EXERCICE

ABCD est un parallélogramme et G le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 1)

PARTIE A

Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1-Déterminer l'image de A par f

2-a-Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera

b-Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

PARTIE B

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -3

1-Déterminer l'image de la droite (AD) par h . Justifier votre réponse

2-La droite (GD) coupe la droite (BC) en E . Montrer que h(D)=E

3-Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre G passant par A

a-Déterminer et construire le cercle $\mathscr{C}'$ image du cercle $\mathscr{C}$ par h

b-La demi droite $[GD)$ coupe $\mathscr{C}$ en M et La demi droite $[GE)$ coupe $\mathscr{C}'$ en N

Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles

4-Soit h' l'homothétie telle que $h'(A) = N$ et $h'(M) = B$ cercle de centre G passant par A

a-Construire le point G′ image de G par h'

b-Construire le centre J de h'

c-Déterminer le rapport de h'

Correction

PARTIE A

1-Déterminer l'image de A par f

$$\overrightarrow{AA'} - 3\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A' = B;\text{ainsi } \boxed{f(A) = B}$$

2-a - Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera

$$f(M) = M \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{MM}}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = \vec{0}\ ;\ \text{ainsi : } \boxed{M = G}$$

b-Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \underbrace{3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}_{=4\overrightarrow{MG}:G \text{ est B.P.P}(A;3)\text{ et }(B;1)} = 4\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{GM};\text{ainsi : } \boxed{f = h_{(G;-3)}}$$

PARTIE B

1-Déterminer l'image de la droite (AD) par h . Justifier votre réponse

On a $h(A) = B$, donc $h\big((AD)\big)$ est la droite passant par B et parallèle à (AD) ; Or ABCD est un parallélogramme , donc $(AD)\ //\ (BC)$ et par suite $\boxed{h\big((AD)\big) = (BC)}$

2-La droite (GD) coupe la droite (BC) en E . Montrer que h(D)=E

On appliquant le théorème du Thalès dans le triangle GAD tels que : $B \in (AG); E \in (DG)$ et $(AD) /\ell (AD)$

$$\frac{GE}{GD} = \frac{GB}{GA} = 3 \Leftrightarrow GE = 3GD;\text{ or } \overrightarrow{GE} \text{ et } \overrightarrow{GD} \text{ sont colinéaires de sens opposés , donc } \overrightarrow{GE} = -3\overrightarrow{GD}\ ;\text{ainsi :}$$

$$\boxed{h(D) = E}$$

3- Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre G passant par A

a-Déterminer et construire le cercle $\mathscr{C}'$ image du cercle $\mathscr{C}$ par h

G est le centre de l'homothétie h donc h(G)=G , $A \in \mathscr{C}$ et h(A)=B Donc h (($\mathscr{C}$)) est :

le cercle $\mathscr{C}'$ de centre h(G)=G et passant par h(A)=B **voir figure 1**

b-La demi droite $[GD)$ coupe $\mathscr{C}$ en M et La demi droite $[GE)$ coupe $\mathscr{C}'$ en N

Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles

GM et GN sont respectivement deux rayons de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}' = h((\mathscr{C}))$; donc GN=3GM

Or $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GN}$ sont colinéaires de sens opposés , donc $\overrightarrow{GN} = -3\overrightarrow{GM}$;ainsi : $\boxed{h(M) = N}$

$(h(A) = B; h(M) = N) \Rightarrow (h((AM)) = (BN))$;ainsi $\boxed{(AM) \parallel (BN)}$

3- Soit h' l'homothétie telle que $h'(A) = N$ et $h'(M) = B$ cercle de centre G passant par A

a-Construire le point G´ image de G par h'

$\bullet\left(h'(A) = N \text{ et } h'(G) = G'\right) \Rightarrow \left(h'((AG)) = (NG')\right)$;ainsi $\boxed{(AG) \parallel (NG')}$ 1

$\bullet\left(h'(M) = B \text{ et } h'(G) = G'\right) \Rightarrow \left(h'((MG)) = (BG')\right)$;ainsi $\boxed{(MG) \parallel (BG')}$ 2

Si Δ est la droite passant par N et parallèle à (AG) et Δ' la droite passant par B et parallèle à (MG)

Alors d'après 1 et 2 on déduit que $\boxed{\{G'\} = \Delta \cap \Delta'}$ **voir figure 1**

b-Construire le centre J de h'

$\bullet\left(h'(A) = N \text{ et } h'(M) = B\right) \Rightarrow \left(J \in (AN) \text{ et } J \in (BM)\right)$;ainsi $\boxed{\{J\} = (AN) \cap (BM)}$ **voir figure 1**

c-Déterminer le rapport de h'

Soit k le rapport de h' : $\bullet\left(h'(A) = N \text{ et } h'(M) = B\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{JN} = k\overrightarrow{JA} \text{ et } \overrightarrow{JB} = k\overrightarrow{JM}\right)$;ainsi $\left(\frac{JN}{JA} = \frac{JB}{JM} = |k|\right)$

On appliquant le théorème du Thalès dans le triangle JNB tels que : $A \in (JN); M \in (JB)$ et $(AM) \parallel (BN)$

$\frac{JN}{JA} = \frac{JB}{JM} = \frac{BN}{AM}$;Or : h(A) = B et h(M) = N; donc : BN = 3AM ; et par suite $\frac{JN}{JA} = \frac{BN}{AM} = 3$

$\overrightarrow{JN}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont colinéaires de même sens , donc :

$\overrightarrow{JN} = 3\overrightarrow{JA}$ Ainsi le rapport k de h' est : $\boxed{k = 3}$

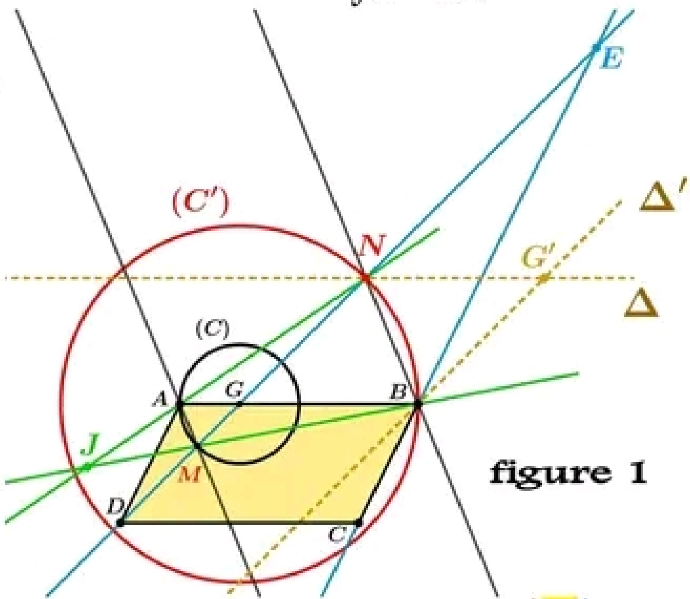

figure 1

homothétie : fiche resumée

Soit I un point du plan et k un réel non nul

- L'application ,qui à tout un point M du plan associe le point M' tel que , $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ s'appelle homothétie de centre I et de rapport k . On la note $h_{(I,k)}$. Ainsi $\left(h_{(I,k)}(M) = M'\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}\right)$
- M' est l'image de M par $h_{(I,k)}$. M est l'antécédent de M' par $h_{(I,k)}$

- Si $k = 1$: $h_{(I,1)}(M) = M$ — h: identité du plan
- Si $k = -1$: $h_{(I,-1)}(M) = S_I(M)$ — h: symétrie centrale de centre I
- $k \in \mathbb{R}$ $h_{(I,k)}(I) = I$ — I un point invariant par h
- Le centre d'une homothétie h ; un point et son image par h sont alignés .
- $\left(h(M) = M'; h(N) = N'\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}\right)$
- $\left(h(\Delta) = \Delta'\right) \Rightarrow \left(\Delta \parallel \Delta'\right)$
- $\left(I \in \Delta\right) \Leftrightarrow \left(h(\Delta) = \Delta\right)$

- une homothétie conserve l'alignement $(A; B \text{ et } C \text{ alignés}) \Leftrightarrow (h(A); h(B) \text{ et } h(C) \text{ alignés})$
- une homothétie conserve les milieux $(O = A * B) \Leftrightarrow (h(O) = h(A) * h(B))$
- une homothétie conserve le barycentre $(G \text{ est B.P.P}(A;\alpha)\text{et}(B;\beta)) \Leftrightarrow (h(G) \text{ est B.P.P}(h(A);\alpha)\text{et}(h(B);\beta))$
- une homothétie conserve le parallélisme $\left(\Delta \parallel \Delta'\right) \Leftrightarrow \left((h(\Delta) \parallel h(\Delta')\right)$
- une homothétie conserve l'orthogonalité $\left(\Delta \perp \Delta'\right) \Leftrightarrow \left(h(\Delta) \perp h(\Delta')\right)$
- une homothétie conserve le contact $\left(\underbrace{\Delta}_{\text{droite}} \cap \underbrace{(\zeta)}_{\text{cercle}} = \{A\}\right) \Leftrightarrow \left(h(\Delta) \cap h((\zeta)) = \{h(A)\}\right)$
- une homothétie conserve les angles $(A' = h(A); B' = h(B); C' = h(C)) \Rightarrow (\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'})$

- une homothétie multiplie les longueurs par : $\boxed{k}$
- une homothétie multiplie les aires par : $\boxed{k^2}$
- une homothétie multiplie les volumes par : $\boxed{k^3}$
  - Si : $-1 \prec k \prec 1$: réduction
  - Si : $k \succ 1$ ou $k \prec -1$: agrandissement
  - deux figures sont dites homothétiques, si l'une est l'image de l'autre par une homothétie .