Exercice 1

① Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2iz-1-e^{2i\theta}=0$.

② Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$, où θ est un réel de $]0,\pi[$.

ⓐ Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

ⓑ Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

③ ⓐ Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.

ⓑ Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans le ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2

Soit a un nombre complexe non nul et (E) l'équation : $z^2-2z+1+a^2=0$.

① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

② Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$. On pose $a=a_1+ia_2$; a_1 et a_2 réels.

ⓐ Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$.

ⓑ Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$.

③ On pose $a=e^{i\alpha}$, où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

ⓐ Vérifier que pour tout réel x, on a : $1+e^{ix}=2\cos\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$.

ⓑ En déduire l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

ⓒ Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 3

① On considère l'équation (E_θ) : $z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$, où $\theta\in]0,\pi[$. (On note z_1 et z_2 les solutions de (E_θ)).

ⓐ Sans calculer z_1 et z_2, montrer que $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

ⓑ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

② Soit A, M et N les points d'affixes respectives $z_A=2$, $z_M=1-e^{i\theta}$ et $z_N=1+e^{i\theta}$.

ⓐ Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

ⓑ Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, le point M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

ⓒ Donner la nature du quadrilatère $OMAN$.

ⓓ Déterminer θ pour que $OMAN$ soit un carré.

Exercice 4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1, où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit l'application $f : P\setminus\{B\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ telle que } z' = \frac{z-a}{z-1}.$$

① Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $(E) : z^2 - 2z + a = 0$.

② On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$, où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Résoudre l'équation (E) et mettre sous forme exponentielle chacune des solutions de (E).

③ Dans cette question, on suppose que $a = -1$.

Soit M un point de $P\setminus\{B\}$ d'affixe z et M' le point d'affixe z'.

ⓐ Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0[2\pi]$.

En déduire que la demi droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

ⓑ Montrer que z' est imaginaire si et seulement si $|z| = 1$.

ⓒ En déduire une construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé de B.

Exercice 5

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f_\theta(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1+i)(-1+e^{i\theta})$.

①ⓐ Vérifier que $f_\theta(1+i) = 0$.

ⓑ En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

② Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$.

ⓐ Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on précisera le rayon.

ⓑ Déterminer les valeurs de θ pour lesquels la droite (BM) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2 + e^{2i\theta})z + 1 + e^{2i\theta} = 0$, $\left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

② On pose A, B, M et N les points d'affixes respectives 1, $1+i$, $1+e^{2i\theta}$ et $e^{2i\theta}$.

ⓐ Montrer que $OAMN$ est un losange.

ⓑ Ecrire $1+e^{2i\theta}$ sous forme exponentielle.

ⓒ On prend $\theta = \frac{\pi}{12}$. Ecrire $1+e^{2i\theta}$ sous forme algébrique.

ⓓ Déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

③ⓐ θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

ⓑ Déterminer l'affixe z du point M' tel que le triangle OMM' soit isocèle rectangle en O et de sens direct.

ⓒ Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

Exercice 1

① **Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2iz-1-e^{2i\theta}=0$.

$\Delta=(-2i)^2-4\left(-1-e^{2i\theta}\right)=-4+4+4e^{2i\theta}=\left(2e^{i\theta}\right)^2$ donc $\delta=2e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ.

Les solutions sont donc $z_1=\dfrac{2i+2e^{i\theta}}{2}=i+e^{i\theta}$ et $z_2=\dfrac{2i-2e^{i\theta}}{2}=i-e^{i\theta}$.

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\left\{i+e^{i\theta},i-e^{i\theta}\right\}$.

② **Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$, où θ est un réel de $]0,\pi[$.**

ⓐ **Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.**

$aff\left(\overrightarrow{AM}\right)=z_M-z_A=i+e^{i\theta}+1-i=1+\cos\theta+i\sin\theta$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

et $aff\left(\overrightarrow{AN}\right)=z_N-z_A=i-e^{i\theta}+1-i=1-\cos\theta-i\sin\theta$ donc $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=1-\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-1=0$ donc $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$ d'où le triangle AMN est rectangle en A.

Autrement : $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}{aff\left(\overrightarrow{AN}\right)}=\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}=i\cot\dfrac{\theta}{2}\in i\mathbb{R}$ d'où $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$.

ⓑ **Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.**

Soit I le point d'affixe i.

Pour tout $\theta\in]0,\pi[$, $IM=\left|i+e^{i\theta}-i\right|=\left|e^{i\theta}\right|=1$ et $IN=\left|i-e^{i\theta}-i\right|=\left|-e^{i\theta}\right|=1$ donc lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, les points M et N varient sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1.

③ ⓐ **Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.**

Le triangle AMN est rectangle en A donc $\mathscr{A}(\theta)=\dfrac{1}{2}AM\times AN$.

Or $AM=|z_M-z_A|=|1+\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}$

et $AN=|1-\cos\theta-i\sin\theta|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}$

d'où $\mathscr{A}(\theta)=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2+2\cos\theta)(2-2\cos\theta)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-4\cos^2\theta}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|=\sin\theta$

ⓑ **Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans le ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.**

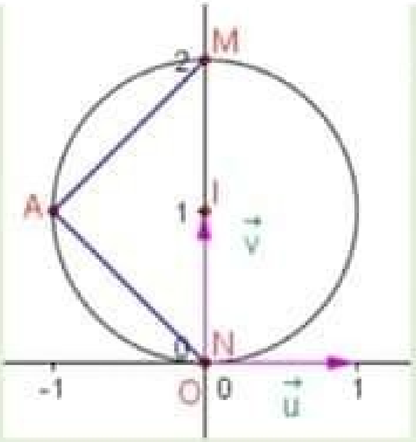
Soit $\theta\in]0,\pi[$

$\mathscr{A}(\theta)$ est maximale $\Leftrightarrow\sin\theta=1$

$\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

Dans le cas où $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $z_M=i+e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$ et $z_N=i-e^{i\frac{\pi}{2}}=0$.

Construction :



Exercice 2

Soit a un nombre complexe non nul et (E) l'équation : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

$\Delta = (-2)^2 - 4\left(1 + a^2\right) = -4a^2 = (2ia)^2$ donc $\delta = 2ia$ est une racine carrée de Δ.

Les solutions de (E) sont alors : $z_1 = \dfrac{2 + 2ia}{2} = 1 + ia$ et $z_2 = 1 - ia$.

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{1 + ia, 1 - ia\}$

② Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + ia$ et $1 - ia$. On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

ⓐ Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

$aff\left(\overrightarrow{OA}\right) = 1 + ia = 1 + i\left(a_1 + ia_2\right) = 1 - a_2 + ia_1$ et $aff\left(\overrightarrow{OB}\right) = 1 - i\left(a_1 + ia_2\right) = 1 + a_2 - ia_1$

$$\begin{aligned} O, A \text{ et } B \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - a_2 & 1 + a_2 \\ a_1 & -a_1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -a_1\left(1 - a_2\right) - a_1\left(1 + a_2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = 0 \end{aligned}$$

ⓑ Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a| = 1$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - a_2)(1 + a_2) - a_1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - a_2^2 - a_1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow |a| = 1 \end{aligned}$$

③ On pose $a = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

ⓐ Vérifier que pour tout réel x, on a : $1 + e^{ix} = 2\cos\dfrac{x}{2} e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\dfrac{x}{2} e^{i\frac{x}{2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{ix} = e^{i0} + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\dfrac{x}{2} e^{i\frac{x}{2}}$

et $1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right) = -2i\sin\dfrac{x}{2} e^{i\frac{x}{2}}$

ⓑ En déduire l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $1 + ia$ et $1 - ia$.

$1 + ia = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = 1 + e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

et $1-ia=1-e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}=-2i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}=2\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}=2\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}$

On a $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})>0$ et $\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})>0$.

On en déduit que : $1+ia=2\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$ et $1-ia=2\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}$

ⓒ **Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.**

$|a|=|e^{i\alpha}|=1$ donc d'après **1.b)** $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$

d'où : O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O $\Leftrightarrow OA=OB$

$\Leftrightarrow |1+ia|=|1-ia|$

$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})=2\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ (car $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

$\Leftrightarrow \alpha=0 \Leftrightarrow a=1$.

Exercice 3

① **On considère l'équation $(E_\theta): z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$, où $\theta\in]0,\pi[$. (On note z_1 et z_2 les solutions de (E_θ)).**

ⓐ **Sans calculer z_1 et z_2, montrer que $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.**

$z_1z_2=-2i\sin\theta e^{i\theta}=2\sin\theta e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$ et $\sin\theta>0$ donc $\arg(z_1z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ainsi $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ⓑ **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).**

$\Delta=(-2)^2+8i\sin\theta e^{i\theta}=4+8i\sin\theta e^{i\theta}=4+8i(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})e^{i\theta}=4+4e^{2i\theta}-4=(2e^{i\theta})^2$ donc $\delta=2e^{i\theta}$ est un racine carrée de Δ

Les solutions de (E_θ) sont donc $z_1=\frac{2+2e^{i\theta}}{2}=1+e^{i\theta}$ et $z_2=\frac{2-2e^{i\theta}}{2}=1-e^{i\theta}$.

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\{1+e^{i\theta},1-e^{i\theta}\}$.

② **Soit A, M et N les points d'affixes respectives $z_A=2$, $z_M=1-e^{i\theta}$ et $z_N=1+e^{i\theta}$.**

ⓐ **Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.**

$z_M=1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$ et $z_N=1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

comme $\theta\in]0,\pi[$ alors $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi $\cos\frac{\theta}{2}>0$ et $\sin\frac{\theta}{2}>0$

Par suite $z_M=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$ et $z_N=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

ⓑ **Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, le point M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.**

Soit I le point d'affixe 1.

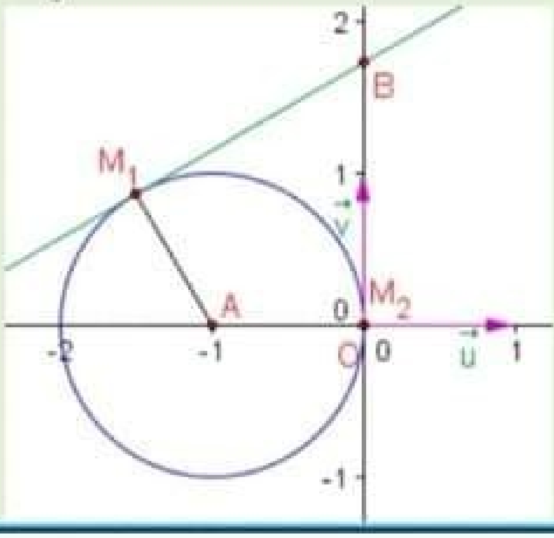
Pour tout $\theta\in]0,\pi[$, $IM=|1-e^{i\theta}-1|=|-e^{i\theta}|=1$ et $IN=|1+e^{i\theta}-1|=|e^{i\theta}|=1$

donc lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, les points M et N varient sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1.

ⓒ **Donner la nature du quadrilatère $OMAN$.**

$z_M+z_N=1-e^{i\theta}+1+e^{i\theta}=2=z_A$ donc $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}$ d'où le quadrilatère $OMAN$ est un parallélogramme.

$$\Leftrightarrow \cos\theta(\cos\theta-1)+\sin\theta\left(\sin\theta-\sqrt{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\theta-\cos\theta+\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{3}\sin\theta=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \theta-\frac{\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \theta-\frac{\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \theta\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ou } \theta\equiv 0[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \theta=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta=0 \text{ (car } \theta\in[0,2\pi[\text{)}$$



Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

① **Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **l'équation :** $z^2-(2+e^{2i\theta})z+1+e^{2i\theta}=0$, ($\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

$1-2-e^{2i\theta}+1+e^{2i\theta}=0$ donc les solutions sont : $z_1=1$ et $z_2=1+e^{2i\theta}$.

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\{1,1+e^{2i\theta}\}$.

② **On pose** A, B, M **et** N **les points d'affixes respectives** 1, $1+i$, $1+e^{2i\theta}$ **et** $e^{2i\theta}$.

ⓐ **Montrer que** $OAMN$ **est un losange.**

$z_M=1+e^{2i\theta}=z_A+z_N$ donc $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}$ ainsi $OAMN$ est un parallélogramme.
De plus $OA=|z_A|=1$ et $ON=|z_N|=|e^{2i\theta}|=1$ alors $OA=ON$ et par conséquent $OAMN$ est un losange.

ⓑ **Ecrire** $1+e^{2i\theta}$ **sous forme exponentielle.**

$1+e^{2i\theta}=e^{i0}+e^{2i\theta}=e^{i\theta}(e^{-i\theta}+e^{i\theta})=2\cos\theta e^{i\theta}$

comme $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\theta>0$ et par suite $1+e^{2i\theta}=2\cos\theta e^{i\theta}$.

ⓒ **On prend** $\theta=\frac{\pi}{12}$. **Ecrire** $1+e^{2i\theta}$ **sous forme algébrique.**

Pour $\theta=\frac{\pi}{12}$, $1+e^{2i\theta}=1+e^{i\frac{\pi}{6}}=1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

ⓓ **Déduire la valeur de** $\cos\frac{\pi}{12}$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{12}$, $1 + e^{2i\theta} = 2\cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{\pi}{12}}$

d'où $2\cos\frac{\pi}{12} = |1 + e^{2i\theta}| = \left|1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

ainsi $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

③ⓐ θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $AM = |1 + e^{2i\theta} - 1| = |e^{2i\theta}| = 1$ donc lorsque θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le point M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

ⓑ Déterminer l'affixe z du point M' tel que le triangle OMM' soit isocèle rectangle en O et de sens direct.

Le triangle OMM' est isocèle rectangle en O et de sens direct

$\Leftrightarrow OM = OM'$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{OM}{OM'} = 1$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z}{1 + e^{2i\theta}}\right| = 1$ et $\arg(\frac{z}{1 + e^{2i\theta}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{z}{1 + e^{2i\theta}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow z = i\left(1 + e^{2i\theta}\right)$.

ⓒ Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$ alors $M = B$ et donc les points M, B et M' sont alignés.

Si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, $\frac{aff\left(\overrightarrow{BM'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{BM}\right)} = \frac{i\left(1 + e^{2i\theta}\right) - 1 - i}{1 + e^{2i\theta} - 1 - i} = = \frac{ie^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} - i} = \frac{\left(ie^{2i\theta} - 1\right)\left(e^{-2i\theta} + i\right)}{\left|e^{2i\theta} - i\right|^2}$

$$= \frac{i - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} - i}{\left|e^{2i\theta} - i\right|^2} = \frac{-2\cos(2\theta)}{\left|e^{2i\theta} - i\right|^2} \in \mathbb{R}.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires et par conséquent les points B, M et M' sont alignés.

Conclusion : les points B, M et M' sont alignés.