^{-1})'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot (g^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G'(x) = (g^{-1})'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot (g^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right)$$

calculons $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$

$$\text{on pose } y = g^{-1}(x) \quad x \in]-\infty, 0[, y \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$$

$$g(y) = x \rightarrow \tan(\pi y) = x$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\pi \cdot (1 + \tan^2(\pi y))} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\text{d'où } G'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{x^2})} = 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

$$\text{b) } G'(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

d'où G est une fonction constante sur $]-\infty, 0[$.

$$G(-1) = g^{-1}(-1) + g^{-1}(-1) = 2g^{-1}(-1) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{car } g\left(\frac{-1}{4}\right) = -1, \quad g^{-1}(-1) = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-1}{2} - g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

CH4 TOME

EX 13 :

$$h(x) = \cot g\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad x \in]0, \pi[$$

$$1) \quad h'(x) = -\frac{1}{2}(1 + \cot^2 \frac{x}{2}) < 0$$

h est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$

elle réalise donc une bijection de $]0, \pi[$

$$\text{sur } h(]0, \pi[) = \left[h(\pi), \lim_{0^+} h \right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$$

$$2) \quad \varphi = h^{-1}$$

f est dérivable sur $]0, \pi[$

$$\text{et } h'(x) = -\frac{1}{2}(1 + \cot^2(\frac{x}{2})) \neq 0$$

d'où φ est dérivable sur $h(]0, \pi[) = \mathbb{R}_+$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{h'(\varphi(x))} \quad (y = \varphi(x) ; h(y) = x)$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}(1 + \cot^2(\frac{y}{2}))} = \frac{-2}{1 + (h(y))^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{1 + x^2}$$

$$\text{b) } \psi'(x) = \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad x \in]0, +\infty[$$

$$\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{-2}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\psi'(x) = \frac{2}{1 + x^2}$$

$$\text{c) } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

on pose : $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x) = 0$$

f est constante sur $]0, +\infty[$

$$f(1) = \varphi(1) + \psi(1) = \pi$$

$$\text{d'où } f(x) = \pi \quad ; \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = \pi \quad \text{pour } x > 0$$

EX 14 :

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad ; x \in [0,1[$$

1) f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } x \in]0,1[$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g'(x)$		0	
$g(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

2) $g(x) = f(x) \quad ; x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

a) g est continue et strictement croissante

sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ elle réalise donc une bijection

de $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sur $I = g\left(\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

b) • g^{-1} est continue et strictement

croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

• g^{-1} est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

on pose $y = g^{-1}(x)$ avec $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $y \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y\sqrt{1-y^2} = x \Leftrightarrow y^2(1-y^2) = x^2$$

$$\Leftrightarrow y^4 - y^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} \quad \text{car } y^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x^2})$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x^2})} \quad \text{car } y \geq 0$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2}}$$

$$3) \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) * pour $n=0$, on a $0 \leq U_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ (vrai)

* supposons que : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

et montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$$

f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

conclusion : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} ; \forall n \in \mathbb{N}$

3) b) $U_{n+1} - U_n = U_n \sqrt{1-U_n^2} - U_n = U_n \cdot [\sqrt{1-U_n^2} - 1]$

$$= U_n \cdot \frac{-U_n^2}{\sqrt{1-U_n^2} + 1} = \frac{-U_n^3}{\sqrt{1-U_n^2} + 1} \leq 0 \quad \text{car } U_n \geq 0$$

d'où (U_n) est décroissante

c) * (U_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell \sqrt{1-\ell^2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 \cdot (1-\ell^2) = \ell^2 \Leftrightarrow -\ell^4 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

FONCTIONS RECI PROQUES

EX 15 : $n \geq 2$

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$$

$$1) f'_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$$

$$f'_n(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in [0, 1]$$

f_n est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$

elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $f_n([0, 1])$

$$f_n([0, 1]) = [f_n(0), f_n(1)] = [-1, n-1]$$

2) a) f_n est une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, n-1]$

comme $0 \in [-1, n-1]$, alors il existe un unique

réel $\alpha_n \in [0, 1]$ tel que: $f_n(\alpha_n) = 0$

$$f_n(0) \times f_n(1) = -1 \times (n-1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha_n < 1$$

b) pour $x \neq 1$

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = x \cdot \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right) \text{ comme étant somme de}$$

n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n \left(\frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n} \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(1-\alpha_n^n) = 1-\alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n^{n+1} = 2\alpha_n - 1$$

$$3) \text{ a) on a : } f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$$

$$f_n(\alpha_n) = 0$$

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = f_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n) \quad \text{car } \alpha_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \text{car } f_n \text{ est strictement croissante}$$

par suite (α_n) est décroissante

b) * (α_n) est décroissante et minorée par 0
elle est donc convergente

$$* \alpha_n \geq 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \geq 0 \quad (1)$$

déterminons α_2 ?

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{avec } x \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(α_n) est décroissante d'où pour $n \geq 2 \Rightarrow \alpha_n \leq \alpha_2$

$$\Rightarrow \alpha_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 0 \leq 2\alpha_n - 1 \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$$

EX 16 :

A/

$$f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$$

1) a)

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8} - x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 8} - x) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2 + 8} - x} = 0$$

$$b) * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(ζ_f) admet la droite d'équation : $y = 0$

comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$$

$\Delta : y = -2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $(-\infty)$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = \frac{x - \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$x^2 + 8 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8} > |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+8} > x$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x^2+8} < 0 \text{ d'où } f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	-	-
f(x)	$+\infty$	0

3) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$

$$J = f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$$

4) a) $f(x) = x \Leftrightarrow -x + \sqrt{x^2+8} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8} = 2x$

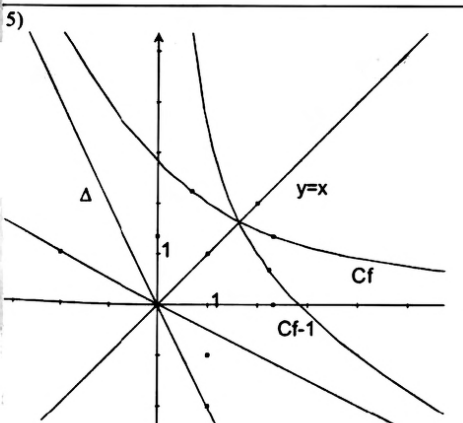
* l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solutions dans $]-\infty, 0[$

* dans $[0, +\infty[$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$S_R = \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{6} \right\}$$

$$b) (\zeta_f) \cap (\zeta_{f^{-1}}) = \left\{ A\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \right\}$$



B/

1) f est continue et strictement décroissante sur $[1, 2]$ d'où $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [2\sqrt{3} - 2, 2]$

$$f([1, 2]) \subset [1, 2] \quad \text{car } 2\sqrt{3} - 2 > 1$$

$$2) f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$|f'(x)| = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 9 \leq x^2 + 8 \leq 12 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x^2+8} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} \geq -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où pour } x \in [1, 2] \quad |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

$$3) \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) * pour $n=0$ $1 \leq U_0 \leq 2$ (vrai)

* supposons que $1 \leq U_n \leq 2$

* montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

$$1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow U_n \in [1, 2] \Rightarrow f(U_n) \in f([1, 2])$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \in [1, 2] \quad \text{car } f([1, 2]) \subset [1, 2]$$

$$\text{conclusion : } 1 \leq U_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) d'après 4) a)

$$f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

f est dérivable sur $[1, 2]$ et $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

FONCTIONS RECI PROQUES

$$U_n \text{ et } \sqrt[n]{8/3} \in [1, 2]$$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$|f(U_n) - f(\sqrt[n]{8/3})| \leq \frac{2}{3} |U_n - \sqrt[n]{8/3}|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \sqrt[n+1]{8/3}| \leq \frac{2}{3} |U_n - \sqrt[n]{8/3}|$$

$$c) |U_1 - \sqrt[8]{8/3}| \leq \frac{2}{3} |U_0 - \sqrt[8]{8/3}|$$

$$|U_2 - \sqrt[8]{8/3}| \leq \frac{2}{3} |U_1 - \sqrt[8]{8/3}|$$

$$|U_n - \sqrt[n]{8/3}| \leq \frac{2}{3} |U_{n-1} - \sqrt[n-1]{8/3}|$$

multiplions membre à membre et simplifions :

$$|U_n - \sqrt[n]{8/3}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |1 - \sqrt[8]{8/3}|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot |1 - \sqrt[8]{8/3}| = 0$$

$$d'où \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - \sqrt[n]{8/3}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \sqrt[8]{8/3}$$

EX 17 :

$$1) * x = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times 3 \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}} \\ = \frac{\sqrt[3]{3} \times 3 \sqrt[3]{3} \times 2}{3 \sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$* y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$* t = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$2) A = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{8^2}} \times \sqrt[5]{3^5 \times 2^5}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt[3]{2^8}}} = \frac{2^3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{8} \times 3\sqrt[5]{2^5}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2}} \\ = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 \times 2}{3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{8\sqrt{2} \times 2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{16 \times \sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{16 \times \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = 16$$

$$3) a) (2 + \sqrt{5})^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{5} + 3 \times 2 \times (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3 \\ = 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$$

$$b) B = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} \leftarrow n'a \text{ pas de sens} \\ \text{car } 38 - 17\sqrt{5} < 0$$

CH4 TOME 1

EX 18 :

$$1) \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = (\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{8}$$

$$S_x = \{\sqrt[4]{8}\}$$

$$2) \sqrt[4]{x^2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3^5} \text{ ou } x = -\sqrt[3]{3^5}$$

$$S_x = \{\sqrt[3]{3^5}, -\sqrt[3]{3^5}\}$$

$$3) \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$$

dans $\mathbb{R}$:

$$(E) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$$

on pose $t = \sqrt[3]{x}$

l'équation devient : $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$t' = 1 \text{ et } t'' = 2$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$$

$$S_x = \{1, 8\}$$

$$4) (1 - \sqrt[4]{x})^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - 1)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$$

$$S_x = \{81\}$$

EX 19 :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^2 + x}{\sin x}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \cdot [\sqrt[3]{x^2} - 1] = +\infty$$

FONCTIONS RECI PROQUES

d) on pose $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

e) on pose $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$

f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[12]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}} = \sqrt[12]{x^4}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\sqrt[6]{x^6}} = \sqrt[12]{x^6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{x^4} - \sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}} - \frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{x} - \sqrt[12]{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{x} \cdot (1 - \sqrt[12]{x^2}) = -\infty$$

EX 20 :

$$f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+$$

1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{4\sqrt[3]{x^3}} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^3} = +\infty$$

f non dérivable à droite en 0

CH4 TOME I

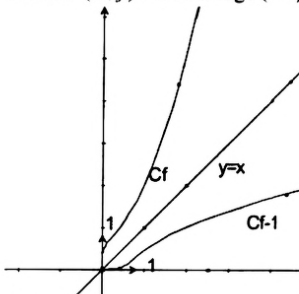
x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \mathbb{R}_+ = J$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^3} = +\infty$$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \bar{j})$ au voisinage $(+\infty)$



EX 21 :

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

2) comme étant produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{3\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + x}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{4x}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{4(\sqrt[3]{x})^3}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$$

$$Rq: \begin{cases} f(x) = x^{\frac{4}{3}} \\ f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$3) f'(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

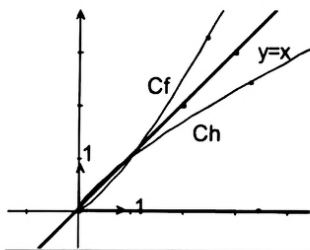
FONCTIONS RECI PROQUES

4) $T: y = f^{-1}(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$$T: y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

(ζ) admet une B.P de direction celle de $(O, \vec{j})$



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$f(\mathbb{R}_+) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = \mathbb{R}_+$$

b) $h = f^{-1}$

$$h(1) = 1 \quad \text{car } f(1) = 1$$

$$f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = \frac{4}{3} \neq 0$$

d'où h est dérivable en $f(1) = 1$

$$\text{et } h'(1) = \frac{1}{f'(h(1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{4}$$

$$c) f(x) = x \Leftrightarrow x \cdot \sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

$$(\zeta) \cap \Delta = \{O(0,0); A(1,1)\}$$

$$d) (\zeta_h) = S_\Delta(\zeta)$$

EX 22 :

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	0	$+$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

1) * $x \in D_f \Rightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1 \Rightarrow -x \geq 1$ ou $-x \leq -1$
 $\Rightarrow x \in D_f$

$$* f(-x) = \sqrt[4]{(-x)^2 - 1} = \sqrt[4]{x^2 - 1} = f(x)$$

d'où f est paire

2) pour $x \geq 1$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$b) * \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$3) a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt[4]{x^2 - 1})^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{(\sqrt[4]{x^2 - 1})^3} = +\infty$$

d'où f n'est pas dérivable à droite en 1

b) la fonction : $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$ d'où

f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x}{4 \cdot (\sqrt[4]{x^2 - 1})^3}$$

$$c) f'(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

4) a) $\Delta: y=x$

pour $x \geq 1$ on a :

$$x^2 - 1 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - 1 \leq x^4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 - 1} \leq \sqrt[4]{x^4}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq x$$

d'où (ζ_f) est au dessous de Δ pour $x \geq 1$

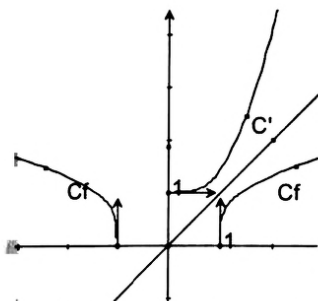
b) f est paire

(ζ_f) : la courbe de la restriction de f sur $[1, +\infty[$

$$(\zeta_2) = S_{(O,1)}(\zeta_1)$$

$$(\zeta_f) = (\zeta_1) \cup (\zeta_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (\zeta_f) \text{ admet un B.P de direction } (O, \vec{i})$$



5) a/ f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$
elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur

$$f[1, +\infty[= [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f] = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$$

b) * f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{2x}{4(\sqrt[4]{x^2-1})^3} \neq 0$$

d'où f' est dérivable sur $f[1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$.

* f n'est pas dérivable à droite en 1

d'où (ζ_f) admet une demi tangente verticale

au point d'abscisse 1 $\Rightarrow (\zeta_{f'})$ admet une demi

tangente horizontale au point d'abscisse $f(1)=0$

d'où f' est dérivable à droite en 0 et $(f')'_d(0)=0$

conclusion: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c) $(\zeta') = S_3(\zeta_1)$

CH4 TOME I

EX 23 :

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} + 3$$

1) a) pour $x > 0$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{x} = \frac{x \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \frac{x}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{d'où } f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{3} + 3 = x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} \right] + 3$$

$$\text{b) } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} \right] + 3 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} + \frac{3}{x} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} + 3 = +\infty$$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction

celle de la droite $D: y = -\frac{1}{3}x$ au voisinage $(+\infty)$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 + \frac{3}{x} = +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

b) • la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• la fonction : $x \mapsto -\frac{x}{3} + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 : (x \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$		$\frac{11}{3}$	
	3	$\nearrow$	$\searrow -\infty$

FONCTIONS RECI PROQUES

d) * f est continue et strictement croissante sur

$[0,1[$ $f([0,1]) = [3, \frac{11}{3}[$, $0 \notin [3, \frac{11}{3}[$ d'où l'équation :

$f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $[0,1[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de

$[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) =]-\infty, \frac{11}{3}]$

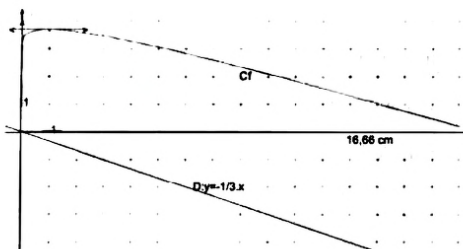
comme $0 \in]-\infty, \frac{11}{3}]$, alors il existe un unique réel α

$\in [1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

conclusion : α est l'unique solution de l'équation

$f(x)=0$ dans $\mathbb{R}^*$.

$f(16,6).f(16,7)<0 \Rightarrow 16,6<\alpha<16,7$ (calculatrice)



EX 24 :

A/ $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = x^{2n+1} + 3x - 2$$

1) a) $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} + 3 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) * pour $x \in D_{f_n} = \mathbb{R}$ on a $(-x) \in D_{f_n}$

$$\begin{aligned} * f_n(-x) &= (-x)^{2n+1} + 3(-x) - 2 = -x^{2n+1} - 3x - 2 \\ &= -4 - (x^{2n+1} + 3x - 2) = -4 - f_n(x) \end{aligned}$$

conclusion : $I(0,-2)$ est un centre de symétrie pour (ζ_n)

c) $f''_n(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1}$

f''_n s'annule en 0 en changeant de signe

d'où $I(0,-2)$ est un point d'inflexion de (ζ_n)

CH4 TOME I

2) a) $f_{n-1}(x) \cdot f_n(x) = x^{2n+3} - x^{2n+1} = x^{2n+1} \cdot (x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f_{n-1}(x) \cdot f_n(x)$	-	0	+	0	+
Position relative	C_n/C_{n-1}	C_{n+1}/C_n	C_n/C_{n-1}	C_{n+1}/C_n	C_n/C_{n-1}
		$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	
		$B(-1,-6)$	$I(0,-2)$	$A(1,2)$	

b) $(\zeta_n) \cap (\zeta_{n-1}) = \{I(0,-2); A(1,2); B(-1,-6)\}$

3) a) f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n \right[= \mathbb{R}$$

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + 3 \neq 0$
d'où f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(f_n^{-1})'(-6) = \frac{1}{f'_n(f_n^{-1}(-6))} = \frac{1}{f'_n(-1)} = \frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(2) = \frac{1}{f'_n(1)} = \frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'_n(0)} = \frac{1}{3}$$

4) f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$ alors il existe

un réel x_n tq $f_n(x_n) = 0$

$$f_n(0) \times f_n\left(\frac{2}{3}\right) = (-2) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x_n < \frac{2}{3}$$

$$b) f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n^{2n+1} + 3x_n - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_n = 2 - x_n^{2n+1} \Leftrightarrow x_n = \frac{2 - x_n^{2n+1}}{3}$$

$$c) 0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq x_n^{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{2n+1} = 0$$

$$x_n = \frac{2 - x_n^{2n+1}}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - x_n^{2n+1}}{3} = \frac{2}{3}$$

FONCTIONS RECI PROQUES

B/ $n=1$

$$f(x) = f_1(x) = x^3 + 3x - 2$$

$$\alpha = x_1$$

$$1) \varphi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} + x \quad x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$a) \varphi(x) = x - \frac{x^3 + 3x - 2}{3x^2 + 3} = \frac{2x^3 + 2}{3(x^2 + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{pour } x \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^3 \leq x^2 \Rightarrow 0 < 1 + x^3 \leq 1 + x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1 + x^3}{1 + x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + x^3}{1 + x^2} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\varphi \text{ est continue sur } \left[0, \frac{2}{3}\right] \text{ d'où } \varphi\left(\left[0, \frac{2}{3}\right]\right) \subset \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$b) \varphi(x) - \alpha = (x - \alpha)^2 \frac{(2x + \alpha)}{3(x^2 + 1)} \quad \text{on a : } f(\alpha) = 0$$

$$\varphi(x) - \alpha = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = (x - \alpha) - \frac{f(x) - f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$= (x - \alpha) - \frac{(x^3 - \alpha^3) + 3(x - \alpha)}{3(1 + x^2)}$$

$$= (x - \alpha) - \frac{(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + 3)}{3(1 + x^2)}$$

$$= (x - \alpha) \cdot \left[1 - \frac{(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + 3)}{3(1 + x^2)}\right]$$

$$= (x - \alpha) \cdot \frac{2x^2 - \alpha x - \alpha^2}{3(1 + x^2)}$$

$$= (x - \alpha) \cdot \frac{2x^2 + \alpha x - (2\alpha x + \alpha^2)}{3(1 + x^2)}$$

$$= \frac{(x - \alpha)}{3(1 + x^2)} \cdot [x(2x + \alpha) - \alpha(2x + \alpha)]$$

$$= \frac{(x - \alpha)(x - \alpha)(2x + \alpha)}{3(1 + x^2)} = \frac{(x - \alpha)^2(2x + \alpha)}{3(1 + x^2)}$$

CH4 TOME I

$$c) 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ et } 0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow |x - \alpha| \leq \frac{2}{3}$$

$$0 \leq 2x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 0 \leq 2x + \alpha \leq 2$$

$$\Rightarrow (2x + \alpha)|x - \alpha| \leq \frac{4}{3}$$

$$1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3(1 + x^2)} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } \frac{(2x + \alpha)|x - \alpha|}{3(1 + x^2)} \leq \frac{4}{9} \leq \frac{2}{3}$$

$$d) |\varphi(x) - \alpha| = \frac{(2x + \alpha)|x - \alpha|}{3(1 + x^2)} \cdot |x - \alpha|$$

$$\text{or } \frac{(2x + \alpha)|x - \alpha|}{3(1 + x^2)} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } |\varphi(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$$

$$2) \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$$

$$a) * \text{ pour } n=0, 0 \leq U_0 \leq \frac{2}{3} \quad (\text{vrai})$$

$$* \text{ supposons que : } 0 \leq U_n \leq \frac{2}{3}$$

$$* \text{ montrons que : } 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

$$U_n \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow \varphi(U_n) \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \quad \text{d'après B/1)a)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{conclusion : } 0 \leq U_n \leq \frac{2}{3} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \text{ d'après 1) d) } |\varphi(U_n) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$$

$$c) |U_1 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_1 - \alpha|$$

.....

.....

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \alpha|$$

FONCTIONS RECI PROQUES

multiplions membre par membre et simplifions on aura:

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |0 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - \alpha) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \alpha$$

$$\text{vérifier que : } f(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}) = 0$$

EX 25 :

partie A :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \quad ; \quad \forall x \in [0,1[$$

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 0$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

b) f est dérivable sur $]0,1[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{\frac{x^3}{1-x}} = \frac{\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}}{\frac{x^3}{1-x}} = \frac{3x - 2x^2}{2(1-x)\sqrt{x-x^2}}$$

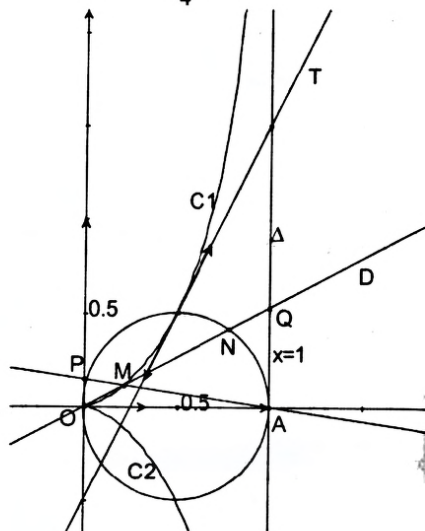
x	0	1
f'(x)	+	
f(x)	0	$+\infty$

CH4 TOMI

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = +\infty$$

$$c) T: y = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$T: y = 2x + \frac{1}{4}$$



$$2) C_2 = S_{(Ox)}(C_1)$$

$$3) C = C_1 \cup C_2$$

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^3}{1-x} \Leftrightarrow x^3 = y^2 - xy^2$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

FONCTIONS RECI PROQUES

Partie B : A(1,0)

1) $\Delta: x=1$

$$(\zeta): (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

2) $D: y=m.x$

3) a) $N(x,y) \in D \cap \zeta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m.x \\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m.x \\ (x-\frac{1}{2})^2 + m^2.x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + m^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow x[(1+m^2)x - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{1+m^2}$$

or $N \neq O$

$$d'où \quad x = \frac{1}{1+m^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{m}{1+m^2}$$

$$N(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2})$$

b) on a : $Q(1,m)$

$$\overline{OM} = \overline{NQ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_Q - x_N \\ y_M = y_Q - y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{m^2}{1+m^2} \\ y_M = \frac{m^3}{1+m^2} \end{cases}$$

$$c) x_M.(x_M^2 + y_M^2) - y_M^2 = 0$$

d'où $M \in C$

$$4) M(x,y) \in C \Leftrightarrow x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

a) pour $x=0$ on aura $y=0$; $M=O \in (\Gamma)$

$$b) x \neq 0 ; m = \frac{y}{x} \rightarrow y=mx$$

$$x.(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \quad d'où \quad x(x^2 + m^2 x^2) - m^2 x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 . [(1+m^2)x - m^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m^2}{1+m^2} \quad (\text{car } x \neq 0) \quad \text{et} \quad y = \frac{m^3}{1+m^2}$$

$M \in (\Gamma)$ d'après 3) b)

$$c) \quad \begin{matrix} M \in (\Gamma) \Rightarrow M \in C \\ M \in C \Rightarrow M \in (\Gamma) \end{matrix} \quad d'où \quad (\Gamma)=C$$

CH4 TOME I

partie C :

$$t > 0 \quad . \quad D_t : y = t.x$$

$$d'après B/ on a : M(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$$

$$A(1,0) \quad P(0,y_p)$$

$$\overline{AP} \begin{pmatrix} -1 \\ y_p \end{pmatrix} \quad \overline{AM} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1+t^2}{1+t^2} \\ \frac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\overline{AP}, \overline{AM}) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^3}{1+t^2} + \frac{y_p}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow y_p = t^3$$

d'où $P(0,t^3)$

b) $A(1,0)$; $Q(1,t)$

$$AQ = \sqrt{0^2 + t^2} = |t| = t$$

$$2) OP = t^3 \quad \text{et} \quad AQ = t$$

$$AQ^3 = OP$$

$$AQ = \sqrt[3]{OP}$$

prenons $OP=t$ on aura $AQ = \sqrt[3]{t}$

EX 26 :

partie A :

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \quad ; \quad x \in [0,1]$$

1) a) f est dérivable sur $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} . \cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

x	0	1
f'(x)		0
f(x)	0	1

f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$

FONCTIONS RECI PROQUES

$$b) f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2) a) f est dérivable sur $]0,1[$

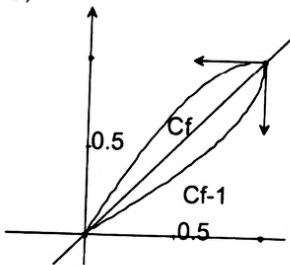
$$\text{et } f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0 \forall x \in]0,1[$$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f\left[0,1\right] =]0,1[$

$$b) (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{\pi \cdot \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} c) (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} \quad (\text{avec } y=f^{-1}(x); f(y)=x) \\ &= \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)} = \frac{2}{\pi \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)}} \quad (\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) > 0) \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{1-f^2(y)}} = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3)



$$4) V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) pour $1 \leq k \leq n$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq V_n \times n \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n \cdot f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq n \cdot V_n \leq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq V_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

CH4 TOME

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ f est continue en 0 à droite

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 0$$

$$\text{de même : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

$$5) \text{ on pose } \varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{\pi}{2}x$$

φ est dérivable sur $]0,1[$

$$\varphi'(x) = -\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{\pi}{2}\right] < 0$$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$

elle réalise donc une bijection de $]0,1[$

$$\text{sur } \varphi\left(]0,1[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) \right[= \left] 1 - \frac{\pi}{2}, +\infty \right[$$

comme $0 \in \left] 1 - \frac{\pi}{2}, +\infty \right[$, alors il existe un unique réel

$$\alpha \text{ tq } \varphi(\alpha) = 0$$

par suite l'équation : $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet α comme

unique solution dans $]0,1[$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[1 - \frac{\pi}{2}, \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{comme } 0 \in \varphi\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \text{ alors } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

FONCTIONS RECI PROQUES

partie B :

1) $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$

a) la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

et $\sin\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, 1[$

comme f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ alors :

la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\sin x)$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

• de même la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\cos x)$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

par suite g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = \cos x \cdot (f^{-1})'(\cos x) - \sin x \cdot (f^{-1})'(\sin x) \\ = \frac{2 \cos x}{\pi \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}} - \frac{2 \sin x}{\pi \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = 0$$

b) $g'(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

g est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

d'où g est constante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

d'où $g(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$$

2) $h(x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2} \quad ; \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$a) h'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \\ = \frac{2(1 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

x	0	$\frac{1}{2}$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CH4 TOME I

b) h est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$

$$\Rightarrow h([0, \frac{1}{2}]) = [h(0), h(\frac{1}{2})] = [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

3) $k(x) = f^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$
 $k(x) = f^{-1} \circ h(x)$

h est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $h([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

comme f^{-1} est dérivable sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

alors $k = f^{-1} \circ h$ est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$k'(x) = h'(x) \cdot (f^{-1})'(h(x)) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{2}{\pi \sqrt{1 - 4x^2(1 - x^2)}} \\ = \frac{2(2 - 4x^2)}{\pi \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{(1 - 2x^2)^2}} = \frac{4(1 - 2x^2)}{\pi(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2}} \\ = \frac{4}{\pi \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$$k'(x) = 2(f^{-1})'(x)$$

$$k(x) = 2f^{-1}(x) + c \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$d'où f^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2}) = 2 \cdot f^{-1}(x)$$

EX 27 :

partie A :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) pour $x > 0$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 - 1}{x(1 + \sqrt{1 + x^2})} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 0

b) pour $x > 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)-1}{x^2[1+\sqrt{1+x^2}]} = \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} = f_d'(0)$$

c) $T: y = \frac{1}{2}x$; $x \geq 0$

pour $x > 0$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{2\sqrt{1+x^2}-(2+x^2)}{2x}$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2(1+x^2)-(2+x^2)^2}{2x[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)]}$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{-x^3}{2[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)]} \leq 0$$

(ζ_f) est au dessous de (T)

d) pour $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - (-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2}(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

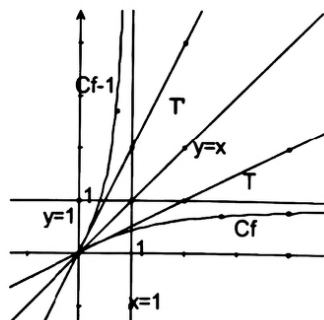
$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \text{car } 1+x^2 > 1$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) = 1$$

e) $y=1$ est une asymptote à (ζ_f)

au voisinage $(+\infty)$



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur J

$$J = f(\mathbb{R}_+) = [0, 1[$$

b) on pose : $y = f^{-1}(x)$ $x \in]0, 1[$, $y \in \mathbb{R}_+$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = xy+1$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2 = x^2y^2 + 2xy + 1 \Leftrightarrow y[(1-x^2)y - 2x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y = 2x \quad \text{car } y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{1-x^2} \quad \text{pour } x=0 \rightarrow y=0$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2} ; \forall x \in [0, 1[$$

$$c) (\zeta_{f^{-1}}) = S_{\Delta}(\zeta_f) \quad \text{avec } \Delta: y=x$$

partie B :

$$g(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

1) a) * pour $n=0$, on a : $0 \leq U_0 \leq 1$ (vrai)

* supposons que : $0 \leq U_n \leq 1$

* montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow g(0) < g(U_n) \leq g(1)$$

car g est strictement croissante sur $[0, 1]$

$$\text{d'où } 0 < U_{n+1} \leq \sqrt{2}-1 \leq 1$$

conclusion : $0 \leq U_n \leq 1 ; \forall n \in \mathbb{N}$

FONCTIONS RECI PROQUES

b) pour $x \in]0;1]$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \frac{(1+x^2) - 1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x \text{ d'après 1) c)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x \text{ d'où } g(U_n) \leq \frac{1}{2}U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) * pour } n=0 \quad U_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1 \text{ (vrai)}$$

$$\text{* supposons que } U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{* montrons que : } U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{a : } U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n \text{ et } U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion : } U_n \leq \frac{1}{2^n} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\text{a) } U_{n+1} = f(U_n) \Rightarrow U_n = f^{-1}(U_{n+1})$$

$$= \frac{2U_{n+1}}{1 - (U_{n+1})^2}$$

$$\text{b) * pour } n=0, U_0 = 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{0+2}}\right) \text{ (vrai)}$$

$$\text{* supposons que : } U_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\text{* montrons que : } U_{n+1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$

CH4 TOME I

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= g(U_n) = \frac{U_n}{1 + \sqrt{1 + U_n^2}} \\ &= \frac{U_n}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}} \quad \left(1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right) \end{aligned}$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$$

$$\text{car : } 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} ; \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{d'où } U_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$

$$\text{Conclusion : } U_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3) V_n = 2^n U_n = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$V_n = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2^n}} = h\left(\frac{1}{2^n}\right) \text{ avec } h(x) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} x\right)}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} x\right)}{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$$

FONCTIONS RECI PROQUES

CH4 TOME I

EX 28 :

partie A :

$$f(x) = \sqrt{1+tgx} \quad ; x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

1) a) * pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $tgx > -1 \Rightarrow 1+tgx > 0$

* la fonction : $x \mapsto 1+tgx$ est dérivable et

strictement positive sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

d'où f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$* f'(x) = \frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}$$

b) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{1+tgx}}{x + \frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1+tgx}{x + \frac{\pi}{4}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tgx}}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{\sqrt{1+tgx}} = +\infty$$

* on pose : $\varphi(x) = 1+tgx$; φ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

et $\varphi'(x) = 1+tg^2x$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \frac{1+tgx}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} = \varphi'(-\frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{1+tgx}{x + \frac{\pi}{4}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tgx}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en $(-\frac{\pi}{4})$ à droite

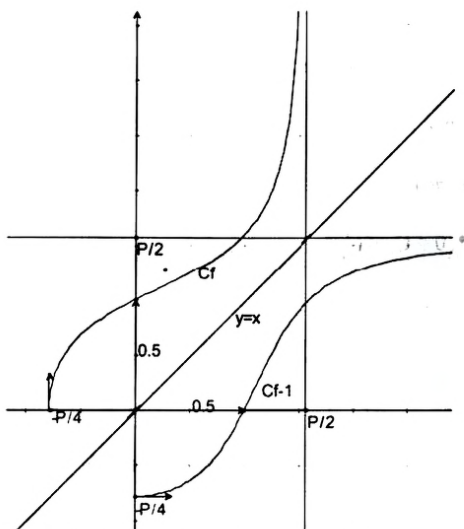
* (ζ_r) admet une demi tangente verticale

au point d'abscisse $(-\frac{\pi}{4})$

c) pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}} > 0$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$



2) a) f est continue et strictement croissante

sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ elle réalise donc une bijection

de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $J = [0, +\infty[$

b) $g = f^{-1}$

$$f(-\frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow g(0) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(0) = 1 \rightarrow g(1) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \rightarrow g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

c) $(\zeta_x) = S_\Delta(\zeta_r)$ avec $\Delta : y=x$ (voir figure)

3) (ζ_x) admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0

FONCTIONS RECI PROQUES

⇒ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

* f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}} \neq 0$$

d'où g est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, +\infty[$

conclusion : g est dérivable sur $J =]0, +\infty[$

pour $x \in]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

soit $y = g(x)$, $f(y) = x$; $\sqrt{1+tg y} = x$, $tg y = x^2 - 1$

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{1+tg y}}{1+tg^2 y} = \frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+(x^2-1)^2} = \frac{2|x|}{x^4-2x^2+2}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2} \quad \text{car } x > 0$$

$$* g'_d(0) = 0 = \frac{2 \times 0}{0^4 - 2 \times 0^2 + 2}$$

$$d'où g'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2} \quad ; \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$4) U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g(k) \quad ; (n \in \mathbb{N})$$

a) f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

d'où g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$$n \leq k \leq 2n \Rightarrow g(n) \leq g(k) \leq g(2n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{2n} g(n) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(2n)$$

$$\Rightarrow (n+1)g(n) \leq (n+1)U_n \leq (n+1)g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n) \leq U_n \leq g(2n)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(2n) = \frac{\pi}{2}$$

$$d'où \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$$

CH4 TOME I

partie B :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) a) * h est continue sur $\mathbb{R}_+$

comme étant composée de 2 fonctions continues

$$* \text{ continuité en } 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\pi}{4} = h(0)$$

h est continue à droite en 0

conclusion : h est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) la fonction : $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable

et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$

d'où la fonction $U: x \mapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$U(\mathbb{R}_+) =]1, +\infty[$$

comme g est dérivable sur $]1, +\infty[$

alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)' \cdot g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}} \right] \cdot g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^4 - 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2 + 2} = \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$d'où h'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{-1}{2(x^2+1)}$$

2) a) $x > 0$

h est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$

d'a'près le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$

$$\text{tq : } h(x) - h(0) = (x-0)h'(c) \Leftrightarrow h(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{-x}{2(1+c^2)}$$

FONCTIONS RECI PROQUES

CH4 TOME I

b) pour $x > 0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{-1}{2(1+c^2)}$$

lorsque $x \rightarrow 0^+$

$c \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(1+c^2)} = -\frac{1}{2}$$

d'où h est dérivable à droite en 0 et $h'_d(0) = -\frac{1}{2}$

$$c) h'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)} < 0$$

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$\frac{\pi}{4}$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{2} g(1) = 0$$

$$3) h(x)=x \Leftrightarrow h(x)-x=0$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\psi(x)=h(x)-x$

$$\psi'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)} - 1 < 0$$

$$\psi(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - x = -\infty$$

ψ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$\psi(\mathbb{R}_+) = \left] -\infty, \frac{\pi}{4} \right]$$

comme $0 \in \psi(\mathbb{R}_+)$

alors il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$\text{tq } \psi(\alpha) = 0$$

$$\psi(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\psi(1) = \frac{1}{2} g(\sqrt{2}) - 1 = \frac{\pi}{8} - 1$$

$$\psi(0) \times \psi(1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

$$b) |h'(x)| = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(1+x^2)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$4) \begin{cases} V_0 \in \mathbb{R}_+ / \{\alpha\} \\ V_{n+1} = h(V_n) \end{cases}$$

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

α et $V_n \in \mathbb{R}_+$,

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$|h(V_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |V_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |V_n - \alpha|$$

$$b) |V_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |V_0 - \alpha|$$

$$|V_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |V_1 - \alpha|$$

$$|V_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |V_2 - \alpha|$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|V_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |V_{n-1} - \alpha|$$

multiplions membre à membre et simplifions on aura:

$$|V_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |V_0 - \alpha|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |V_0 - \alpha| = 0 \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha$$

Q.C.M :

1. $x \rightarrow 1 + \lg^2 x$
2. $x \rightarrow 1 - \cos x$
3. impaire
4. $x \rightarrow \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}$
5. $x \rightarrow x \sin x + \cos x$

Vrai - Faux :

1. (Vrai)

En effet : cette primitive est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

2. (VRAI)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \sin x > 0 \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

F et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$F'(x) = f(x) \text{ pour } x > 0$$

Montrons que F est dérivable

à droite en 0 et

$$F'_d(0) = f(0) = 0$$

pour $x > 0$

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0 = f(0)$$

Conclusion : F est une primitive de f

3. (FAUX)

Contre exemple :

$$f(x) = 1 \rightarrow F(x) = x$$

$$g(x) = x \rightarrow G(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$(F.G)(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$(F.G)'(x) = \frac{3}{2}x^2 \neq (f.g)(x)$$

4. (FAUX)

$$F(2x) \xrightarrow{\text{dérivée}} 2.f(2x)$$

5. (VRAI)

Thérèse du cours :

Il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donnée.

EX 1 :

$$1. f(x) = -5x^4 + 2x - 3$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = -x^5 + x^2 - 3x + k ; (k \in \mathbb{R})$$

$$2. f(x) = (x+2) - \frac{3}{x^2} ; I =]-\infty, 0[$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{3}{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$3. f(x) = \frac{3x}{(3x^2 + 2)^2} ; I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{3x^2 + 2} \right) + k ; (k \in \mathbb{R})$$

$$4. f(x) = (-x+3)^6 \quad I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{-1}{7}(-x+3)^7 + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5. f(x) = (x-1).(x^2 - 2x + 7)^4 \quad I = \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 2x + 7)^5 + k$$

$$6. f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$$

$$I = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right[$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3} + k$$

$$7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos(\sqrt{x}) ; I =]0, +\infty[$$

$$F(x) = 2 \sin(\sqrt{x}) + k$$

$$8. f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^5}$$

$$F(x) = \frac{-1}{12(x^3 + 3x)^4} + k$$

$$9. f(x) = \sin(2x+1) \cdot \cos^4(2x+1)$$

$$F(x) = \frac{-1}{10} \cos^5(2x+1) + k$$

$$10. f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3 + 1)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1) + k$$

$$11. f(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^3}$$

$$F(x) = +\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 + \cos x)^2} \right) + k$$

$$12. f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}$$

$$F(x) = \frac{-3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$$

$$F(x) = \frac{2-6x-9x^2}{3x^3} + k$$

$$13. f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$F(x) = 2\sqrt{x^2-x} + k$$

$$14. f(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1$$

$$F(x) = \operatorname{tg} x - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Ex 2 :

1. soit F une primitive de f sur $[-2, 2]$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\text{pour } x \in [-2, -1] \rightarrow f(x) \leq 0$$

$$x \in [-1, 0] \rightarrow f(x) \geq 0$$

$$x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \leq 0$$

$$x \in [1, 2] \rightarrow f(x) \geq 0$$

par exemple :

F est croissante sur $[-1, 0]$

or graphiquement :

h est décroissante sur $[-1, 0]$

d'où h n'est pas une primitive de f

par suite : g est primitive de f

2. soit H : une primitive de h

$$H'(x) = h(x) ; \forall x \in [-2, 2]$$

graphiquement : $h(0) \neq 0$

$$\Rightarrow H'(0) \neq 0$$

$\Rightarrow (\zeta_H)$ n'admet pas une tgte horizontale au point d'abscisse 0

$$\Rightarrow (\zeta_H) \neq (\zeta_g)$$

d'où f est une primitive de h sur $[-2, 2]$

EX 3 :

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$$

2. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

$$F(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$$

3. $f(x) = (x-3)\sqrt{x^2-6x}$

$$F(x) = \frac{1}{3}(x^2-6x)\sqrt{x^2-6x}$$

4. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

$$f(x) = \frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

d'où :

$$F(x) = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1}$$

$$F(x) = (\frac{2}{3}x - \frac{10}{3})\sqrt{x-1}$$

5. $f(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 + x)^7$

$$F(x) = \frac{1}{16}(x^2 + x)^8$$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}}$

$$(\frac{3}{2x} + \frac{1}{2})' = \frac{-3}{2x^2}$$

$$f(x) = \frac{-2}{3} \left[\frac{-3}{2x^2} \sqrt{\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}} \right]$$

$$F(x) = \frac{-2}{3} \cdot (\frac{2}{3}) (\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{-4}{9} (\frac{3+x}{2x}) \sqrt{\frac{3+x}{2x}}$$

$$F(x) = \frac{-2(3+x)}{9x} \sqrt{\frac{3+x}{2x}}$$

7. $f(x) = (x+1)^{2009} - (x+1)^{2008}$

$$F(x) = \frac{1}{2010}(x+1)^{2010} - \frac{1}{2009}(x+1)^{2009}$$

Ex 4 :

1. $f(x) = \lg x + \lg^3 x$

f est continue sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où f

admet des primitives sur I

$$f(x) = (1 + \lg^2 x) \lg x$$

(de la forme $U' \cdot U$)

d'où

$$F(x) = \frac{1}{2} \lg^2 x + k$$

$$F(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + k = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 + \lg^2 x)$$

2. $f(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$

f est continue sur $I = \mathbb{R}$

f admet donc des primitives sur I

$$f(x) = \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$f(x) = \cos x \cdot \sin^2(x)$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + k$$

$$F(\frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow \frac{1}{3} + k = -1$$

$$\Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}(-2 + \sin^3 x)$$

3. f est continue sur $I = \mathbb{R}$ d'où f admet des primitives sur I

$$f(x) = \sin x(1 - \sin^2 x)$$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$F(x) = \frac{-1}{3} \cos^3 x + k$$

$$f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{-1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + k = 2$$

$$\Rightarrow k = 2 + \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$F(x) = \frac{-1}{3} \cos^3 x + 2 + \frac{\sqrt{2}}{12}$$

4. f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} (1 + \tan x)$$

(de la forme $U' \cdot U$)

$$F(x) = \frac{1}{2} (1 + \tan x)^2 + k$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (1 + \tan x)^2 - 2$$

EX 5 :

1. $f(x) = \cos(x) \cdot \cos(3x)$

$$g(x) = \sin x \cdot \sin(3x)$$

a)

$$*(f + g)(x) = \cos x \cdot \cos 3x + \sin x \cdot \sin 3x$$

$$= \cos(3x - x)$$

$$= \cos 2x$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ est une primitive}$$

de $(f + g)$ sur $\mathbb{R}$

$$*(f - g)(x) = \cos 4x$$

$$\psi(x) = \frac{1}{4} \sin 4x$$

est une primitive de $(f - g)$ sur $\mathbb{R}$
b).

$$(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$$

$$= (f + g)(x) + (f - g)(x)$$

$$= 2f(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (\varphi + \psi)(x) \text{ est une}$$

primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} \sin(4x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(\varphi - \psi)'(x) = (f'(x) + g(x)) - (f(x) - g(x)) \\ = 2g(x)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} (\varphi - \psi)(x)$$

G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{8} \sin(4x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

2.

$$h(x) = \sin 4x + \cos x \cdot \sin 4x$$

$$h(x) = \sin 4x + 2 \cos x \cdot \sin 2x \cos 2x$$

$$= \sin 4x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x (\cos 2x)$$

$$= \sin 4x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$= \sin 4x + 8 \sin x \cdot \cos^4 x - 4 \sin x \cos^2 x$$

$$H(x) = \frac{-1}{4} \cos 4x - \frac{8}{5} \cos^5 x + \frac{4}{3} \cos^3 x + k$$

$$H(\pi) = 0 \Rightarrow \frac{8}{5} - \frac{4}{3} + k = 0$$

$$k = \frac{-4}{15}$$

$$H(x) = \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{8}{5} \cos^5 x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{4}{15}$$

EX 6 :

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(produit de 2 fonction dérivables)

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$$

$$f''(x) = 2 \cos x - f'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos x - f''(x)$$

$$2. F(x) = +2 \sin x - f'(x) + k$$

$$F(x) = 2 \sin x - \sin x - x \cos x + k$$

$$F(x) = \sin x - x \cos x + k$$

$$F(\pi) = 0 \Rightarrow k = -\pi$$

d'où :

$$F(x) = \sin x - x \cos x - \pi$$

EX 7 :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^4}$$

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}$$

$$1. a) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)^4 \cdot f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$b) (x+1)^4 \cdot f(x) =$$

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)^2 f(x) = d$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)^4 f(x) = 1 \text{ d'où } d = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1)^3} \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x) = 0$$

$$\text{d'où } a = 0$$

$$f(x) = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$2. a) \frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1-c}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$b) \frac{1-c}{(x+1)^3} = \frac{bx+b}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$3. F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3} + k$$

$$F(0) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

d'où

$$F(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}$$

EX 8 :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$1. f(x) = \frac{2(x-2)+5}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}$$

$$2. F(x) = \frac{-2}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2}$$

$$F(x) = \frac{-4x+3}{2(x-2)^2}$$

EX 9 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; x \in]-1,1[$$

F est dérivable sur $]-1,1[$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = F(\sin x)$$

1. la fonction $: x \rightarrow \sin x$
est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
 $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$
 F est dérivable sur $]-1, 1[$ d'où g est
dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x \cdot F'(\sin x) \\ &= \cos x \cdot f(\sin x) \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1 \text{ car } \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1 \text{ car } \cos x > 0 \\ &\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

$$g'(x) = 1 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{aligned} 2. \quad g'(x) &= 1 \\ \text{d'où } g(x) &= x + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ g(0) &= F(0) = 0 \\ \Rightarrow 0 + k &= 0 \\ \Rightarrow k &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } g(x) = x \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$3. \quad F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = F\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

EX 10 :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} : x \in [0, 1]$$

F dérivable sur $[0, 1]$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

$$g = F(\cos x) : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$1. \quad g \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

comme était composée de deux fonction
dérivable. (voir ex 9)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-\sin x) \cdot F'(\cos x) \\ &= (-\sin x) \cdot f'(\cos x) \\ &= -\sin x \sqrt{1 - \cos^2 x} \\ &= -\sin x |\sin x| \\ &= -\sin^2 x \quad \text{car } \sin x \geq 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad g'(x) = -\sin^2 x = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + k$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(0) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + k = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$3. \quad F(1) = F(\cos 0) = g(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = F\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

EX 11 :

$$1. \quad f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = a ; a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + b \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad f''(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\cos x + a ; a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\sin x + ax + b$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

EX 12 :

1. $f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$

a) f est continue sur $\mathbb{R}$

b)
$$\begin{cases} f(x) = x & \text{sin } x \in [0, +\infty[\\ f(x) = -x & \text{sin } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^2 + a & \text{pour } x \geq 0 \\ F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

 F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ continue en 0
 $\Rightarrow a = b$

$$d'où \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^2 + a & \text{pour } x \geq 0 \\ F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + a & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

$F(4) = 0 \Rightarrow 8 + a = 0 \Rightarrow a = -8$

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8 & \text{pour } x \geq 0 \\ F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 8 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

2. $g(x) = |x| + |x-1|$

a) g est continue sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $	-x	x	x	
$ x-1 $	-x+1	-x+1	x-1	
$g(x)$	-2x+1	1	2x-1	

$$\begin{cases} g(x) = -2x+1 & \text{pour } x \leq 0 \\ g(x) = 1 & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ g(x) = 2x-1 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

d'où

$$G(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & \text{pour } x \leq 0 \\ x + b & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + c & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

 G est continue en 0

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) \Rightarrow a = b$$

 G continue en 1 $\Rightarrow$

$1 + b = c \Rightarrow c = a + 1$

d'où

$$G(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & \text{pour } x \leq 0 \\ x + a & \text{pour } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + a + 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

 $(a \in \mathbb{R})$ **EX 13 :**

$f(x) = \sin^3 x + \sin^5 x$

$= \sin x (1 - \cos^2 x) + \sin x (1 - \cos^2 x)^2$

$= \sin x - \sin x \cos^2 x + \sin x (1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x)$

$f(x) = 2\sin x - 3\sin x \cos^2 x$

$+ \sin x \cos^4 x$

$F(x) = -2\cos x + \cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$

(on pourra aussi linéariser $f(x)$)**EX 14 :**

$a(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} ; t \in [0, 10]$

1.
$$\begin{cases} v'(t) = a(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$v(t) = t + \frac{1}{t+1} + k$$

$v(0) = 0 \Rightarrow 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

$$v(t) = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

2. $v(10) = \frac{100}{11} \text{ m/s}$

EX 15 :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad x \in [-2, 2]$$

1.a) la fonction : $x \rightarrow 4 - x^2$ est continue et positive sur $[-2, 2]$ d'où f est continue sur $[-2, 2]$

par suit f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$

b)

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in D_f = [-2, 2] : (-x) \in D_f$$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow$$

$$F(x) = -F(-x) + k$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$d'où F(-x) = -F(x)$$

F est impaire.

$$2. \quad G(x) = F(2\cos x) : x \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow -\pi \leq -x \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \pi - x \leq \pi$$

$$\Rightarrow (\pi - x) \in D_G$$

$$G(\pi - x) = F(2\cos(\pi - x))$$

$$= F(-2\cos x)$$

$$= -F(2\cos x)$$

$$= -G(x)$$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de

symétrie pour la courbe de f

$$\begin{aligned} b) \quad G'(x) &= -2\sin x \cdot F'(2\cos x) \\ &= -2\sin x \cdot f(2\cos x) \\ &= -2\sin x \cdot \sqrt{4(1 - \cos^2 x)} \\ &= -2\sin x \cdot \sqrt{4\sin^2 x} \\ &= -4\sin x \cdot |\sin x| \end{aligned}$$

$$G'(x) = -4\sin^2 x \quad (\text{car } \sin x \geq 0)$$

$$G'(x) = -2(1 - \cos 2x)$$

$$d'où G(x) = -2(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + k$$

$$G(\frac{\pi}{2}) = F(0) = 0$$

$$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2} - 0) + k = 0$$

$$\Rightarrow k = \pi$$

d'où

$$G(x) = -2x + \sin 2x + \pi$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

$$c) \quad F(1) = F(2\cos(\frac{\pi}{3}))$$

$$= G(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F(2) = F(2\cos(0))$$

$$= G(0) = \pi$$

$$F(\sqrt{2}) = F(2\cos\frac{\pi}{4})$$

$$= G(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

EX 16 :

$$u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$1. \quad u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$u'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$u'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

d'où

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{u(x)}{u'(x)}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{u(x) \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

d'où

$$F(x) = \frac{-1}{u(x)}$$

$$F(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$g(x) = \frac{u^2(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g(x) = u^2(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g(x) = u^2(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$g(x) = u'(x)u(x)$$

d'où

$$G(x) = \frac{1}{2}u^2(x)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1+x^2})^2$$

EX 17 :

$$f(x) = x \cdot \cos x$$

$$g(x) = x \cdot \sin x$$

$$1. f'(x) + g(x) = \cos x - x \sin x + x \sin x \\ = \cos x$$

$$d'où \quad g(x) = \cos x - f'(x)$$

$$G(x) = \sin x - (f(x))$$

$$G(x) = \sin x - x \cos x$$

$$2. \quad g'(x) - f(x) = \sin x + x \cos x - f(x) \\ = \sin x$$

$$d'où \quad f(x) = g'(x) - \sin x$$

$$F(x) = g(x) - \cos x$$

$$F(x) = x \sin x - \cos x$$

EX 18 :

$$n \geq 2$$

$$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$1. F_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$$

d'où

$$F_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

2. pour $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

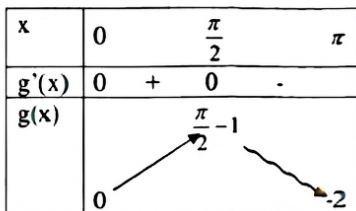
$$d'où \begin{cases} p_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \frac{(n+1)}{2} \end{cases}$$

EX 19 : $x \in [0, \pi]$

$$1. g(x) = x \sin x + \cos x - 1$$

$$a) g'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x$$

$$g'(x) = x \cos x$$



b) g est continue sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$

$$g(\frac{2\pi}{3}) \cdot g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$$

d'où l'équation $g(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$

x	0	α	π
g(x)	0	+	-

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \sin x \in]0, \pi] \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 = f(0)$$

f est continue en droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

f est dérivable à droite en 0 et $f'_+(0) = \frac{1}{2}$

$$b) f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0	α	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$\frac{2}{\pi}$

$$c) f(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}$$

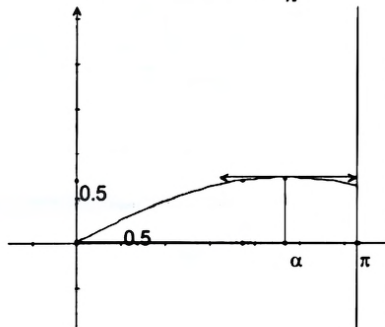
$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \alpha \cdot \sin \alpha$$

d'où

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \sin \alpha}{\alpha} = \sin \alpha$$

$$3. \alpha \approx 2,34 ; f(\alpha) \approx 0,72 ; \frac{2}{\pi} \approx 0,61$$



$$4. k(x) = f(x) \text{ pour } x \in [\alpha, \pi]$$

k est continue et strictement décroissant sur $[\alpha, \pi] \Rightarrow k$ est une bijection de $[\alpha, \pi]$

$$\text{sur } \left[\frac{2}{\pi}, f(\alpha) \right] = I$$

$$5. h(x) = g(x) - 2 \cos x \quad x \in [0, \pi]$$

h est continue sur $[0, \pi]$ d'où h admet des primitives sur $[0, \pi]$

$$h(x) = x \cdot \sin x - \cos x - 1$$

$$H(x) = -x \cdot \cos x - x + k$$

$$H(0) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{d'où } H(x) = 1 - x - x \cdot \cos x$$

EX 20 :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{cases} G'(x) = \varphi(x) \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

$$1. G'(-x) = \varphi(-x) = \varphi(x) = G'(x)$$

$$G'(x) = G'(-x)$$

$$\Rightarrow G(x) = -G(-x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$G(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\text{d'où } G(-x) = -G(x)$$

G est impaire

$$2.a) x \in \mathbb{R}^*$$

$$\psi(x) = G(x) + G\left(\frac{1}{x}\right)$$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= G'(x) - \frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{x^2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\psi'(x) = 0$$

D'où ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

$$\psi(1) = G(1) + G(1) = 2G(1)$$

d'où

$$\psi(x) = 2G(1) : \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 2G(1)$$

$$b) \quad u(t) = G(\lg t) ; \quad \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$u'(t) = (1 + t g^2 t). G'(t g t)$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 t) \varphi(\operatorname{tg} t)$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 t) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

$$u'(t) = 1$$

$$u(t) = t + k : (k \in \mathbb{R})$$

$$u(0) = G(\text{tg } 0) = G(0) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0$$

$$u(t) = t \quad ; \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$G(1) = G(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$G(x) = \psi(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G\left(\frac{1}{x}\right) = G(0) = 0$$

$$d'où \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$$

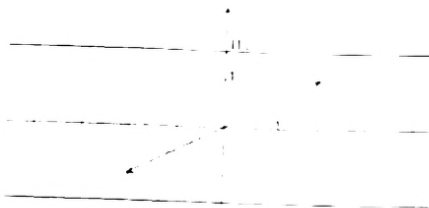
$$4. \quad G'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
$G'(x)$	+	
$G(x)$	0 $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$	

G est impaire.

$$G'(0) = \frac{1}{2}$$

O : centre de symétrie.



EX 21 :

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos x} \quad ; \quad x \in [0, \pi]$$

1.a) f Est dérivable sur $[0, \pi[$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \leq 0$$

f est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur

$$g([0, \pi]) = [g(\pi), g(0)] = [0, \sqrt{2}]$$

b) f est dérivable sur $]0, \pi[$

$$\text{et } f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \neq 0$$

d'où f^{-1} est dérivable sur

$$f(]0, \pi[) =]0, \sqrt{2}[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{on pose : } y = f^{-1}(x)$$

$$f(y) = x$$

$$= \frac{-2\sqrt{1+\cos y}}{\sin y}$$

$$f(y) = \sqrt{1+\cos y} = x$$

$$\Rightarrow 1+\cos y = x^2$$

$$\Rightarrow \cos y = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 y = (x^2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow -\cos^2 y = -1 - x^4 + 2x^2$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 y = 2x^2 - x^4$$

$$\Rightarrow \sin^2 y = 2x^2 - x^4$$

$$\Rightarrow \sin y = \sqrt{2x^2 - x^4}$$

d'où

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\forall x \in]0, \sqrt{2}[$$

$$2. \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$$\begin{cases} G'(x) = g(x) \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

$$a) \quad \varphi(x) = G(x) + G(-x)$$

$$\varphi'(x) = G'(x) - G'(-x)$$

$$= g(x) - g(-x)$$

$$= 0$$

$$\varphi \text{ est constante sur }]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$$\Rightarrow G(x) + G(-x) = 0$$

$$\Rightarrow G(-x) = -G(x)$$

G est impaire.

b) on a :

$$g(x) = -(f^{-1})'(x)$$

$$\Rightarrow G(x) = -f^{-1}(x) + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$G(0) = -f^{-1}(0) + k$$

$$\Rightarrow 0 = -\pi + k$$

$$\Rightarrow k = \pi$$

d'où

$$G(x) = \pi - f^{-1}(x)$$

$$G(1) = \pi - f^{-1}(1)$$

$$G(1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

EX 22 :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{-2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$1. \quad f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0, 1[$$

f est continue sur $[0, 1]$ et strictement décroissante

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [0, 1]$$

$$2.a) \quad \text{soit } g(x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x)$$

$$= \frac{+2 \sin x}{\pi \sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

$$= \frac{+2 \sin x}{\pi |\sin x|}$$

$$= \frac{2}{\pi} \quad \text{car } \sin x > 0$$

$$g \text{ est continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$g'(x) = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2}{\pi}x + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + k \Rightarrow k = 0$$

$$d'où \quad g(x) = \frac{2}{\pi}x$$

$$\Rightarrow f(\cos x) = \frac{2}{\pi}x$$

$$b) \quad f(\cos x) = \frac{2}{\pi}x$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{2}{\pi}x\right) = \cos x$$

$$\text{soit } t = \frac{2}{\pi}x$$

$$x = \frac{\pi}{2}t$$

$$d'où \quad f^{-1}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

conclusion :

$$f^{-1}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$3. \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$$

a) comme était composée et somme de fonctions dérivables

$$h \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$h(x) = f(\cos x) + f(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$= \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$h(x) = 1$$

$$h'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + \cos x \cdot f'(\sin x)$$

$$h'(x) = \frac{2 \sin x}{\pi \sqrt{1 - \cos^2 x}} - \frac{2 \sin x}{\pi \sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = 0$$

$$b) \quad h \text{ continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$h'(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$d'où h \text{ est constante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$h(0) = f(1) + f(0) = 1$$

d'où

$$h(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$4. \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n$$

$$x \in [0, 1]$$

$$a) \quad \varphi_n'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - n x^{n-1}$$

$$\varphi_n'(x) \leq 0 \quad ; \quad \forall x \in [0, 1]$$

φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$ elle réalise donc une bijection

de $[0, 1]$ sur

$$\varphi_n([0, 1]) = [-1, 1] \text{ et comme } 0 \in [-1, 1]$$

alors il existe un unique réel

$$a_n \in [0, 1] \text{ tq : } \varphi_n(a_n) = 0$$

$$\varphi_n(0) \cdot \varphi_n(1) < 0 \Rightarrow a_n \in]0, 1[$$

b) $n - p > 0$ alors

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^{n-p} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < (x^{n-p}) \cdot x^p < x^p$$

$$\Rightarrow x^n < x^p$$

$$\Rightarrow -x^n > -x^p$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n > \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^p$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x) > \varphi_p(x)$$

c) a_n et $a_{n+1} \in]0,1[$

d'après b) $n+1 > n$

$$d'où \quad \varphi_{n+1}(a_{n+1}) > \varphi_n(a_{n+1})$$

$$\Rightarrow 0 > \varphi_n(a_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(a_n) > \varphi_n(a_{n+1})$$

$$\Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

car φ_n est strictement décroissante sur $[0,1]$

d'où (a_n) est strictement décroissante

et comme on a $a_n > 0$

(a_n) est décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente.

QCM :

- 1) a) $|z - z'| = MM'$
 b) O, M et M' alignés
 2) $(AB) \perp (AC)$
 3) les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$ sont
 $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$

Vrai-Faux :

1) (faux)

Par exemple les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$
 sont $1 - i$ et $1 + i$ qui ne sont pas opposées.

2) (faux)

$$\begin{aligned} z^4 &= a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z^2 - a^2)(z^2 + a^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - a)^2 \cdot (z + a)^2 \cdot (z - ia)(z + ia) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \text{ ou } z = ia \text{ ou } z = -ia \end{aligned}$$

3) (faux) en effet :

$$\begin{aligned} Z &= z_1 + iz_2 \\ \Rightarrow \bar{Z} &= \bar{z}_1 - iz_2 \end{aligned}$$

4) (faux)

$$\begin{aligned} \text{Contre exemple : } z &= 2i \\ z' &= 3i \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') = 0$$

$$\operatorname{Arg}(z) \equiv \operatorname{Arg}(z')(2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \quad \text{alors que } z \neq z'$$

5) (faux)

$$\text{Contre exemple : } z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^3 = -1$$

$$z^3 \in \mathbb{R} \text{ mais } z \notin \mathbb{R}$$

6) (faux)

$$\text{Contre exemple : } z = 1 \text{ et } z' = i$$

$$|z| = |z'| \text{ mais } z \neq z'$$

$$\text{et } z \neq -z'$$

EX1 :

a)

$$\frac{z-i}{z+i} = 2i \Leftrightarrow z-i = 2i(z+i) \Leftrightarrow z-i = 2iz-2 \Leftrightarrow (1-2i)z = -2+i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+i}{1-2i} \Leftrightarrow z = \frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-4-3i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}i$$

b)

$$\frac{z+i}{2z} = 1-i \Leftrightarrow z+i = 2(1-i)z \Leftrightarrow (1-2i)z = i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i}{1-2i} = \frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+i}{5} \Leftrightarrow z = \frac{-2}{5} + \frac{1}{5}i$$

c)

$$\frac{2z+i}{iz} = \frac{2iz}{1-z} \Leftrightarrow (2z+i)(1-z) = iz(2iz) \Leftrightarrow -2z^2 + (2-i)z + i = -2z^2$$

$$\Leftrightarrow (2-i)z = -i \Leftrightarrow z = \frac{-i}{2-i} = \frac{-i(2+i)}{5}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

EX 2 :

a)

$$\bullet z_A = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$OA = 3 \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\bullet z_B = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$\bullet z_S = z_A + z_B \Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$\Rightarrow OASB$ est un #

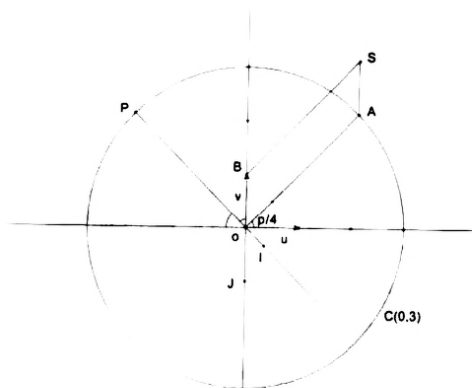
$$\bullet z_P = z_A \cdot z_B = 3(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$OP = 3 \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

$$\bullet z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{3}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i \sin(\frac{-\pi}{4}))$$

$$OI = \frac{1}{3} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{-\pi}{4} (2\pi)$$

$$\bullet z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{1}{i} = -i$$



$$b) z_I = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$OA=2$$

$$(\widehat{u, OA}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

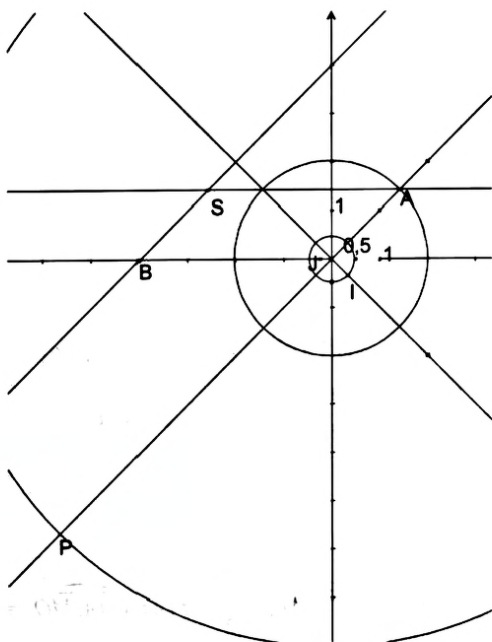
$$\bullet z_B = -4$$

$$\bullet z_S = z_A + z_B \quad \text{OASB parallélogramme}$$

$$\bullet z_P = z_A \cdot z_B = 8.(\cos 5\frac{\pi}{4} + i \sin 5\frac{\pi}{4})$$

$$\bullet z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$\bullet z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{-1}{4}$$

**EX 3 :**méthode analytique :on pose $z=x+iy$

$$Z = \frac{x+iy-i}{x+iy+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{[x+i(y-1)] \cdot [x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x^2+y^2-1)-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

1) Z est un réel $\Leftrightarrow x=0$

$$z \neq -i \Rightarrow M \neq A(0, -1)$$

soit Δ : la droite d'équation : $x=0$; $A \in \Delta$ d'où (ξ_1) est la droite Δ privée de A 2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ (ζ) : le cercle de centre O de rayon 1 $A \in \zeta$ D'où (ξ_2) : le cercle (ζ) privé de A Méthode géométrique :Soit $A(-i)$ et $B(i)$

1) Z est un réel $\Leftrightarrow \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{MA}$ et $\overline{MB}$ colinéaires $\Leftrightarrow M \in (AB)$
 or $M \neq A$ donc $(\xi_1) = (AB) \setminus \{A\}$

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{MB} \Leftrightarrow M \in (\zeta)$: cercle de diamètre $[AB]$ or $M \neq A$
 $\xi_2 = (\zeta) \setminus \{A\}$

EX 4 : (voir ex 3)

EX 5 :

1)

$$E = \left\{ M(z) / \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \right\}$$

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$$

Soit A(1) et B(i)

$$M \in (E) \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \Delta = \text{med}[AB] \quad \text{Donc } E = \text{med}[AB]$$

$$2) M \in F \Leftrightarrow \left| \frac{2(\bar{z}-1)}{z-i} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{2(\bar{z}-1)}{z-i} = 2 \Leftrightarrow \frac{(\bar{z}-1)}{z-i} = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow M \in E \quad \text{Donc } F=E$$

EX 6 :

$$z \neq 0 \rightarrow M \neq O \quad z \neq 1 \rightarrow M \neq A(1)$$

$$\text{Arg } z - \text{Arg } (z-1) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow \text{Arg} \left(\frac{z}{z-1} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow (\widehat{AM, OM}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow (\widehat{MA, MO}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow M \in (\zeta) / \{A, O\} \quad \text{avec } (\zeta) : \text{demi cercle de diamètre } [OA] \text{ contenu dans le demi plan } y > 0$$

EX 7 :

$$a = 2e^{3i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos 3\frac{\pi}{2} + i \sin 3\frac{\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$$

$$b = -e^{3i\frac{\pi}{4}} = -(\cos 3\frac{\pi}{4} + i \sin 3\frac{\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c = 3e^{-2i\frac{\pi}{3}} = 3(\cos 2\frac{\pi}{3} + i \sin 2\frac{\pi}{3}) = 3(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-3}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

EX 8 :

$$a) * (3e^{-i\frac{\pi}{5}})^3 = 27.e^{-3i\frac{\pi}{5}} \quad * \frac{2e^{i\frac{\pi}{5}}}{3e^{i\pi}} = \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{5}-\pi)} = \frac{2}{3}e^{-4i\frac{\pi}{5}}$$

$$* (e^{3i\frac{\pi}{8}})^4 = e^{3i\frac{\pi}{2}}$$

$$* (e^{-i\pi})^3 = e^{-3i\pi} = e^{i\pi}$$

$$\text{D'où : } (e^{3i\frac{\pi}{8}})^4 . (e^{-i\pi})^3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} . e^{i\pi} = e^{5i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) * $z = -3+3i$

$$|z| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \rightarrow z = 3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) \right) = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

* $Z = 2\sqrt{3} - 2i$

$$|Z| = 4 \rightarrow Z = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

* $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ D'où $(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot e^{-5i\frac{\pi}{4}}$

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2} \cdot e^{-5i\frac{\pi}{4}}$$

* $\frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{[(1+\sqrt{2})-i]^2}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^2-1-2i(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2})-2i(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

EX 9 :

1)

$$a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{3} + 2i \rightarrow |a^2| = 4$$

$$a^2 = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = -2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = 2e^{13i\frac{\pi}{12}}$

$\operatorname{Re}(a) > 0$ or $\cos \frac{13\pi}{12} < 0$ D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

2)

$$a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

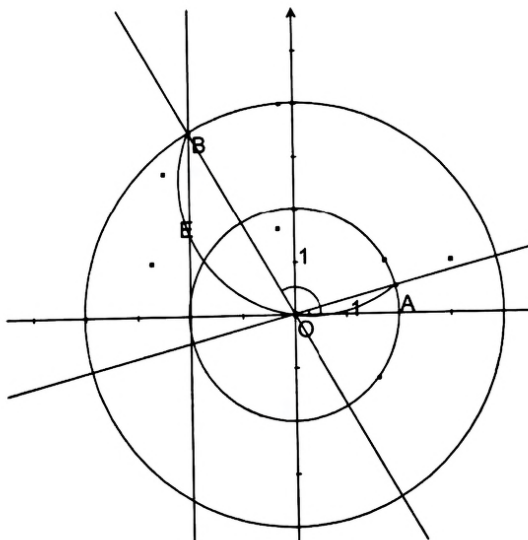
$$\text{et } a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} 2 \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2 \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3)

a)

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow OA = 2 \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{OA}) \equiv \frac{\pi}{12} (2\pi)$$

$$z_B = 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow OB = 4 \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$$



b)

$$\text{Arg}\left(\frac{iz+a^2}{z-a}\right) \equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi) \Leftrightarrow \text{Arg}\left(i\frac{(z-ia^2)}{z-a}\right) \equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi) \Leftrightarrow \text{Arg}i + \text{Arg}\left(\frac{z-ia^2}{z-a}\right) \equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = -\frac{11\pi}{12} (2\pi) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}, \overline{BM}) = -\frac{11\pi}{12} (2\pi) \Leftrightarrow (\overline{MA}, \overline{MB}) = -\frac{17\pi}{12} (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MA}, \overline{MB}) \equiv \frac{7\pi}{12} (2\pi) \quad M \in \text{Arc du cercle (E)}$$

$$\bullet (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OB})(2\pi) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA})(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}(2\pi) \equiv \frac{7\pi}{12}(2\pi) \Rightarrow O \in E$$

$$\bullet iz_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bullet \frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{2}e^{5i\frac{\pi}{6}} \quad \bullet z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

EX 10 :

$$\bullet z_3^4 = (\sqrt{2})^4 \cdot e^{4(-\frac{\pi}{4})} = 4e^{-i\pi} = 4e^{i\pi} \bullet \frac{z_2^3}{z_1^6} = \frac{8e^{-2i\pi}}{e^{i\pi}} = 8e^{i\pi}$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{11i\frac{\pi}{12}}$$

EX 11 :

$$a = 4\sqrt{2}(1+i) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines cubiques de a sont : $z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

$$\Rightarrow z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}} ; \quad z_1 = 2e^{3i\frac{\pi}{4}} ; \quad z_2 = 2e^{17i\frac{\pi}{12}}$$

EX 12 :

$$a = 8\sqrt{2}(-1-i) = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}) = 16e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrième de a sont : $z_k = \sqrt[4]{16}e^{i(\frac{-3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow z_0 = 2e^{-3i\frac{\pi}{16}} ; \quad z_1 = 2e^{5i\frac{\pi}{16}} ; \quad z_2 = 2e^{13i\frac{\pi}{16}} ; \quad z_3 = 2e^{21i\frac{\pi}{16}}$$

EX 13 :

$$a = 32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Les racines cinquièmes de a sont :

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

EX 14 :

$$a = 32(-\sqrt{3} + i) = 32(2e^{5i\frac{\pi}{6}}) = 64e^{5i\frac{\pi}{6}}$$

Les solutions sont : $z_k = 2e^{i(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6})}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

EX 15 :

a)

$$z^2 + 18z + 1681 = 0$$

$$\Delta' = -1600$$

$$\delta' = 40i$$

$$z' = -9 - 40i \quad \text{et} \quad z'' = -9 + 40i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-9 - 40i ; -9 + 40i\}$$

b)

$$z^2 - (5-i)z + 8-i = 0$$

$$\Delta = -8-6i$$

$$\text{soit } \delta = x+iy \text{ / } \delta^2 = -8-6i \Rightarrow \begin{cases} (1) x^2 - y^2 = -8 & (\text{R  el}(\Delta)) \\ (2) x^2 + y^2 = 10 & (|\Delta|) \\ (3) 2xy = -6 & (\text{Im}(\Delta)) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{pour } x=1 \xrightarrow{(3)} 2y = -6 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \delta = 1-3i$$

$$z' = \frac{(5-i)-(1-3i)}{2} = 2+i \quad \text{et} \quad z'' = \frac{(5-i)+(1-3i)}{2} = 3-2i$$

$$S_C = \{2+i ; 3-2i\}$$

c)

$$z^2 + 4(i-1)z + 2(4-i) = 0 \quad \Delta' = [2(i-1)]^2 - 2(4-i) = -8-6i \Rightarrow \delta' = 1-3i$$

Les solutions sont :

$$z' = -2(i-1) - (1-3i) = 1+i$$

$$z'' = -2(i-1) + (1-3i) = 3-5i \Rightarrow S_C = \{1+i ; 3-5i\}$$

d)

$$z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0 \quad \Delta = 2i = (1+i)^2 \quad \delta = 1+i$$

Les solutions sont :

$$z' = \frac{-(1-3i)-(1+i)}{2} = -1+i$$

$$z'' = \frac{-(1-3i)+(1+i)}{2} = 2i \Rightarrow S_C = \{-1+i ; 2i\}$$

EX 16 :

$$a) z^4 + 6z^2 + 25 = 0 \quad \text{on pose : } t = z^2$$

$$\text{l'équation devient : } t^2 + 6t + 25 = 0$$

$$\Delta' = -16 \rightarrow \delta' = 4i \quad t' = -3+4i \quad \text{et} \quad t'' = -3-4i$$

$$\bullet t = -3+4i \Leftrightarrow z^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} (1) x^2 - y^2 = -3 \\ (2) x^2 + y^2 = 5 \\ (3) 2xy = 4 \end{cases} \quad (\text{en posant } z=x+iy)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Pour } x=1 \text{ l'éq (3) donne } y=2 \Rightarrow z_1 = 1+2i$$

$$\text{Pour } x=-1 \text{ l'éq (3) donne } y=-2 \Rightarrow z_1 = -1-2i$$

$$\bullet t = -3 - 4i \Leftrightarrow z^2 = -3 - 4i \Leftrightarrow z^2 = (1 - 2i)^2 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \text{ ou } z = -1 + 2i$$

$$S_C = \{1 + 2i; -1 - 2i; 1 - 2i; -1 + 2i\}$$

b)

$$z^4 + 4z^2 - 77 = 0 \quad \text{On pose : } t = z^2 \quad \text{On aura : } t^2 + 4t - 77 = 0$$

$$\Delta' = 81 \rightarrow \delta' = 9$$

$$t' = -11 \text{ et } t'' = 7$$

$$\bullet t = 7 \Leftrightarrow z^2 = 7 \Leftrightarrow z = -\sqrt{7} \text{ ou } z = \sqrt{7}$$

$$\bullet t = -11 \Leftrightarrow z^2 = -11 \Leftrightarrow z = i\sqrt{11} \text{ ou } z = -i\sqrt{11}$$

$$S_C = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}; -i\sqrt{11}; i\sqrt{11}\}$$

c)

$$(E): z^5 = \bar{z}$$

• 0 est une solution de (E).

• Déterminons les solutions non nulles de (E).

$$\text{On pose } z = re^{i\theta}; r > 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = \overline{re^{i\theta}}$$

$$\Leftrightarrow r^5 e^{5i\theta} = r e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^4 e^{6i\theta} = 1 e^{i \cdot 0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 6\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$z_0 = 1; z_1 = 1.e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_2 = 1.e^{i2\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_3 = 1.e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = 1.e^{4i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_5 = 1.e^{5i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_C = \left\{ 0, -1, 1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

EX 17 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) $p(4) = 0$ d'où $z_0 = 4$ est une solution de (E).2) • Factorisons $P(z)$.

$$p(z) = (z-4)(z^2 + bz + c)$$

$$p(z) = z^3 + (b-4)z^2 + (c-4b)z - 4c$$

Identifications

$$\text{On aura : } \begin{cases} b-4 = -8 \\ c-4b = 24 \\ -4c = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\text{D'où } P(z) = (z-4)(z^2 - 4z + 8)$$

$$\bullet P(z) = 0 \Leftrightarrow z-4 = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 4 \text{ ou } \Delta' = -4 \rightarrow \delta' = 2i$$

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 2 - 2i$$

$$S_C = \{4; 2 + 2i; 2 - 2i\}$$

$$z_1 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

EX 18 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) On pose $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - (3+4i)\alpha^2 - 4(1-3i)\alpha + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha + 12) + i(-4\alpha^2 + 12\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha + 12 = 0 \\ -4\alpha^2 + 12\alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Leftrightarrow \alpha(-4\alpha + 12) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 3$$

Vérifions dans (1) pour $\alpha = 3$.

$$(3)^3 - 3(3)^2 - 4 \cdot 3 + 12 = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$$

D'où 3 est une solution réelle de E.

2) 3 est une solution de E $\Rightarrow$

$$P(z) = (z-3)[z^2 + bz + c]$$

$$P(z) = z^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

Identifions

$$\text{On aura : } \begin{cases} b-3 = -(3+4i) \\ c-3b = -4(1-3i) \\ -3c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4i \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } P(z) = (z-3)[z^2 - 4iz - 4]$$

$$(E) \Leftrightarrow (z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z^2 - 4iz - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } (z-2i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z = 2i$$

$$S_C = \{3; 2i\}.$$

EX 19 :

$$(E): z^3 = 2 + 11i$$

$$1) (2+i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2(i)^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

D'où $z_0 = 2 + i$ est solution de (E)

2)

$$(E) \Leftrightarrow z^3 - (2 + 11i) = 0$$

$$\text{Soit } f(z) = z^3 - (2 + 11i)$$

$$\text{On a : } f(2+i) = 0 \quad \text{D'où } \begin{aligned} f(z) &= [z - (2+i)] \cdot [z^2 + bz + c] \\ f(z) &= z^3 + (b-2-i)z^2 + [c-b(2+i)]z - c(2+i) \end{aligned}$$

Identifications

$$\text{On aura : } \begin{cases} b-2-i=0 \\ c-b(2+i)=0 \\ -c(2+i)=-(2+11i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2+i \\ c=3+4i \end{cases}$$

$$\text{D'où : } f(z) = [z - (2+i)] \cdot [z^2 + (2+i)z + 3+4i]$$

$$(E) \Leftrightarrow z = 2+i \text{ ou } z^2 + (2+i)z + 3+4i = 0$$

$$\Delta = -3(3+4i) \Rightarrow \delta = i\sqrt{3}(2+i) \quad z' = \frac{(\sqrt{3}-2) - i(1+2\sqrt{3})}{2} \text{ et } z'' = \frac{-(2+\sqrt{3}) + i(2\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$S_c = \{z_0; z'; z''\}$$

EX 20 :

$$1) z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 13 + 18i$$

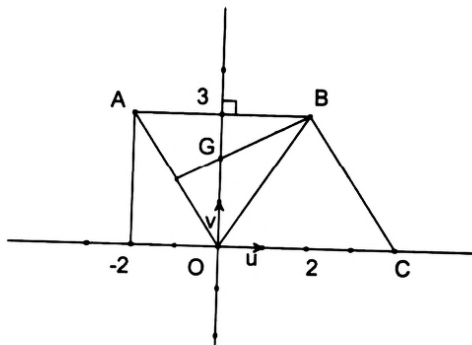
$$\text{On pose } z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy \text{ et } z\bar{z} = x^2 + y^2 \text{ et } z - \bar{z} = 2iy$$

$$\text{L'équation devient } x^2 + y^2 + 3(2iy) = 13 + 18i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 6y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$z_1 = -2 + 3i$$

$$\text{Les solutions sont : } z_2 = 2 + 3i$$

2)



3)

$$\overline{GO} + \overline{GA} + \overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{aff}(\overline{GO}) + \text{aff}(\overline{GA}) + \text{aff}(\overline{GB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -z_G + (z_A - z_G) + (z_B - z_G) = 0 \Leftrightarrow 3z_G = z_A + z_B \quad \Leftrightarrow z_G = \frac{z_A + z_B}{3} = 2i$$

$$4) \text{ OABC est un parallélogramme } \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{AB} \Leftrightarrow \text{aff}(\overline{OC}) = \text{aff}(\overline{AB}) \Leftrightarrow z_C = z_B - z_A \Leftrightarrow z_C = 4$$

EX 21 :

1) soit :

$$f(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$$

$$(E) \Leftrightarrow f(z) = 0$$

a) soit : $z = x; x \in \mathbb{R}$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 + 7x - 4) + i(-x^2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 & (1) \\ -x^2 + x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

 $x = 1$ vérifie l'équation (1), d'où 1 est une solution de (E).b) factorisons $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)(z^2 + bz + c) \\ &= z^3 + (b-1)z^2 + (c-b)z - c \end{aligned}$$

Identifions :

$$\begin{cases} b-1 = -(4+i) \\ c-b = 7+i \\ -c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -(3+i) \\ c = 4 \end{cases}$$

D'où

$$f(z) = (z-1)[z^2 - (3+i)z + 4]$$

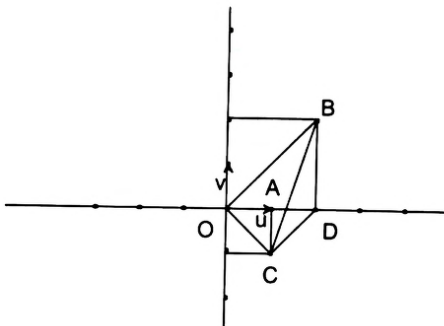
$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 - (3+i)z + 4 = 0$$

$$\Delta = -8 + 6i \Rightarrow \delta = 1 + 3i$$

$$z_1 = \frac{3+i+1+3i}{2} = 2+2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+i-1-3i}{2} = 1-i$$

$$S_C = \{1; 1-i; 2+2i\}$$

2) a /



b/

$$\frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2 \cdot 2i}{2} = 2i \Rightarrow \left| \frac{2+2i}{1-i} \right| = 2 \quad \text{et} \quad \text{Arg} \left(\frac{2+2i}{1-i} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\frac{\text{aff}(\overline{OB})}{\text{aff}(\overline{OC})} = \frac{z_B}{z_C} = \frac{2+2i}{1-i} = 2i \Rightarrow \frac{z_{\overline{OB}}}{z_{\overline{OC}}} \text{ est imaginaire d'où } \overline{OB} \perp \overline{OC} \quad \text{Par suite OBC est rectangle en O}$$

c)

$$\begin{aligned} (\overline{OA} + \overline{OB}) + (\overline{OA} + \overline{OC}) &\equiv \text{Arg} \frac{z_B}{z_A} + \text{Arg} \frac{z_C}{z_A} [2\pi] \\ &\equiv \text{Arg}(2+2i) + \text{Arg}(1-i)(2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (2\pi) && \Rightarrow [OA] : \text{Bissectrice de } [\overline{OB}, \overline{OC}] \\ &\equiv 0(2\pi) \end{aligned}$$

d)

$$\left. \begin{array}{l} (OB) \perp (OC) \\ (CD) \perp (OC) \end{array} \right\} \Rightarrow (OB) \parallel (CD)$$

$$\hat{BOC} = \frac{\pi}{2} = \hat{OCD}$$

$$OB = |z_B| = 2\sqrt{2} \neq CD = OC = |z| = \sqrt{2}$$

OCDB est un trapèze.

EX 22 :

$$1) z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1.e^{i0}$$

Les solutions sont :

$$z_k = \sqrt[4]{1} e^{i\left(\frac{2k\pi}{4}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$z_0 = 1 ; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i ; z_2 = e^{i\pi} = -1 ; z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$2) (E) : \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$$

$$\text{On pose } t = \frac{z-i}{z+i}$$

$$\text{L'équation devient : } t^3 + t^2 + t + 1 = 0$$

(-1) est une solution d'où :

$$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2 + bt + c) = t^3 + (b+1)t^2 + (c+b)t + c$$

$$\text{En identifiant on aura : } \begin{cases} b+1=1 \\ c+b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

D'où

$$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2 + 1)$$

$$t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t+1=0 \text{ ou } t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t^2 = -1 \Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = -i \text{ ou } t = i$$

$$\bullet t = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow tz + ti = z - i \Leftrightarrow (1-t)z = i(1+t) \Leftrightarrow z = i\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

$$\text{pour } t = -1 \rightarrow z = 0$$

$$\text{pour } t = i \rightarrow z = i\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = -1$$

$$\text{pour } t = -i \rightarrow z = i\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = 1$$

Les solutions de (E) sont : 0 ; -1 et 1. $S_C = \{-1; 0; 1\}$

EX 23 :

a)

$$(E) : 1 + z + z^2 + \dots + z^6 = 0$$

$$\text{On a : pour } z \neq 1 \quad 1 + z + z^2 + \dots + z^6 = \frac{1-z^7}{1-z}$$

$$1 \text{ n'est pas une solution de (E) d'où : } \begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 1-z^7 = 0 \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z^7 = 1 \text{ et } z \neq 1 \end{aligned}$$

Les solutions sont : $z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{7}\right)}$; $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ est une solution de (E)

$$\Rightarrow 1 + e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}} + e^{\frac{10i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(1 + e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}} + e^{\frac{10i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos(2\pi - \frac{6\pi}{7}) + \cos(2\pi - \frac{4\pi}{7}) + \cos(2\pi - \frac{2\pi}{7}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

EX 24 :

$$1) a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{n-k}$$

$$\text{D'où} \quad 1 - z^{n+1} = (1-z) \sum_{k=0}^n 1^k \cdot z^{n-k} = (1-z) [z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1]$$

2)

$$1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} = -e^{\frac{i\theta}{2}} \left[e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right] = -e^{\frac{i\theta}{2}} \left[2i \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad \text{D'après les Formules d'Euler.}$$

$$\text{D'où} \quad 1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

3) $n \geq 1$; $\theta \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$S = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta \quad \text{et} \quad S' = 1 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$$

a)

$$S + iS' = 1 + (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta + i \sin 2\theta) + \dots + \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$S + iS' = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta}$$

D'après 1)

$$1 - e^{i(n+1)\theta} = (1 - e^{i\theta})[1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}]$$

comme $e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \neq 0(2\pi)$

Alors

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}}$$

Par suite :

$$S + iS' = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$b) S \in \mathbb{R} \text{ et } S' \in \mathbb{R} \quad \text{d'où } S = \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right]$$

d'après 2)

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1 - e^{i(n+1)\theta} = -2i \sin \left[\frac{(n+1)\theta}{2} \right] e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}$$

D'où

$$\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta + i \sin \frac{n}{2} \theta \right]$$

$$S = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \left(n \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et} \quad S' = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \left(n \frac{\theta}{2} \right)$$

EX 25 :

$$z_A = 1-i \text{ et } z_B = 3+i \quad f: M(z) \rightarrow M'(z') \quad tq: z' = z^2 - 4z$$

1) a)

$$A' = f(A) \Leftrightarrow z_{A'} = z_A^2 - 4z_A \Rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) \Rightarrow \boxed{z_{A'} = -4 + 2i}$$

$$B' = f(B) \Leftrightarrow z_{B'} = z_B^2 - 4z_B \Leftrightarrow z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) \Rightarrow \boxed{z_{B'} = -4 + 2i} \quad (\text{Rque: } A' = B')$$

b) Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

$$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2^2) - 4(z_1 - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0 \text{ ou } z_1 + z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \text{ ou } \frac{z_1 + z_2}{2} = 2$$

Soit « L » le point d'affixe 2.

$$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2 \text{ ou } \frac{z_1 + z_2}{2} = z_L$$

$$\Leftrightarrow M_1 = M_2 \text{ ou } L = M_1 * M_2$$

$$\Leftrightarrow M_1 = M_2 \text{ ou } M_2 = S_L(M_1)$$

2) $z_I = -3$

a) OMIM' est un parallélogramme ssi

$$\overline{OM'} = \overline{MI} \Leftrightarrow z' = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$$

$$\text{b) } z^2 - 3z + 3 = 0$$

$$\Delta = 9 - 12 = -3 \rightarrow \delta = i\sqrt{3}$$

$$\text{Les solutions sont : } z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z'' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

3)

$$\text{a) } z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2 \Rightarrow |z' + 4| = |z - 2|^2 \text{ et } \text{Arg}(z' + 4) \equiv 2\text{Arg}(z - 2) (2\pi)$$

$$z_I = 2; z_K = -4$$

$$\text{b) } M \in C(J, 2) \Rightarrow JM = 2 \Rightarrow |z - 2| = 2 \Rightarrow |z' + 4| = 4 \Rightarrow KM' = 4 \Rightarrow M' \in C(K, 4)$$

$$\text{c) } z_E = -4 - 3i \Rightarrow z_E + 4 = -3i \Rightarrow (z_E + 4) = 3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$$

$$f(M) = E \Leftrightarrow z' = -4 - 3i \Leftrightarrow z' + 4 = -3i \Leftrightarrow \begin{cases} |z' + 4| = 3 \\ \text{Arg}(z' + 4) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 2|^2 = 3 \\ 2\text{Arg}(z - 2) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 2| = \sqrt{3} \\ \text{Arg}(z - 2) \equiv -\frac{\pi}{4} (\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z - 2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = 2 + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

L'image des points C et D d'affixe $2 + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $2 + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$ par f est le point E.

$$z_C = 2 + \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z_D = 2 + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

EX 26 :

$$z_A = 2i; z_B = -1; z_C = i \quad f : M(z) \rightarrow M'(z') \quad \text{tq } z' = \frac{z+1}{z-2i}, \quad z \neq 2i$$

1)a)

$$z_{C'} = \frac{z_C + 1}{z_C - 2i} = \frac{i+1}{i-2i} = \frac{1+i}{-i} = -1+i, \quad \boxed{z_{C'} = -1+i}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \text{aff}(\overline{CA}) &= z_A - z_C = i \\ \bullet \text{aff}(\overline{BC'}) &= z_{C'} - z_B = i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{CA} = \overline{BC'} \Rightarrow ACBC' \text{ est un parallélogramme}$$

$$\text{b) } f(C'') = C \Leftrightarrow \frac{z_{C''} + 1}{z_{C''} - 2i} = i \Leftrightarrow z_{C''} + 1 = iz_{C''} + 2 \Leftrightarrow z_{C''} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

$$\bullet \frac{\text{aff}(\overline{CC''})}{\text{aff}(\overline{CB})} = \frac{\frac{1+i}{2} - i}{-1-i} = \frac{i - \frac{1+i}{2}}{1+i} = \frac{-1+i}{2(1+i)} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$$

$$\frac{\text{aff}(\overline{CC''})}{\text{aff}(\overline{CB})} \text{ est imaginaire d'où } \overline{CB} \perp \overline{CC''} \text{ Par suite le triangle } BCC'' \text{ est rectangle en C.}$$

2)

$$\begin{aligned}
 |z'| &= \left| \frac{z+1}{z-2i} \right| = \frac{BM}{AM} & \text{Arg}(z') &\equiv \text{Arg} \left(\frac{z+1}{z-2i} \right) (2\pi) \\
 & & &\equiv \left(\overline{AM}, \overline{BM} \right) (2\pi) \\
 & & &\equiv \left(\overline{MA}, \overline{MB} \right) (2\pi)
 \end{aligned}$$

3)

a) z' est un réel strictement négatif si et seulement si : $\text{Arg } z' \equiv \pi(2\pi) \Leftrightarrow \left(\overline{MA}, \overline{MB} \right) \equiv \pi(2\pi)$

$\Leftrightarrow \overline{MA}$ et $\overline{MB}$ colinéaire est de sens contraires.

L'ensemble $E = [AB] \setminus \{A, B\}$.

b) z' est imaginaire non nul $\Leftrightarrow \text{Arg } z' \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \left(\overline{MA}, \overline{MB} \right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$

F est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

c) $M' \in C(0,1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

G est la médiatrice du segment $[AB]$.

EX 27 : $z = e^{i\theta} - i; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$

1) $z_M = z = e^{i\theta} - i$ et $z_{M'} = \bar{z} = e^{-i\theta} + i$

OMNM' est un parallélogramme ssi

$$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{OM'} \Leftrightarrow \text{aff}(\overline{ON}) = \text{aff}(\overline{OM}) + \text{aff}(\overline{OM'}) \Leftrightarrow z_N = z + \bar{z} \Leftrightarrow z_N = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \boxed{z_N = 2 \cos \theta}$$

Dans ce cas : $OM = OM' = |z|$ d'où OMNM' est losange.

2)

a)

$$z = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)} \cdot \left[e^{i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} \right] = e^{i\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{4}\right)} \cdot \left[2 \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ D'après}$$

formules d'Euler

d'où
$$z = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

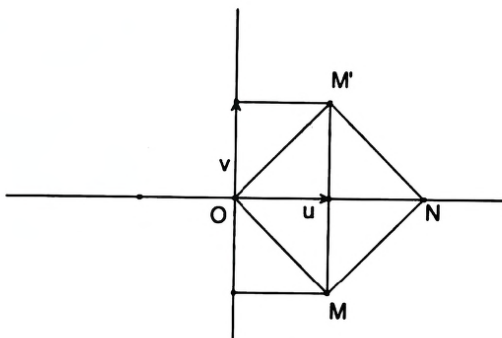
b)
$$\bar{z} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{z} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{\bar{z}}{z} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

c) OMNM' est un carré si seulement si $\frac{z}{z}$ est imaginaire pure

$$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

or $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\boxed{\theta = 0}$

d) $z_M = e^{i0} - i = 1 - i$; $z_N = 2 \cos 0 = 2$; $z_{M'} = e^{-i0} + i = 1 + i$



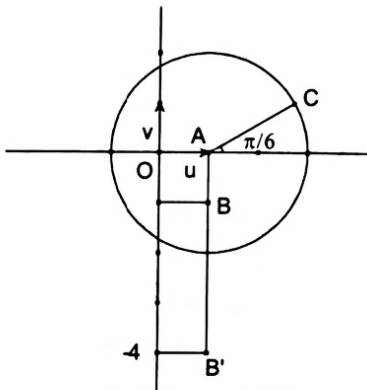
EX 28 :

$$z_A = 1 \quad z' = \frac{\bar{z} + 3}{z - 1}$$

1) $z_B = 1 - i$

a) $z_{B'} = \frac{\bar{z}_B + 3}{z_B - 1} = \frac{1 + i + 3}{1 + i - 1} = \frac{4 + i}{i} \Rightarrow \boxed{z_{B'} = 1 - 4i}$

b)



$$2) z_c = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$a) AC = |z_c - z_A| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 2$$

$$b) \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \text{Arg}(z_c - z_A)(2\pi) \equiv \text{Arg}(2e^{i\frac{\pi}{6}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$$

$$c) C \in \zeta(A, 2) \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv +\frac{\pi}{6}(2\pi)$$

$$d) z_{f(C)} = \frac{\overline{z_c} + 3}{z_c - 1} = \frac{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} + 3}{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1} = \frac{4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2 + e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = z_c$$

$$\text{D'où } f(C) = C$$

$$3)a) (\bar{z} - 1)(z' - 1) = (\bar{z} - 1) \left(\frac{\bar{z} + 3}{z - 1} - 1 \right) = (\bar{z} + 3) - (\bar{z} - 1) = 4$$

$$b) AM \cdot AM' = |z - 1| |z' - 1| = |\bar{z} - 1| |z' - 1| = |\bar{z} - 1| |z' - 1| = |(\bar{z} - 1)(z' - 1)| = |4| = 4$$

$$c) M \in \zeta(A, 2) \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot AM' = 4 \Leftrightarrow AM' = 2 \Leftrightarrow M' \in \zeta(A, 2)$$

D'où l'image de ζ par f est lui-même.

EX 29 : $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ $z_0 = 6+6i$ $A_0(z_0)$ $z_n = a^n \cdot z_0$ $A_n(z_n)$

1) $z_1 = a \cdot z_0 = 6(1+i) \left[\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right] = 3+3i\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{z_1 = 3+3i\sqrt{3}}$

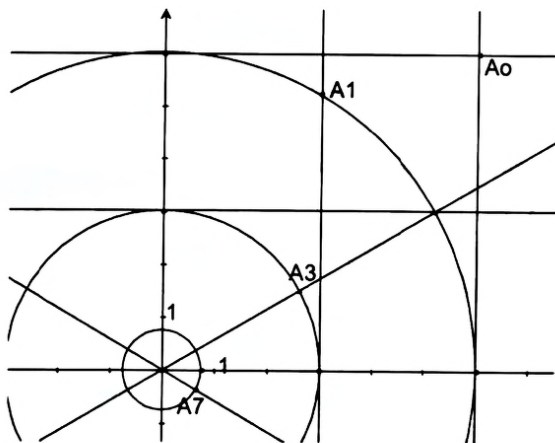
$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + 2i \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{16} = \frac{(4+2\sqrt{3}) - (4-2\sqrt{3}) + 4i}{16} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{\sqrt{3}-i}{4}}$

$\bullet z_1 = 6 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_3 = a^3 \cdot z_0 = a^2 \cdot (a \cdot z_0) \Rightarrow \boxed{z_3 = a^2 \cdot z_1} \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot 6e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2) et 3) $z_7 = a^7 \cdot z_0 = \boxed{(a^2)^3 \cdot z_1} \Rightarrow z_7 = \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^3 \cdot 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_7 = \frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

4) $z_{A_0} = z_0 = 6+6i$ $z_{A_1} = z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_{A_3} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ $z_{A_7} = \frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$



EX 30 : $f : M(z) \rightarrow M'(z') \quad tq : z' = \frac{1}{z} \quad ; z \neq 0$

1)

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in \zeta(O,1)$

L'ensemble des points invariants par f est le cercle $\zeta(O,1)$

2) $\frac{z'}{z} = \frac{1}{z \cdot z} = \frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}$ D'où O, M et M' sont alignés.

$$OM \cdot OM' = |z| \cdot |z'| = |z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$$

3)a) $z_A = 4; z_B = 2 + 2i; z_C = 2 - 2i; z_I = 2$

$$IA = |z_A - z_I| = |2| = 2 \Rightarrow A \in \zeta(I, 2)$$

$$IB = |z_B - z_I| = |2i| = 2 \Rightarrow B \in \zeta(I, 2)$$

$$IC = |z_C - z_I| = |-2i| = 2 \Rightarrow C \in \zeta(I, 2)$$

b)

$$z_{A'} = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad z_{B'} = \frac{1}{z_B} = \frac{1}{2+2i} = \frac{1+i}{4} \quad z_{C'} = \frac{1}{z_C} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1-i}{4}$$

$$\frac{\text{aff}(A'B')}{\text{aff}(A'C')} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}} = \frac{\frac{i}{4}}{-\frac{i}{4}} = -1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{A'B'} \text{ et } \overline{A'C'} \text{ sont colinéaires}$$

Par suite A', B' et C' appartiennent à une même droite Δ .

$$x_{A'} = x_{B'} = x_{C'} = \frac{1}{4} \quad \text{D'où } \boxed{\Delta : x = \frac{1}{4}}$$

$$4)a) \left| \frac{1}{2} - z \right| = |z'| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{z} - 2}{2\bar{z}} \right| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \frac{|\bar{z} - 2|}{2|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |\bar{z} - 2| = 2 \Leftrightarrow |z - 2| = 2$$

$$b) M \in (\zeta) \Leftrightarrow |z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| z - \frac{1}{2} \right| = |z'| \Leftrightarrow JM' = OM' \quad \text{avec } J\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow M' \in \text{med}[OJ].$$

Donc l'image par f du cercle ζ est la droite médiatrice de $[OJ]$

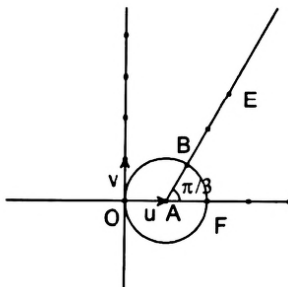
EX 31

$$z_A = 1 ; \zeta = \zeta(A, 1)$$

I) $z_F = 2 \quad z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z_E = 1 + z_B^2$

1) a) $AB = |z_B - z_A| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$ D'où $B \in (\zeta)$

b) $(\overline{AF}, \overline{AB}) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right)(2\pi) \equiv \text{Arg}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$



2)

$$z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

a) $z_E - z_A = z_B^2$ Or $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \left[e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \right] = 2 \cos \frac{\pi}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z_E - z_A = z_B^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $\frac{z_{\overline{AE}}}{z_{\overline{AB}}} = \frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 3 \in \mathbb{R}$ D'où $\overline{AB}$ et $\overline{AE}$ sont colinéaires par suite A, B et E

sont alignés

3) $\frac{z_{\overline{AB}}}{z_{\overline{AE}}} = 3 \Rightarrow z_{\overline{AE}} = 3 \cdot z_{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AE} = 3 \cdot \overline{AB}$ (Voir figure.)

II) $M(z); z \neq 1 \quad M'(z')$ avec $z' = 1 + z^2$

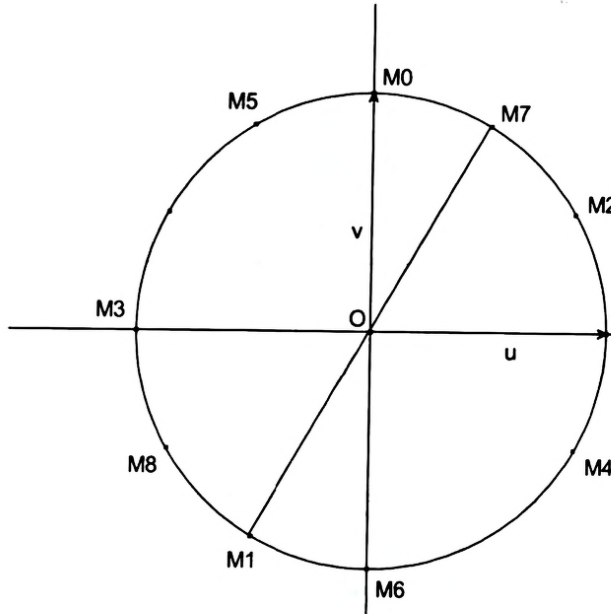
1) $\text{Arg}\left(\frac{z' - 1}{z - 1}\right) \equiv \left(\overline{AM}, \overline{AM'}\right)(2\pi)$

2) A, M et M' alignées si seulement si $\overline{AM}$ et $\overline{AM'}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \frac{z' - z_A}{z - z_A} \text{ est un réel} \Leftrightarrow \frac{1 + z^2 - 1}{z - 1} \text{ est un réel} \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 1} \text{ est un réel}$$

EX 32 :
$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

1) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + n\left(\frac{5\pi}{6}\right)$



2)

$$\begin{cases} OM_n = 1 \\ (\vec{u}, \vec{OM_n}) \equiv \frac{\pi}{2} + n\left(\frac{5\pi}{6}\right) (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_n| = 1 \\ \text{Arg } z_n \equiv \frac{\pi}{2} + n\left(\frac{5\pi}{6}\right) (2\pi) \end{cases} \Rightarrow z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

3) $z_{n+6} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+6)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 5\pi\right)} = e^{i5\pi} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = -e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = -z_n \Rightarrow M_{n+6} = S_O(M_n)$

Et comme $M_n \in (\zeta)$ Alors M_{n+6} et M_n sont diamétralement opposées.

4) $z_{n+12} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+12)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 10\pi\right)} = e^{i10\pi} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = z_n \Rightarrow M_{n+12} = M_n$

5) $z_{n+4} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+4)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 10\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i10\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi\right)} \cdot z_n = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \cdot z_n$

$$\left. \begin{aligned} z_{n+4} &= e^{-2i\frac{\pi}{3}} z_n \\ z_{n+8} &= e^{-2i\frac{\pi}{3}} z_{n+4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_{n+8} = e^{-4i\frac{\pi}{3}} z_n$$

$$(\overline{OM_n}, \overline{OM_{n+4}}) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right)(2\pi) \equiv \text{Arg}\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$(\overline{OM_{n+4}}, \overline{OM_{n+8}}) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z_{n+8}}{z_{n+4}}\right)(2\pi) \equiv \text{Arg}\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$(\overline{OM_{n+8}}, \overline{OM_n}) \equiv \text{Arg}\left(\frac{z_n}{z_{n+8}}\right)(2\pi) \equiv \text{Arg}\left(e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

Et comme M_n, M_{n+4} et M_{n+8} appartient à (ζ) alors le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral.

EX 33 :

1) $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi}$ Les solutions sont : $z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$ Avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} ; \quad z_1 = e^{3i\frac{\pi}{4}} ; \quad z_2 = e^{5i\frac{\pi}{4}} = e^{-3i\frac{\pi}{4}} ; \quad z_3 = e^{7i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2) $\theta \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z+i}{z-i} &= e^{i\theta} \Leftrightarrow z+i = ze^{i\theta} - ie^{i\theta} \Leftrightarrow (e^{i\theta}-1)z = i(e^{i\theta}+1) \Leftrightarrow z = \frac{(e^{i\theta}+1)i}{e^{i\theta}-1} \\ \text{Or } e^{i\theta}+1 &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) = \left(2\cos\frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{Euler} \\ \text{et } e^{i\theta}-1 &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) = \left(2i\sin\frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3) i n'est pas une solution de (E)

$$(z+i)^4 = -(z-i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = e^{3i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = e^{-3i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{8}} ; \quad z_2 = \frac{1}{\text{tg}\frac{3\pi}{8}} ; \quad z_3 = -\frac{1}{\text{tg}\frac{3\pi}{8}} ; \quad z_4 = -\frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{8}}$$

EX 34 : $z_A = -i$ $z' = \frac{i\bar{z}}{i-z}$

1)

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{i\bar{z}}{i-z} = z \Leftrightarrow i\bar{z} = iz - z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = i(z - \bar{z}) \text{ en posant } z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = i(2iy) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$$

Donc L'ensemble des points invariants par f est le cercle (ζ) de centre A de rayon 1.

2) a) $(z' + i)(\bar{z} - i) = \left(\frac{i\bar{z}}{i-z} + i \right) (\bar{z} - i) = -i\bar{z} + i\bar{z} + 1 = 1$

b)

$$AM' \cdot AM = |z' - z_A| \cdot |z - z_A| = |z' + i| \cdot |z + i| = |z' + i| \cdot |\bar{z} - i|$$

$$= |z' + i| \cdot |\bar{z} - i| = |(z' + i)(\bar{z} - i)| = |1| = 1$$

$$\cdot (z' + i)(\bar{z} - i) = 1 \Rightarrow z' + i = \frac{1}{\bar{z} - i} \Rightarrow \text{Arg}(z' + i) \equiv -\text{Arg}(\bar{z} - i) (2\pi)$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(z' + i) \equiv -\text{Arg}(\overline{z + i}) (2\pi) \Rightarrow \text{Arg}(z' + i) \equiv \text{Arg}(z + i) (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\hat{u}, \overline{AM'}) \equiv (\hat{u}, \overline{AM}) (2\pi) \Rightarrow (\overline{AM}, \hat{u}) + (\hat{u}, \overline{AM'}) \equiv 0 (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv 0 (2\pi)$$

D'où $\overline{AM}$ et $\overline{AM'}$ sont colinéaires et de même sens par suite : $M' \in [AM]$

3) a)

$$z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{i\bar{z}}{i-z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow i\bar{z} = ie^{i\theta} - e^{i\theta}z \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{ie^{i\theta}}{i + e^{i\theta}}$$

$$\text{Or } i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \cdot \left[e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} \right] = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \Rightarrow$$

$$z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{ie^{i\theta}}{2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{i}{2} \cdot \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{i}{2} \left[1 + i \text{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} \left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - i \right]$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \right]$$

b) $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i0}$ les solutions sont $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ $k \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow S_C = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$

c)

$$i.z^3 = (-i-z)^3 \Leftrightarrow -i.\left(\bar{z}\right)^3 = (i-\bar{z})^3 \Leftrightarrow \left(\frac{i.\bar{z}}{i-z}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow (z')^3 = 1 \Leftrightarrow z' = 1 \text{ ou } z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bullet z' = 1 \Leftrightarrow z' = e^{i0} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\right] = -\frac{1}{2}(-1+i) = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$\bullet z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\right] = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\right]$$

$$\bullet z' = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\right] = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\right]$$

$$\text{Conclusion : les solutions sont : } z_1 = \frac{1}{2}(1-i) \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\right] \quad \text{et } z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\right]$$

EX 35 : $a \in \mathbb{R}$; $(E) : z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$

1)

$$\Delta = a^2(1-i)^2 + 4ia^2 = -2ia^2 + 4ia^2 = 2ia^2 \Rightarrow \delta = (1+i)a$$

$$\text{Les solutions sont : } z_1 = \frac{-a(1-i) - (1+i)a}{2} = -a \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-a(1-i) + (a+i)a}{2} = ia$$

2)

$$a) \quad z_A = 2 + z_1 = 2 - a \quad \text{et} \quad z_B = z_2 = ia$$

ACBD carré de sens direct d'où :

$$\begin{cases} CA = CB \\ \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_A - z_C| = |z_B - z_C| \\ \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = 1 \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\Leftrightarrow z_A - z_C = iz_B - iz_C \Leftrightarrow (1-i)z_C = z_A - iz_B \Leftrightarrow (1-i)z_C = 2 - a + a \Leftrightarrow (1-i)z_C = 2 \Leftrightarrow z_C = \frac{2}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_C = 1+i} \quad \text{Donc C est un point fixe.}$$

b) Soit L l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$

$$ACBD \text{ est un carré} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow z_D - z_C = z_A - z_C + z_B - z_C$$

$$\Rightarrow z_D = z_A + z_B - z_C \Rightarrow z_D = (1-a)(1-i)$$

$$\text{Soit } \vec{w} \text{ le vecteur d'affixe } 1-i; \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{aff}(\overrightarrow{OD}) = (1-a).\operatorname{aff} \vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = (1-a)\vec{w}$$

D appartient à la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w} (\Delta : y=-x)$

$$\text{Donc } L \subset \Delta \quad (1)$$

Réciproquement soit D un point de $\Delta \Rightarrow D(x, -x) \Rightarrow Z_D = x \cdot (1-i)$

Montrons qu'il existe un réel a tel que ACBD soit carré direct (avec $z_A = 2-a$ et $z_B = ia$)

$$\begin{aligned}
 ACBD \text{ carré direct} &\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AD \\ \widehat{(AC, AD)} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} BC = BD \\ \widehat{(BC, BD)} = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = i \quad \text{et} \quad \frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = -i \\
 &\Leftrightarrow Z_A = x - 1 \quad \text{et} \quad Z_B = i(1-x) \quad \text{en posant } a = 1-x \\
 &\Leftrightarrow Z_A = 2-a \quad \text{et} \quad Z_B = ia
 \end{aligned}$$

Donc $\Delta \subset L$ (2) (1) et (2) $\Rightarrow L = \Delta$

Conclusion : l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$ la droite $\Delta : y = -x$

EX 36 :

1)

a) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \Delta' = -1 \quad \delta' = i$

Les solutions sont : $z' = \sqrt{3} + i$ et $z'' = \sqrt{3} - i$

b) $|z| = |\sqrt{3} + i| = 2 \rightarrow z' = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad \boxed{z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

2) $U = \frac{1}{2}[(1-i) + \sqrt{3}(1+i)]$

a) $U^2 = \sqrt{3} + i$

b)

$$U^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } U = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\left(-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) < 0 \end{aligned} \right\} U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Or $U = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)] \rightarrow \operatorname{Re}(U) > 0$

D'où $U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)]$

D'où :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

3) $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

a)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$i\alpha$ solution de l'éq $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(i\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3 - 2\alpha^2(\sqrt{3}+i) + 4(1+i\sqrt{3})i\alpha - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3}) + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3} = 0 \\ \text{et} \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\alpha(\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$ ou $\boxed{\alpha = 2}$ Or $\alpha = 0$ ne vérifie pas (2)

et $\alpha = 2$ vérifie bien (2)

d'où $2i$ est une solution imaginaire de l'équation $P(z)=0$.

b)

$2i$ est une solution de $P(z) = 0 \Rightarrow P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - 2i)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$

Identifions : on aura :
$$\begin{cases} b - 2i = -2(\sqrt{3} + i) \\ c - 2ib = 4(1 + i\sqrt{3}) \\ -2ic = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

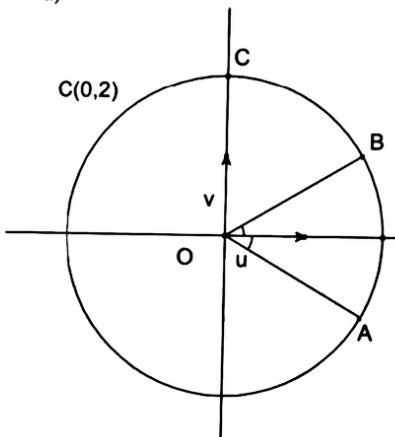
D'où $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

D'après 1) $\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ \text{ou} \\ z = \sqrt{3} + i \\ \text{ou} \\ z = \sqrt{3} - i \end{cases} \quad S_C = \{2i; \sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}$

$$4) \quad z_A = \sqrt{3} - i \quad z_B = \sqrt{3} + i \quad z_C = 2i$$

a)



b)

$$* \text{aff}(\overline{OC}) = z_C = 2i \quad \text{et} \quad \text{aff}(\overline{AB}) = z_B - z_C = 2i$$

D'où $\overline{OC} = \overline{AB} \Rightarrow OABC$ est un parallélogramme (1)

$$* OA = |z_A| = 2 \quad OC = |z_C| = 2 \quad \Rightarrow \boxed{OA = OC} \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow OABC$ est un losange.

EX 37 :

$$I) \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$1) (e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha})^2 - (e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha})^2 = 8e^{3i\alpha}$$

$$2) z^2 - (e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha})z + 2e^{3i\alpha} = 0$$

$$\Delta = (e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha})^2 - 8e^{3i\alpha} = (e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha})^2 \rightarrow \delta = e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}$$

Les solutions sont :

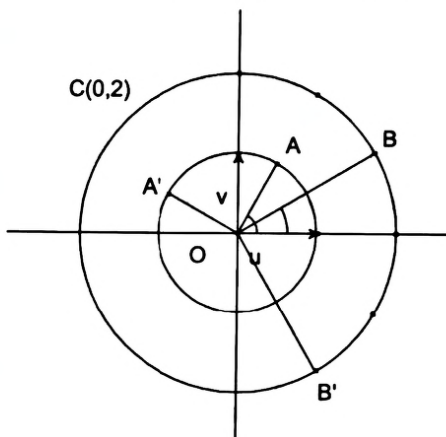
$$z' = \frac{(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}) - (e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha})}{2} = 2e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}) + (e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha})}{2} = e^{2i\alpha}$$

$$II) z_A = e^{2i\alpha} ; \quad z_B = 2e^{i\alpha} ; \quad z_{A'} = ie^{2i\alpha} ; \quad z_{B'} = -2ie^{i\alpha}$$

1)

$$a) z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{2i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)} \quad \text{et} \quad z_{B'} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = 2e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

$$b) \alpha = \frac{\pi}{6} \quad z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} ; z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}} ; \quad z_{A'} = e^{5i\frac{\pi}{6}} ; z_{B'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



$$2) I = A' * B'$$

$$a) z_I = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{i(z_A - z_B)}{2} \Rightarrow \frac{z_I}{z_B - z_A} = \frac{i(z_A - z_B)}{2(z_B - z_A)} = -\frac{i}{2}$$

$$b) \frac{z_I}{z_B - z_A} = \frac{\text{aff}(\overline{OI})}{\text{aff}(\overline{AB})} \text{ est imaginaire pure d'où } (OI) \perp (AB)$$

D'où (OI) est une hauteur issue de O au triangle OAB.

$$* \frac{OI}{AB} = \frac{|z_I|}{|z_B - z_A|} = \left| -\frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{D'où } OI = \frac{1}{2} AB.$$

EX 38 :

$$I) \alpha \in [0, \pi]$$

$$1) z^2 - 2e^{i\alpha} z + 2e^{2i\alpha} = 0 \quad \Delta' = e^{2i\alpha} - 2e^{2i\alpha} = -e^{2i\alpha} \rightarrow \delta' = ie^{i\alpha}$$

$$\text{Les solutions sont : } z' = e^{i\alpha} + ie^{i\alpha} = (1+i)e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad z'' = (1-i)e^{i\alpha}$$

$$2) z' = (1+i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} \Rightarrow \boxed{z' = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \alpha)}} \quad \text{et} \quad z'' = (1-i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} \Rightarrow \boxed{z'' = \sqrt{2}e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}}$$

$$II) z_A = (1-i)e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad z_B = (1+i)e^{i\alpha}$$

$$1) \ a) \ \frac{z_2}{z_1} = \frac{(1+i)e^{i\alpha}}{(1-i)e^{i\alpha}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$b) \ \frac{\arg(\overline{OB})}{\arg(\overline{OA})} = \frac{z_2}{z_1} = i \text{ est imaginaire d'où } \overline{OA} \perp \overline{OB} \quad (1)$$

$$\left| \frac{z_B}{z_A} \right| = |i| \Leftrightarrow \frac{|z_B|}{|z_A|} = 1 \Leftrightarrow |z_B| = |z_A| \Leftrightarrow OA = OB \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ OAB est rectangle et isocèle en O.

2)

$$a) \ \left(\vec{u}, \overline{AB} \right) \equiv \arg(z_2 - z_1)(2\pi) \equiv \arg(2ie^{i\alpha})(2\pi) \equiv \arg(2i) + \arg(e^{i\alpha})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \alpha(2\pi)$$

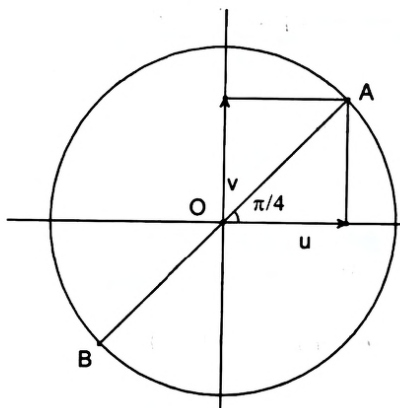
b) Soit $\Delta: y = x$

$$(AB) // \Delta \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overline{AB} \right) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi) \Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi \in \mathbb{Z}$$

Comme $\alpha \in [0, \pi]$ d'où $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Conclusion : $(AB) // \Delta$ si seulement si $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$$c) \ \text{Pour } \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad z_A = (1-i)e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$



EX 39 :

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (E) : iz^2 + 6\sin\theta \cdot z - 9i = 0$$

1)

$$\Delta' = 9\sin^2\theta + 9i^2 = -9 + 9\sin^2\theta = -9(1 - \sin^2\theta) = -9\cos^2\theta \rightarrow \delta' = 3i\cos\theta$$

$$a) z' = \frac{-3\sin\theta + 3i\cos\theta}{i} = 3(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-3\sin\theta - 3i\cos\theta}{i} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$b) z' = 3e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z'' = 3[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)] = 3e^{i(\pi - \theta)}$$

$$2) z_A = 3i \quad ; \quad z_{M_1} = 3(\cos\theta + i\sin\theta) \quad ; \quad z_{M_2} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$a) |z_A| = |z_{M_1}| = |z_{M_2}| = 3 \Rightarrow OA = OM_1 = OM_2 = 3 \quad \text{D'où } A, M_1, M_2 \in \zeta_{(0,3)}$$

b) On a $OM_1 = OM_2$ donc OM_1AM_2 est un losange ssi :

$$\overline{OM_1} = \overline{M_2A} \Leftrightarrow z_1 = z_A - z_2 \Leftrightarrow 3(\cos\theta + i\sin\theta) = 3i - 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = i + \cos\theta - i\sin\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{avec } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$3) iz^4 + 3\sqrt{3} \cdot z^2 - 9i = 0 \quad \text{On pose } t = z^2 \text{ l'équation devient :}$$

$$it^2 + 3\sqrt{3}t - 9i = 0 \rightarrow \Delta = -9 \rightarrow \delta = 3i$$

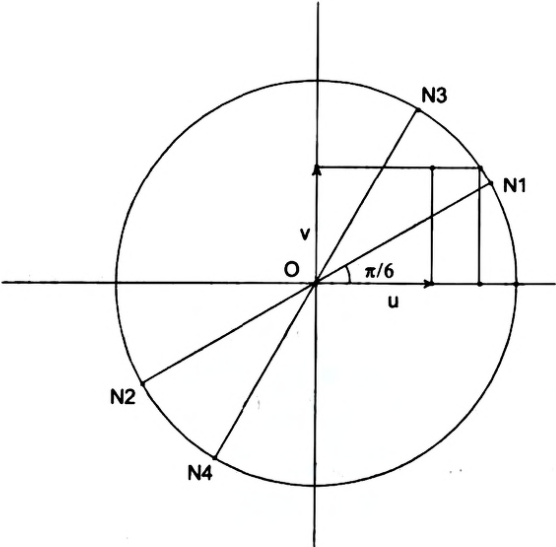
$$t' = \frac{-3\sqrt{3} + 3i}{2i} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{et} \quad t'' = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\bullet t = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$\bullet t = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{2i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$S_C = \left\{ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}; \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

$$N_1\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \quad ; \quad N_2\left(\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right) \quad N_3\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad ; \quad N_4\left(\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$$



QCM

$$1) V_{(A, \frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$$

$$2) S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = id \rho$$

$$3) f = S_{(AB)}$$

$$4) f(0) = 0$$

$$5) f \circ f \circ f = id \rho$$

Vrai Faux

1) (Faux)

En effet : une symétrie orthogonale d'axes Δ fixe tout point de Δ

2) (Faux)

Une translation de vecteur non nul est une isométrie sans point fixe

3) (Faux)

Une symétrie glissante laisse globalement invariant son axe.

4) (Vrai)

 $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation si $\Delta // \Delta'$, $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une rotation de centre I si $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$

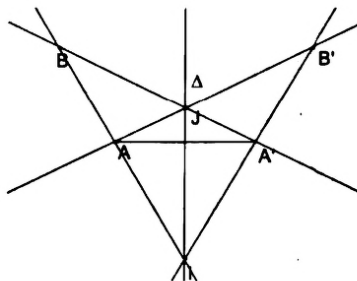
5) (Vrai)

En effet : f fixe le point A d'où f est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A , soit une rotation de centre A .Comme $f(B) \neq B \rightarrow f \neq id$ D'où f est une rotation de centre A ou symétrie orthogonale.

$$f(B) = C \Rightarrow f = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \quad \text{Ou } f = S_{\Delta} \quad \text{avec } \Delta = med[BC]$$

EX 1 :

1. On marque le point I intersection de (AB) et Δ
2. On trace la droite (IA') qui représente l'image de (AB) par S_Δ
3. On marque le point J intersection de (A'B) et Δ
4. On trace la droite (JA) qui représente l'image de (A'B) par S_Δ
5. (AB) et (A'B) se coupent en B alors leurs images (IA') et (AJ) se coupent en B' = $S_\Delta(B)$



EX 2 :

Soit I le point de {Oy} tel que : $\overline{OI} = \overline{MN}$

$$P = A * M \Rightarrow \overline{OP} = \frac{\overline{OA} + \overline{OM}}{2}$$

$$Q = B * N \Rightarrow \overline{OQ} = \frac{\overline{OB} + \overline{ON}}{2}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ}$$

$$= \overline{OQ} - \overline{OP}$$

$$= \frac{\overline{OB} + \overline{ON} - \overline{OA} - \overline{OM}}{2}$$

$$= \frac{\overline{AB} + \overline{MN}}{2}$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{OI})$$

EX 3 :

$$f(G) = G$$

$$\text{On a : } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } \overline{GA'} + \overline{GB'} + \overline{GC'} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} &= \overline{AG} + \overline{GA'} + \overline{BG} + \overline{GB'} + \overline{CG} + \overline{GC'} \\ &= \underbrace{(\overline{GA'} - \overline{CB'} + \overline{GC'})}_0 - \underbrace{(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})}_0 \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

EX 4 :

$$1) f = s_1 \circ s_2 \quad f^{-1} = s_2 \circ s_1$$

$$* \Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow f = id \rightarrow f^{-1} = id$$

$$* \Delta_1 // \Delta_2 \text{ et } \Delta_1 \neq \Delta_2$$

→ f est une translation

→ f⁻¹ est une translation

$$* \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{I\}$$

→ f est une rotation de centre I

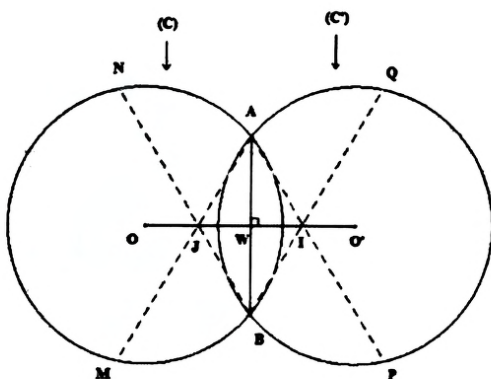
→ f⁻¹ est une rotation de centre I

2)

$$* \Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow f = f^{-1}$$

$$* \Delta_1 \perp \Delta_2 \rightarrow f = f^{-1}$$

EX 5 :



Désignons par « O » et « O' » les centres respectifs de (C) et (C')

W : le centre du losange IAJB alors $W = A*B = I*J = O*O'$

$\Rightarrow$ L'image de la droite (AJ) par la symétrie S_w est la droite (BI)

et $\Rightarrow$ L'image du cercle (C) par la symétrie S_w est le cercle (C')

D'où $S_w(M) = Q$

De même $S_w(N) = P$. Par suite $W = P*N = Q*N$

$\Rightarrow PQNM$ est un parallélogramme.(1)

*

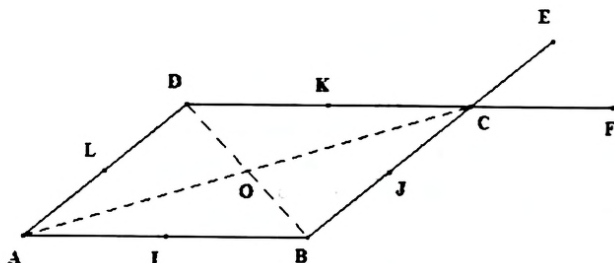
$$\left. \begin{array}{l} S_{(OO')}(A) = B \\ S_{(OO')}(I) = J \end{array} \right\} \Rightarrow S_{(OO')}(AI) = (BJ) \quad \text{or} \quad S_{(OO')}(C) = (C')$$

D'où $S_{(OO')}(P) = Q$. De même on montre que : $S_{(OO')}(N) = M$

Ce qui permet de conclure que $PN = QM$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow PQNM$ est un rectangle.

EX 6 :



1)

$$S_1(A) = C$$

$$S_1(I) = K$$

$$S_1(L) = J$$

2) voir figure

3)

$$S_2 \circ S_1(A) = S_2(C) = C$$

$$S_2 \circ S_1(I) = S_2(K) = F$$

$$S_2 \circ S_1(L) = S_2(J) = E$$

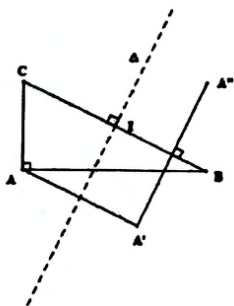
$$t_{\overline{AC}}(A) = C$$

$$t_{\overline{AC}}(I) = F$$

$$t_{\overline{AC}}(L) = E$$

$S_2 \circ S_1$ et $t_{\overline{AC}}$ sont Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés C, E et F Donc sont égales D'où $S_2 \circ S_1 = t_{\overline{AC}}$

EX 7 :



Désignons par $I = B * C$ et Δ : la médiatrice de $[BC]$.

$\Delta \perp (BC)$ d'où $S_{(BC)} \circ S_{\Delta} = S_I$: La symétrie centrale de centre I.

$$S_{(BC)} \circ S_{\Delta}(A) = S_{(BC)}(A') = A''$$

$$\Rightarrow S_I(A) = A'' \Rightarrow I = A * A''$$

$$S_{(BC)} \circ S_{\Delta}(B) = S_{(BC)}(C) = C \Rightarrow I = B * C$$

D'où $ACA''B$ est un parallélogramme et comme $(AB) \perp (AC)$ Alors $ACA''B$ est un rectangle.

EX 8 :

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \\ f(C) = D \end{cases}$$

1)

$$g(A) = S_{(AC)} \circ f(A) = S_{(AC)} A = A$$

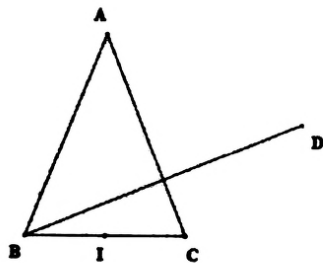
$$g(B) = S_{(AC)} \circ f(B) = S_{(AC)} C = C$$

$$g(C) = S_{(AC)} \circ f(C) = S_{(AC)} D = B$$

$$I = B * C \Rightarrow g(I) = g(B) * g(C)$$

$$\Rightarrow g(I) = C * B$$

$$\Rightarrow g(I) = I$$



2) $g \neq id$ car $g(B) \neq B$ alors g est une isométrie, différente de l'identité et fixe deux points A et I d'où $g = S_{(AI)}$

EX 9 :

$$1) S_{(AC)} \circ S_{\Delta} = t_{2\overline{BI}} \text{ car } \Delta // (AC)$$

$$S_{(KJ)} \circ S_{(AC)} = t_{2\overline{IH}} \text{ avec } \{H\} = (JK) \cap (BI)$$

2)

$$f = (S_{(AC)} \circ S_{\Delta}) \circ (S_{(KJ)} \circ S_{(AC)})$$

$$f = t_{2\overline{BI}} \circ t_{2\overline{IH}}$$

$$f = t_{2\overline{BH}}$$

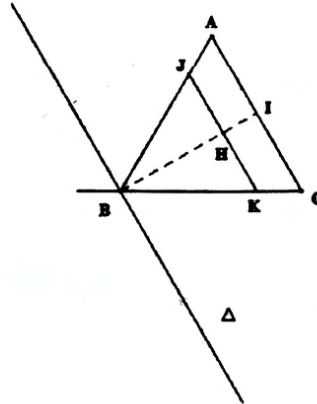
3)

On a $f = t_{2\overline{BH}}$ donc pour que f soit la translation de vecteur $\overline{BI}$ il

$$\text{faut que } 2\overline{BH} = \overline{BI}$$

$$\Leftrightarrow H = B * I$$

$$\Leftrightarrow J = A * B$$



EX 10 :

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ d'images respectifs $M'_1(z'_1)$ et $M'_2(z'_2)$ par f .

On a :

$$z'_1 = iz_1 - 1 - i$$

$$z'_2 = iz_2 - 1 - i$$

$$|z'_2 - z'_1| = |i(z_2 - z_1)|$$

$$= |i| \cdot |z_2 - z_1|$$

$$= |z_2 - z_1|$$

$$\text{D'où } M'_1 M'_2 = M_1 M_2$$

f conserve la distance $\Rightarrow f$ est une isométrie

*Déterminons l'ensemble des points invariant par f .

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z$$

$$\Leftrightarrow iz - 1 - i = z \Leftrightarrow z(i - 1) = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i}{i - 1} \Leftrightarrow z = -i$$

D'où f laisse le point I d'affixe $(-i)$ comme unique point invariant.

Par suite f est une rotation de centre I

$$\text{Soit } M \neq I \quad f(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z' + i = i(z + i) \Leftrightarrow \frac{z' + i}{z + i} = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' + i}{z + i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' + i| = |z + i| \\ \arg\left(\frac{z' + i}{z + i}\right) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\overline{IM}, \overline{IM'}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

D'où $f = r_{(I, \frac{\pi}{2})}$

EX 11 :

1) Montrons que f conserve les distances $\begin{matrix} M_1(x_1, y_1) \\ M'_1 = f(M_1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} M_2(x_2, y_2) \\ M'_2 = f(M_2) \end{matrix}$

$$M'_1(x'_1, y'_1) \text{ tq : } \begin{cases} x'_1 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y'_1 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad M'_2(x'_2, y'_2) \text{ tq : } \begin{cases} x'_2 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ y'_2 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (M'_1 M'_2)^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + y_2 - x_1 - y_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - y_2 - x_1 + y_1) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)] + \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)] \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= (M_1 M_2)^2 \end{aligned}$$

d'où $M'_1 M'_2 = M_1 M_2$

Par suite f est une isométrie

2) a) soit $M(x, y)$

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2} - 2 + x + y \\ \sqrt{2}y = \sqrt{2} + x - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} - 2 \\ x - (1 + \sqrt{2})y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0 \\ x - (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x - (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des points invariant par f est la droite $\Delta : x - (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$

$$b) f = S_{\Delta}$$

EX 12 :

$$1) \text{ soient } \begin{matrix} M_1(z_1) & M_2(z_2) \\ M'_1(z'_1) & M'_2(z'_2) \end{matrix}$$

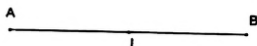
$$f(M_1) = M'_1 \Leftrightarrow z'_1 = \overline{iz_1}$$

$$f(M_2) = M'_2 \Leftrightarrow z'_2 = \overline{iz_2}$$

$$\begin{aligned} M'_1 M'_2 &= |z'_2 - z'_1| \\ &= |\overline{i(z_2 - z_1)}| \\ &= |i| \cdot |z_2 - z_1| \\ &= 1 \cdot |z_2 - z_1| \\ &= M_1 M_2 \end{aligned}$$

f conserve les distances d'où f est une isométrie.

EX 14 :

Soit $I = A * B$ 

$$1) f([AB]) = [AB]$$

Deux cas se présentent :

$$\underline{1^{er} \text{ cas}} : f(A) = A \text{ et } f(B) = B$$

$$I = A * B \Rightarrow f(I) = f(A) * f(B)$$

$$\Rightarrow f(I) = A * B = I$$

$$\underline{2em \text{ cas}} : f(A) = B \text{ et } f(B) = A$$

$$2) M(z) \text{ avec } z = x + iy$$

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \overline{iz}$$

$$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy)$$

$$\Leftrightarrow (x - y) + i(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

D'où l'ensemble des points invariants

par f est la droite $\Delta : y = x$

$$3) f = S_{\Delta}$$

$$I = A * B \Rightarrow f(I) = f(A) * f(B)$$

$$\Rightarrow f(I) = B * A = I$$

2) d'après 1) f fixe $I = A * B$ d'où f est soit l'identité, Soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I, Soit une rotation de centre I.

$$\Rightarrow f = id \text{ ou } f = S_{(AB)}$$

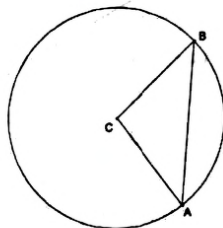
$$\text{ou } f = S_{\Delta} \text{ avec } \Delta = \text{med}[AB]$$

$$\text{ou } f = r_{(I, \pi)} = S_I.$$

EX 15 :

1) L'image de (C) pour f est lui-même $\Rightarrow f(O) = O$.

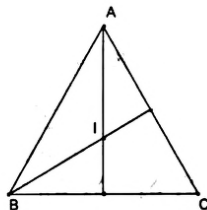
D'où f est $\begin{cases} \rightarrow \text{soit l'identité} \\ \rightarrow \text{soit une rotation de centre } O \\ \rightarrow \text{soit une symétrie orthogonale} \end{cases}$

2) on a $f(O) = O$ D'où $f([AB]) = [AB]$.

1^{er} cas : $f(A) = A$ et $f(B) = B$
 $\Rightarrow f = id$

2^{em} cas : $f(A) = B$ et $f(B) = A$
 $\Rightarrow f = S_{\Delta}$ avec $\Delta = \text{mod}[AB]$

EX 16 :



$$1) \begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$$

f est une isométrie sans points fixe d'où f est soit : une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul
 Soit une symétrie glissante.

$\overline{AB} \neq \overline{BC}$ d'où f n'est pas une translation, par suite f est une symétrie glissante.

2) a) $f(I) = I$ $I \in P$.

$$\text{med}[AB] \neq \text{med}[BC]$$

D'où f n'est pas une symétrie orthogonale.

b) f fixe un point I et f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une rotation de centre I car $f \neq id$

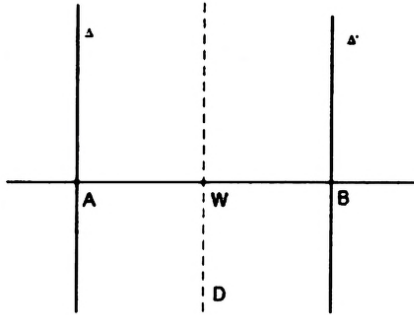
(*) $IA = IB$ et $IB = IC$

I : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$$f = r_{(I, \frac{2\pi}{3})}$$

2) b)

EX 17 :



Soit $W=A*B$

1^{er} cas : $(AB) \perp \Delta$ il est clair que $f \neq id$

$$*f = t_{\overline{AB}}$$

ou

$$*f = r_{(W, \pi)} = S_W$$

ou

$$*f = S_D \text{ avec } D // \Delta \text{ et } W \in D$$

2^{em} cas : (AB) et Δ non perpendiculaires.

Soit H : le projecteur orthogonale de A sur Δ

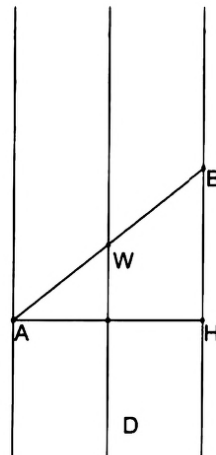
$$*f = t_{\overline{AB}}$$

$$*f = S_W$$

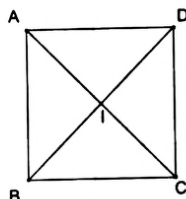
Ou

$*f$: la symétrie glissante

d'axe D et de vecteur $\overline{HB}$



EX 18 :



1) a) on a : $f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$
 Le point I est équidistant de A, B, C et D $\Rightarrow f(I)$ est équidistant de A, B, C et D $\Rightarrow f(I) = I$

b) f fixe le point I d'où f est soit l'identité, soit une rotation de centre I d'angle non nul, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.

2)

- $f(A) = A$ et $f(I) = I$

Comme f n'est pas une symétrie orthogonale alors $f = id_p$

- $f(A) = B$ donc $f \neq id$

Par suite f est une rotation de

centre I d'angle $\theta \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})(2\pi)$

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

- $f(A) = C$ donc $f \neq id$
 $\Rightarrow f$ est une rotation de centre I

d'angle $\theta \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})(2\pi)$ donc
 $\theta \equiv \pi [2\pi]$

D'où $f = S_I$

- $f(A) = D$ donc $f \neq id$
 $\Rightarrow f$ est une rotation de centre I

d'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}) = \frac{-\pi}{2} (2\pi)$

3) f : symétrie orthogonale.

- $f(A) = A$ et $f(I) = I$
 $\Rightarrow f = S_{(AI)}$

- $f(A) = B$ d'où $f = S_{\Delta_2}$ avec
 $\Delta_2 = \text{mod}[AB] = \text{mod}[CD]$

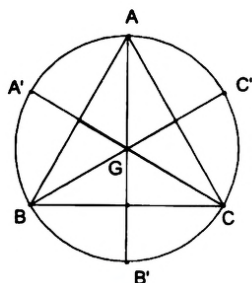
- $f(A) = C$
 $f = S_{\Delta}$ avec $\Delta = \text{mod}[AC]$
 $f = S_{(IB)}$

- $f(A) = D \Rightarrow f = S_{\Delta_1}$ avec
 $\Delta_1 = \text{mod}[AD] = \text{mod}[BC]$

4) l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD sont :

$$\left\{ id_p; r_{(I, \frac{\pi}{2})}; r_{(I, \frac{-\pi}{2})}; S_I; S_{(AI)}; S_{(IB)}; S_{\Delta_1}; S_{\Delta_2} \right\}$$

EX 19 :



$$1) \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

D'où G : le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

$$2) f(\{A, B, C\}) = \{A', B', C'\}$$

a) f conserve le centre de gravité

$$\Rightarrow f(G) = G$$

b) f fixe le point G et $f \neq id$ d'où f est soit une symétrie orthogonale d'axe passant par G soit une rotation de Centre G.

(*) on suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.

$$\bullet f(A) = A' \rightarrow f = r_{(G, \frac{\pi}{3})}$$

$$\bullet f(A) = B' \rightarrow f = r_{(G, \pi)} = S_G$$

$$\bullet f(A) = C' \rightarrow f = r_{(G, -\frac{\pi}{3})}$$

(*) on suppose que f n'est pas une rotation.

$$\bullet f(A) = A' \rightarrow f = S_{\Delta_1} \text{ avec } \Delta_1 = \text{mod}[AA']$$

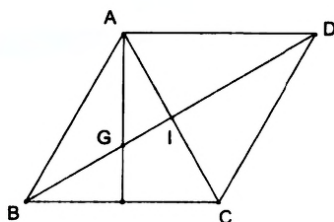
$$\bullet f(A) = B' \rightarrow f = S_{\Delta_2} \text{ avec } \Delta_2 = \text{mod}[AB']$$

$$\bullet f(A) = C' \rightarrow f = S_{\Delta_3} \text{ avec } \Delta_3 = \text{mod}[AC']$$

Conclusion :

$$f \in \left\{ r_{(G, \frac{\pi}{3})}; r_{(G, -\frac{\pi}{3})}; S_G; S_{\Delta_1}; S_{\Delta_2}; S_{\Delta_3} \right\}$$

EX 20 :



1) Soit G : le centre de gravité du triangle ABC. On a : $f(G) = G$

En faisant un raisonnement analogue à celui de l'exercice N°18

$$f \in \left\{ id_p; r_{(G, \frac{2\pi}{3})}; r_{(G, -\frac{2\pi}{3})}; S_{(AG)}; S_{(BG)}; S_{(CG)} \right\}$$

$$2) f(ABC) = (ACD)$$

$$a) g = S_{(AC)} \circ f$$

l'image du triangle ABC par f est le triangle ACD, d'où l'image du triangle ABC par g est le triangle ABC.

g : laisse le triangle ABC globalement invariant

b) d'après 1)

$$g \in \left\{ id_P; r_{(G, \frac{2\pi}{3})}; r_{(G, -\frac{2\pi}{3})}; S_{(AG)}; S_{(BG)}; S_{(CG)} \right\}$$

$$\bullet g = id \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = id$$

$$\Rightarrow f = S_{(AC)}$$

$$\bullet g = S_{(AG)} \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = S_{(AG)}$$

$$\Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(AG)}$$

$$\Rightarrow f = r_{(A, \frac{\pi}{3})}$$

$$\bullet g = S_{(BG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(BG)}$$

$$\Rightarrow f = S_I \text{ avec } I = A^*C$$

$$\bullet g = S_{(CG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(CG)}$$

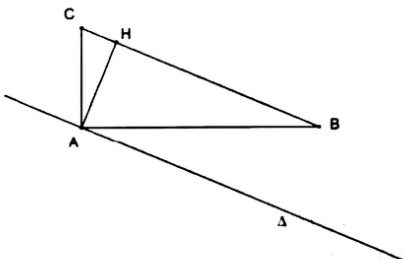
$$\Rightarrow f = r_{(C, -\frac{\pi}{3})}$$

$$\bullet g = r_{(G, \frac{2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G, \frac{2\pi}{3})}$$

$$\bullet g = r_{(G, -\frac{2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G, -\frac{2\pi}{3})}$$

Rq : on montrera dans le chapitre suivant que pour les deux dernier cas : f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

EX 21 :



$$1) S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_A$$

Car $(AB) \perp (AC)$

$$S_A \circ S_{(AH)} = S_A \Rightarrow \Delta \text{ est la perpendiculaire à}$$

(AH) en A. donc $\Delta \parallel (BC)$ et $A \in \Delta$

$$2) f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$$

$$S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_A \circ S_{(AH)}$$

$$\Rightarrow S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_A \circ S_{(AH)}$$

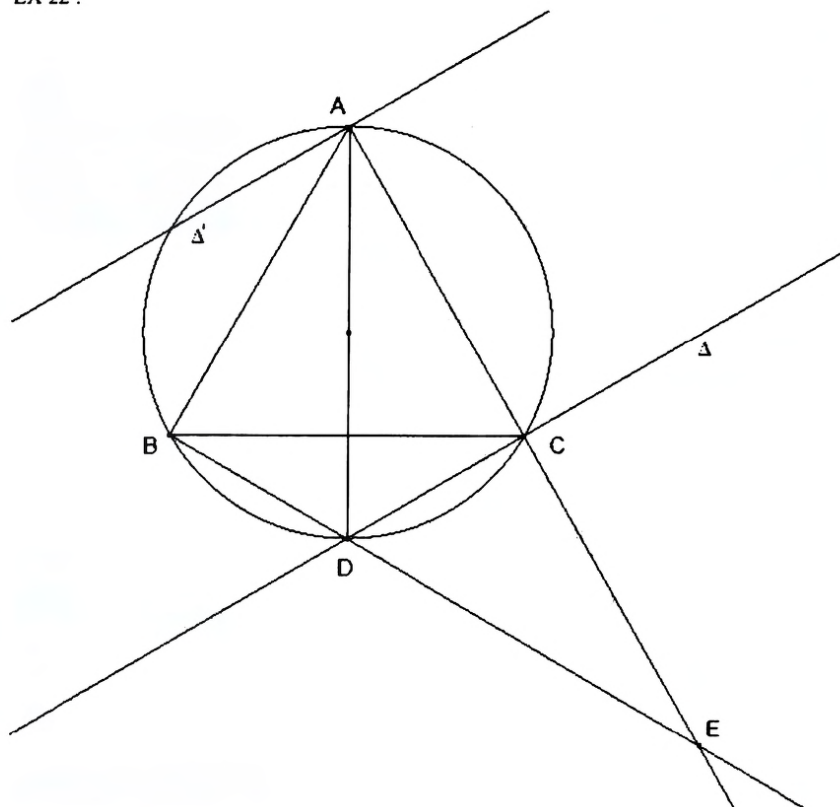
$$\Rightarrow f = (S_{(BC)} \circ S_A) \circ S_{(AH)}$$

$$S_{(BC)} \circ S_A = t_{2\overline{AH}} \text{ car } \Delta \parallel (BC)$$

$$\text{D'où } f = t_{2\overline{AH}} \circ S_{(AH)}$$

f est la symétrie glissante d'axe (AH) , de vecteur $2\overline{AH}$

EX 22 :



1)a) $[AD]$ est un diamètre pour (C) $\Rightarrow$ le triangle ABD est rectangle en B
 Par suite le triangle ABE est rectangle en B . De plus $CA=CB$
 $\Rightarrow c$: le centre du cercle circonscrit au triangle ABE
 $\Rightarrow CB=CE \quad C=A^*E$

b) $C=A^*E$

le triangle ADC est rectangle en C car $[AD]$ diamètre de (C)
 on a donc :

$$\begin{cases} C = A^*E \\ (DC) \perp (AE) \end{cases}$$

D'où (DC) est la médiatrice du segment $[AE]$.

2)

$$f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$$

$$g = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$$

a) f est la rotation de centre D d'angle $2(\widehat{DC}, \widehat{DB}) \equiv \frac{4\pi}{3} (2\pi)$

$$\text{d'où } f = r_{(D, \frac{-2\pi}{3})} \quad \text{de même } g = r_{(A, \frac{2\pi}{3})}$$

b) $f = S_{\Delta} \circ S_{(AD)} = r_{(D, \frac{-2\pi}{3})}$ d'où $\Delta = (DC)$ car $D \in (DC)$ et $(\widehat{DA}, \widehat{DC}) \equiv \frac{-\pi}{3} (2\pi)$

$$g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta'} = r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \quad \Delta' : \text{la perpendiculaire à } (AC) \text{ en } A.$$

c)

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \Delta' \perp (AC) \\ \Delta \perp (AC) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta // \Delta'$$

$$\bullet f \circ g = S_{\Delta} \circ \underbrace{S_{(AD)} \circ S_{(AD)}}_{id} \circ S_{\Delta'}$$

$$= S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$$

$$= t_{2\overline{AC}}$$

car $\Delta // \Delta'$ et $(AC) \perp \Delta$

QCM :

- 1) $t_u \circ S_A$ est une symétrie centrale
- 2) Un déplacement qui fixe deux points distincts est l'identité
- 3) La composée de deux symétries glissantes est un déplacement
- 4) $S_D \circ r_{(0, \frac{\pi}{3})}$: symétrie orthogonale
- 5) $S_A \circ S_B = t_{2BA}$

VRAI ou FAUX :

- 1) vrai : la composée de trois symétries orthogonale est un antidéplacement
- 2) vrai : symétrie glissante n'a pas de points invariants
- 3) faux : $g \circ f(I) = I$ $g \circ f$ est un antidéplacement qui fixe un point $\Rightarrow g \circ f$ est une symétrie orthogonale
- 4) vrai : $f' = t_u \circ S_A = S_A \circ t_u$ $f^{-1} = S_A \circ t_{-u} = t_{-u} \circ S_A$
- 5) faux : $f(A)=C$
 $f(B)=D$
 $\overline{AC} \neq \overline{BD} \Rightarrow f$ n'est pas une translation $f=S_O$ avec $O=A * C$

EX1 :
$$\begin{cases} f(o) = o \\ f(A) = B \end{cases}$$

f fixe o et $f \neq id$ d'où f soit une symétrie orthogonale d'axe $\Delta = \text{med}[AB]$ soit une rotation de centre o d'angle $\alpha = (\widehat{OA, OB}) [2\pi]$

EX2 :

1. $AD=BC$ et $A \neq D$ d'où il existe un unique déplacement φ tel que
$$\begin{cases} \varphi(A) = B \\ \varphi(D) = C \end{cases} \quad \varphi = t_{\overline{AB}}$$

De même il existe un unique antidéplacement ψ tel que
$$\begin{cases} \psi(A) = B \\ \psi(D) = C \end{cases} \quad \text{med}[AB] \neq \text{med}[DC]$$

$\Rightarrow \psi$ n'est pas une symétrie orthogonale

$\Rightarrow \psi$ est une symétrie glissante

De même : il existe un unique déplacement f tel que
$$\begin{cases} f(A) = C \\ f(D) = B \end{cases} \quad f = S_o$$

Et il existe un unique antidéplacement g tel que
$$\begin{cases} g(A) = C \\ g(D) = B \end{cases} \quad (g : \text{symétrie glissante})$$

Conclusion : il existe exactement 4 isométries qui transforment le segment $[AD]$ en $[BC]$

2) le triangle BCO est ADI ne sont pas isométriques ($AI \neq BC$; $AI \neq BO$ et $AI \neq OC$) d'où il n'existe aucune isométrie qui transforme le triangle BCO au triangle ADI

EX3 :

1) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est un antidéplacement qui fixe le point A donc c'est une symétrie orthogonale d'axe passant par A

2) $S_1(B) = B'$; $S_2(B') = B''$; $S_3(B'') = E$

3) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale et $S_3 \circ S_2 \circ S_1(B) = E \Rightarrow S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_A$ avec $\Delta = \text{med}[BE]$

EX4 :

$r = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$

1) on a :
$$\begin{cases} AB = AF \\ (\widehat{AB, AF}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } F = r'(B) \quad r' = r_{(A, \frac{\pi}{3})}$$

2) $D = A * G \Rightarrow (AD) = (AG) \Rightarrow S_{(AD)} \circ S_{(AG)} = Id$ et $S_{(AC)} \circ S_{(AE)} = R_{(A, -\frac{\pi}{3})}$

$$\Rightarrow S_{(AD)} \circ S_{(AG)} \neq S_{(AC)} \circ S_{(AE)}$$

EX5 :

1) $AB \parallel CD$ et $AB \neq 0$ donc il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D

De même : il existe un unique déplacement qui envoie A sur D et B sur C

f et g : les seuls déplacements qui transforment $[AB]$ en $[CD]$

$$(AB) \parallel (CD)$$

$$2) a) \begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases}$$

$$f \text{ est d'angle } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \equiv 0(2\pi) \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}}$$

$$\begin{cases} g(A) = D \\ g(B) = C \end{cases} \quad g \text{ est un déplacement d'angle } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \right) = \pi[2\pi]$$

$\Rightarrow g$ est une symétrie centrale, $g = S_I$ avec $I = A * D$

$$b) * \begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases}$$

$$f \text{ est d'angle } \alpha \text{ tel que } \alpha \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) (2\pi)$$

$\Rightarrow f$ est une rotation d'angle α de centre ω avec $\{\omega\} = \text{med}[AC] \cap \text{med}[BD]$

$$* \begin{cases} g(A) = D \\ g(B) = C \end{cases}$$

$$g \text{ est d'angle } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \right) \equiv \alpha + \pi(2\pi)$$

$\Rightarrow g$ est une rotation d'angle $(\alpha + \pi)$ de centre Ω avec $\{\Omega\} = \text{med}[AD] \cap \text{med}[BC]$

EX6 :

1) $OA = OA'$ et $OA \neq 0$ d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(O) = O' \\ f(A) = A \end{cases}$

$$f \text{ est un déplacement d'angle } \alpha \equiv \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'} \right) (2\pi) \Rightarrow \begin{aligned} f &= r_{(A, \alpha)} \\ f(\zeta) &= \zeta' \end{aligned}$$

2)

$$\left\{ \begin{aligned} r_{(A, \alpha)}(O) &= O' \\ r_{(A, \alpha)}(M) &= M' \\ r_{(A, \alpha)}(A) &= A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A} \right) (2\pi) \text{ car } r \text{ conserve la mesure des angles orientés}$$

$$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'} \right) \equiv \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA} \right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'} \right) (2\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} \right) + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'} \right) (\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \left[\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} \right) - \left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A} \right) \right] \equiv 0(\pi) \text{ car } \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A} \right)$$

d'où les points B, M et M' sont alignés

EX9 :

1) Comme étant composée d'un nombre pair de symétries orthogonales, f , g et h sont des déplacements

2) ABCD rectangle

$$f = (S_{(AB)} \circ S_{(CD)}) \circ (S_{(AD)} \circ S_{(CB)}) \quad g = (S_{(AB)} \circ S_{(AD)}) \circ (S_{(CB)} \circ S_{(CD)}) \quad h = (S_{(AB)} \circ S_{(AD)}) \circ (S_{(CD)} \circ S_{(CB)})$$

$$f = t_{2\overline{DA}} \circ t_{2\overline{CB}}$$

$$g = S_A \circ S_C$$

$$h = S_A \circ S_C = t_{2\overline{CA}}$$

$$f = t_{2(\overline{CB} + \overline{DA})} = t_{2\overline{CA}}$$

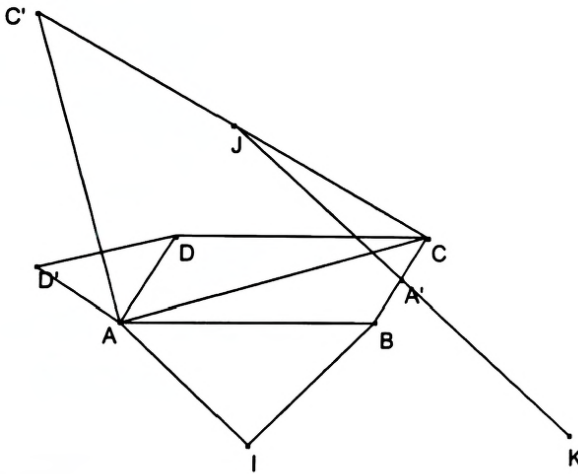
$$g = t_{2\overline{CA}} = f$$

$$h = g = f$$

EX10 :

$$R_A = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$$

$$T = t_{\overline{BA}}$$



$$1) f = R_A \circ T$$

a) $f(B) = R_A \circ T(B) = R_A(A) = A$ f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et d'une rotation) et $f(B)=A$

$$\text{D'autre part on a : } \begin{cases} IA = IB \\ (\widehat{IB, IA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } f \text{ est de centre } I \quad f = r_{(I, \frac{\pi}{2})}$$

$$\text{b) } f(C) = R_A \circ T(C) = R_A(D) = D' \quad \text{d'où } \begin{cases} IC = ID' \\ (\widehat{IC, ID'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

par suite le triangle ICD' est rectangle est isocèle en I.

2) $J=C \star C'$; $R_J = r_{(J, \frac{\pi}{2})}$

a) ACC' est rectangle et isocèle en A et de sens direct $J=C \star C'$ d'où $\begin{cases} \widehat{(JA, JC)} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ \text{et} \\ JA = JC = JC' \end{cases}$

Par suite $R_J(A)=C$

b) $\begin{aligned} \widehat{(AD', CB)} &\equiv \widehat{(AD', DA)}(2\pi) \equiv \widehat{(AD', AD)} + \pi(2\pi) \\ &\equiv \frac{-\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{aligned}$

c) montrons que $R_J(D') = B$

soit $D'' = R_J(D')$ on a aussi $C = R_J(A)$ d'où $\begin{cases} CD'' = AD' \\ \widehat{(AD', CD'')} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = AD' = AD = CB \\ \widehat{(AD', CB)} + \widehat{(CB, CD'')} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ \frac{\pi}{2} + \widehat{(CB, CD'')} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ \widehat{(CB, CD'')} \equiv 0(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{CB} = \overline{CD''} \Rightarrow D'' = B$$

D'où $R_J(D')=B$

$\Rightarrow \begin{cases} JD' = JB \\ \widehat{(JD', JB)} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ est par suite le triangle BJD' est rectangle et isocèle en J

3) $g = R_J \circ f$

a) $g(B) = R_J \circ f(B) = R_J(A) = C$

b) $K = R_J(I)$

$g = r_{(J, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(I, \frac{\pi}{2})}$ g est une rotation d'angle $\pi \Rightarrow g$ est une symétrie centrale

$g(B)=C \Rightarrow g$ est de centre $A'=B \star C$ Donc $g=S_{A'}$

$g(I) = R_J \circ f(I) = R_J(I) = K$

$\Rightarrow A' = I \star K$

$\Rightarrow K' = S_{A'}(I)$

EX11 :

1)

$$r_1 = r_{(O, \frac{\pi}{3})}$$

$$f_1 = r_1 \circ r_2 \quad f_1 \text{ est un}$$

$$r_2 = r_{(B', -\frac{\pi}{3})}$$

 déplacement d'angle $(\frac{\pi}{3} + (-\frac{\pi}{3})) \equiv 0(2\pi)$

 Donc f_1 une translation

$$f_1(B) = r_1 \circ r_2(B) = r_1(O) = O \quad \text{d'où } f_1 = t_{\overline{BO}}$$

$$2) a) (\widehat{BE, OA}) \equiv (\widehat{OA', OA})(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi)$$

(car OBEA' est un parallélogramme)

b)

$$r_1 \circ r_2 = t_{\overline{BO}}$$

$$\Rightarrow r_2 = r_1^{-1} \circ t_{\overline{BO}}$$

$$\Rightarrow r_2 = r_{(O, -\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overline{BO}}$$

$$r_2(E) = r_{(O, -\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overline{BO}}(E) = r_{(O, -\frac{\pi}{3})}(A') = A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'E = B'A \\ (\widehat{B'E, B'A}) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

D'où le triangle EB'A est équilatéral direct

$$3) t_1 = t_{\overline{OA}}$$

$$t_2 = t_{\overline{B'O}}$$

$$a) f_2 = t_1 \circ (r_1 \circ t_2) \quad r_1 \circ t_2 \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{3} \quad \text{d'où } f \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{3}$$

$$b) f_2(B') = t_1 \circ r_1 \circ t_2(B') = t_1 \circ r_1(O) = t_1(O) = A$$

$$\text{on a : } \begin{cases} EB' = EA \\ (\widehat{EB', EA}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } f_2 \text{ est de centre E} \quad \text{Donc } f_2 = r_{(E, \frac{\pi}{3})}$$

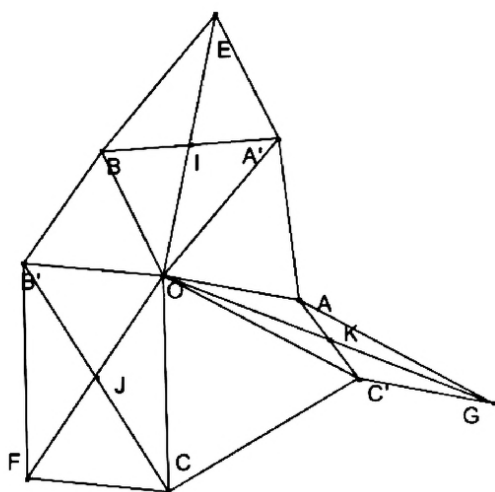
$$c) f_2(F) = t_1 \circ r_1 \circ t_2(F) = t_1 \circ r_1(C) = t_1(C') = G \quad \text{car OB'FC et OC'GA sont des parallélogrammes}$$

$$f_2(F) = G \Leftrightarrow r_{(E, \frac{\pi}{3})}(F) = G \Leftrightarrow \begin{cases} EF = EG \\ (\widehat{EF, EG}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \quad \text{par suite EFG est un triangle équilatéral direct}$$

$$d) \text{ on a : } EF = FG = GE$$

$$\begin{cases} I = O * E \\ J = O * F \end{cases} \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}EF \quad \text{de même } JK = \frac{1}{2}FG \text{ et } IK = \frac{1}{2}GE \quad \text{d'où } IJ = IK = JK \text{ par suite le triangle}$$

IJK est équilatéral



EX12:

$$1) r_A = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \quad r_B = r_{(B, \frac{\pi}{2})}$$

a) $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A

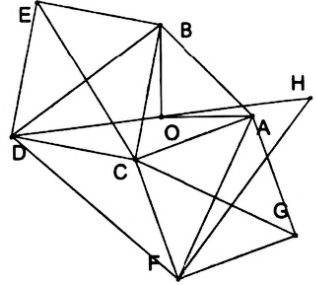
d'angle $2(\widehat{AB, AO}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où

$$S_{(AO)} \circ S_{(AB)} = r_A$$

$$b) r_A = S_{(AO)} \circ S_{(AB)} \quad \text{et} \quad r_B = S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$$

$$\Rightarrow r_A \circ r_B = S_{(AO)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BO)} = S_{(AO)} \circ S_{(BO)} = S_O$$

car $(AO) \perp (BO)$



$$2) a) r_A \circ r_B(E) = r_A(C) = G$$

b)

$$r_A \circ r_B(E) = G$$

$$\Rightarrow S_O(E) = G$$

$$\Rightarrow O = E * G$$

$$c) r_F = r_{(F, \frac{\pi}{2})}$$

$$r_D = r_{(D, \frac{\pi}{2})}$$

$$r_F \circ S_O \circ r_D(C) = r_F \circ S_O(E) = r_F(G) = C$$

$r_F \circ S_O$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi \equiv \frac{3\pi}{2} (2\pi)$ d'où $r_F \circ S_O \circ r_D$ est une translation

$\left[\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi) \right]$ qui fixe le point C d'où $r_F \circ S_O \circ r_D = id_p$

$$d) O = D * H \Rightarrow S_O(D) = H \quad \text{et} \quad r_F \circ S_O \circ r_D = id_p \Rightarrow r_F \circ S_O \circ r_D(D) = D$$

$$r_F \circ S_O \circ r_D(D) = D \Rightarrow r_F \circ S_O(D) = D \Rightarrow r_F(H) = D \Rightarrow \begin{cases} FD = FH \\ \widehat{(FH, FD)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

D'où le triangle DFH est un triangle rectangle et isocèle en F $O = D * H \Rightarrow OD = OF = OH$
Et $(OF) \perp (DO)$ par suite ODF est rectangle et isocèle en O

EX13 :

$$R = r_{(I, \frac{\pi}{2})}$$

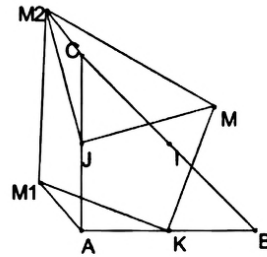
$$T = t_{\frac{1}{2}\vec{BC}}$$

$$f = R \circ T$$

$$g = T \circ R$$

$$1) a) f(K) = R \circ T(K) = R(J) = K$$

$$g(J) = T \circ R(J) = T(K) = J$$



b) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$)

$$f(K) = K \quad \text{d'où} \quad f = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$$

g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g(J) = J$ d'où $g = r_{(J, \frac{\pi}{2})}$

2) a) $g \circ f^{-1} = r_{(J, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(K, -\frac{\pi}{2})}$ et $(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} \equiv 0(2\pi))$ D'où $g \circ f^{-1}$ est une translation

$$b) g \circ f^{-1}(A) = g(I) = C \quad \text{d'où} \quad g \circ f^{-1} = t_{\vec{AC}}$$

$$c) g(M) = M_2 \quad f(M) = M_1$$

$$g \circ f^{-1}(M_1) = g(M) = M_2$$

$$\Rightarrow t_{\vec{AC}}(M_1) = M_2$$

$$\Rightarrow \overline{M_1 M_2} = \overline{AC}$$

d'où ACM_2M_1 est un parallélogramme

EX14 :

$$r(C) = D$$

$$r^{-1}(B) = E$$

1) a) $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C) = D$ $AC = DA$ et $AC \neq 0$ d'où

il existe un unique déplacement f tel que

$$f(A) = D \quad \text{et} \quad f(C) = A$$

b) f est un déplacement d'angle

$$(\widehat{AC, DA}) \equiv (\widehat{AC, AD}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$$

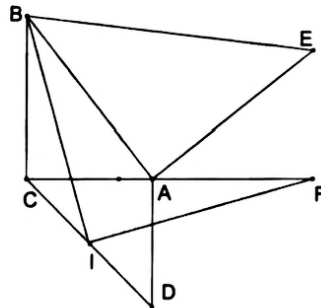
d'où f est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

soit ω son centre

$$f(A) = D \Rightarrow \omega \in \text{med}[AD]$$

$$f(C) = A \Rightarrow \omega \in \text{med}[AC] \quad \text{d'où} \quad \omega = I \quad \text{et}$$

$$f = r_{(I, -\frac{\pi}{2})}$$



$$2) g = f \circ r$$

$$a) g = r_{(I, \frac{-\pi}{2})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})} \quad \left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi) \right) \text{ d'où } g \text{ est une translation}$$

$$\text{et comme } g(A)=D \Rightarrow g = t_{AD}$$

$$b) g(E) = F \Rightarrow f \circ r(E) = F \Rightarrow f(B) = F$$

$$* f(B) = F \Leftrightarrow \begin{cases} IF = IB \\ (\widehat{IB, IF}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où BIF est isocèle et rectangle en I}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} f(C) = A \\ f(B) = F \end{array} \right\} \Rightarrow (AF) \perp (BC) \quad (1) \text{ car } f \text{ est une rotation d'angle } \left(\frac{-\pi}{2} \right)$$

$$\text{or } (AC) \perp (BC) \quad (2)$$

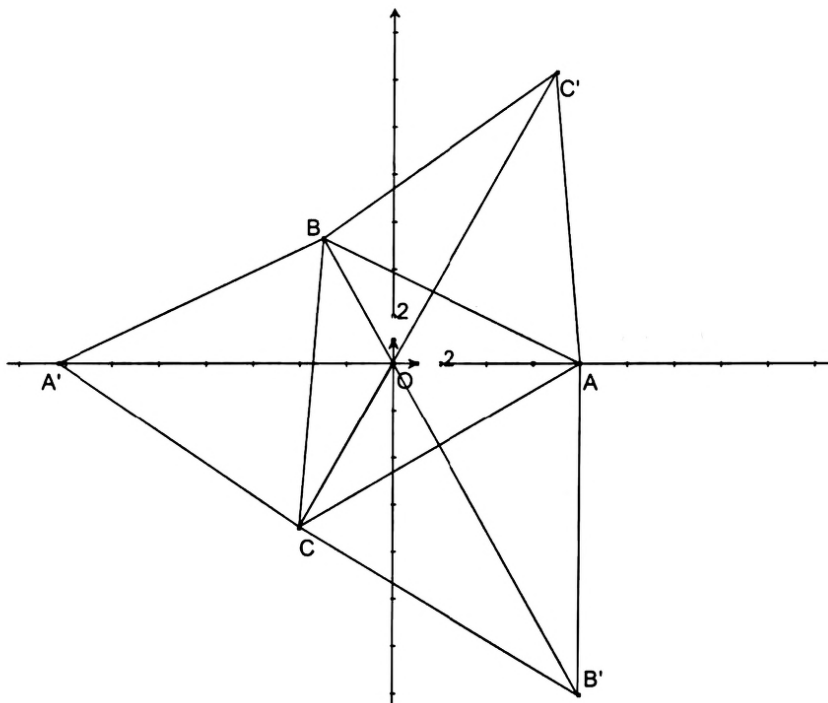
$$(1)-(2) \Rightarrow (AF) \parallel (AC) \quad \text{par suite A, C et F sont alignés}$$

EX15 :

$$a = 8$$

$$1) a) b = 6e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$c = 8e^{\frac{4i\pi}{3}} = 8e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$



$$b) A' = r_{(C, \frac{\pi}{3})}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} CA' = CB \\ \widehat{(CB, CA')} \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a' - c| = |b - c| \\ \arg\left(\frac{a' - c}{b - c}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{a' - c}{b - c}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a' - c}{b - c}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a' - c}{b - c} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c)$$

$$\Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) + c \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(6e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}) + 8e^{-2i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow a' = e^{i\pi} - 8e^{-i\frac{\pi}{3}} + 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a' = -6 + 8(e^{-2i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = -6 + 8\left[\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -14$$

De même :

$$*r_{(A, \frac{\pi}{3})}(C) = B'$$

$$\Rightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) + a$$

$$\Rightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{3}}(8e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 8) + 8$$

$$\Rightarrow b' = 8(1 - i\sqrt{3})$$

$$*r_{(B, \frac{\pi}{3})}(A) = C'$$

$$\Rightarrow C' = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b) + b$$

$$\Rightarrow C' = 7(1 + i\sqrt{3})$$

$$c) * \frac{c'}{c} = \frac{7(1 + i\sqrt{3})}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{14e^{i\frac{\pi}{3}}}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{7}{4}e^{i\pi} = \frac{-7}{4} \Rightarrow \frac{c'}{c} \in \mathbb{R} \Rightarrow O, C \text{ et } C' \text{ alignés}$$

$$* \frac{a'}{a} = \frac{-14}{8} \in \mathbb{R} \Rightarrow O, A \text{ et } A' \text{ alignés}$$

$$* \frac{b'}{b} = \frac{8(1 - i\sqrt{3})}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{8}{3}e^{-i\pi} = \frac{-8}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow O, B \text{ et } B' \text{ alignés}$$

D'où (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O

$$2) a) OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 8 + 6 + 8 = 22$$

$$b) 1 + J + J^2 = 1 + e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{4i\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

3) a)

$$\begin{aligned} |(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| &= \left| (a + bj^2 + cj) - \underbrace{(1 + j + j^2)}_0 z \right| = |a + bj^2 + cj| \\ &= \left| 8 + 6e^{2i\frac{\pi}{3}}e^{4i\frac{\pi}{3}} + 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}e^{-2i\frac{\pi}{3}} \right| = |8 + 6e^{2i\pi} + 8e^{2i0}| = |8 + 6 + 8| = 22 \end{aligned}$$

$$b) |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| \quad (\text{cours}) \Rightarrow |z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$$

$$c) |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \leq |a-z| + |b-z||j|^2 + |c-z||j|$$

$$\Rightarrow 22 \leq |a-z| + |b-z| + |c-z| \Rightarrow 22 \leq MA + MB + MC \quad \text{or } OA + OB + OC = 22$$

D'où MA+MB+MC est minimale pour M=O

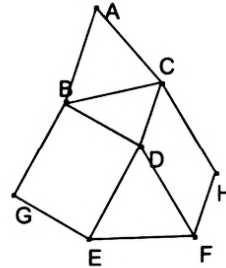
EX16 :

I/ 1) ABC équilatéral direct d'où

$$r_{(A, \frac{\pi}{3})}(B) = C \Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \\ \text{Ag}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

$$* \text{ de même : } r_{(D, \frac{\pi}{3})}(E) = F \Rightarrow f-d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$



$$2) \text{ EDBG est un parallélogramme } \Rightarrow \overline{BG} = \overline{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = e-d+b$$

$$\text{De même : } \Rightarrow \overline{CH} = \overline{DF} \Rightarrow h-c = f-d \Rightarrow h = f-d+c$$

$$3) \quad h-a = (f-d) + (c-a)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d) + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}[(e-d+b)-a]$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{h-a}{g-a} \right| = 1 \\ \text{Ag}\left(\frac{h-a}{g-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |h-a| = |g-a| \\ \text{Ag}\left(\frac{h-a}{g-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH = AG \\ (\widehat{AG, AH}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

D'où le triangle AGH est équilatéral direct

II/

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

1) a) $t_2 \circ R$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (th du cours) d'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) $f(B) = t_2 \circ R \circ t_1(B) = t_2 \circ R(D) = t_2(D) = C$

Or on a : $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{(AB, AC)} \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$ d'où f est une rotation de centre $A \Rightarrow f = r_{(A, \frac{\pi}{3})}$

2) $f(G) = t_2 \circ R \circ t_1(G) = t_2 \circ R(E) = t_2(F) = H$ D'où $\begin{cases} AG = AH \\ \widehat{(AG, AH)} \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$ par suite AGH est

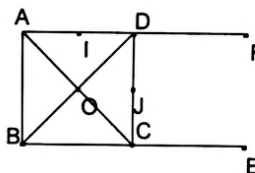
Équilatéral direct

EX17 :

1) $\begin{cases} f(A) = D \\ f(D) = C \end{cases}$

$f \circ f(A) = f(D) = C \neq A$

$\Rightarrow f \circ f \neq id$



d'où f n'est pas une symétrie orthogonale
par suite f est une symétrie glissante

* soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$$

$$f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$$

$$f \circ f(A) = C \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$$

$$f(A) = D \Rightarrow A * D \in \Delta$$

$$f(D) = C \Rightarrow D * C \in \Delta$$

D'où $\Delta = (IJ)$ avec $I = A * D$ et $J = D * C$

2) $E = f(C)$

a) $C = f(D) \Rightarrow E = f \circ f(D) \Rightarrow E = t_{\vec{u}}(D) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ d'où ACED est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ d'où $CE = CD$ et $\widehat{(CE, CD)} \equiv \widehat{(BC, BA)} (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ par suite DCE est un

triangle isocèle rectangle en C et direct.

b) $E = S_C(B)$

c) $F = f(B)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(D)f(C)} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = A * F \Rightarrow F = S_D(A)$$

3) $f \circ S_{(AD)}$ est un déplacement (composée de 2 anti-déplacements)

$$f \circ S_{(AD)}(A) = f(A) = D$$

$$f \circ S_{(AD)}(D) = f(D) = C$$

$f \circ S_{(AD)}$ est un déplacement d'angle $(\widehat{AD, DC}) \equiv (\widehat{DA, DC}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi) = \frac{-\pi}{2}(2\pi)$

D'où $f \circ S_{(AD)}$ est une rotation d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

On a : $f \circ S_{(AD)}(A)=D$ et $\begin{cases} OA=OD \\ (\widehat{OA, OD}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où $f \circ S_{(AD)} = r_{(O, \frac{-\pi}{2})}$

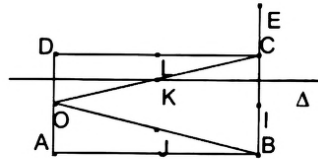
EX18 :

1) a) $t_{JK} \circ S_{(JK)}(B) = t_{JK}(A) = O$

$t_{JK} \circ S_{(JK)}(I) = t_{JK}(O) = D$

c) $BI=OD$ et $BI \neq 0$ d'où il existe un unique antidéplacement f qui transforme B en O et I en D

alors d'après a) $f = t_{JK} \circ S_{(JK)}$ donc symétrie glissante



* de même : il existe un unique déplacement g tel que $g(B)=O$ et $g(I)=D$

$(\widehat{BI, OD}) \equiv 0(2\pi) \Rightarrow g$ est une translation $g(B)=O \Rightarrow g = t_{BO}$

2) $\Delta = \text{med}[IC]$; $k \in \Delta$

a) voir figure

b) $L = C * D$ donc $S_L(D) = C$

c) 1ère méthode $S_L \circ (t_{JK} \circ S_{(JK)})(I) = S_L(D) = C$

$S_L \circ (t_{JK} \circ S_{(JK)})(B) = S_L(O) = E$ (car OCED est un parallélogramme)

Or $S_{\Delta}(I)=C$ et $S_{\Delta}(B)=E$

Deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts sont égaux d'où

$$S_L \circ t_{JK} \circ S_{(JK)} = S_{\Delta}$$

2ème méthode : on a :

$$S_L = S_{(JK)} \circ S_{(DK)}$$

$$t_{JK} = S_{(DK)} \circ S_{\Delta}$$

D'où :

$$\begin{aligned} S_L \circ t_{JK} \circ S_{(JK)} &= S_{(JK)} \circ S_{(DK)} \circ S_{(DK)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(JK)} = (S_{(JK)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(JK)} \\ &= S_{(\Delta)} \circ S_{(JK)} \circ S_{(JK)} \quad \text{car } \Delta \perp (JK) \\ &= S_{(\Delta)} \end{aligned}$$

EX19 :

$$a) A(1,2) \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$*t_u : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$\text{tq } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 1 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

$$*R_{(A, \frac{\pi}{3})} : M(z) \mapsto M'(z')$$

(voir ex 16)

$$\text{tq } z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A$$

En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ on aura $z' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y + 1 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}i(\sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3})$

D'où l'expression analytique de $R_{(A, \frac{\pi}{3})}$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y + 1 + 2\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_u$$

$$M(x, y) \xrightarrow{t_u} M_1(x_1, y_1) \xrightarrow{R_{(A, \frac{\pi}{3})}} M'(x', y')$$

On aura :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}((x+1) - \sqrt{3}(y-1) + 1 + 2\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}(x+1) + (y-1) + 2 - \sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y + 2 + 3\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 1) \end{cases} \quad (\text{expression analytique de } f)$$

$f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_u$, f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre ω : le point invariant par f

$$f(\omega) = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y + 2 + 3\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2 + 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

D'où $\omega(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}))$

$$b) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D : 2x - 3y + 1 = 0$$

$$f = t_u \circ S_D$$

Déterminons l'expression analytique de S_D

$$S_D : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$\text{tq} : \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \in D \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{v} \end{cases} \quad \text{avec: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} : \text{vecteur directeur de } D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - 3\left(\frac{y+y'}{2}\right) + 1 = 0 \\ 3(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' - 3y' = -2x + 3y - 2 \\ 3x' + 2y' = 3x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y - 4) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 6) \end{cases}$$

$$* \text{ t}_u : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$\text{tq} : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$$d'où \quad f = t_u \circ S_D$$

$$f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$\text{tq} : \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y - 4) + 1 \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 6) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) \end{cases}$$

Caractérisons f :

Déterminons l'ensemble des points invariants par f .

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 9 \\ 12x - 18y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 36y = 27 \\ 24x - 36y = -38 \end{cases} \text{ impossible}$$

f est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants d'où f est une symétrie glissante soit $\vec{\omega}$ son vecteur et Δ son axe.

$$f \circ f : M(x, y) \mapsto M'(x', y') \quad \text{tq} : \begin{cases} x' = x + \frac{30}{13} \\ y' = y + \frac{20}{13} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} \frac{30}{13} \\ \frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = t_{2\vec{\omega}} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{15}{13} \\ \frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

$$* \Delta = \{M \in P / \overrightarrow{MM'} = \vec{\omega}\}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) - x = \frac{15}{13} \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) - y = \frac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y - 6 = 0 \\ 12x - 18y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x - 6y + 3 = 0$$

d'où Δ a pour équation $4x - 6y + 3 = 0$

$$c) \quad D_1 : y = 1 \quad D_2 : y = x - 1 \quad D_1 \cap D_2 = \{A(2, 1)\}$$

$$f = S_{D_1} \circ S_{D_2} = r_{\left(A, \frac{-\pi}{2}\right)}$$

EX20 :

$$r: M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$\text{tq} : \begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}$$

1) montrons que r est une isométrie

$$M_1(x_1, y_1) \quad r(M_1) = M'_1(x'_1, y'_1)$$

$$M_2(x_2, y_2) \quad r(M_2) = M'_2(x'_2, y'_2)$$

$$M'_1 M'_2 = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(1 - y_2 - 1 + y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = M_1 M_2$$

D'où r est une isométrie

* déterminons l'ensemble des points invariants par r

$$r(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où r laisse le point } I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ comme unique}$$

point invariant. $\Rightarrow$ r est une rotation de centre I

$$r: M(z) \mapsto M'(z')$$

$$\text{tq} : z' = x' + iy' = 1 - y + ix = i(x + iy) + 1$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 1 \Leftrightarrow z' - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = i \left[z - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) \right] \Leftrightarrow z' - z_I = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_I) \Leftrightarrow \frac{z' - z_I}{z - z_I} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - z_I}{z - z_I} \right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ \widehat{(IM, IM')} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \quad \text{pour } M \neq I$$

$$\text{d'où } r = R(I, \frac{\pi}{2})$$

$$f: M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$

$$2) S_{(0,1)}: M(x, y) \mapsto M'(-x, y) \quad \text{D'où : } \text{tq} : \begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}$$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

$f = r \circ S_{(0,1)}$ est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants

D'où f est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$$f \circ f' = t_{\vec{u}}$$

$$M(x, y) \xrightarrow{f'} M_1(1-y, -x) \xrightarrow{f} M'(1+x, y-1)$$

$$f \circ f' : M(x, y) \mapsto M'(x', y') \text{ tq } \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MM'} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \vec{u} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right)$$

$$f \circ f' = t_{\vec{u}}$$

$$*\Delta = \{M \in P / \overrightarrow{MM'} = \vec{u}\}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{2} \\ y' - y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y - x = \frac{1}{2} \\ -x - y = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ -x - y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x + y - \frac{1}{2} = 0$$

$$d'où \Delta: x+y-\frac{1}{2} = 0$$

EX21 :

$$E : P(Z)=0 \quad \text{avec } P(z)=z^3-(2+4i)z^2-(9-10i)z+18+6i$$

$$1) \text{ a) } P(3)=0$$

$$b) P(z)=(z-3)(z^2+bz+c)=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$$

$$\text{identifions : } \begin{cases} b-3 = -2-4i \\ c-3b = -9+10i \\ -3c = 18+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1-4i \\ c = -6-2i \end{cases}$$

$$d'où P(z)=(z-3)[z^2+(1-4i)z-6-2i]$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ \text{ou} \\ z^2 + (1-4i)z - 6 - 2i \end{cases}$$

$$\Delta = 9 \rightarrow \delta = 3$$

$$z_1 = 1+2i$$

$$z_2 = -2+2i$$

$$S_C = \{3, z_1, z_2\}$$

$$2) \text{ a) } z_A = 3$$

$$z_B = 1+2i \quad z_C = -2+2i$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = 3$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{CB}) = z_B - z_C = 3$$

$$D'où \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$$

Par suite OABC est un parallélogramme

b) $OA=BC$ et $OA \neq 0$

D'où il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g tel que :

$$\begin{cases} f(O) = g(O) = B \\ f(A) = g(A) = C \end{cases}$$

d) f est un déplacement d'angle $(\widehat{OA, BC}) \equiv \pi(2\pi)$

$\Rightarrow f$ est une rotation d'angle π

$\Rightarrow f$ est une symétrie centrale de centre $I=O \star B$

$$z_f = \frac{1}{2} + i$$

$$3) f \circ S(O) = f(O) = B$$

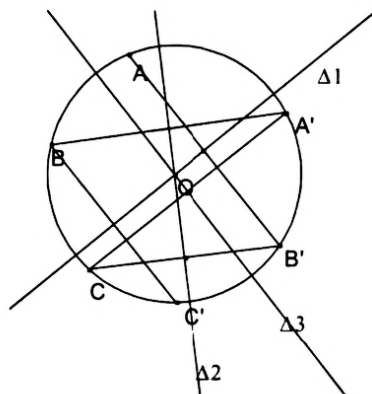
$$f \circ S(A) = f(A) = C$$

$f \circ S$ et g sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts

$$\Rightarrow g = f \circ S$$

EX22 :

1)



$$2) a) f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

Comme étant composée de trois symétries orthogonales f est un antidéplacement

$$O \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \quad f(O) = O$$

f fixe le point O d'où f est une symétrie orthogonale d'axe passant par O .

$$b) f \circ f = id \quad (S_\Delta \circ S_\Delta = id)$$

$$c) f \circ f = id \Rightarrow f = f^l$$

$$f = S_3 \circ S_2 \circ S_1 \Rightarrow f^l = S_1 \circ S_2 \circ S_3$$

$$f(A) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(A) = S_3 \circ S_2(B') = S_3(C) = A' \quad (\text{erreur dans l'énoncé})$$

$$f(C) = f^l(C) = S_1 \circ S_2 \circ S_3(A') = S_1 \circ S_2(B) = S_1(B) = C'$$

f est une symétrie orthogonale tq : $f(A) = A'$ et $f(C) = C'$ d'où $(AA') \parallel (CC')$

EX23 :

A/

$$R_D = r_{(D, \frac{\pi}{2})} \qquad R_B = r_{(B, \frac{\pi}{2})}$$

$$1) f = R_D \circ S_I \circ R_B$$

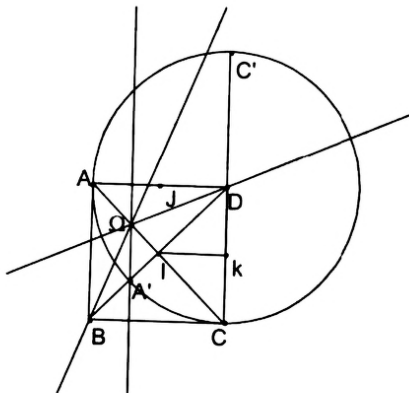
a)

$$f(B) = R_D \circ S_I \circ R_B(B) = R_D \circ S_I(B) = R_D(D) = D$$

$$\text{b) } f = r_{(D, \frac{\pi}{2})} \circ (r_{(I, \pi)} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})})$$

$r_{(I, \pi)} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})}$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0(2\pi) \text{ d'où } f \text{ est une translation}$$



Et comme $f(B)=D \Rightarrow f = t_{\overline{BD}}$

$$2) \quad g = f \circ S_{(U)}$$

a) $g(C) = f \circ S_{(U)}(C) = f(B) = D$ $g(D) = f \circ S_{(W)}(D) = f(A) = C$

b) g est un antidéplacement (composé d'un déplacement et antidéplacement)

$g \circ g(C) = g(D) = C'$ donc $g \circ g \neq id \Rightarrow g$ n'est pas une symétrie orthogonale

d'où g est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$$g \circ g = I_{\mathbb{R}^n}$$

$$g \circ g(D) = C'$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{DC'}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CK}$$

$$*g(C) = D \Rightarrow K = C * D \in \Delta$$

$$*g(D) = C' \Rightarrow D * C' \in \Delta$$

D'où $\Delta=(DC)$

3) a) $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} = S_D$ car $(AD) \perp (CD)$; $S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = S_I$ car $(IK) \perp (IJ)$

$$\text{D'où } S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(BK)} \circ S_{(IJ)} = S_D \circ S_I = t_{AD} = t_{BD} = f$$

b) $S_{(CD)} \circ S_{(IK)} = S_K$ car $(CD) \perp (IK)$ d'où $f = S_{(AD)} \circ S_K \circ S_{(IJ)} \Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_K \circ S_{(IJ)}$

$$\text{c) } \Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_{(AD)} \circ t_{RD} = S_{(AD)} \circ t_{B\bar{A}, \bar{A}D} = S_{(AD)} \circ t_{B\bar{A}} \circ t_{\bar{A}D} = S_{(AD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(IK)} \circ t_{\bar{A}D} = S_{(IK)} \circ t_{\bar{A}D}$$

$\overrightarrow{AD}$: vecteur directeur de (IK) d'où $S_{(AD)} \circ f$ est la symétrie glissante d'axe (IK) et de vecteur $\overrightarrow{AD}$

$$B/1) A' = r_{(D, \pi_4)}(A) \Rightarrow \begin{cases} DA' = DA \\ (\overline{DA}, \overline{DA'}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$$2) r' \circ r \text{ est une rotation d'angle } \frac{3\pi}{4} ; \quad \begin{aligned} r' \circ r(A) &= r'(A) = A' \\ r' \circ r(B) &= r'(D) = D \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \omega \text{ le centre de } r' \circ r \quad \omega \in \text{med}[BD] \Rightarrow \omega \in (AC)$$

$$\omega \in \text{med}[AA'] \Rightarrow \omega \in (A\Omega)$$

Car DAA' est isocèle en D et $\Omega \in$ bissectrice intérieure de $[\overline{DA}, \overline{DA'}]$

D'où $\omega = \Omega$

$$\text{Conclusion : } r' \circ r = r_{(\Omega, \frac{3\pi}{4})}$$

$$3) r' \circ r(A) = A'$$

$$\Rightarrow (\widehat{\Omega A, \Omega A'}) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

$$\Omega \in [AC]$$

$$(\widehat{\Omega A, BA}) \equiv (\widehat{A\Omega, AB})(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{4} (2\pi)$$

$$(\widehat{AB, \Omega A'}) \equiv (\widehat{AB, \Omega A}) + (\widehat{\Omega A, \Omega A'}) \equiv (\widehat{AB, A\Omega}) + \pi + \frac{3\pi}{4} (2\pi) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{3\pi}{4} (2\pi) \equiv 0(2\pi)$$

D'où $(\Omega A') // (AB)$

EX 24 :

$$F = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$$

$$1) a) f(A) = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P(A)$$

$$= R_Q \circ S_{A'}(c)$$

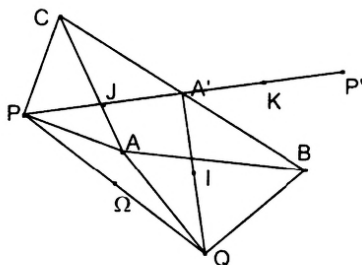
$$= R_Q(B)$$

$$= A$$

$$F = r_{(Q, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(A', \pi)} \circ r_{(P, \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi) \text{ D'où } f \text{ est une}$$

translations et comme $f(A) = A$ alors $f = \text{id}_P$



$$b) f(P) = P$$

$$\Rightarrow R_Q \circ S_{A'} \circ R_P(P) = P$$

$$\Rightarrow R_Q \circ S_{A'}(P) = P$$

$$\Rightarrow R_Q(P') = P$$

$$2) a/ R_Q(P') = P \Rightarrow \begin{cases} QP = QP' \\ (\widehat{QP', QP}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow Q P P'$ est un triangle rectangle et isocèle en Q

et comme $A' = P * P'$ alors $A' P = A' P' = A' Q$

On a : $A' P = Q A'$ et $A' P \neq 0$ D'où il existe un unique déplacement φ tels que :

$$\varphi(A') = Q \text{ et } \varphi(P) = A'$$

b/ φ est un déplacement d'angle $\widehat{(A'P, QA')} \equiv \frac{-\pi}{2} (2\pi)$ d'où φ est une rotation

d'angle $(\frac{-\pi}{2})$ de centre Ω (car $\text{med}[A'Q] \cap \text{med}[PA'] = \{\Omega\}$ $\varphi = r_{(\Omega, \frac{-\pi}{2})}$)

c/ $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$ h est un antidéplacement

$$h(A') = \varphi \circ S_{(A'Q)}(A') = \varphi(A') = Q$$

$$h(P') = \varphi \circ S_{(A'Q)}(P) = \varphi(P) = A'$$

$$h \circ h(P') = h(A') = Q$$

$h \circ h \neq \text{id} \Rightarrow h$ n'est pas une symétrie orthogonale

d'où h est une symétrie glissante ; soit $\vec{U}$ son vecteur et Δ son axe

$$h \circ h = t_{\vec{U}}$$

$$h \circ h(P') = Q \Rightarrow \vec{U} = \frac{1}{2} \vec{P'Q} \quad \vec{U} = \frac{1}{2} \vec{P'Q}$$

Δ passe par $Q^*A' = I$ et $P^*A' = K \Rightarrow \Delta = (IK)$

$$3) \quad \begin{cases} \psi(A') = Q \\ \psi(P) = A' \end{cases}$$

$$a/ J = A'^*P \Rightarrow \psi(J) = \psi(A')^* \psi(P) \Rightarrow \psi(J) = Q^*A' \Rightarrow \psi(J) = I$$

b/ $\text{med}[A'Q] \neq \text{med}[PA']$ d'où ψ n'est pas une symétrie orthogonale par suite ψ est une symétrie glissante.

c/ soit Δ son axe et $\vec{U}$ son vecteur

$$\psi(A') = Q \Rightarrow I = A'^*Q \in \Delta \quad \text{D'où } \Delta = (IJ)$$

$$\psi(P) = A' \Rightarrow J = P^*A' \in \Delta$$

$$\psi = T_{\vec{U}} \circ S_{(IJ)} \text{ et } \psi(J) = I \Rightarrow T_{\vec{U}} \circ S_{(IJ)}(J) = I \Rightarrow T_{\vec{U}}(J) = I \Rightarrow \vec{U} = \vec{JI}$$

$$4) \quad \psi(M) = M_1 \text{ et } \varphi(M) = M_2$$

$$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = \varphi(M) = M_2$$

Caractérisons $\varphi \circ \psi^{-1}$

$$\varphi \circ \psi^{-1}(Q) = \varphi(A') = Q$$

$$\varphi \circ \psi^{-1}(A') = \varphi(P) = A'$$

$\varphi \circ \psi^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe Q et A' d'où $\varphi \circ \psi^{-1} = S_{(QA')}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = M_2 \Rightarrow S_{(QA')}(M_1) = M_2$ donc M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (QA')

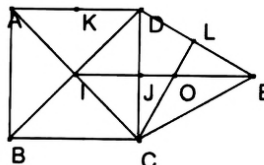
EX 25 :

$$1) \quad \varphi = r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$$

$$a / \varphi(C) = r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(C) = r_{(D, \frac{\pi}{3})}(D) = D$$

$$\varphi(D) = r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(D) = r_{(D, \frac{\pi}{3})}(C) = E$$

b / φ est un antidéplacement (composé d'un déplacement et d'un antidéplacement)



DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$\varphi \circ \varphi (c) = \varphi (D) = E \Rightarrow \varphi \circ \varphi \neq \text{id} \Rightarrow \varphi$ n'est pas une symétrie orthogonale

par suite φ est une symétrie glissante de vecteur $\vec{U} = \frac{1}{2} \vec{CE}$ et

d'axe Δ passant par C^*D et $D^*E \Rightarrow \Delta = (JL)$

2) a / $T_{\vec{AD}} \circ S_{(AB)} = S_{(KI)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} = S_{(KI)}$

b / $\psi = T_{\vec{BD}} \circ S_{(AB)} = T_{\vec{BA} + \vec{AD}} \circ S_{(AB)}$

$$\psi = T_{\vec{BA}} \circ T_{\vec{AD}} \circ S_{(AB)}$$

$\psi = T_{\vec{BA}} \circ S_{(KI)}$ ψ est la symétrie glissante d'axe (KI) de vecteur $\vec{BA}$

3)

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= r_{(D, \frac{\pi}{3})} (N) \\ N_2 &= r_{(0, \frac{-2\pi}{3})} (N) \Rightarrow N = r_{(0, \frac{2\pi}{3})} (N_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(0, \frac{2\pi}{3})} (N_2) = N_1$$

or

$r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(0, \frac{2\pi}{3})}$ et une rotation d'angle $\pi \Rightarrow r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(0, \frac{2\pi}{3})}$ est une symétrie centrale

$$r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(0, \frac{2\pi}{3})} (D) = r_{(D, \frac{\pi}{3})} (C) = E$$

$$\Rightarrow r_{(D, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(0, \frac{2\pi}{3})} = S_L$$

$$\text{par suite } S_L (N_2) = N_1 \Rightarrow L = N_1 * N_2$$

4) $\varphi (M_n) = M_{n+1}$

a / Rappelons que :

$$\varphi = S_{(JL)} \circ T_{\frac{1}{2} \vec{CE}} = T_{\frac{1}{2} \vec{CE}} \circ S_{(L)}$$

$$\varphi \circ \varphi = T_{\vec{CE}} = T_{2 \vec{JL}}$$

(Démonstration par récurrence)

Vérifions pour $n=0$

$$\overline{MoMo} = (2x0) \vec{JL} \text{ (vrai)}$$

Supposant que $\overline{MoM}_{2n} = (2n) \vec{JL}$

et montrons que

$$\overline{MoM}_{2(n+1)} = 2(n+1) \vec{JL}$$

$$\overline{MoM}_{2n+2} = \overline{MoM}_{2n} + \overline{M_{2n}M}_{2n+2}$$

$$= (2n) \vec{JL} + 2 \vec{JL}$$

$$= (2n+2) \vec{JL}$$

3) $r = r_{(I, \frac{\pi}{2})}$

a) $r(B)=J$
 $r(C)=D$
 $r(J)=A$

b) l'image de la droite (BM) par r est la droite passant par r(B)=J et qui lui est perpendiculaire (car r est d'angle $\frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow r(BM)=(JM')$ De même $r(IM)=(IM')$

D'où $r(M)=M'$

$M \in [CJ] \Leftrightarrow M' \in r([CJ]) \Leftrightarrow M' \in [DA]$

4) $g = r \circ f = r_{(I, \frac{\pi}{2})} \circ S_O$

a) $g = r_{(I, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(O, \pi)}$ g est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. g est d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) $g(A) = r \circ S_O(A) = r(C) = D$

c) soit ω le centre de g

$g(A) = D \Leftrightarrow \begin{cases} \omega A = \omega D \\ \widehat{(\omega A, \omega D)} \equiv \frac{-\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \omega : \text{le centre du carré AIJD}$

5) a) $AI=CJ$ et $AI \neq 0$ D'où....

b) $\text{med}[AC] \neq \text{med}[IJ]$ donc h n'est pas une symétrie orthogonale $\Rightarrow h$ est une symétrie glissante

c) $I = A * B \Rightarrow h(I) = h(A) * h(B) \Rightarrow J = C * h(B) \Rightarrow h(B) = S_J(C) = D$

6) a) 1ère méthode:

$h \circ S_{(AB)}(A) = h(A) = C$

$h \circ S_{(AB)}(B) = h(B) = D$

$h \circ S_{(AB)}$ est un déplacement d'angle $\widehat{(AB, CD)} \equiv \pi (2\pi)$

$h \circ S_{(AB)}$: symétrie centrale de centre $A * C = O$

$h \circ S_{(AB)} = S_O = f$

b) $h \circ S_{(AB)} = S_O \Rightarrow h \circ S_{(AB)} = S_{(IJ)} \circ S_{(O\omega)} \Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ (S_{(O\omega)} \circ S_{(AB)})$
 $\Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ I_{2\vec{O}}$
 h: symétrie glissante d'axe (IJ) de vecteur $\vec{IJ}$

a) 2ème méthode :

$\left. \begin{array}{l} h(A) = C \\ h(D) = D' \end{array} \right\} \Rightarrow CD' = AD = BC \quad (1)$

$D' = h(D)$

$\widehat{(AB, AD)} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Rightarrow \widehat{(CD, CD')} \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ car un antidéplacement change les mesures des

Angles orientées en leurs opposées

$$\begin{aligned} (\widehat{CB, CD'}) &\equiv (\widehat{CB, CD}) + (\widehat{CD, CD'}) (2\pi) \\ &\equiv \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (2\pi) \equiv \pi (2\pi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \overline{CB} = -\overline{CD'} \Rightarrow C = B * D' \Rightarrow D' = S_C(B)$$

b) 2^{ème} methode : $h(B)=D$ et $h(D)=D'$

$$h \circ h(B) = D' \quad \text{or} \quad h \circ h = t_{2u}$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \overline{BD'} \Rightarrow \vec{u} = \overline{BC} = \overline{IJ}$$

$$\Delta \text{ passe par } B * D = O \text{ et } \Delta // (IJ) \Rightarrow \Delta = (IJ)$$

$$c) h \circ h(A) = h(C) = C' \Rightarrow \overline{AC'} = \overline{BD'} \Rightarrow C' = S_D(A)$$

$$7) \text{ on a : } h(E)=E' \quad \text{car } h(\zeta)=\zeta' \text{ et } h([AC])=[CC']$$

$$F = S_{(IJ)}(E')$$

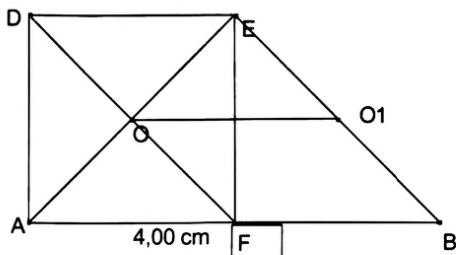
$$\Rightarrow F = S_{(IJ)} \circ h(E)$$

$$\Rightarrow F = \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} \circ t_{IJ}(E)$$

$$\Rightarrow F = t_{\vec{IJ}}(E)$$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{IJ} \Rightarrow (EF) // (AD)$$

EX 27 :



$$1) a) r(F)=E \quad r(E)=D$$

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{FE, ED}) &\equiv (\widehat{FE, FA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ \text{med}[FE] \cap \text{med}[ED] &= \{O\} \end{aligned} \right\} \text{ D'où } r = r_{(O, \frac{\pi}{2})}$$

$$b) f = r \circ S_{(OO_1)} \quad \begin{aligned} f(O) &= r \circ S_{(OO_1)}(O) = r(O) = O \\ f(E) &= r \circ S_{(OO_1)}(E) = r(F) = E \end{aligned}$$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

f est un antidéplacement (composé d'un déplacement et un antidéplacement) qui fixe deux points distincts O et E d'où $f = S_{(OE)}$

$$2) \quad r' = t_{\overline{OO_1}} \circ r^{-1} = t_{\overline{OO_1}} \circ r_{(O, \frac{\pi}{2})}$$

a) comme étant composée d'une translation et d'une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$,

r' est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

$$b) \quad r'(O) = t_{\overline{OO_1}} \circ r^{-1}(O) = t_{\overline{OO_1}}(O) = O_1$$

$$\text{on a : } \begin{cases} FO = FO_1 \\ \widehat{(FO, FO_1)} \equiv \frac{-\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } r \text{ est de centre } F \quad \text{donc } r' = r_{(F, \frac{-\pi}{2})}$$

$$3) \quad g(D)=F \quad \text{et} \quad g(O)=O_1$$

a) * $\text{med}[DF] \neq \text{med}[OO_1]$ d'où g n'est pas une symétrie orthogonale, par suite g est une symétrie glissante

* soit Δ son axe et $\vec{u}$ son vecteur

$$g(D)=F \Rightarrow D * F = O \in \Delta$$

$$g(O)=O_1 \Rightarrow O * O_1 \in \Delta \quad \text{d'où } \Delta = (OO_1)$$

$$g(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{(OO_1)}(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(O) = O_1 \Leftrightarrow \vec{u} = \overline{OO_1}$$

$$\text{d'où} \quad : g = t_{\overline{OO_1}} \circ S_{(OO_1)} = S_{(OO_1)} \circ t_{\overline{OO_1}}$$

$$b) \quad g(M) = r'(M) \Leftrightarrow t_{\overline{OO_1}} \circ S_{(OO_1)}(M) = t_{\overline{OO_1}} \circ r^{-1}(M)$$

$$\Leftrightarrow t_{\overline{OO_1}}(S_{(OO_1)}(M)) = t_{\overline{OO_1}}(r^{-1}(M))$$

$$\Leftrightarrow S_{(OO_1)}(M) = r^{-1}(M)$$

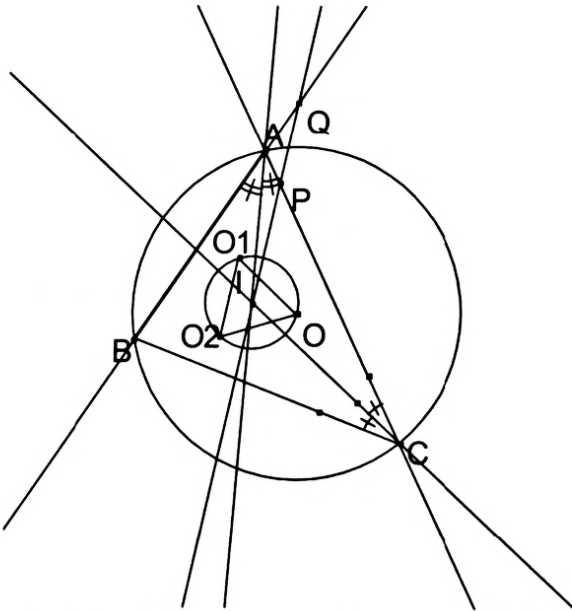
$$\Leftrightarrow r(S_{(OO_1)}(M)) = M$$

$$\Leftrightarrow r \circ S_{(OO_1)}(M) = M$$

$$\Leftrightarrow f(M) = M$$

$$c) \quad g(M) = r'(M) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow S_{(OE)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (OE)$$

EX 28 :



- 1) a) le triangle BCP est isocèle en C et $[CI]$: bissectrice de $[\widehat{BC}, \widehat{BP}]$ D'où $(CI) = \text{med}[BP]$

De même $(BI) = \text{med}[CQ]$

b) $(\widehat{CP}, \widehat{QB}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{AB})(2\pi) \equiv (\widehat{AC}, \widehat{AB}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3} + \pi(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

2) $f(C) = Q$ $f(P) = B$

a) $(\widehat{CP}, \widehat{QB}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et $\text{med}[CQ] \cap \text{med}[PB] = \{I\}$ D'où $f = r_{(I, \frac{2\pi}{3})}$

b) $f(P) = B \Rightarrow (\widehat{IP}, \widehat{IB}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

le triangle CPB est isocèle en C et direct et $(CI) = \text{med}[BP]$

L'image de $[\widehat{IB}, \widehat{IC}]$ par $S_{(CI)}$ est $[\widehat{IP}, \widehat{IC}]$ D'où $\widehat{BIC} = \widehat{PIC}$

$\Rightarrow \widehat{PIB} + 2\widehat{BIC} = 2\pi \Rightarrow 2\widehat{BIC} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{BIC} = \frac{2\pi}{3}$ Par suite $(\widehat{IB}, \widehat{IC}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

c) $f(C) = Q \Rightarrow (\widehat{IC}, \widehat{IQ}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et comme $(BI) = \text{med}[CQ]$ D'où $(\widehat{IQ}, \widehat{IB}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$(\widehat{IP}, \widehat{IQ}) \equiv (\widehat{IP}, \widehat{IB}) + (\widehat{IB}, \widehat{IQ})(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}(2\pi) \equiv 0(2\pi)$

d'où $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{IQ}$ sont colinéaires par suite I, P et Q sont alignés

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$$3) O_1 = f(O); O_2 = f(O_1)$$

$$a) f = r_{(I, \frac{2\pi}{3})} \quad f \circ f = r_{(I, \frac{4\pi}{3})} \text{ et } f \circ f \circ f = r_{(I, 2\pi)} = id_P \Rightarrow f \circ f \circ f(O) = O \Rightarrow f \circ f(O_1) = O \Rightarrow f(O_2) = O$$

b)

$$\begin{cases} f(O) = O_1 \\ f(O_1) = O_2 \end{cases} \Rightarrow OO_1 = O_1O_2$$

$$\begin{cases} f(O_1) = O_2 \\ f(O_2) = O \end{cases} \Rightarrow O_1O_2 = OO_2$$

D'où $OO_1 = O_1O_2 = OO_2$ par suite le triangle OO_1O_2 est équilatéral

$$* f(O_1) = O_2 \Rightarrow IO_1 = IO_2 \quad \text{or } OO_1 = OO_2 \text{ D'où } (OI) = \text{med}[O_1O_2]$$

$$4) r = r_{(O, \frac{2\pi}{3})} \quad g = f \circ r \circ f$$

$$a) g = r_{(I, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(I, \frac{2\pi}{3})}$$

$$r_{(I, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\pi}{3})} \text{ est une rotation d'angle } \frac{4\pi}{3} \quad \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \neq 0(2\pi) \right)$$

$$\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \equiv 0(2\pi) \quad \text{d'où } g \text{ est une translation}$$

$$g(O_2) = f \circ r \circ f(O_2) = f \circ r(O) = f(O) = O_1$$

$$* \text{ d'où } g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$$

b) O : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$$\text{d'où } \begin{cases} OB = OC \\ \text{et} \\ \widehat{(OB, OC)} \equiv 2(\widehat{AB, AC})(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB = OC \\ \widehat{(OB, OC)} \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi) \Rightarrow r(B) = C \end{cases}$$

$$* g(P) = f \circ r \circ f(P) = f \circ r(B) = f(C) = Q$$

$$c) g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$$

$$g(P) = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_1}$$

$$\text{d'où } (PQ) // (O_1O_2)$$

$$\text{or } (OI) \perp (O_1O_2) \quad \text{car } (OI) = \text{med}[O_1O_2]$$

$$\text{d'où } (PQ) // (OI)$$

CH 7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

QCM

1. Le quotient de -20 par 7 est -3
2. Pour tout entier n : $n^3 - n \equiv 0(6)$
3. Le nombre $100!$ Est divisible par 2^{50}
4. Soit a un entier non nul.
Si $a \equiv 19(20)$ alors $a \equiv -1(20)$ alors $a^{402} \equiv (-1)^{402}(20) \Rightarrow a^{402} \equiv 1(20)$

VRAI-FAUX

1. a/ si $a \equiv 1(n)$ alors $a^2 \equiv 1^2(n)$ donc $a^2 \equiv 1(n)$ **Vrai**
b/ si $a^2 \equiv 0(n)$ alors $a \equiv 0(n)$ **Faux** (contre exemple : $a=2$ et $n=4$)
c/ si $2a \equiv 4(10)$ alors $a \equiv 2(10)$ **Faux** (contre exemple : $a=7$)
2. Pour tout entier a et pour tout entier non nul n , $a^n \equiv a(n)$ **FAUX**
Contre exemple : $a=2$ et $n=4$
3. Il existe un entier b non nul tel que $5b \equiv 0(10)$ VRAI $b=2$ (par exemple)

CH 7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 1 : 13 est un nombre premier $D_{13} = \{\pm 1 ; \pm 13\}$

$$57=3 \times 19 \quad D_{57} = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 19 ; \pm 57\}$$

$$205=5 \times 41 \quad D_{205} = \{\pm 1 ; \pm 5 ; \pm 41 ; \pm 205\}$$

EX 2 : Le nombre -35763 est un multiple de 3 et de 7 et n'est pas multiple de 11

EX 3 : 1. $15=3 \times 5 \quad D_{15} = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 5 ; \pm 15\}$

$$2. a^2 - b^2 = 15 \Leftrightarrow (a-b) \times (a+b) = 15$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=15 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=15 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=-15 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=-15 \\ a+b=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=-5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=-5 \\ a+b=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

Tous les couples $(a,b) / a^2 - b^2 = 15$ sont : $(8,7) ; (8,-7) ; (4,1) ; (4,-1) ;$

$(-8,-7) ; (-8,7) ; (-4,-1) ; (-4,1)$

EX 4 : tout entier non nul n divise n ; donc si n divise $n+5$ alors n divise $(n+5)-n=5$

$$\text{Donc } n = \pm 1 \text{ ou } n = \pm 5$$

EX5 : $n-2$ divise $n-2$; donc si $n-2$ divise $n-9$ Alors $n-2$ divise $(n-9)-(n-2)=-7$ donc

$$n-2 = \pm 1 \text{ ou } n-2 = \pm 7 \quad \text{Donc } n \in \{1, 3, -5, 9\}$$

EX6 : On a $3^2=9 \equiv 2(7) \Rightarrow (3^2)^n \equiv 2^n(7) \Rightarrow (3^2)^n - 2^n \equiv 0(7)$ donc $(3^2)^n - 2^n$ est un multiple de 7

EX7 : 1. $3171=19 \times 166 + 17$ (calculatrice : taper 3171 ab/c 19)

2. $3171 = (-19) \times (-166) + 17 \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de 3171 par -19 est 17

EX8 : $307=7 \times 43 + 6 \Rightarrow -307 = (-7) \times 43 - 6 \Rightarrow -307 = (-7) \times 44 + 1 \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de (-307) par (-7) est 1.

EX9 :

$$1345791113 = 246812 \times 5452 + 172089 \Rightarrow q=5452 \quad \text{et } r=172089$$

$$-1345791113 = 246812 \times (-5451) + 74723 \Rightarrow q=-5451 \quad \text{et } r=74723$$

$$1345791113 = -246812 \times (-5452) + 172089 \Rightarrow q=-5452 \quad \text{et } r=172089$$

$$-1345791113 = -246812 \times (5453) + 74723 \Rightarrow q=5453 \quad \text{et } r=74723$$

EX 10 :

$$1. P(n)=0 \Leftrightarrow n^4 - 32n^3 + 186n^2 - 280n = -125 \Leftrightarrow n(-n^3 + 32n^2 - 186n + 280) = -125 \Rightarrow n \mid 125$$

2. D'après 1. les racines entiers naturels possibles de P sont : 1 ; 5 ; 25 et 125

Une simple vérification permet de conclure que 1 ; 5 et 25 sont des racines de P

$$\text{Donc } P(x) = (x-1)(x-5)(x-25)(x-a)$$

$$\text{Donc } P(x) = (x-1)(x-5)(x-25)(x-1) \quad \text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \{1, 5, 25\}$$

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 11 :

$$1. \quad a+b=44 \quad q=6 \quad r=2 \quad a=b.q+r$$

$$\Downarrow$$

$$b.q+r=b=44 \Rightarrow b.(q+1)+r=44 \Rightarrow b.7+2=44 \Rightarrow b=6 \Rightarrow a=44-6=38$$

$$2. \quad a+b=-49 \quad q=-13 \quad r=11 \quad a=b.q+r$$

$$\Downarrow$$

$$b.q+r+b=-49 \Rightarrow b.(q+1)+r=-49 \Rightarrow b.(-12)+11=-49 \Rightarrow b=5 < 11=r \text{ impossible}$$

$$3. \quad a+b=42 \quad q=-6 \quad r=9 \quad a=b.q+r$$

$$\Downarrow$$

$$b.q+r+b=42 \Rightarrow b.(q+1)+r=42 \Rightarrow b.(-5)+9=42 \Rightarrow -5b=33 \text{ impossible}$$

EX 12 :

$$-1=9.(-1)+8 \Rightarrow -1 \equiv 8(9) \Rightarrow \text{le reste modulo 9 de } (-1) \text{ est } 8$$

$$10=9 \times 1 + 1 \Rightarrow 10 \equiv 1(9) \Rightarrow \text{le reste modulo 9 de } (10) \text{ est } 1$$

$$-10=9 \times (-2) + 8 \Rightarrow -10 \equiv 8(9) \Rightarrow \text{le reste modulo 9 de } (-10) \text{ est } 8$$

$$-27=9 \times (-3) \quad -27 \text{ est un multiple de } 9 \Rightarrow \text{le reste modulo 9 de } (-27) \text{ est } 0$$

$$-25=9 \times (-3) + 2 \Rightarrow -25 \equiv 2(9) \Rightarrow \text{le reste modulo 9 de } (-25) \text{ est } 2$$

EX 13 :

$$\bullet \quad n \equiv -2(7) \Rightarrow n=7k-2$$

$$-10 \leq n \leq 15 \Leftrightarrow -10 \leq 7k-2 \leq 15 \Leftrightarrow -8 \leq 7k \leq 17 \Leftrightarrow -\frac{8}{7} \leq k \leq \frac{17}{7} \Rightarrow k \in \{-1, 1, 0, 2\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-9, 5, -2, 12\}$$

$$\bullet \quad n \equiv 6(11) \Rightarrow n=11k+6$$

$$-6 \leq n \leq 20 \Leftrightarrow -6 \leq 11k+6 \leq 20 \Leftrightarrow -12 \leq 11k \leq 14 \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow n \in \{-5, 6, 17\}$$

EX 14 :

$$1. \quad n \text{ non divisible par } 3 \Rightarrow n \equiv 1(3) \text{ ou } n \equiv 2(3) \Rightarrow n-1 \equiv 0(3) \text{ ou } n+1 \equiv 0(3)$$

$$\Rightarrow n-1 \text{ ou } n+1 \text{ est divisible par } 3$$

$$2. \quad \text{Supposons que } n : p \text{ et } n-p \text{ ne sont pas divisibles par } 3 \quad \text{Alors}$$

$$\begin{cases} n \equiv 1(3) \\ p \equiv 2(3) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n \equiv 2(3) \\ p \equiv 1(3) \end{cases} \Rightarrow n+p \equiv 0(3) \text{ ou } n+p \equiv 0(3) \Rightarrow n+p \text{ est divisible par } 3$$

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 15 :

$a \equiv 3(15)$ et $b \equiv 11(15) \Rightarrow a+b \equiv 14(15) \Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $a+b$ est 14

$a \equiv 3(15)$ et $b \equiv 11(15) \Rightarrow a-b \equiv -8(15) \Rightarrow a-b \equiv 7(15) \Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $a-b$ est 7

$a \equiv 3(15) \Rightarrow -a \equiv -3(15) \Rightarrow -a \equiv 12(15) \Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $-a$ est 12

$a \equiv 3(15)$ et $b \equiv 11(15) \Rightarrow a.b \equiv 33(15) \Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $a.b$ est 3

$a \equiv 3(15) \Rightarrow -a^2 \equiv -9(15) \Rightarrow -a^2 \equiv 6(15) \Rightarrow -a^2.b \equiv 66(15) \Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $-a^2.b$ est 6

$b \equiv 11(15) \Rightarrow b^2 \equiv 121(15) \Rightarrow b^2 \equiv 1(15) \Rightarrow ab^2 \equiv 3(15)$

$\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de ab^2 est 3

EX 16 :

• $b \equiv 4(17)$ et $c \equiv 5(17) \Rightarrow b.c \equiv 20(17) \mathbb{Z} \Rightarrow b.c \equiv 3(17)$ et comme $a \equiv 2(17) \Rightarrow a+bc \equiv 5(17)$
Donc le reste modulo 17 de $a+bc$ est 5.

• $a \equiv 2(17) \Rightarrow a^2 \equiv 2^2(17) \Rightarrow a^2 \equiv 4(17)$

$b \equiv 4(17) \Rightarrow b^2 \equiv 16(17) \Rightarrow b^2 \equiv -1(17)$

Alors $a^2+b^2+c^2 \equiv 4-1+8(17)$ Donc le reste

$c \equiv 5(17) \Rightarrow c^2 \equiv 25(17) \Rightarrow c^2 \equiv 8(17)$

modulo 17 de $a^2+b^2+c^2$ est 11.

EX 17 :

$\begin{cases} a \equiv 5(4) \\ b \equiv 2(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 25(4) \\ ab \equiv 10(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1(4) \\ ab \equiv 10(4) \end{cases} \Rightarrow 3a^2 + ab - 9 \equiv 3 + 10 - 9(4)$ Donc le reste modulo 4 de $3a^2+ab-9$ est 0.

EX 18 :

$a \equiv 7(11) \Rightarrow a+1 \equiv 8(11)$ et $a+2 \equiv 9(11) \Rightarrow a.(a+1)(a+2) \equiv 7 \times 8 \times 9(11) \Rightarrow a(a+1)(a+2) \equiv 504(11)$
Donc le reste modulo 11 de $a.(a+1)(a+2)$ est 9 ($504 = 11 \times 45 + 9$)

EX 19 :

1. (par récurrence)

• pour $n=1$ $1^2+2^2+\dots+n^2=1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n=1$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que et montrons que(facile)

2. D'après 1. $1^2+2^2+\dots+100^2 = \frac{100.101.201}{6} = 50.101.67 \equiv 1.3.4(7)$ (car $50 \equiv 1(7)$...)

Donc le reste modulo 7 de $1^2+2^2+\dots+100^2$ est 5

EX 20 :

- Le reste modulo 10 de 30757 est 7
- Le reste modulo 10 de 15163 est 3
- Le reste modulo 10 de 12924 est 4

EX 21 :

- $171 \equiv 1(17) \Rightarrow 171^{171} \equiv 1^{171}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 171^{171} est 1
- $186 \equiv -1(17) \Rightarrow 186^{186} \equiv (-1)^{186}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 186^{186} est 1
- $356 \equiv -1(17) \Rightarrow 356^{583} \equiv (-1)^{583}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 356^{583} est 16

EX 22 :

1. $-1 = 10x(-1) + 9$ Donc Le reste modulo 10 de (-1) est 9
2. $9 \equiv -1(10) \Rightarrow 9^{2007} \equiv (-1)^{2007}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2007} est 9
 $9 \equiv -1(10) \Rightarrow 9^{2008} \equiv (-1)^{2008}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2008} est 1

EX 23 :

- $49 \equiv 1(16) \Rightarrow 49^{316} \equiv 1^{316}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 49^{316} est 1
- $15 \equiv -1(16) \Rightarrow 15^{2008} \equiv (-1)^{2008}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 15^{2008} est 1
- $-49 \equiv -1(16) \Rightarrow (-49)^{236} \equiv (-1)^{236}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de $(-49)^{236}$ est 1

EX 24 :

- $4^2 = 16 \equiv 3(13) \Rightarrow 4^3 \equiv 4 \times 3(13)$ Donc Le reste modulo 13 de 4^3 est 12
- $121 \equiv 4(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv 4^{357}(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv (4^3)^{119}(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv (-1)^{119}(13)$
 Donc Le reste modulo 13 de 121^{357} est 12

EX 25 :

1. $50 \equiv 1(7) \Rightarrow 50^{99} \equiv 1^{99}(7) \Rightarrow 50^{99} \equiv 1(7) \Rightarrow$ Le reste modulo 7 de 50^{99} est 1
2. $50 \equiv -1(17) \Rightarrow 50^{99} \equiv (-1)^{99}(17) \Rightarrow 50^{99} \equiv -1(17) \Rightarrow$ Le reste modulo 17 de 50^{99} est 16

EX 26 :

$$19 \equiv (-2)(7) \Rightarrow 19^{52} \equiv (-2)^{52}(7) \Rightarrow 19^{52} \equiv (2)^{52}(7) \quad \text{et} \quad 23 \equiv 2(7) \Rightarrow 23^{41} \equiv 2^{41}(7)$$

$$\text{Alors } 19^{52} \cdot 23^{41} \equiv 2^{52+41}(7) \Rightarrow 19^{52} \cdot 23^{41} \equiv 2^{93}(7) \Rightarrow 19^{52} \cdot 23^{41} \equiv (2^3)^{31}(7) \Rightarrow 19^{52} \cdot 23^{41} \equiv 1^{31}(7)$$

$$\text{Donc le reste modulo 7 de } 19^{52} \cdot 23^{41} \text{ est 1}$$

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 27 :

- $5^2=25 \equiv -1(13) \Rightarrow 5^4 \equiv (-1)^2(13) \Rightarrow 5^4 \equiv 1(13) \Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^4 est 1
- $5^{4k} = (5^4)^k \equiv 1^k(13) \Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^{4k} est 1
 • $5^{4k+1} = (5^4)^k \cdot 5 \equiv 1^k \cdot 5(13) \Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^{4k+1} est 5
 • $5^{4k+2} = (5^4)^k \cdot 25 \equiv 1^k \cdot 25(13) \Rightarrow 5^{4k+2} \equiv -1(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+2} est 12
 • $5^{4k+3} = (5^4)^k \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 5(13) \Rightarrow 5^{4k+3} \equiv -5(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+3} est 8
- $41 \equiv 1(4) \Rightarrow 5^{202020202041} = 5^{4k+1}$ donc le reste modulo 13 de $5^{202020202041}$ est 5
 $55 \equiv 3(4) \Rightarrow 5^{555555555555} = 5^{4k+3}$ donc le reste modulo 13 de $5^{555555555555}$ est 8
- pour $n=4k$ $5^{2n} + 5^n \equiv 1+1(13)$
 Pour $n=4k+1$ $5^{2n} + 5^n \equiv -1+5(13)$
 Pour $n=4k+2$ $5^{2n} + 5^n \equiv 1+12(13) \Rightarrow 5^{2n} + 5^n \equiv 0(13)$
 Pour $n=4k+3$ $5^{2n} + 5^n \equiv -1+8(13) \Rightarrow 5^{2n} + 5^n \equiv 7(13)$

Conclusion : l'ensemble des entiers n tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0(13)$ est $\{4k+2 ; k \in \mathbb{N}\}$

EX 28 :

- $-1=5x(-1)+4$ Donc le reste modulo 5 de (-1) est 4 $\Rightarrow 4 \equiv -1(5) \Rightarrow 4^{2099} \equiv (-1)^{2099}(5)$
 $-2=5x(-1)+3$ Donc le reste modulo 5 de (-2) est 3 $\Rightarrow 3 \equiv -2(5) \Rightarrow 3^{2099} \equiv (-2)^{2099}(5)$
 Alors $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099} \equiv 1^{2099} + 2^{2099} + (-2)^{2099} + (-1)^{2099}(5)$
 $\equiv 0(5)$

Donc $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ est divisible par 5

EX 29 :

- $999=27 \times 37+0 \Rightarrow 999 \equiv 0(27)$
- $999 \equiv 0(27) \Rightarrow 1000 \equiv 1(27) \Rightarrow 10^3 \equiv 1(27) \Rightarrow (10^3)^n \equiv 1^n(27) \Rightarrow 10^{3n} \equiv 1(27)$
- $10^{100}=10 \cdot 10^{3 \times 33} \equiv 10(27)$ et $100^{10}=10^{20}=100 \cdot 10^{3 \times 6} \equiv 100(27)$ Alors
 $10^{100} + 100^{10} \equiv 10 + 100(27) \Rightarrow 10^{100} + 100^{10} \equiv 2(27)$

Conclusion : le reste modulo 27 de $10^{100} + 100^{10}$ est 2

EX 30 : $2^4 \equiv 1(5)$ (th de Fermat)

Si n est un multiple de 4 $\Rightarrow n=4k \Rightarrow 2^n = (2^4)^k \equiv 1^k(5) \Rightarrow 2^n \equiv 1(5)$

Si n n'est pas multiple de 4 $\Rightarrow \begin{cases} n=4k+1 \Rightarrow 2^n = 2^{4k+1} = 2^{4k} \times 2 \equiv 2(5) \\ n=4k+2 \Rightarrow 2^n = 2^{4k+2} = 2^{4k} \times 4 \equiv 4(5) \text{ Alors } 2^n \text{ n'est pas} \\ n=4k+3 \Rightarrow 2^n = 2^{4k+3} = 2^{4k} \times 8 \equiv 3(5) \end{cases}$

congru à 1 modulo 5

Conclusion : $2^n \equiv 1(5)$ ssi n est un multiple de 4

Un travail analogue permet de conclure que : $2^n \equiv 1(11)$ ssi n est un multiple de 10

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 31 :

Tableau de congruence

Reste modulo 5 de n	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de n ²	0	1	4	4	1

Conclusion : Les restes possibles modulo 5 de n² sont : 0 ; 1 et 4

Tableau de congruence

Reste modulo 7 de n	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de n ³	0	1	1	6	1	6	6

Conclusion : Les restes possibles modulo 7 de n³ sont : 0 ; 1 et 6

EX 32 :

Tableau de congruence

Reste modulo 10 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de 2x	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
Reste modulo 10 de 4x	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6

$$a/ 2x \equiv 4(10) \quad S_Z = \{10k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10k+7 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$b/ 4x \equiv 8(10) \quad S_Z = \{10k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10k+7 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

EX 33 :

Tableau de congruence

Reste modulo 4 de x	0	1	2	3
Reste modulo 4 de x ²	0	1	0	1

$$a/ x^2 \equiv 0(4) \quad S_Z = \{4k ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$b/ x^2 \equiv 2(4) \quad S_Z = \emptyset$$

$$c/ x^2 \equiv 3(4) \quad S_Z = \emptyset$$

EX 34 :

Reste modulo 11 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo 11 de x ²	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

$$a/ x^2 \equiv 4(11) \quad S_Z = \{11k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11k+9 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$b/ x^2 \equiv -1(11) \Leftrightarrow x^2 \equiv 10(11) \quad S_Z = \emptyset$$

Reste modulo 19 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Reste modulo 19 de x ²	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

$$c/ x^2 \equiv -2(19) \Leftrightarrow x^2 \equiv 17(19) \quad S_Z = \{19k+6 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k+13 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 35 :

Notons respectivement r et r' les restes modulo 8 de a et b

Les valeurs possibles de rr' sont consignées dans le tableau ci-dessous.

$$a, b \equiv -2(8) \Leftrightarrow a, b \equiv 6(8) \Leftrightarrow r, r' \equiv 6(8)$$

On conclut de ce tableau que :

$$a, b \equiv -2(8) \text{ ssi}$$

$$a \equiv 1(8) \text{ et } b \equiv 6(8) \text{ ou}$$

$$a \equiv 2(8) \text{ et } b \equiv 3(8) \text{ ou } a \equiv 2(8) \text{ et } b \equiv 7(8) \text{ ou}$$

$$a \equiv 3(8) \text{ et } b \equiv 2(8) \text{ ou}$$

$$a \equiv 5(8) \text{ et } b \equiv 6(8) \text{ ou}$$

$$a \equiv 6(8) \text{ et } b \equiv 1(8) \text{ ou } a \equiv 6(8) \text{ et } b \equiv 5(8) \text{ ou}$$

$$a \equiv 7(8) \text{ et } b \equiv 2(8)$$

$\backslash r'$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	<u>6</u>	7
2	0	2	4	<u>6</u>	0	2	4	<u>6</u>
3	0	3	<u>6</u>	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	<u>6</u>	3
6	0	<u>6</u>	4	2	0	<u>6</u>	4	2
7	0	7	<u>6</u>	5	4	3	2	1

EX 36 : a/

Reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de x^2+6x+5	5	5	0	4	3	4	0

$$S_Z = \{7k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7k+6 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

b/

Reste modulo 8 de x	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste modulo 8 de x^2-4x+3	3	0	7	0	3	0	7	0

$$S_Z = \{8k+1 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8k+3 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8k+5 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8k+7 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

EX 37 :

$$1. 10 \equiv -1(11) \Rightarrow 10^{20} \equiv (-1)^{20}(11) \Rightarrow 10^{20} \equiv 1(11)$$

$$2. 99999999999999999999 = 10^{20} - 1 \equiv -1(11) \Rightarrow 10^{20} - 5 \equiv 1 - 5(11) \Rightarrow 10^{20} - 5 \equiv -4(11) \Rightarrow 10^{20} - 5 \equiv 7(11)$$

Donc le reste modulo 11 de 99999999999999999999 est 7

$$\text{EX38 : } 10^{102} \equiv 1(103) \quad (\text{th de Fermat}) \quad \text{Alors}$$

$$10^{204} = (10^{102})^2 \equiv 1(103) \text{ et } 10^{612} = (10^{102})^6 \equiv 1(103) \text{ Donc}$$

$$10^{102} + 3 \cdot 10^{204} + 106 \cdot 10^{612} \equiv 1 + 3 + 106(103) \text{ Donc le reste modulo 103 de } 10^{102} + 3 \cdot 10^{204} + 106 \cdot 10^{612} \text{ est } 7$$

EX 39 :

$$1. \bullet \text{ si } 5 \text{ divise } x \text{ alors } x \equiv 0(5) \Rightarrow x \cdot (x^4 - 1) \equiv 0(5)$$

$$\bullet \text{ si } 5 \text{ ne divise pas } x \text{ alors (d'après Fermat) } x^4 \equiv 1(5) \Rightarrow x \cdot (x^4 - 1) \equiv 0(5)$$

$$\text{Donc pour tout entier naturel } x \text{ on a : } x \cdot (x^4 - 1) \equiv 0(5)$$

$$(x^4 - x^2) \cdot (x^2 + 1) = x^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = x^2 \cdot [(x^4 - 1)] \equiv 0(5)$$

$$2. \text{ de même que } 1. \quad (x^8 - x^5)(x^3 + 1) = x^4 \cdot [x \cdot (x^6 - 1)]$$

CH7

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 40 :

p premier et a non divisible par p alors d'après Fermat $a^{p-1} \equiv 1(p)$

Donc le reste modulo p de a^{p-1} est 1.

Le reste modulo p de $a^{p-1} - 2$ est $p-1$ ($1-2 \equiv -1 \equiv p-1(p)$)

$2a^{10p-10} - 2 = 2.(a^{p-1})^{10} - 3 \equiv 2.1 - 3(p)$ donc Le reste modulo p de $a^{10p-10} - 3$ est $p-1$

EX 41 :

1. a/ $1000 = 111 \times 9 + 1$ donc le reste modulo 111 de 1000 est 1

b/ $1000 \equiv 1(111) \Rightarrow 1000.n \equiv n(111)$ donc n et $1000.n$ ont le même reste mod 111

c/ • $111111 = 111 \times 1000 + 111$ 111 et 111×1000 sont divisibles par 111 alors 111111 est divisibles par 111

• $100010001 = 100010 \times 1000 + 1 \equiv 100010 + 1(111)$ d'après b/
 $\equiv 100 \times 1000 + 10 + 1(111)$
 $\equiv 100 + 10 + 1(111)$
 $\equiv 111(111)$
 $\equiv 0(111)$ Donc 100010001 est divisible par 111

• $100010000001 = 100010000 \times 1000 + 1 \equiv 100010000 + 1(111)$
 $\equiv 100010001(111)$
 $\equiv 0(111)$

2. $100\ 000 = 9 \times 11111 + 1 \Rightarrow 100\ 000 \equiv 1(11111) \Rightarrow 100\ 000n \equiv n(11111)$

$1001001001001 = 10010010 \times 100\ 000 + 1001 \equiv 10010010 + 1001(11111)$
 $\equiv 100 \times 100\ 000 + 10010 + 1001(11111)$
 $\equiv 100 + 10010 + 1001(11111)$
 $\equiv 11111(11111)$
 $\equiv 0(11111)$

EX 42 :

Pour $n=0$ $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ le reste modulo 4 est 0

Pour $n=1$ $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ le reste modulo 4 est 2

Pour $n \geq 2$ • si n est pair $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 0 + (-1)^n + 0(4)$
 $\equiv 2(4)$

• si n est impair $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 0 + (-1)^n + 0(4)$
 $\equiv 1 + (-1)(4)$
 $\equiv 0(4)$

Conclusion : les restes possibles modulo 4 de $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ sont 0 et 2

CH7

DIVISIBILITE DANS Z

EX 43 :

- $3^0 \equiv 1 \equiv 1(7)$; $3^1 = 3 \equiv 3(7)$; $3^2 = 9 \equiv 2(7)$; $3^3 = 27 \equiv 6(7)$; $3^4 \equiv 4(7)$; $3^5 \equiv 5(7)$; $3^6 \equiv 1(7)$
- on a $3^6 \equiv 1(7) \Rightarrow 3^6 - 1 \equiv 0(7) \Rightarrow 3^n \cdot (3^6 - 1) \equiv 0(7) \Rightarrow 3^{n+6} - 3^n \equiv 0(7) \Rightarrow 3^{n+6} - 3^n$ divisible par 7
- a/ $3^{1000} = 3^{6 \times 166 + 4} = (3^6)^{166} \cdot 3^4 \equiv 1^{166} \cdot 4(7) \Rightarrow$ le reste modulo 4 de 3^{1000} est 4
b/ on a $3^4 = 81 \equiv 1(10) \Rightarrow (3^4)^{250} \equiv 1^{250}(10) \Rightarrow 3^{1000} \equiv 1(10)$ Donc le chiffre des unités de 3^{1000} est 1.

EX 44 :

- D'après ce tableau de congruence on constate que $a^3 \equiv a(3)$

Reste modulo 3 de a	0	1	2
Reste modulo 3 de a^3	0	1	2

- $a^3 - b^3 \equiv 0(3) \Leftrightarrow a^3 \equiv b^3(3) \Leftrightarrow a \equiv b(3)$ (d'après 1.) $\Leftrightarrow a - b \equiv 0(3)$

On a $a^3 \equiv a(3)$ et $b^3 \equiv b(3)$ Alors $a^3 + b^3 \equiv 0(3) \Leftrightarrow a + b \equiv 0(3)$

On a $a^3 \equiv a(3)$ et $b^3 \equiv b(3)$ Alors $a^3 + 2b^3 \equiv 0(3) \Leftrightarrow a + 2b \equiv 0(3)$

Ex 45 :

D'après ce tableau de congruence il n'y a pas deux Valeurs distincts du reste

Reste modulo 11 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo 11 de a^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
Reste modulo 11 de a^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

modulo 11 de a qui donnent le même reste modulo 11 de a^3 donc

$$a^3 \equiv b^3(11) \text{ ssi } a \equiv b(11) \text{ c-a-d } a^3 - b^3 \equiv 0(11) \text{ ssi } a - b \equiv 0(11)$$

EX 47 :

- a solution de (E) $\Rightarrow a^2 + 9 = 2^n \Rightarrow a^2$ impair $\Rightarrow a$ impair $\Rightarrow a \equiv 1(2)$
- $a \equiv 1(2) \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1(4) \Rightarrow a^2 + 9 \equiv 10(4) \Rightarrow a^2 + 9 \equiv 2(4)$
- si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2 + 9 \equiv 2(4)$
D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2 + 9 = 2^n$ avec $n > 3$ ce qui entraîne Que $a^2 + 9$ est un multiple de 4 c-a-d $a^2 + 9 \equiv 0(4)$ d'où l'absurdité
Conclusion : (E) n'admet pas de solution

EX48 :

- a solution de (E) $\Rightarrow a^2 + 9 = 3^n \Rightarrow a^2$ pair $\Rightarrow a$ pair $\Rightarrow a \equiv 0(2)$
- $a \equiv 0(2) \Rightarrow a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 \Rightarrow a^2 \equiv 0(4) \Rightarrow a^2 + 9 \equiv 9(4) \Rightarrow a^2 + 9 \equiv 1(4)$
- n impair $\Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow 3^n = 3^{2k+1} = 9^k \cdot 3 \equiv 1^k \cdot 3(4) \Rightarrow 3^n \equiv 3(4)$
- si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2 + 9 \equiv 1(4)$
D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2 + 9 = 3^n \equiv 3(4)$ Absurde
Conclusion : (E) n'admet pas de solution

EX 46 :

a/ • pour n=1 $16^n = 16$ et $1-10n=1-10=-9$ et comme $16 \equiv -9(25)$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $16^n \equiv 1-10n(25)$ et montrons que $16^{n+1} \equiv 1-10(n+1)(25)$

$$16^n \equiv 1-10n(25) \Rightarrow 16^{n+1} \equiv 16-160n(25)$$

$$\equiv 1-10(n+1)+25-150n(25)$$

$$\equiv 1-10(n+1)(25) \text{ (car 25 et 150n sont des multiples de 25)}$$

b/ • pour n=1 $7^n = 7$ et $6n+1=7$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $7^n \equiv 6n+1(36)$ et montrons que $7^{n+1} \equiv 6(n+1)+1(36)$

$$7^n \equiv 6n+1(36) \Rightarrow 7^{n+1} \equiv 42n+7(36)$$

$$\equiv 6(n+1)+1+36n(36)$$

$$\equiv 6(n+1)+1(36)$$

c/ • pour n=1 $4^n = 4$ et $3n+1=4$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $4^n \equiv 3n+1(9)$ et montrons que $4^{n+1} \equiv 3(n+1)+1(9)$

$$4^n \equiv 3n+1(9) \Rightarrow 4^{n+1} \equiv 12n+4(9)$$

$$\equiv 3(n+1)+1+9n(9)$$

$$\equiv 3(n+1)+1(9)$$

d/ • pour n=1 $2^n + 3^n = 5$ et $5^n = 5$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $2^n + 3^n \equiv 5^n(6)$ et montrons que $2^{n+1} + 3^{n+1} \equiv 5^{n+1}(6)$

$$2^n + 3^n \equiv 5^n(6) \Rightarrow (2^n + 3^n) \cdot (2+3) \equiv 5^{n+1}(6)$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} + 3^{n+1} + 2^n \cdot 3 + 3^n \cdot 2 \equiv 5^{n+1}(6)$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} + 3^{n+1} \equiv 5^{n+1}(6) \text{ (car } 2^n \cdot 3 \text{ et } 3^n \cdot 2 \text{ sont des multiples de 6)}$$

EX 49 :

$$1. \quad 5 \cdot 2^7 + 1 = 5 \cdot 128 + 1 = 641 \quad \text{et} \quad 5^4 + 2^4 = 625 + 16 = 641$$

$$2. \quad 5 \cdot 2^7 + 1 = 641 \Rightarrow 5 \cdot 2^7 + 1 \equiv 0(641) \Rightarrow 5 \cdot 2^7 \equiv -1(641) \Rightarrow 5^4 \cdot 2^{28} \equiv (-1)^4(641) \\ \Rightarrow 5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1(641)$$

$$5^4 + 2^4 = 641 \Rightarrow 5^4 + 2^4 \equiv 0(641) \Rightarrow 5^4 \equiv -2^4(641)$$

$$3. \quad \text{On a } (5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1(641) \text{ et } 5^4 \equiv -2^4(641)) \Rightarrow -2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1(641) \\ \Rightarrow -2^{32} - 1 \equiv 0(641) \\ \Rightarrow 2^{32} + 1 \equiv 0(641)$$

Donc 641 divise $2^{32} + 1$

EX 50 :

1. supposons $n = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n \Rightarrow f(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 $\Rightarrow n - f(n) = a_1 \cdot (10 - 1) + a_2 \cdot (10^2 - 1) + \dots + a_n \cdot (10^n - 1)$ or on peut montrer
 Facilement (par récurrence) que $10^n - 1 \equiv 0(9)$ pour tout entier n
 Ce qui donne $n - f(n) \equiv 0(9)$ donc $n \equiv f(n) (9)$
2. a/ $4444 = 493 \cdot 9 + 7 \Rightarrow 4444 \equiv 7(9)$
 b/ $3 \times 1481 = 4443$
 c/ on a $4444 \equiv 7(9) \Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{4443+1} (9)$
 $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{3 \times 1481 + 1} (9)$
 $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv (7^3)^{1481} \cdot 7 (9)$ or $7^3 = 343 \equiv 1(9)$
 $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7 (9)$
 d/ on a $N \equiv 7(9)$ alors (d'après 1.) $f(N) \equiv 7(9)$ et $f(f(N)) \equiv 7(9)$
3. a/ on a $4444 < 10^4 \Rightarrow 4444^{4444} < (10^4)^{4444} < (10^4)^{5 \cdot 1000} = 10^{20\,000}$
 donc $N < 10^{20\,000} \Rightarrow f(N) < 9 + 9 + 9 + \dots + 9 = 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$
 b/ on a $f(N) < 180\,000 \Rightarrow f(f(N)) < 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 54$
4. on a $f(f(N)) < 54 \Rightarrow f(f(f(N))) < 5 + 9 = 12$ et comme $f(f(f(N))) \equiv 7(9)$ Alors $f(f(f(N))) = 7$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

Q.C.M :

1. L'entier 5 est un inverse modulo 6 de 5 en effet $5 \times 5 = 25 = 6 \times 4 + 1 \equiv 1(6)$
2. Si p est un entier premier alors $p \wedge p^2 = p$
3. L'ensemble des solutions entières de l'équation $11x - 5y = 1$ est :
 $\{(1+5k; 2+11k), k \in \mathbb{Z}\}$
4. L'ensemble des solutions entières de l'équation $13x - 17y = 0$ est :
 $\{(17k; 13k), k \in \mathbb{Z}\}$

VRAI-FAUX :

1. $n \equiv 0(143)$ ssi $n \equiv 0(13)$ et $n \equiv 0(11)$ (VRAI)

Justification : ($\Rightarrow$) si $n \equiv 0(143)$ alors $n = k \cdot 143 = k \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow n \equiv 0(13)$

et $\Rightarrow n \equiv 0(11)$

($\Leftarrow$) Si $n \equiv 0(13)$ et $n \equiv 0(11)$ Alors $n \equiv 0(11 \times 13)$ car $11 \wedge 13 = 1$

Alors $n \equiv 0(143)$

2. $-3a^3b = 3(a^3b)$ (VRAI)

Justification: $-3a^3b = 3(-a^3b) = 3(a^3b)$

$k \cdot a^3 \cdot b = k (a^3b)$
$a \wedge b = a \wedge b $

3. $25x - 80y = 3$ admet des solutions entières (FAUX)

Justification: on a $25 \wedge 80 = 5$ et 5 ne divise pas 3

4. Tout entier admet un inverse modulo 14 (FAUX)

Justification: 2 n'admet pas un inverse modulo 14

5. Pour tout entier $n \geq 2$; $n-1$ est son propre inverse modulo n (VRAI)

Justification : $n-1 \equiv -1(n) \Rightarrow (n-1)^2 \equiv (-1)^2(n) \Rightarrow (n-1) \cdot (n-1) \equiv 1(n)$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 1 page 175 :

$$558 \wedge (-1235) = 1$$

Algorithme d'Euclide (pour le calcul du pgcd)

r	1 235	558	119	82	37	8	5	3	2	1	0
q	-	-	2	4	1	2	4	1	1	1	2

1 est le dernier reste non nul

$$924 \wedge 990 = 66$$

$$(-999) \wedge (888) = 111$$

$$1890 \wedge (-5250) = 210$$

EX 2 page 175 :

$$558 \wedge (-1235) = 1 \Rightarrow 558 \vee (-1235) = 558 \times 1235 = 726\,180$$

$$51 \wedge (-255) = 51 \Rightarrow 51 \vee (-255) = \frac{51 \times 255}{51} = 255$$

$$(2n+1) \wedge n = 1 \Rightarrow (2n+1) \vee n = |n.(2n+1)|$$

EX 3 page 175 :

$$\left. \begin{array}{l} 180 = 36 \times 5 \\ a \wedge 180 = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 36.k \text{ avec } k \text{ n'est pas un multiple de 5}$$

$$|a| < 360 \Rightarrow k \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 7; \pm 8; \pm 9\}$$

$$a \in \{\pm 36; \pm 72; \pm 108; \pm 144; \pm 216; \pm 252; \pm 288; \pm 324\}$$

EX 4 page 175 :

$$a \wedge b = 19 \Rightarrow a = k \cdot 19 \text{ et } b = k' \cdot 19$$

$$a \cdot b = 2166 = 2 \times 3 \times 19 \times 19 \quad \left. \vphantom{a \cdot b = 2166} \right\} k \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

$$\text{Donc } (a; b) \in \left\{ \begin{array}{l} (19; 114), (114; 19), (38; 57), (57; 38), \\ (-19; -114), (-114; -19), (-38; -57), (-57; -38) \end{array} \right\}$$

EX 5 page 175 : (Raisonnement par l'absurde)

Supposons qu'il existe un couple $(a; b)$ tels que : $a \wedge b = 19$ et $a^2 - b^2 = 490$.

$$a \wedge b = 19 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 19|a \\ 19|b \end{array} \right\} \Rightarrow 19|a - b \Rightarrow 19|(a - b) \cdot (a + b) \Rightarrow 19|a^2 - b^2$$

$19|490$ absurde

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 6 :

1. $2^5 = 32 = 11 \times 3 - 1 \Rightarrow 2^5 \equiv -1(11)$

$2^5 = 32 = 31 \times 1 + 1 \Rightarrow 2^5 \equiv 1(31)$

2. On a $2^5 \equiv -1(11) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv (-1)^{68}(11) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1(11)$

On a $2^5 \equiv 1(31) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv 1^{68}(31) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1(31)$

3. on a $2^{340} \equiv 1(31) \Rightarrow 31 \text{ divise } 2^{340} - 1$
on a $2^{340} \equiv 1(11) \Rightarrow 11 \text{ divise } 2^{340} - 1$
et comme $31 \wedge 11 = 1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} 2^{340} \equiv 1(31) \\ 2^{340} \equiv 1(11) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow 11 \times 31 = 341 \text{ divise } 2^{340} - 1$

EX 7 :

1. $a^{561} = 1 \Rightarrow a \wedge (3 \cdot 11 \cdot 17) = 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a \text{ n'est pas un multiple de } 3 \\ \text{et comme } 3 \text{ nombre premier} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \wedge 3 = 1$

de même on montre que $a^{11} = 1$ et $a^{17} = 1$

2. a/

$\left. \begin{matrix} 3 \text{ un nombre premier} \\ a \text{ n'est pas un multiple de } 3 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{fermat}} a^{3-1} \equiv 1(3) \Rightarrow a^2 - 1 \equiv 0(3) \Rightarrow 3 \text{ divise } a^2 - 1$

b/ de même que a/

c/ de même que a/

3. a/ On a $a^2 \equiv 1(3) \Rightarrow (a^2)^{280} \equiv 1^{280}(3) \Rightarrow a^{560} \equiv 1(3)$

On a $a^{10} \equiv 1(11) \Rightarrow (a^{10})^{56} \equiv 1^{56}(11) \Rightarrow a^{560} \equiv 1(11)$

On a $a^{16} \equiv 1(17) \Rightarrow (a^{16})^{35} \equiv 1^{35}(17) \Rightarrow a^{560} \equiv 1(17)$

b/

$\left. \begin{matrix} a^{560} \equiv 1(17) \Rightarrow 17 \text{ divise } a^{560} - 1 \\ a^{560} \equiv 1(11) \Rightarrow 11 \text{ divise } a^{560} - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 11 \times 17 \text{ divise } a^{560} - 1 \Rightarrow 187 \text{ divise } a^{560} - 1$
et comme $11 \wedge 17 = 1$

$\left. \begin{matrix} \text{on a } a^{560} \equiv 1(3) \Rightarrow 3 \text{ divise } a^{560} - 1 \\ \text{et on a } 187 \text{ divise } a^{560} - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 \times 187 \text{ divise } a^{560} - 1 \Rightarrow 561 \text{ divise } a^{560} - 1$
 $3 \wedge 187 = 1$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 8 :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left. \begin{array}{l} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{array} \right\} \Rightarrow n|5.(5a+2b) - 2(4a+5b) \Rightarrow n|17a \\ & \left. \begin{array}{l} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{array} \right\} \Rightarrow n|5.(4a+5b) - 4.(5a+2b) \Rightarrow n|17b \end{aligned}$$

2. Soit $h = (4a+5b) \wedge (5a+2b)$.

$$\text{On a } d = a \wedge b \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d|4a+5b \\ d|5a+2b \end{array} \right\} \Rightarrow d|h \Rightarrow h = k.d$$

$$h = (4a+5b) \wedge (5a+2b) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h|4a+5b \\ h|5a+2b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{d'après 1}} \left. \begin{array}{l} h|17a \\ h|17b \end{array} \right\} \Rightarrow h|17a \wedge 17b \Rightarrow h|17(a \wedge b) \Rightarrow k.d|17.d \Rightarrow k|17$$

$$\Rightarrow k=1 \text{ ou } k=17$$

$$\Rightarrow h=d \text{ ou } h=17d$$

EX 9 :

1. Si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b et en particulier d divise $a+bn$ et $a+b(n-1)$

2. Si d divise $a+bn$ et $a+b(n-1)$ Alors d divise $a+bn - (a+b(n-1)) = b$ donc d divise b
et par suite d divise bn
 d divise $a+bn$ et d divise bn Alors d divise a

3. Soient $d = a^b$ et $d' = ($

* $d = a^b$ Alors d divise a et b Alors (d'après 1/) d divise $a+bn$ et $a+b(n-1)$
Donc d divise d'

* $d' = (a+bn)^{(a+b(n-1))}$ Alors d' divise $a+bn$ et $a+b(n-1)$
Alors (d'après 2.) d' divise a et d' divise b donc d' divise d

On a d divise d' et d' divise d Donc $d'=d$

Conclusion :

$$(a+bn)^{(a+b)(n-1)} = a^b$$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 10 : (L'algorithmme d'Euclide-Bézout)

C'est ;d'après M Achour Abdennebi* ;le plus important des algorithmes de l'Arithmétique.

Etant donné deux entiers a et b($b > a > 0$) ;le tableau ci-dessous

Suggère ce qu'il faut faire.

	1	2	3	...	i	i+1	...	n	
r	b	a	$R_3 = \text{le reste de } b/a$	...	r_i	$R_{i+1} = \text{le reste de } r_{i-1}/r_i$	...	r_n	0
q	-	-	$Q_3 = \text{le quotient de } b/a$	...	q_i	$Q_{i+1} = \text{le quotient de } r_{i-1}/r_i$	...	q_n	
x	$X_1=0$	$X_2=1$	$X_3=q_3.X_2+x_1$	...	x_i	$X_{i+1}=q_{i+1}.x_i+x_{i-1}$	...	x_n	
y	$Y_1=1$	$Y_2=0$	$Y_3=q_3.y_2+y_1$	...	y_i	$Y_{i+1}=q_{i+1}.y_i+y_{i-1}$	...	y_n	

* r_n le dernier reste non nul est le pgcd de a et b .

* $a.x_n - b.y_n = \pm r_n$

Appliqué au cas $a = 2015$ et $b = 2007$, cet algorithme donne

r	2015	2007	8	7	1	0
q	-	-	1	250	1	7
x	0	1	$1.1+0=1$	$250.1+1=251$	$1.251+1=252$	-
y	1	0	$1.0+1=1$	$250.1+0=250$	$1.250+1=251$	-

. Le dernier reste non nul est 1 Donc $2015 \wedge 2007 = 1$.

. L'identité de Bézout s'écrit : $2015 \times 251 - 2007 \times 252 = 1$ Donc $a = (-252)$ et $b = 251$

EX 11 :

Appliquons encore une fois l'algorithmme d'Euclide-Bézout au cas $a = 323$ et $b = 391$

r	391	323	68	51	17	0
q	-	-	1	4	1	3
x	0	1	1	5	6	-
y	1	0	1	4	5	

1. Le dernier reste non nul est 17 Donc $391 \wedge 323 = 17$

2. L'identité de Bézout s'écrit : $391 \times 5 - 323 \times 6 = 17$ Donc $a = 5$ et $b = -6$

3. En déduire une solution de $391a - 323b = 306$

On remarque que $306 = 17 \times 18$ Donc $a = 5 \times 18$ et $b = (-6) \times 18$

CH8

IDENTITE DE BEZOUT

EX12 :

1. L'algorithme d'Euclide Bézout donne

r	97	11	9	2	1	0
q	-	-	8	1	4	2
x	0	1	8	9	44	-
y	1	0	1	1	5	-

L'identité de Bézout s'écrit : $97x + 11y = 1$ donc $(5, -44)$ est une solution particulière

$$97x + 11y = 1 \Leftrightarrow 97x + 11y = 97 \cdot 5 + 11 \cdot (-44) \Leftrightarrow 97 \cdot (x - 5) = 11 \cdot (-44 - y) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11 \mid 97(x - 5) \\ \text{or } 11 \wedge 97 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \mid x - 5$$

$$\Rightarrow x = 11k + 5$$

$$97x + 11y = 1 \Rightarrow 11y = 1 - 97x \Rightarrow 11y = 1 - 97 \cdot (11k + 5) \Rightarrow y = -97k - 44$$

Réciproquement si $(x, y) = (11k + 5, -97k - 44)$ Alors $97x + 11y = 97(11k + 5) + 11(-97k - 44)$

Conclusion :	$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(11k + 5, -97k - 44), k \in \mathbb{Z}\}$
--------------	---

2.

a/ L'algorithme d'Euclide Bézout donne $97x + 27y = 7$ En multipliant par 7 on obtient : $97 \cdot (27x + 7) - 77 \cdot (34x + 7) = 7 \Leftrightarrow 97 \cdot 189 + 77 \cdot (-238) = 7$
donc une solution particulière de (E) est $(189, -238)$ b/ On a $97 \cdot 189 - 77 \cdot 238 = 7$ Donc $97x + 77y = 7 \Leftrightarrow 97x + 77y = 97 \cdot 189 - 77 \cdot 238$
 $\Leftrightarrow 97(x - 189) = -77(y + 238)$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 77 \mid 97(x - 189) \\ \text{or } 77 \wedge 97 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 77 \mid x - 189 \Rightarrow x = 77k + 189$$

$$97x + 77y = 7 \Rightarrow 77y = 7 - 97x \Rightarrow 77y = 7 - 97(77k + 189) \Rightarrow y = -238 - 97k$$

Réciproquement si $(x, y) = (77k + 189, -97k - 238)$

$$\text{Alors } 97x + 77y = 97 \cdot (77k + 189) + 77 \cdot (-97k - 238) = 7$$

CI :	$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(77k + 189, -97k - 238)\}$
------	--

CH 8

Identité de Bézout

EX 13:

1. a/ * Pour $n=1$ $u^n = u^1 = u = 2 + \sqrt{3} = a_1 + b_1 \sqrt{3}$ avec $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$
deux entiers naturels

Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $u^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers

et montrons que $u^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$ avec a_{n+1} et b_{n+1} deux entiers

$$\text{On a } u^n = a_n + b_n \sqrt{3} \Rightarrow u^{n+1} = u \cdot u^n = (2 + \sqrt{3}) \cdot (a_n + b_n \sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) + (2b_n + a_n)\sqrt{3}$$

$$= a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

Comme a_n et b_n sont deux entiers naturels alors $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et

$b_{n+1} = 2b_n + a_n$ sont deux entiers naturels

CI : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers naturels

b/ $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n + a_n$

2. a/ (Par récurrence)

* Pour $n=1$ $a_n^2 - 3b_n^2 = a_1^2 - 3b_1^2 = 2^2 - 3 \times 1^2 = 1$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et montrons que $a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 &= (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 \\ &= 4a_n^2 - 3a_n^2 + 9b_n^2 - 12b_n^2 + 12a_n b_n - 12a_n b_n \\ &= a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n &= a_n (a_n + 2b_n) - (2a_n + 3b_n) b_n \\ &= a_n^2 + 2a_n b_n - 2a_n b_n - 3b_n^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \end{aligned}$$

b/ On a $\forall n \geq 1$ $\left. \begin{array}{l} a_n \text{ et } b_n \text{ deux entiers naturels} \\ a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1 \end{array} \right\} \text{Bézout} \Rightarrow a_n \wedge b_n = 1 = a_n \wedge a_{n+1} = b_{n+1} \wedge b_n$

EX 14:

a/ $7 \nmid 14 = 7$ ne divise pas 5 donc l'équation $7x - 14y = 5$ n'admet pas de solutions

b/ $5x - 10y = 10 \Leftrightarrow x - 2y = 2 \Leftrightarrow x = 2 + 2y$ Donc $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 2k, k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c/ $29 \nmid 58 = 29$ ne divise pas 3 donc l'équation $29x + 58y = 3$ n'admet pas de solutions

CH8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 15 :

1. $(4x-3y-5)(4x+3y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x-3y=5 \quad \text{ou} \quad 4x+3y=1$

(1 ; -1) est une solution particulière trivial de l'équation $4x+3y=1$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $4x+3y=1$ sont les couples $(1+3k ; -1-4k)$ k entier

(5 ; 5) est une solution particulière trivial de l'équation $4x-3y=5$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $4x-3y=5$ sont les couples $(5+3k ; 5+4k)$ k entier .

Conclusion :

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(1+3k ; -1-4k) ; (5+3k ; 5+4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2. $x^2-9y^2=2 \Leftrightarrow (x-3y).(x+3y)=2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ x+3y=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-3y=1 \\ x+3y=2 \end{cases} \quad \text{ou}$$
$$\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+3y=-1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-3y=-1 \\ x+3y=-2 \end{cases}$$

chacun de ces 4 systèmes n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (en effet on obtient $2x=3$ ou $2x=-3$) donc l'équation $x^2-9y^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EX 16 :

1. (-3,-5) est une solution particulière trivial de l'équation $13x-8y=1$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $13x-8y=1$ sont les couples $(-3+8k ; -5+13k)$ k entier.

2. Si (x,y,z) solution de S Alors en faisant la somme on obtient : $13x-8y=1$ donc (x,y) est une solution de (E).

$$5x+y-2z=1 \Leftrightarrow 2z=5x+y-1=5(8k-3)+13k-5-1=53k-21 \text{ un nombre pair}$$

donc k entier impair

donc $k=2p+1 \quad p \text{ entier}$

$$\text{Cl : } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \left\{ \left(8k-3, 13k-5, \frac{53k-21}{2} \right), k=2p+1 \quad p \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$= \left\{ (16p+5, 26p+8, 53p+16), p \in \mathbb{Z} \right\}$$

CH8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 17 :

1. On remarque que (5,4) est une solution particulière triviale de
L'équation $9u-11v=1$ (si non l'algorithme d'Euclide-Bezout permet d'en trouver)

2.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x \equiv a(9) \\ x \equiv b(11) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 9k + a \\ x = 11k' + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 44x = 396k + 44a \\ 45x = 495k' + 45b \end{array} \right\} \Rightarrow x = (495k' - 396k) + (45b - 44a) \\ &\Rightarrow x = 99(5k' - 4k) + (45b - 44a) \\ &\Rightarrow x \equiv (45b - 44a)(99) \end{aligned}$$

3. $\begin{cases} x \equiv 6(9) \\ x \equiv 8(11) \end{cases} \Rightarrow$ (d'après 2.) $x \equiv (45 \times 8 - 44 \times 6)(99) \Rightarrow x \equiv 96(99) \Rightarrow x = k \cdot 99 + 96$

Réciproquement : si $x = k \cdot 99 + 96 \Rightarrow x - 6 = 9 \cdot (k \cdot 11 + 10) \Rightarrow x \equiv 6(9)$

$\Downarrow$

$$x - 8 = k \cdot 99 + 88 \Rightarrow x - 8 = 11 \cdot (k \cdot 9 + 8) \Rightarrow x \equiv 8(11)$$

EX 18 :

1. a/ $5 \times 7 = 35 = 17 \cdot 2 + 1 \equiv 1(17)$ donc 7 est une solution particulière

$$b/ 5x \equiv 1(17) \Leftrightarrow 5x \equiv 5 \cdot 7(17) \Leftrightarrow 5(x-7) \equiv 0(17) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 17 \mid 5(x-7) \\ \text{or } 17 \wedge 5 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 17 \mid x-7 \Rightarrow x = 17k + 7$$

$$CI : S_{\mathbb{Z}} = \{17 \cdot k + 7 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

c/ On a $345 = 17 \times 20 + 5 \Rightarrow 345 \equiv 5(17)$ Donc

$$345x \equiv 1(17) \Leftrightarrow 5x \equiv 1(17) \quad \text{Alors d'après b/ } S_{\mathbb{Z}} = \{17 \cdot k + 7 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

2. a/ $5 \times 14 = 70 = 17 \times 4 + 2$ Donc 14 est une solution particulière de $5x \equiv 2(17)$

$$\text{Donc } 5x \equiv 2(17) \Leftrightarrow 5x \equiv 5 \cdot 14(17) \Leftrightarrow 5(x-14) \equiv 0(17) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 17 \mid 5(x-14) \\ \text{or } 17 \wedge 5 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 17 \mid x-14 \Rightarrow x = 17k + 14$$

$$CI : S_{\mathbb{Z}} = \{17 \cdot k + 14 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

b/ On a $430 = 17 \times 25 + 5 \Rightarrow 430 \equiv 5(17)$ Donc

$$430x \equiv 2(17) \Leftrightarrow 5x \equiv 2(17) \quad \text{Alors d'après a/ } S_{\mathbb{Z}} = \{17 \cdot k + 14 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

EX 19

1. $17x \equiv 1(33)$ On remarque que 2 est une solution particulière donc

$$17x \equiv 1(33) \Leftrightarrow 17x \equiv 17 \cdot 2(33) \Leftrightarrow 17 \cdot (x-2) \equiv 0(33) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 33 \mid 17(x-2) \\ \text{or } 33 \wedge 17 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 33 \mid x-2 \Rightarrow x = 33k + 2$$

$$CI : S_Z = \{33k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$$

2. On a $17 \times 2 \equiv 1(33) \Rightarrow 17 \times 2 \times (-9) \equiv -9(33)$ donc $2 \times (-9) = -18 \equiv 15(33)$ est une solution particulière. Donc $17x \equiv -9(33) \Leftrightarrow 17x \equiv 17 \cdot 15(33) \Leftrightarrow 17(x-15) \equiv 0(33) \Rightarrow$

33 divise $17(x-15)$ et comme $33 \wedge 17 = 1$ Donc 33 divise $x-15 \Rightarrow x = 33k + 15$

$$CI : S_Z = \{33k + 15, k \in \mathbb{Z}\}$$

EX 20

$$12x \equiv 30y(15) \Leftrightarrow 12x \equiv 0(15) \Leftrightarrow 12x = 15k \Leftrightarrow 4x = 5k \Rightarrow 5 \text{ divise } 4x \text{ et comme } 5 \wedge 4 = 1 \Rightarrow 5 \text{ divise } x$$

Donc x est un multiple de 5 et y est quelconque

Donc l'ensemble des couples $(x, y) / 12x \equiv 30y(15)$ est $\{(5k, y) ; k \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$

EX 21

$$11x \equiv 99y(77) \Leftrightarrow 11x = k \cdot 77 + 99y \Leftrightarrow x = k \cdot 7 + 9y$$

Donc l'ensemble des couples $(x, y) / 11x \equiv 99y(77)$ est $\{(7k + 9y, y) ; k \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$

EX 22

1. Soit $d = a \wedge b \Rightarrow d \mid 2b - 3a = 7 \Rightarrow d = 1$ ou $d = 7$ Donc les valeurs possibles de $a \wedge b$ sont 1 et 7

2. $a / 3a - 2b = 3(2n - 3) - 2(3n - 1) = -7$ Donc pour tout n le couple (a, b) est une solution de (E).

$$b / (E) : 3x - 2y = -7 \Leftrightarrow 3x - 2y = 3a - 2b \Leftrightarrow 3(x - a) = 2(y - b)$$

$$\Rightarrow 3 \mid 2(y - b) \text{ et comme } 3 \wedge 2 = 1 \text{ Donc } 3 \mid y - b \Rightarrow y - b = 3k \Rightarrow y = 3k + b = 3k + 3n - 1 = 3(k + n) - 1 = 3h - 1$$

Remplaçons y par $3h - 1$ dans (E) on obtient : $3x = 2(3h - 1) - 7 \Rightarrow x = 2h - 3$

$$CI : S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2h - 3, 3h - 1) ; h \in \mathbb{Z}\}$$

3. $a \wedge b = 7 \Rightarrow a \equiv 0(7)$ et $b \equiv 0(7) \Rightarrow a \equiv b(7) \Rightarrow 3n - 1 \equiv 2n - 3(7) \Rightarrow n \equiv -2(7) \Rightarrow n \equiv 5(7)$

Réciproquement si $n \equiv 5(7) \Rightarrow n = 7k + 5 \Rightarrow a = 2(7k + 5) - 3 = 14k + 7 = 7(2k + 1) \Rightarrow 7 \mid a$

$\Downarrow$

$$b = 3(7k + 5) - 1 = 21k + 14 = 7(3k + 2) \Rightarrow 7 \mid b$$

On a donc $7 \mid a$ et $7 \mid b$ et comme les valeurs possibles de $a \wedge b$ sont 1 et 7 donc

CI :

$a \wedge b = 7 \quad \text{ssi} \quad n = 5 + 7k \quad ; k \in \mathbb{Z}$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX23 :

$$1. a \wedge n = 1 \Rightarrow a \wedge p \wedge q \wedge u = 1 \Rightarrow a \wedge p = 1 ; a \wedge q = 1 \text{ et } a \wedge u = 1$$

$a \wedge p = 1$ et p premier alors d'après th de Fermat $a^{p-1} \equiv 1(p)$

$a \wedge q = 1$ et q premier alors d'après th de Fermat $a^{q-1} \equiv 1(q)$

$a \wedge u = 1$ et u premier alors d'après th de Fermat $a^{u-1} \equiv 1(u)$

On a $p-1$ divise $n-1$ donc $n-1 = k.(p-1) \Rightarrow a^{n-1} = (a^{p-1})^k \equiv 1^k (p) \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1(p)$

On a $q-1$ divise $n-1$ donc $n-1 = k.(q-1) \Rightarrow a^{n-1} = (a^{q-1})^k \equiv 1^k (q) \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1(q)$

On a $u-1$ divise $n-1$ donc $n-1 = k.(u-1) \Rightarrow a^{n-1} = (a^{u-1})^k \equiv 1^k (u) \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1(u)$

$$2. \text{ On a } a^{n-1} - 1 \equiv 0(p) ; a^{n-1} - 1 \equiv 0(q) \text{ et } p \wedge q = 1 \text{ Alors } a^{n-1} - 1 \equiv 0(pq)$$

$$\text{On a } a^{n-1} - 1 \equiv 0(pq) ; a^{n-1} - 1 \equiv 0(u) \text{ et } pq \wedge u = 1 \text{ Alors } a^{n-1} - 1 \equiv 0(pqu) \text{ donc } a^{n-1} - 1 \equiv 0(n)$$

$$3. 561 = 3 \times 11 \times 17 \quad \text{On pose } n = 561 ; p = 3 ; q = 11 ; u = 17 \text{ et } a = 224$$

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $224^{560} \equiv 1(561)$

$$4. 1729 = 7 \times 13 \times 19 \quad \text{on pose } n = 1729 ; p = 7 ; q = 13 ; u = 19 \text{ et } a = 561$$

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $561^{1728} \equiv 1(1729)$

EX 24 :

1.

a/ On a $(a+b) \wedge ab = p \Rightarrow p$ divise ab et p divise $a+b$

Supposons que p ne divise pas a ; comme p est premier alors $p \wedge a = 1$

On a $p \mid ab$ et $p \wedge a = 1$ donc p divise b et comme $p \mid a+b$ Alors $p \mid a$ Absurde

Donc p divise a et comme p divise $a+b$ Alors p divise aussi b

donc p est un diviseur commun de a et b .

b/ Soit $d = a \wedge b$

On a p est un diviseur commun de a et b Donc p divise d

$d = a \wedge b \Rightarrow d$ divise a et $b \Rightarrow d$ divise $a+b$ et $ab \Rightarrow d$ divise p

On a donc d divise p et p divise d Donc $p = d$ Donc $p = a \wedge b$

$$2. a/ \begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases} \Rightarrow a \text{ et } b \text{ sont des multiples de } 5 \text{ et } a \times b = 5 \times 170 = 5 \times (5 \times 2 \times 17)$$

Et comme $a \leq b$ Alors $a = 5$ et $b = 5 \times 2 \times 17 = 170$ ou $a = 5 \times 2$ et $b = 5 \times 17 = 85$

b/ 5 étant un nombre premier alors d'après 1. $(a+b) \wedge a.b = a \wedge b$ Alors

$$\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases}$$

Alors $a = 5$ et $b = 170$ ou $a = 10$ et $b = 85$ (d'après 2. a/)

CH 8

Identité de Bézout

EX 25 :

- 1.
- $363 \wedge 484 = 121$
- (Algorithme d'Euclide)

On a $363 \wedge 484 = 121$ et $484 - 363 = 121$ Donc $(363, 484) \in S$

- 2.
- $n \wedge n+1 = 1 = n+1-n$
- Donc
- $(n; n+1) \in S$

3.

a/ ($\Rightarrow$)s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ / $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$ $x < y$ Alors

$$x \wedge y = k(y-x) \wedge (k+1)(y-x) = |y-x| (k \wedge k+1) = (y-x).1 = y-x \text{ Donc } (x, y) \in S$$

($\Leftarrow$) si $(x, y) \in S$ Alors $x < y$ et $x \wedge y = y - x = (y-x) | x$ et $(y-x) | y$

$$\Rightarrow x = k(y-x) \text{ et } y = k'(y-x)$$

$$\Rightarrow y - x = (k' - k)(y-x) \Rightarrow k' - k = 1 \Rightarrow k' = k + 1$$

$$\text{Donc } x = k(y-x) \text{ et } y = (k+1)(y-x)$$

Cl :

$$(x, y) \in S \text{ ssi il existe } k \in \mathbb{N}^* / x = k(y-x) \text{ et } y = (k+1)(y-x) \quad x < y$$

b/ $(x, y) \in S$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ / $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$

$$\text{Donc } x \vee y = \frac{x, y}{x \wedge y} = \frac{k(y-x), (k+1)(y-x)}{y-x} = k(k+1)(y-x)$$

4. a/
- $D_{228} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; 19; 38; 57; 76; 114; 228\}$

b/ $(x, y) \in S$ et $x \vee y = 228 \Rightarrow 228 = k(k+1)(y-x)$ Donc $k; k+1$ et $y-x$ sont des diviseurs de 228Donc les valeurs possibles de k sont 1; 2 ou 3

$$k=1 \Rightarrow y-x=114 \Rightarrow x=k(y-x)=114 \text{ et } y=(k+1)(y-x)=228$$

$$k=2 \Rightarrow y-x=38 \Rightarrow x=2 \times 38=76 \text{ et } y=3 \times 38=114$$

$$k=3 \Rightarrow y-x=19 \Rightarrow x=3 \times 19=57 \text{ et } y=4 \times 19=76$$

Conclusion : L'ensemble des couples (x, y) de S tel que $x \vee y = 228$ est $\{(114, 228); (76, 114); (57, 76)\}$

CH8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 26 :

1. a/ $M(z)$ est invariant par f ssi $z'=z$ en posant $z=x+iy$

$$\text{ssi } \frac{3+4i}{5}(x-iy) + \frac{1-2i}{5} = x+iy$$

$$\text{ssi } (3+4i)(x-iy) + 1-2i = 5(x+iy)$$

$$\text{ssi } 1+3x+4y+i(4x-3y-2) = 5x+i5y$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 1+3x+4y = 5x \\ 4x-3y-2 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y-1 = 0 \\ 4x-8y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-4y-1 = 0$$

Conclusion : L'ensemble des points invariants par f est la droite Δ d'équation

$$\Delta : 2x-4y-1=0$$

b/ f est une similitude indirecte de rapport $k = \left| \frac{3+4i}{5} \right| = 1$ donc f est unantidépacement ayant des points invariants donc f est une symétrie axiale d'axe la droite $\Delta : 2x-4y-1=0$ 2. a/ z' réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z')=0 \Leftrightarrow 4x-3y-2=0$ Donc D est la droite d'éq : $4x-3y-2=0$ b/ $4x-3y=2$ (2 ; 2) est une solution particulière trivialeun travail analogue à l'ex 12 permet de trouver $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(3k+2 ; 4k+2) ; k \in \mathbb{Z}\}$ c/ Les points de D dont les coordonnées sont des entiers sont : $M=(3k+2 ; 4k+2) ; k \in \mathbb{Z}$

$$1. z=1+iy \Rightarrow z' = \frac{3+4i}{5}(1-iy) + \frac{1-2i}{5} = \frac{4+4y+i(2-3y)}{5}$$

$$\text{réel}(z') \text{ entier} \Leftrightarrow \frac{4+4y}{5} = k \Leftrightarrow 4(1+y) = 5k \Leftrightarrow \begin{matrix} 5 \mid 4(1+y) \\ \text{or } 5 \wedge 4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow 5 \mid 1+y \Rightarrow y=5k-1$$

$$y=5k-1 \Rightarrow \text{Im}(z') = \frac{2-3(5k-1)}{5} = \frac{5-15k}{5} = 1-3k \Rightarrow \text{Im}(z') \text{ est un entier}$$

Cl : Réel(z') et Im(z') sont entiers ssi $y=5k-1 ; k \in \mathbb{Z}$

EX 27

$$1. (a^2+ab-b^2)^2=1 \Rightarrow a^2+ab-b^2=1 \text{ ou } a^2+ab-b^2=-1$$

$$\Rightarrow a(a+b)-b.b=1 \text{ ou } a(a+b)-b.b=-1 \text{ Alors d'après th de Bézout } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux}$$

$$2. \text{ Si } x=y \text{ alors } (E) \Leftrightarrow (xy)^2=1 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$$

Cl : Les solutions de (E) telles que $x=y$ sont (1,1) et (-1,-1)

$$3. a/ (p,q) \text{ solution} \Rightarrow (p^2+pq-q^2)^2=1$$

$$(q^2+q(p+q)-(p+q)^2)^2 = (q^2+pq+q^2-p^2-q^2-2pq)^2 = (-p^2-pq+q^2)^2 = (p^2+pq-q^2)^2=1$$

Donc $(q,p+q)$ est une solution de (E).b/ On a $(q,p+q)$ est une solution de (E) Alors d'après a/ $(p+q,q+p+q)$ solutionDonc $(p+q,p+2q)$ est une solution de (E)

c/ On a (1,1) solution, en utilisant 3. a/ on obtient (1,2) ; (2, 3) ; (3,5) ; (5,8) et (8,13) solutions de (E).

EX 28 :

1. On a $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ Donc $(a^2 - b^2 ; 2ab ; a^2 + b^2) \in E$.

2. a/ (x, y, z) élément de E donc $x^2 + y^2 = z^2$

$$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow x^2 \wedge y^2 = 1 \Rightarrow x^2 \wedge (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 \wedge z^2 = 1 \Rightarrow x \wedge z = 1$$

↓

$$(x^2 + y^2) \wedge y^2 = 1 \Rightarrow z^2 \wedge y^2 = 1 \Rightarrow z \wedge y = 1$$

b/ Si x et y sont tout les deux paires alors 2 est un diviseur commun de x et y ce qui est absurde car $\text{pgcd}(x, y) = 1$

c/ Les restes possibles d'un entier a modulo 4 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Alors le tableau de congruence suivant

Reste modulo 4 de a	0	1	2	3
Reste modulo 4 de a^2	0	1	0	1

prouve que. l'équation : $a^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ne Possède pas de solution entière

d/ Si x et y sont impairs $\Rightarrow x = 2k+1$ et $y = 2k'+1$

$$\text{Donc } z^2 = x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4.(k^2 + k'^2 + k + k') + 2 \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{absurde}$$

Car l'équation : $a^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ne Possède pas de solution entière

Donc x et y ne sont pas tout les deux impairs .

d/ (x impair et y pair) $\Rightarrow (x^2 \text{ impair et } y^2 \text{ pair}) \Rightarrow x^2 + y^2 \text{ impair} \Rightarrow z^2 \text{ impair} \Rightarrow z \text{ impair}$

(x impair et z impair) $\Rightarrow z+x$ et $z-x$ sont pairs. $\Rightarrow$ il existe deux entiers

Strictement positifs p et q / $z+x=2p$ et $z-x=2q$ (car $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Et } x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z > x$$

$$(z+x=2p \text{ et } z-x=2q) \Rightarrow x=p-q \text{ et } z=p+q \text{ et } y^2 = z^2 - x^2 = (p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq$$

Soit $d = \text{p} \wedge \text{q} \Rightarrow d$ divise p et $q \Rightarrow d$ divise $p+q$ et $p-q \Rightarrow d$ divise z et $x \Rightarrow d=1$ car $x \wedge y = 1$

Donc p et q sont premiers entre eux.

On a y pair $\Rightarrow y = 2k \Rightarrow y^2 = 4k^2 = 4pq \Rightarrow k^2 = pq$ et comme $p \wedge q = 1$ Alors p et q sont

Des carrées parfaits.

3. Remarquons d'abord que si $(x, y, z) \in E$ alors $(y, x, z) \in E$ et $(kx, ky, kz) \in E$

Tenant compte de cette remarque et des questions 1. et 2. on peut conclure que

$$E = \{(k(a^2 - b^2), k(2ab), k(a^2 + b^2)) ; (k(2ab), k(a^2 - b^2), k(a^2 + b^2)) ; k \in \mathbb{N}^* \text{ et } a > b > 0\}$$

4.

$$b=1 \text{ et } a=2 \Rightarrow (3, 4, 5) ; (6, 8, 10) ; (9, 12, 15) ; (4, 3, 5) ; (8, 6, 10) ; (12, 9, 15)$$

$$b=1 \text{ et } a=3 \Rightarrow (8, 6, 10) ; (6, 8, 10)$$

$$b=1 \text{ et } a=4 \Rightarrow (15, 8, 17) ; (8, 15, 17) \quad b=1 \text{ et } a=5 \Rightarrow z > 18$$

$$b=2 \text{ et } a=3 \Rightarrow (5, 12, 13) ; (12, 5, 13)$$

$$b=2 \text{ et } a=4 \Rightarrow z > 18 \quad b=3 \text{ et } a=4 \Rightarrow z > 18$$

Conclusion: Tous les triplets de E tels que z EMBED Equation.DSMT4 18 sont :

$$(3, 4, 5) ; (6, 8, 10) ; (9, 12, 15) ; (4, 3, 5) ; (8, 6, 10) ; (12, 9, 15) ; (15, 8, 17) ; (8, 15, 17)$$

$$(5, 12, 13) ; (12, 5, 13)$$

EX 29 :

1. a/ $B \rightarrow i=2 \Rightarrow a^i = 5^2 = 25 \equiv 3(11) \Rightarrow f(i) = 3 \rightarrow C$
 $A \rightarrow i=1 \Rightarrow a^i = 5^1 = 5 \equiv 5(11) \Rightarrow f(i) = 5 \rightarrow E$
 $C \rightarrow i=3 \Rightarrow a^i = 5^3 = 125 \equiv 4(11) \Rightarrow f(i) = 4 \rightarrow D$

Message	B	A	C
i	2	1	3
f(i)	3	5	4
Code	C	E	D

b/ $F \rightarrow i=6 \Rightarrow a^i = 5^6 \equiv 5(11) \Rightarrow f(i) = 5 \rightarrow E$

$A \rightarrow i=1 \Rightarrow a^i = 5^1 = 5 \equiv 5(11) \Rightarrow f(i) = 5 \rightarrow E$

$D \rightarrow i=4 \Rightarrow a^i = 5^4 \equiv 9(11) \Rightarrow f(i) = 9 \rightarrow I$

$E \rightarrow i=5 \Rightarrow a^i = 5^5 \equiv 1(11) \Rightarrow f(i) = 1 \rightarrow A$

Donc le message «FADE» est codé «EEIA»

On ne peut pas déchiffrer avec certitude le message codé car E peut-être déchiffrer F ou A.

2. $a=2$

Message	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(i)	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
Code	B	D	H	E	J	I	G	C	F	A

Oui on peut déchiffrer avec certitude un message codé (bijection)

3. a/ $(\Rightarrow)$

$$a^i \equiv a^i(11) \Leftrightarrow a^i = a^i + 11k \Leftrightarrow a^i - a^i = 11k \Leftrightarrow a^i \cdot (a^{i-i} - 1) = 11k$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11 \mid a^i (a^{i-i} - 1) \\ \text{or } 11 \wedge a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \mid a^{i-i} - 1 \Rightarrow a^{i-i} \equiv 1(11)$$

$$(\Leftarrow) \text{ si } a^{i-i} \equiv 1(11) \Rightarrow a^{i-i} \cdot a^i \equiv 1 \cdot a^i(11) \Rightarrow$$

CI :

$$a^i \equiv a^i(11) \Leftrightarrow a^{i-i} \equiv 1(11)$$

b/ f permet de chiffrer et de déchiffrer avec certitude tous les messages ssi $\forall i' \neq i \quad a^{i'} \neq a^i(11)$ ssi $a^{i'-i} \neq 1(11)$ i et i' deux entiers compris entre 1 et 10 et $i \neq i'$
 $\Rightarrow i' - i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

ssi a^i n'est pas congru à 1 modulo 11 pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

c/ On a $a < 11$ donc 11 ne divise pas a ; et comme 11 nombre premier Alors d'après th de Fermat $a^{10} \equiv 1(11)$

Supposons que k ne divise pas 10 alors $10 = n \cdot k + u$ avec $u < k$

$$a^k \equiv 1(11) \Rightarrow a^{n \cdot k} \equiv 1(11) \text{ et comme } a^{10} \equiv 1(11) \text{ Alors } a^{10 - n \cdot k} \equiv 1(11) \Rightarrow a^u \equiv 1(11) \text{ avec } u < k$$

Absurde car k est le plus petit entier de Ω tel que $a^k \equiv 1(11)$.

d/ Pour bien choisir a il suffit que a^2 et a^5 ne sont pas congrus à 1 modulo 10.

CH8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 30 :

$$1. F_0=0 ; F_1=1 ; F_2=F_1+F_0=1 ; F_3=F_2+F_1=2 ; F_4=3 ; F_5=5 \\ F_6=8 ; F_7=13 ; F_8=21 ; F_9=34 ; F_{10}=55$$

2. (Par recurrence)

*Pour $n=1$: $(-1)^n = (-1)^1 = -1$ et $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = F_2 F_0 - F_1^2 = -1$

Donc la propriété est vrai à l'ordre initial.

Soit $n \in \mathbb{N}^$ supposons que $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

et montrons que $F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned} F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n) \cdot F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n+1} F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 - F_{n+1} (F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1} (F_n + F_{n-1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = -(F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2) = -(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Cl : pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

3.

pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

et comme pour tout entier non nul n F_n est un entier ; alors d'après th

de bézout $F_n \wedge F_{n+1} = 1$

4. (Par recurrence sur m)

*Pour $m=0$ $F_{n+m} = F_n$ et $F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n = F_0 F_{n-1} + F_1 F_n = F_n$

Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

*Soi $m \in \mathbb{N}$ Supposons que $F_{n+m} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$

Et montrons que $F_{n+m+1} = F_{m+1} F_{n-1} + F_{m+2} F_n$

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n + F_{m-1} F_{n-1} + F_m F_n \\ &= (F_m + F_{m-1}) F_{n-1} + (F_{m+1} + F_m) F_n \\ &= F_{m+1} F_{n-1} + F_{m+2} F_n \end{aligned}$$

Cl : pour tout entier non nul n et pour tout entier m on a $F_{n+m} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$

5.

$F_m \wedge F_{m+n} = F_m \wedge (F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n) = F_m \wedge (F_{m+1} F_n) = F_m \wedge F_n$ car $F_m \wedge F_{m+1} = 1$

CH 8

IDENTITE DE BEZOUT

EX 31 :

1. Tout les entiers non nul et inférieurs à 7 sont premiers avec 7 donc $\varphi(7)=6$
les entiers non nul , inférieurs à 8 et premiers avec 8 sont : 1 ; 3 ; 5 et 7
donc $\varphi(8)=4$
2. Comme 0 n'est pas premier avec n ; alors il existe au plus n-1 entiers inférieurs à n
et premiers avec n donc $\varphi(n) \leq n-1$
3. a/ p est premier donc tout les entiers non nul et inférieurs à p sont premiers avec
p donc $\varphi(p)=p-1$
b/ a non divisible par p et p premier alors d'après th de Fermat $a^{p-1} \equiv 1(p)$
et comme $\varphi(p)=p-1$ alors $a^{\varphi(p)} \equiv 1(p)$
4. a/ p et q sont deux nombres premiers ; alors les nombres non premiers avec pq sont
seulement les multiples de p ou les multiples de q
Or il ya exactement q-1 multiples non nul de p inférieur à pq
et il ya exactement p-1 multiples non nul de q inférieur à pq
et il ya exactement pq-1 entier non nul et inférieur à pq
Alors $\varphi(pq) = (pq-1) - [(q-1) + (p-1)] = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$
b/ On a $a^{\varphi(p)} \equiv 1(p) \Rightarrow (a^{\varphi(p)})^{\varphi(q)} \equiv 1(p) \Rightarrow a^{\varphi(p)\varphi(q)} \equiv 1(p) \Rightarrow a^{\varphi(pq)} \equiv 1(p)$
On a $a^{\varphi(q)} \equiv 1(q) \Rightarrow (a^{\varphi(q)})^{\varphi(p)} \equiv 1(q) \Rightarrow a^{\varphi(q)\varphi(p)} \equiv 1(q) \Rightarrow a^{\varphi(pq)} \equiv 1(p)$

Et comme $p \wedge q = 1$

Alors $a^{\varphi(pq)} \equiv 1(pq)$

Si ($n \equiv 0(a)$; $n \equiv 0(b)$ et $a \wedge b = 1$) Alors $n \equiv 0(ab)$

c/ $1649 = 97 \times 17$ (17 et 97 sont premiers ; $\varphi(17)=16$ $\varphi(97)=96$)

10 n'est pas divisible par 17 et par 97 alors d'après b/

$$10^{16 \times 96} \equiv 1(97 \times 17) \Rightarrow 10^{1536} \equiv 1(1649)$$

$10403 = 101 \times 103$ (101 et 103 sont premiers ; $\varphi(101)=100$ $\varphi(103)=102$)

10430 n'est pas divisible par 101 et par 103 alors d'après b/

$$10430^{100 \times 102} \equiv 1(101 \times 103) \Rightarrow 10^{10200} \equiv 1(10430)$$

5. a/ p étant premier donc seuls les multiples de p ne sont pas premiers avec p^k
qui sont : $1.p ; 2.p ; 3.p ; \dots ; p^{k-1}.p = p^k$ Donc il ya $p^{k-1} - 1$ entiers inférieur à p^k et non
premiers avec p^k donc $\varphi(p^k) = (p^k - 1) - (p^{k-1} - 1) = p^k - p^{k-1}$
b/ $\varphi(125) = \varphi(5^3) = 5^3 - 5^2 = 100$; $\varphi(256) = \varphi(2^8) = 2^8 - 2^7 = 128$; $\varphi(1331) = \varphi(11^3) = 11^3 - 11^2$

$$6. a/ (1+up)^{p^{k+1}} = \sum_{j=0}^{p^{k+1}} C_{p^k}^j \cdot (u.p)^j = 1 + \sum_{j=1}^{p^{k+1}} C_{p^k}^j \cdot (u.p)^j$$

et comme p^{k-1} divise $C_{p^k}^j$ Alors p^k divise $C_{p^k}^j \cdot (u.p)^j \forall j \in \{1; 2; \dots; p^{k-1}\}$

b/ (Par récurrence) * Pour k=1 La propriété est vrai d'après 3. b/

* Soit k ∈ IN supposons que $a^{\varphi(p^k)} \equiv 1(p^k) \Rightarrow a^{\varphi(p^{k+1})} = 1 + u.p^k$

Et montrons que $a^{\varphi(p^{k+1})} \equiv 1(p^{k+1})$

D'après 5. a/ on a $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \Rightarrow \varphi(p^{k+1}) = p \cdot \varphi(p^k)$

$$\text{Donc } a^{\varphi(p^{k+1})} = a^{p \cdot \varphi(p^k)} = (a^{\varphi(p^k)})^p = (1 + u.p^k)^p \equiv 1(p^{k+1})$$

Pour a=17 ; p=5 et k=3 on obtient $17^{100} \equiv 1(125)$; pour a=17 ; p=2 et k=8 on obtient...