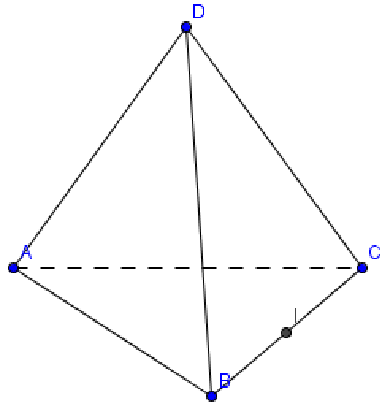
3éme sc Vecteur de l'espace Prof : Dhia Slama

Exercice 1

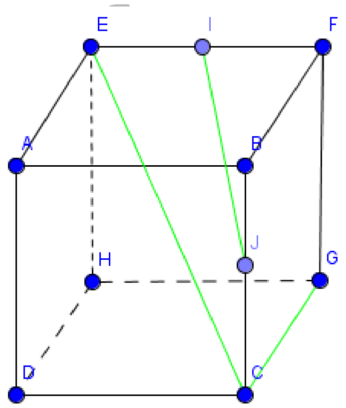


Soit ABCD un tétraèdre. I est le milieu de [BC]. On définit le point M par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD}$

1)Montrer que le point M appartient au plan (ACD) utiliser un repère

2)Montrer que le point M appartient au plan (ACD) sans utiliser de repère

Exercice 2



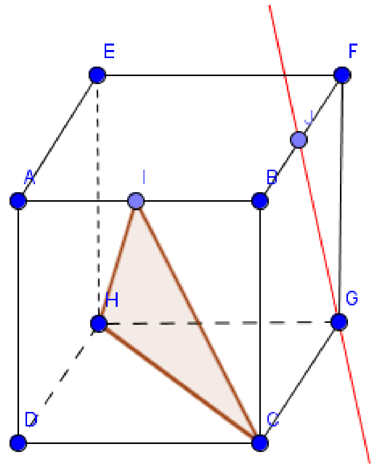
Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [EF] et J le milieu de [BC]

1)Montrer que $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires à l'aide d'un repère

2)Montrer que $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires à l'aide d'une décomposition des vecteurs

Exercice 3



Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BF]

1)Montrer que la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC) à l'aide d'un repère.

2)Montrer que la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC) à l'aide d'une décomposition des vecteurs

Exercice 4

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

On considère les points A(2, 1, 1), B(1, 2,2),C(1, 1, 2) et D(1, -1, 2)

1-Determiner les composants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

2- vérifier si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.ou non.

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$

On considère les points A(1, 2, –1), B(–1, 3, 2) et C(3, 1, 5).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit x et y deux réels et D un point de coordonnées (5, x, y).

Peut-on déterminer x et y tels que les points A, B et D soient alignes ?

3. Soit z un réel et E un point de coordonnées (z, 4, 3).

Peut-on déterminer z tel que A, B, C et E soient coplanaires ?

Correction

Exercice 1

1)Soit le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$

Donc $A(0,0,0), B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$, $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

Soit M(x,y,z)

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD}$ donc

$$\begin{cases} x_M = 2(\frac{1}{2}) - 1 - 2(0) \\ y_M = 2(\frac{1}{2}) + 0 - 2(-1) \\ z_M = 2(0) + 1 - 2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 3 \\ z_M = -1 \end{cases} \quad M(0,3,-1)$$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha(0) + \beta(0) \\ 3 = \alpha(1) + \beta(0) \\ -1 = \alpha(0) + \beta(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

Donc le point M appartient au plan (ACD)

2)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AD} \;\; = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \;\; = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

donc le point M appartient au plan (ACD)

Exercice 2

1)Soit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

Donc A(0,0,0),B(1,0,0) ,D(0,1,0) ,E(0,0,1), F(1,0,1) , C(1,1,0),G(1,1,1) ,

$I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $J\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires donc :

$\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{CG} + \beta\overrightarrow{IJ}$

$$\begin{cases}-1 = \alpha(0) + \beta(\frac{1}{2})\\-1 = \alpha(0) + \beta(\frac{1}{2})\\-1 = \alpha(1) + \beta(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 = \frac{1}{2}\beta\\-1 = \frac{1}{2}\beta\\1 = \alpha - \beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -2\\\alpha = -1\end{cases}$$

$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CG} - 2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires

2) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ} \;\; = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE} \;\; = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CE}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) - \overrightarrow{CE}$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CG} - 2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires

Exercice 3

1)Soit le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

$$A(0,0,0), B(1,0,0)\ , C(1,1,0),\ D(0,0,1),\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ ,1\right)$$

Donc

$$F(1,0,1), G(1,1,1), J\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons α et β tel que :

$\overrightarrow{GJ} = \alpha\overrightarrow{CH} + \beta\overrightarrow{CI}$

$$\begin{cases} 0 = \alpha(-1) + \beta(-\frac{1}{2}) \\ -1 = \alpha(0) + \beta(-1) \\ -\frac{1}{2} = \alpha(1) + \beta(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ -1 = -\beta \\ -\frac{1}{2} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CI}$$

Donc (GJ) est parallèle au plan (HIC)

2) $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}) + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CI}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CI}$

Donc (GJ) est parallèle au plan (HIC)

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

2.

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&0&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}0&-2\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-2\end{vmatrix}=(2+0-2)=0$$

donc $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

Exercice 5

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaire alors il existe α tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$

$\begin{cases}-2=2\alpha\\1=-\alpha\\3=6\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2=2\alpha\\1=-\alpha\\1=2\alpha\end{cases}\Rightarrow -2=1$ impossible donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaire

Conclusion: les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire alors il existe α tel que $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\x-2\\y+1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$: $\begin{cases}4=-2\alpha\\x-2=-\alpha\\y+1=3\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2=\alpha\\x=4\\y=-7\end{cases}$ si $\begin{cases}x=4\\y=-7\end{cases}$ alors les points A,B et D sont alignés.

3. A, B, C et E soient coplanaires $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=0$

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=\begin{vmatrix}-2&2&z-1\\1&-1&2\\3&6&4\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}-1&2\\6&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&z-1\\6&4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&z-4\\-1&2\end{vmatrix}=27+9z=0$$

Donc z=-3 ,si E (-3, 4, 3) alors A, B, C et E sont coplanaires