Devoir de contrôle N°2

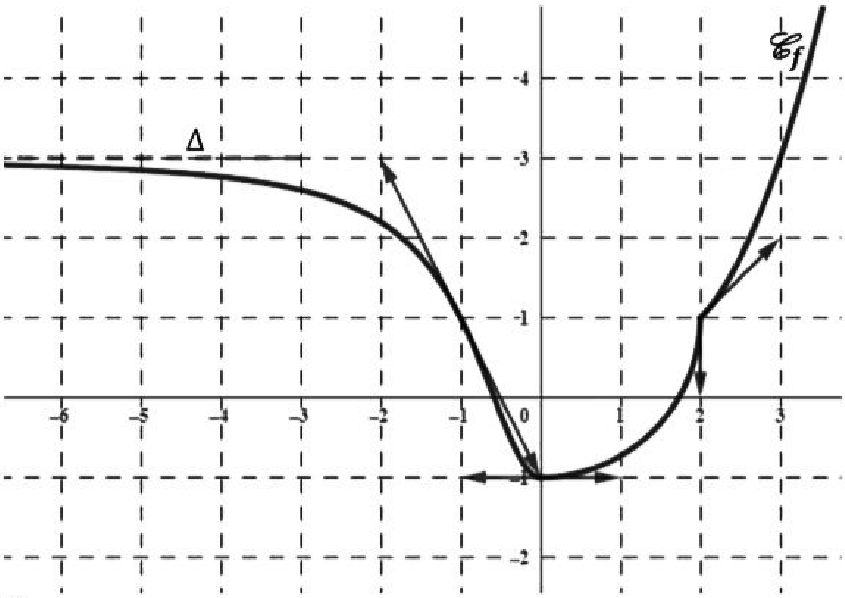
Épreuve : Mathématiques ; Classe :3Sc1 ; Date : 29/01/2025 ; Durée :2h

Exercice 1 : (6 pts)

Dans la figure ci-contre $\mathscr{C}_f$ est *la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction* f

La droite : $\Delta : y = 3$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* $(-\infty)$

$\mathscr{C}_f$ *admet une branche parabolique au voisinage de* $(+\infty)$



I. Par lecture graphique

1°/a- *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f

b- *Déterminer* D_c *l'ensemble de continuité de la fonction* f

c- *Déterminer les intervalles où* f *est dérivables .*

2°/ *Déterminer :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3°/ a- *Justifier que pour tout* $x \in \left]-\infty; 0\right[$, *on a :* $f'(x) \leq 0$ *et que* $f'(-1) = -2$.

b-*Déterminer en justifiant* $f'(0)$.

4°/ a- *Déterminer en justifiant la réponse :* $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-1}{x-2}$

b- *La fonction* f *est-elle dérivable en* 2 *?Justifier votre réponse.*

II. *Soit la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = x^2.f(x)$ *et* $\mathscr{C}_g$ *sa courbe représentative*

1°/*Montrer que la fonction* g *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ *et que pour tout* $x \neq 2$ *;on a :*

$$g'(x) = x[2f(x) + xf'(x)].$$

2°/a- *Montrer que pour tout* $x \neq 2$ *;on a :*

$$\frac{x^2f(x) - 4}{x - 2} = x^2.\frac{f(x) - 1}{x - 2} + x + 2$$

b- *Montrer que la fonction* g *est dérivable à droite en* 2.

c- *La fonction* g *est-elle dérivable à gauche en* 2 *? Justifier.*

Exercice 2 : (7 pts)

I. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé*

1°/ a- Justifier que la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

b- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x(x-2)$.

2°/ a-Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b- Déterminer une approximation affine de $f(0,9)$.

3°/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déterminer les extrémums de f.

II. *On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x < 1 \\ \sqrt{2x-2} - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1°/ a- Montrer que la fonction g est continue en 1.

b- Justifier que la fonction g est dérivable à gauche en 1 et que $g'_g(1) = -3$

2°/ a- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{g(x)+1}{x-1}$.

La fonction g est-elle dérivable à droite en 1 ?

b- La fonction g est-elle dérivable en 1? Justifier et Interpréter graphiquement

3°/a- Montrer que la fonction g est dérivable sur $]1; +\infty[$.

b- Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$

c- Vérifier que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{11}{2}$ est perpendiculaire à T.

Exercice 3 : (7 pts)

On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + i \quad et \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

1°/ Montrer que $z_1 . z_2 = 4i$ et $\frac{z_1}{i} = \overline{z_2}$

2°/ a- Calculer le module $|z_1|$ et vérifier que : $arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

b- En déduire $|z_2|$ et un argument de z_2

c- En déduire l'écriture trigonométrique de z_1 et de z_2

3°/ Soit le nombre complexe $u = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

a- Montrer que $u^2 = 2\, z_1$

b- En déduire le module et un argument de u

c- En déduire : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

4°/ On donne dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = z_1$ et $z_C = z_2$

a- Vérifier que $OA = OB$ et $CA = CB$

b- Soit l'ensemble $\Delta = \{M(z) tel\ que\ |\overline{z} + 2i| = |z - \sqrt{3} - i|\}$

Montrer que $\Delta = (OC)$

Corrigé du devoir de contrôle N°2
3ème Sc1/2024-2025

Exercice 1 : (6 pts)

I. *1°/a-* $D_f = \mathbb{R}$ *l'ensemble de définition de la fonction f*

b- $D_c = \mathbb{R}$ *(f est continu sur* $\mathbb{R}$ *)*

c- f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ *et sur* $[2; +\infty[$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3°/ a- D'après la figure f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ *donc pour tout* $x \in]-\infty; 0[$, *on a :* $f'(x) \leq 0$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse (-1) une tangente de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{-2}$ *donc que* $f'(-1) = -2$.

b- $\mathscr{C}_f$ *admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale donc* $f'(0) = 0$.

4°/ a- On a : $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= +\infty$ *car* $\mathscr{C}_f$ admet à gauche au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ *car* $\mathscr{C}_f$ admet à droite au point d'abscisse 2 une demi-tangente de vecteur directeur $\vec{v}\binom{1}{1}$ *par suite f est dérivable à droite en 2 et* $f'_d(2) = 1$.

b- La fonction f n' est pas dérivable en 2 puis qu'elle n'est pas dérivable à gauche en2

II. *1°/a- On a f est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *et la fonction* $x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *donc g est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *(comme étant produit)*

Et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$,*on a :*

$$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'^{(x)}$$
$$= x(2f(x) + xf'(x))$$

2°/a- $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$,*on a :*

$$x^2.\frac{f(x)-1}{x-2} + x + 2 = \frac{x^2f(x) - x^2 + (x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= \frac{x^2f(x)-x^2+x^2-4}{x-2}$$
$$= \frac{x^2f(x)-4}{x-2}$$

b- $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2f(x)-4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^+} \left(x^2.\frac{f(x)-1}{x-2} + x + 2\right)$

$= 4.f'_d(2) + 2 + 2 = 8$

Donc g est dérivable à droite en 2 et $g'_d(2) = 8$

c- $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2f(x)-4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^-} \left(x^2.\frac{f(x)-1}{x-2} + x + 2\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable à gauche en 2.

Exercice 2 : (7 pts)

I. *1°/a- f est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$

b- $\forall x \in \mathbb{R}$,*on a :* $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

2°/a- On a : $T; y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = -3$ *et* $f(1) = -1$ *donc* $T: y = -3x + 2$

b- Puis que $0{,}9 \approx 1$ *alors* $f(0{,}9) \approx -3 \times 0{,}9 + 2$ *d'où* $f(0{,}9) \approx -0{,}7$

3°/ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 3x + 1$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

b- d'après le tableau 1 est un maximum local en 0 (-3) *est un minimum locale en 2.*

II. *1°/a- on a :* $g(1) = \sqrt{2-2} - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) = -1$ *et*

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{2x-2} - 1 = -1$

Puisque $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} g(x) = g(1)$ *alors g est continue en 1.*

b- $\forall x \in]-\infty; 1]$; *on a :* $g(x) = f(x)$ *;f est dérivable à gauche en 1 donc g est dérivable à gauche en 1 est* $g'_g(1) = f'(1) = -3$

2°/a- $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{g(x)+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{2x-2}-1+1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 2 et $\mathscr{C}_g$ admet à droite au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigé vers le haut .

b- puisque g n'est pas dérivable à droite en 1 elle n'est pas dérivable en 1.

3°/a- la fonction $x \mapsto 2x-2$ *est affine elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x > 1; 2x-2>0$ *donc* $x \mapsto \sqrt{2x-2}$ *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *, par suite* $x \mapsto \sqrt{2x-2}-1$ *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et g est dérivable sur* $]1;+\infty[$

b- $\forall\, x \in\,]1;+\infty[\; ; g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$

c- On a $g'\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{11-2}} = \frac{1}{3}$

Donc $\frac{1}{3}$ *le coefficient directeur de* T' *la tangente à* $\mathscr{C}_g$ *au point d'abscisse* $\frac{11}{2}$ *et on a* $T: y = -3x+2$

Comme $-3.\frac{1}{3} = -1$ *alors* $T \perp T'$.

Exercice 3 : (7 pts)

1°/ $z_1 z_2 = (\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})$
$= \sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}$
$= 4i$

$\frac{z_1}{i} = \frac{(\sqrt{3}+i)i}{i^2} = \frac{(\sqrt{3}i-1)}{-1} = 1 - i\sqrt{3} = \overline{z_2}$

2°/a- $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\begin{cases} \frac{R_e(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \\ \frac{I_m(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ donc } arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

b- $|z_2| = |\overline{z_2}| = \left|\frac{z_1}{i}\right| = \frac{|z_1|}{|i|} = \frac{2}{1} = 2$

$z_1 z_2 = 4i \Leftrightarrow z_2 = \frac{4i}{z_1}$ *donc*

$arg(z_2) \equiv \arg(4i) - arg(z_1)\,[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

c- D'après a- et b-

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ *et*

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

3/ $u = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

a- $u^2 = 2+\sqrt{3} + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} - 2 + \sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{4-3}$
$= 2(\sqrt{3}+i)$
$= 2z_1$

b- On a $|u|^2 = |u^2| = 2|z_1| = 4$ *donc* $|u| = 2$

$arg(u^2) \equiv 2\arg(u)\,[2\pi]$ *or* $u^2 = 2z_1$ *donc*

$arg(u^2) \equiv arg(z_1)\,[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'où $arg(u) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

c- $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{R_e(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ *et*

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{I_m(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

4°/a- $*\ OA = |z_A| = |2i| = 2$

$OB = |z_B| = |z_1| = 2$

Donc $OA = OB$

$*\ CA = |z_C - z_A| = |1+i\sqrt{3}-2i|$
$= |1+(\sqrt{3}-2)i|$
$= \sqrt{1+3-4\sqrt{3}+4}$
$= \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$CB = |z_C - z_B| = |1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}-i|$
$= |(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i|$
$= \sqrt{1-2\sqrt{3}+3+3-2\sqrt{3}+1}$
$= \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

Donc $CA = CB$

b- $\Delta = \{M(z) \text{ tel que } |\bar{z}+2i| = |z-\sqrt{3}-i|\}$
$= \{M(z) \text{ tel que } |\overline{\bar{z}+2i}| = |z-\sqrt{3}-i|\}$
$= \{M(z) \text{ tel que } |z-2i| = |z-(\sqrt{3}+i)|\}$
$= \{M \in P \text{ tel que } MA = MB\}$

Donc Δ *est la médiatrice* $[AB]$

Puis que $OA = OB$ *et* $CA = CB$ *alors* $\Delta = (OC)$